Info anal 1. VD1 mintamegoldás –1– 2012. dec. 20.

1 $\boxed{15}$

a, $\boxed{8}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}\cdot\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}^{\to e^{1/3}}}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}_{\to e^{1/2}}} = \underline{\underline{0}}$$

$\left|\frac{3}{4}\right|<1$ (5)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1/4}{n}\right)^n}^{\to e^{1/4}}}{\underbrace{\left(1+\frac{2/4}{n}\right)^n}_{\to e^{1/2}}} = e^{\frac14-\frac12} = \underline{\underline{e^{-\frac14}}}$$

(3)

b, $\boxed{7}$

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}}_{c_n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot c_n$$

Láttuk, hogy $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac13-\frac12}$, tehát $\exists K\in\mathbb{R}: |c_n|<K$. (4)

Így $\underset{\geq 0}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \le \sum_n \left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot K<\infty$ (mert $\left|\frac34\right|<1$), tehát a majoráns kritérium értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. (3)

— o —

2 $\boxed{15}$

a, $\boxed{3}$ $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, ha

i, x_0 a D_f torlódási pontja, és

ii, $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon)>0$, hogy

$|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $x\in D_f\cap \dot{K}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$

/ $\dot{K}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) = (x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ / (3)

b, Átviteli elv:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall\, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0,\ x_n\in D_f,\ x_n\neq x_0 \text{ esetén } \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

(4)

Bizonyítás: (egyik irány elég)

(⇒) Legyen x_n adott, $x_n \to x_0$, $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$.

[8] Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $\exists N(\delta)$, hogy ha $n > N(\delta)$, akkor $|x_n - x_0| < \delta$.

Legyen $\delta(\varepsilon)$ a függvény határértékének definíciójában szereplő küszöb, azaz ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \in D_f$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Így adott $\varepsilon > 0$ esetén ha $n > N(\delta(\varepsilon))$, akkor

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \text{ tehát } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

(⇐) Indirekt. T.f.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq A$, x torl. pontja D_f-nek.

[8] Tehát $\exists \varepsilon > 0$, melyre $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists x_n \in D_f$, hogy $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$, és $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Ekkor $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, de $f(x_n) \not\to A$, ez ellentmondás.

---

3) [17]

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\ln(x-2), & \text{ha } x > 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2-x}\right), & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

[12] a, $x \neq 2$ esetén a függvény folytonos, mert folytonos függvények kompozíciója, szorzata. (1)

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} \underbrace{(x-2)}_{0+0} \cdot \underbrace{\ln(x-2)}_{-\infty} = \lim_{x\to 2+0} \frac{\ln(x-2)}{\underbrace{\left(\frac{1}{x-2}\right)}_{+\infty}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2+0} \frac{\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2+0} (-(x-2)) = 0 \quad (5)$$

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{2-x}}_{+\infty}\Big) = \frac{\pi}{2} \quad (4); \quad f(2+0) \neq f(2-0)$$

f-nek a 2-ben elsőfajú, (2) véges ugrás típusú szakadása van.

[5] b, 2-ben f nem diff.-ható, mert itt nem folytonos. (1)

Ha $x>2$, $f'(x)=\left((x-2)\ln(x-2)\right)'=\ln(x-2)+1$ (2)

Ha $x<2$, $f'(x)=\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2-x}\right)^2}\cdot\frac{1}{(2-x)^2}$ (2)

---

(4) [13] [3] a, $\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$, vagy $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ (3)

[6] b, $(\operatorname{ar\,ch} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{ar\,ch} x)}=\frac{1}{\operatorname{sh}(\underbrace{\operatorname{ar\,ch} x})}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x>1$

y ; $\operatorname{ch} y=x>1$, $y\geq 0$ (6)

$\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1$

$\Rightarrow \operatorname{sh} y=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}=\sqrt{x^2-1}$

[4] c, $\left(\operatorname{ar\,ch}\left(e^{3x^2+1}\right)\right)'=\frac{\left(e^{3x^2+1}\right)'}{\sqrt{e^{2(3x^2+1)}-1}}=\frac{6x\cdot e^{3x^2+1}}{\sqrt{e^{6x^2+2}-1}}$ (4)

---

(5)* $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ (2)

[8] $\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$ (2) $\Rightarrow$ $3x+1=A(x+2)+B(x-3)$

$x=-2$ esetén: $-5=-5B \Rightarrow B=1$
$x=3$ esetén: $10=5A \Rightarrow A=2$ (2)

$\int\frac{3x+1}{x^2-x-6}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+2}\right)dx=2\ln|x-3|+\ln|x+2|+C$ (2)

