**ANALÍZIS(2)**
Mérnök Informatikus szak

**I. ZÁRTHELYI** $\alpha$ **változat**

**2010. okt. 13.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (14 pont)**

Adja meg a

$$y' = \frac{y^3+2y}{3y^2+2}\,(x-2)\,e^{-2x}$$

differenciálegyenlet $y(3)=1$ valamint az $y(2)=0$ kezdeti értékhez tartozó megoldását! (Implicit alakban kérjük a megoldásokat.)

$y \equiv 0$ megoldás (1)

$y \neq 0$: $\quad \int \underbrace{\frac{3y^2+2}{y^3+2y}}_{f'/f \text{ alakú}} dy = \int \underbrace{(x-2)e^{-2x}}_{\text{parc. int.}} dx$ (3)

$$\int (x-2)e^{-2x}\,dx = -\frac{x-2}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx =$$

$u = x-2 \qquad v' = e^{-2x}$

$u' = 1 \qquad v = \frac{e^{-2x}}{-2}$

$$= -\frac{x-2}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{-2x}}{-2}$$

A de. megoldása:

$$\ln|y^3+2y| = -\frac{x-2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

(2) (4)

$y(3)=1$: $\quad \ln 3 = -\frac{1}{2}e^{-6} - \frac{1}{4}e^{-6} + C \Rightarrow C = \ln 3 + \frac{3}{4}e^{-6}$

$$\underbrace{\ln|y^3+2y|}_{=\ln(y^3+2y)} = -\frac{x-2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \ln 3 + \frac{3}{4}e^{-6}$$ (2)

$y(2)=0$: $\quad y \equiv 0$ (2)

**2. feladat (14 pont)**

Határozza meg az alábbi kezdetiérték probléma megoldását!

$$y' - \frac{2}{x}\,y = \frac{1}{x^3}, \qquad x \neq 0$$

Adja meg az $y(1)=0$ kezdeti érték probléma megoldását!

(H): $\quad y' - \frac{2}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{x}y$

Mivel $y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú, elég 1 megoldást keresni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

an2z101013/1.

$\Rightarrow \ln y = 2 \ln x \Rightarrow y = x^2 = \varphi(x)$

Tehát $y_H = C x^2$ (5)

(I): $y_{ip} = c(x) \cdot x^2$

$y'_{ip} = c' \cdot x^2 + c \cdot 2x$

Behelyettesítve I-be:

$(c' x^2 + c \cdot 2x) - \frac{2}{x} c x^2 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow c' = \frac{1}{x^5} \Rightarrow c(x) = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4}$

$\Rightarrow y_{ip} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x^2}$ (5)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C x^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2}$ (2) $\quad C \in \mathbb{R}$

$y(1) = 0: \quad 0 = C - \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2}$ (2)

**3. feladat (12 pont)**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! $u = y - 3x$ helyettesítéssel dolgozzon!

$$y' = \frac{2y - 6x + 7}{y - 3x + 3}, \qquad y \neq 3x - 3$$

(Implicit alakban kérjük a megoldást.)

$u = y - 3x \Rightarrow y = u + 3x \Rightarrow y' = u' + 3$

Behelyettesítve:

$u' + 3 = \frac{2u+7}{u+3}$ (3) $\Rightarrow u' = \frac{2u+7}{u+3} - 3 = -\frac{u+2}{u+3}$

$\frac{du}{dx} = -\frac{u+2}{u+3}$

$u \equiv -2$ megoldás, tehát $y - 3x = -2 \Rightarrow \underline{y = 3x - 2 \text{ megoldás}}$ (2)

$u \neq -2$: $\int \underbrace{\frac{u+3}{u+2}}_{= 1 + \frac{1}{u+2}} du = -\int dx$

$u + \ln|u+2| = -x + C$ (6)

Visszahelyettesítve:

$$\underline{y - 3x + \ln|y - 3x + 2| = -x + C} \quad C \in \mathbb{R} \quad (1)$$

an2z1101013/2.

**4. feladat (10 pont)**

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai között szerepel:

$$y = 5x - 7\cos 4x$$

Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását!

$y = 5x - 7\cos 4x$ megoldás.

$\Rightarrow$ Van $x$ alakú megoldás $\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$ (2)

és van $\cos 4x$ alakú megoldás (ekkor persze $\sin 4x$ is mo.)

$\Rightarrow \lambda_{3,4} = 0 \pm j4$ (2)

A karakterisztikus egyenlet:

$(\lambda - 0)^2 (\lambda - j4)(\lambda + j4) = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 + 16) = \lambda^4 + 16\lambda^2 = 0$ (3)

A differenciálegyenlet: $y^{IV} + 16y'' = 0$ (1)

A 4 dimenziós megoldástér egy bázisa:

$1,\ x,\ \cos 4x,\ \sin 4x$

Így az általános megoldás:

$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x$ (2) $C_i \in \mathbb{R}$

**5. feladat (16 pont)**

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' + y'' - 2y' = \cos x$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását?

$$y''' + y'' - 2y' = \operatorname{ch} 3x + 4x^2$$

(Nem kell megkeresnie!)

a.) (H): $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$

$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^x$ (5)

$\cdot\ y_{ip} = A\cos x + B\sin x$

$-2\cdot \quad y_{ip}' = -A\sin x + B\cos x$

$1\cdot \quad y_{ip}'' = -A\cos x - B\sin x$

$1\cdot \quad y_{ip}''' = A\sin x - B\cos x$

Behelyettesítve:

$\sin x(2A - B + A) + \cos x(-2B - A - B) = \cos x$

$\left.\begin{array}{l} 3A - B = 0 \\ -A - 3B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{10};\ B = -\frac{3}{10}$

$y_{ip} = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$ (5)

an 2211101013/3.

