ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2011. nov. 5.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)
Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!
(Elég az implicit alak.)

$$y' = \frac{y^2+3}{x^2-9}, \qquad |x| \neq 3$$

Szeparálható de.

$y^2+3 \neq 0 \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{y^2+3}\,dy = \int \frac{1}{x^2-9}\,dx \qquad 2$$

$$\int \frac{1}{y^2+3}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dy = \frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (+C_1) \qquad 3$$

$$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x-3|-\ln|x+3|\right)(+C_2) \qquad 5$$

Ui: $\dfrac{1}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3}$

$= \quad 1 = A(x+3)+B(x-3)$

$x=-3: \quad 1=-6B \Rightarrow B=-\frac{1}{6}$

$x=3: \quad 1=6A \Rightarrow A=\frac{1}{6}$

A d.e. megoldása:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C \qquad 2$$

2. feladat (15 pont)
Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad x \neq 0$$

Adja meg az $y(1)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást!

Lineáris elsőrendű de.

(H): $y' - \frac{y}{x} = 0$ $\qquad y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú, ezért elég egy megoldás keresése.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy = \int\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln y = \ln x \Rightarrow y = x = \varphi(x)$$

$y_H = C\cdot x, \quad C\in\mathbb{R}$ $\qquad 5$

an2z1p111105/1.

(I): $y_{ip} = c(x) \cdot x$

$y_{ip}' = c' \cdot x + c$

Behelyettesítve I-be:

$$c'x + c - \frac{c \cdot x}{x} = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow c' = \frac{x}{1+x^2}$$

$$c = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{f'/f}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$y_{ip} = \frac{x}{2}\ln(1+x^2) \qquad 5$$

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = Cx + \frac{x}{2}\ln(1+x^2) \qquad 2$$

$y(1)=0$: $\quad 0 = C + \frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\ln 2$

$$y = \left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)\cdot x + \frac{x}{2}\ln(1+x^2) \qquad 3$$

3. feladat (12 pont)

$$y' = (3x-y)^2 + 3 \qquad\qquad y(x) = ?$$

($u = 3x - y$ új változó bevezetésével oldja meg!)

$u = 3x - y \Rightarrow y = 3x - u \Rightarrow y' = 3 - u'$ 2

$3 - u' = u^2 + 3 \Rightarrow u' = -u^2$ 2

$u \equiv 0$ megoldás, tehát $y = 3x$ megoldás 2

$u \neq 0$: $\int -u^{-2}\,du = \int dx$

$$\frac{1}{u} = x + C \Rightarrow u = \frac{1}{x+C} \qquad 5$$

Tehát: $3x - y = \frac{1}{x+C} \Rightarrow y = 3x - \frac{1}{x+C}$; $C \in \mathbb{R}$ 1

4. feladat (15 pont)

a) Írja fel az

$$y' = \sqrt[3]{y} - 2x$$

differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét!

Rajzolja fel a fenti differenciálegyenletnek azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában, valamint az $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ pontban!

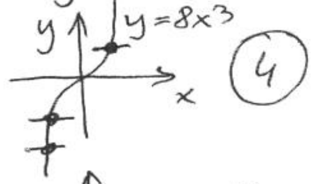
b) Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(1, 8)$ ponton.

Van-e ennek a megoldásnak lokális minimuma az $x_0 = 1$ helyen?

a.) Izoklinák: $\sqrt[3]{y} - 2x = K$ (2)

$\boxed{8}$ Lok. szé. létezésének szükséges feltétele: $y' = 0 \Rightarrow K = 0$

Tehát $\sqrt[3]{y} - 2x = 0 \Rightarrow y = 8x^3$ (4)



$y(0) = -1$: $y'(0) = \sqrt[3]{y} - 2x\Big|_{\substack{x=0\\ y=-3}} = -1$ (2)

b.) $y(1) = 8$

$\boxed{7}$ $y'(1) = \sqrt[3]{y} - 2x\Big|_{\substack{x=1\\ y=8}} = \sqrt[3]{8} - 2 = 0$ (1)

$\Rightarrow$ lehet lok. szé (1)

$y'' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot y' - 2$ (3)

$y''(1) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y' - 2\Big|_{\substack{x=1\\ y=8\\ y'=0}} = -2$ (1)

$y'(1) = 0$ és $y''(1) < 0 \Rightarrow$ lok. max. van itt, tehát nincs lok. min. (1)

5. feladat (8 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű lineáris homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai között szerepel

$$y = 5x + 3\cos 4x$$

$5x$ miatt: $\lambda_{1,2} = 0$ (2)

$3\cos 4x$ miatt: $\lambda_{3,4} = \pm 4j$ (2)

A karakterisztikus egyenlet:

$\lambda^2 (\lambda - 4j)(\lambda + 4j) = \lambda^2(\lambda^2 + 16) = \lambda^4 + 16\lambda^2 = 0$ (3)

A de. pl.:

$y^{IV} + 16y'' = 0$ (1)

an2z1p 111105/3.

6. feladat (13 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' + 2y'' - 3y' = 3 + 5e^{2x}$$

(H): $y = e^{\lambda x}$; $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 1$

$y_H = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x}$ (5)

$y_{ip} = Ax + Be^{2x}$ (külső rezonancia) (2)

$-3\cdot \mid y_{ip}' = A + 2Be^{2x}$

$2\cdot \mid y_{ip}'' = 4Be^{2x}$

$1\cdot \mid y_{ip}''' = 8Be^{2x}$

$-3A + e^{2x}(-6B + 8B + 8B) = 3 + 5e^{2x}$

$-3A = 3 \Rightarrow A = -1$ és $10B = 5 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$y_{ip} = -x + \frac{1}{2}e^{2x}$ (4)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x} - x + \frac{1}{2}e^{2x}$ (2)

7. feladat (10 pont)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k\, x^{2k-1}$$

Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciasugarát!

$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, x^{2k-1} = 2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots$

$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, t^{2k-1}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x 2k\, t^{2k-1}\,dt =$

$[0,x] \subset (-R, R)$: szabad tagonként integrálni

$= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \left.\frac{t^{2k}}{2k}\right|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}$ (4) $= \sum_{k=1}^{\infty} (x^2)^k = \frac{x^2}{1-x^2}$ (2)

Geom. sor: $q = x^2$; $|x^2| = |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$

Tehát $R = 1$ (2)

$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

(2)

an2 z1p 111105/4.

8. feladat (15 pont)

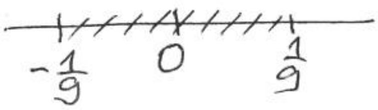
Adja meg az alábbi hatványsorok konvergencia tartományát!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{2n}}{n^3}\, x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{2n}}{n^3}\, (x+1)^n$

a.) $a_n = (-1)^n \frac{9^n}{n^3}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{9^n}{n^3}} = \frac{9}{(\sqrt[n]{n})^3} \to 9 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{9} \quad (2)$$

$\underset{\to 1}{\sqrt[n]{n}}$ (4) $x_0 = 0$



Végpontok:

(2) $x = -\frac{1}{9}$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{n^3} \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konv. $(\alpha = 3 > 1)$

(2) $x = \frac{1}{9}$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{n^3} \quad = \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ konv., mert absz. konv. (vagy: mert Leibniz so

(1) K.T.: $\left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right]$

b.) $z = x+1$ helyettesítéssel az a) feladatot
$\boxed{4}$ kapjuk. Így annak eredményét felhasználva:

$$-\frac{1}{9} \le x+1 \le \frac{1}{9} \qquad |-1$$

$$-\frac{10}{9} \le x \le -\frac{8}{9}$$

Tehát K.T.: $\left[-\frac{10}{9}, -\frac{8}{9}\right]$

an2 z1p 111105/5.

Pótfeladatok (csak a 40 % eléréséig javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

$$f(n+1) = 4\,f(n) - 3\,f(n-1)$$

a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
b) Adja meg az $f(0) = 2$, $f(1) = 6$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

a.) $f(n) = q^n$: $\quad q^{n+1} = 4q^n - 3q^{n-1} \quad \Big| : q^{n-1} \neq 0$

$\boxed{7}$

$q^2 = 4q - 3 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0 \Rightarrow q_1 = 3$, $q_2 = 1$ (4)

Tehát $f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2$ (3) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b.) $f(0) = C_1 + C_2 = 2$, $f(1) = 3C_1 + C_2 = 6$ $\Rightarrow C_1 = 2$, $C_2 = 0$

$\boxed{3}$

$f(n) = 2 \cdot 3^n$

10. feladat (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányados kritérium limeszes alakját!
b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^n\,(2n)!}$$

a.) $a_n > 0$ és $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, akkor

$c < 1$: $\sum^{\infty} a_n$ konv.

$c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum^{\infty} a_n$ div.

$(\, c = 1$: $? \,)$

b.) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{((n+1)!)^2 \quad 3^n (2n)!}{3^{n+1} (2(n+1))! \quad (n!)^2} =$

$= \dfrac{1}{3} \dfrac{\overbrace{(n+1)}\,(n+1)}{\underbrace{(2n+2)}_{=\frac{1}{2}}(2n+1)} = \dfrac{1}{6} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{6} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

$c = \dfrac{1}{12} < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

an2z1p111105/6.