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$ (2)

b.) $y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2} e^{3x}\right) + \left(\frac{1}{2} e^{-3x}\right) + \left(4x^2\right)$

$y_{ip} = A e^{3x} + B e^{-3x} + (Cx^2 + Dx + E)\,x$ (4)

külső rez.

**6. feladat (14 pont)**

$$y' = 2x^2 + x + y^2$$

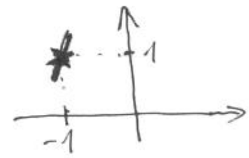
a) Rajzolja fel a $P_0(-1, 1)$ ponthoz tartozó vonalelemet!

b) Van-e lokális maximuma vagy minimuma az origón áthaladó megoldásgörbének az origóban? (Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet, de feltételezheti, hogy van ilyen megoldás!)

c) Van-e inflexiós pontja a $P_0(-1, 1)$ ponton áthaladó megoldásnak a $P_0$ pontban?

a.) $P_0(-1,1)$ : $y(-1) = 1$

$\boxed{4}$ $y'(-1) = 2x^2 + x + y^2 \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=1}} = 2$



b.) $y(0) = 0$

$\boxed{7}$ $y'(0) = 2x^2 + x + y^2 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$ (1) $\Rightarrow$ lehet lok. szé.

$y'' = 4x + 1 + 2yy'$ (3)

$y''(0) = 4x + 1 + 2y \cdot y' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ y'=0}} = 1$ (1)

$y'(0) = 0,\; y''(0) > 0 \Rightarrow$ lok. minimum van az origóban (2)

c.) $y''(-1) = 4x + 1 + 2yy' \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=1 \\ y'=2}} = 1$

$\boxed{3}$

$y''(-1) \neq 0 \Rightarrow$ nincs inflexiós pont $P_0$-ban, mert nem teljesül a szükséges feltétel.

an2z1101013 / 4.

**7. feladat (10 pont)**

$$f(n) = \frac{3}{2} f(n-1) + f(n-2)$$

a) Írja fel a rekurzió általános megoldását!

b) Írja fel a rekurzió $f(0) = 1$, $f(1) = 7$ megoldását!

a.) $f(n) = q^n$, $q \neq 0$ alakban keressük.

$\boxed{7}$

$q^n = \frac{3}{2} q^{n-1} + q^{n-2} \Rightarrow q^2 = \frac{3}{2} q + 1$

$\Rightarrow q^2 - \frac{3}{2} q - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = 2,\ q_2 = -\frac{1}{2}$

$f(n) = c_1 2^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) $\boxed{3}$

$\left.\begin{array}{ll} f(0)=1: & c_1 + c_2 = 1 \\ f(1)=7 & 2c_1 - \frac{1}{2} c_2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 3,\ c_2 = -2$

$f(n) = 3 \cdot 2^n - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

**8. feladat (10 pont)**

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2+2n} \cdot \frac{3^{n+2}}{10^n}$$

a.) $a_n > 0$

$\boxed{2}$

Ha létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, akkor

$c < 1$ esetén: $\sum^{\infty} a_n$ konv.

$c > 1$ vagy $c = \infty$ esetén: $\sum^{\infty} a_n$ div.

($c = 1$ : ?)

b.) $\boxed{8}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n} \frac{9 \cdot 3^n}{10^n}} =$

$= \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^2 \frac{\sqrt[n]{9} \cdot 3}{10} =$

$= \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^2 \frac{\sqrt[n]{9} \cdot 3}{10} \to \frac{e^3}{e^2} \cdot 1^2 \frac{1 \cdot 3}{10} = \frac{3e}{10}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3e}{10} < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

*Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):*

**9. feladat (12 pont)**

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - 4x^3 y = 2x^3$$

(Az explicit alakot adja meg!)

Szeparábilis is és lin. elsőrendű de. is. Szeparábilisként célszerűbb megoldani, mert így rövidebb.

$y' = x^3(4y+2)$  $y \equiv -\frac{1}{2}$ megoldás

$y \neq -\frac{1}{2}$  $\int \frac{1}{4y+2}\, dy = \int x^3\, dx$

$$\frac{1}{4} \ln|4y+2| = \frac{x^4}{4} + c_1 \Rightarrow \ln|4y+2| = x^4 + c_2$$

$$\Rightarrow |4y+2| = e^{c_2} e^{x^4} \Rightarrow 4y+2 = \pm e^{c_2} e^{x^4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} e^{c_2} e^{x^4}$$

és $y \equiv -\frac{1}{2}$ is megoldás

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2} + c\, e^{x^4};\ c \in \mathbb{R}}$$

**10. feladat (8 pont)**

Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ 2^{3n+1}}{(2n)!}$$

A hányadoskritériummal oldjuk meg:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\ 2^{3n+4}\ (2n)!}{(2n+2)!\ n!\ 2^{3n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{2^{3n+4}}{2^{3n+1}} = (n+1)\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot 2^3 =$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)} \frac{1}{2n+1} \cdot 8 = \frac{4}{2n+1} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv.}$$