6* $\boxed{12}$

a, $\boxed{6}$

$$\int \underset{u}{(2x-1)}\, \underset{v'}{e^{-3x}}\, dx = -\frac{2x-1}{3}e^{-3x} - \int 2\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)e^{-3x}\,dx = \quad 3$$

$$u' = 2 \quad v = -\frac{e^{-3x}}{3}$$

$$= -\frac{2x-1}{3}e^{-3x} + \frac{2}{3}\,\frac{e^{-3x}}{-3} + C = \quad 3$$

$$= \frac{-1}{3}e^{-3x}\left(2x - 1 + \frac{2}{3}\right) + C = \frac{-e^{-3x}}{3}\cdot\left(2x - \frac{1}{3}\right) + C$$

b, $\boxed{6}$

$$\int \underset{u'}{(2x+1)}\, \underset{v}{\operatorname{arctg} x}\, dx = (x^2+x)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+x}{1+x^2}\,dx = \quad 2$$

$$u = x^2 + x \quad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= (x^2+x)\operatorname{arctg} x - \int\left(1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \quad 2$$

$\frac{f'}{f}$ alak

$$= (x^2+x)\operatorname{arctg} x - x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C \quad 2$$

7* a, $\boxed{6}$

$$\operatorname{sh} t = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\operatorname{sh} t - 1}{3}\ ;\ dx = \frac{2}{3}\operatorname{ch} t\, dt \quad 1$$

$$I = \int \frac{3x}{\sqrt{4 + (3x+1)^2}}\,dx \Rightarrow \int \frac{2\operatorname{sh} t - 1}{\cancel{2}\underbrace{\cancel{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\cancel{\operatorname{ch} t}\,dt = \int \frac{2\operatorname{sh} t - 1}{3}\,dt = \quad 2$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{ch} t - \frac{1}{3}t + C \quad 2 \quad \Rightarrow I = \frac{2}{3}\overset{\operatorname{ch} t}{\sqrt{1 + \left(\frac{3x+1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{3x+1}{2}\right) + C \quad 1$$

b, [6]' $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x+3}\,dx = \int_{e^0}^{e^2} \frac{t^{\cancel{2}}}{t+3}\cdot\frac{dt}{\cancel{t}} = \int_{e^0}^{e^2}\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt =$ [-5-] (3)

$t = e^x$

$dt = t\,dx$

$= \Big[t - 3\ln|t+3|\Big]_1^{e^2} = \underline{\underline{e^2 - 1 - 3\ln(e^2+3) + 3\ln 4}}$ (3)

8* a, Legyen $f \in R[a,b]$, $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

[8] [3]' Ekkor F folytonos $[a,b]$-n, és ha f folytonos $x_0 \in [a,b]$-ben, akkor $\exists\, F'(x_0) = f(x_0)$ (3)

b, [5] Legyen $F(x) = \int_0^x \sqrt{\sin^4(t)+2}\,dt$, $F'(x) = \sqrt{\sin^4(x)+2}$ ← folyt.

$G(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{\sin^4(t)+2}\,dt = F(x^2)$ (2), így

$G'(x) = (F(x^2))' = F'(x^2)\cdot 2x = \underline{\underline{\sqrt{\sin^4(x^2)+2}\cdot 2x}}$ (3)

---

9 a, [3] $f(x) = e^{-3x^2}$; $f'(x) = -6x\,e^{-3x^2}$ (2) $f \nearrow$, ha $x \le 0$ (1)

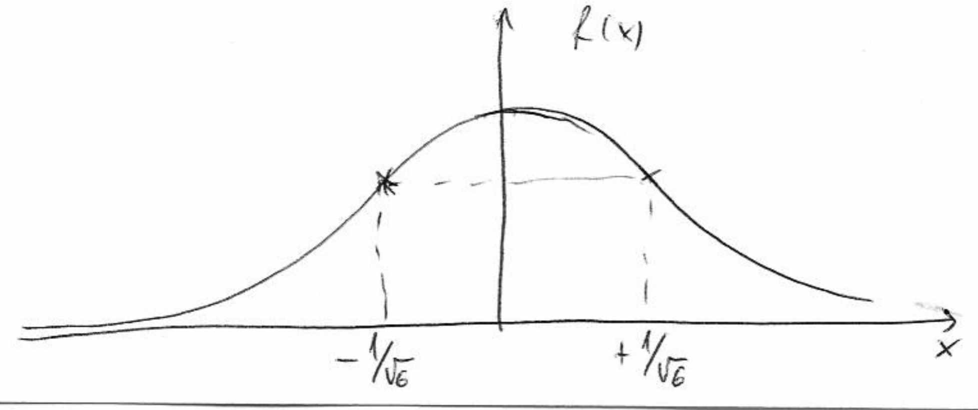
$f \searrow$, ha $x \ge 0$

b, $f''(x) = (36x^2-6)e^{-3x^2}$ (2) $= 6(6x^2-1)e^{-3x^2} = 36\left(x+\frac{1}{\sqrt6}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt6}\right)e^{-3x^2}$

[4] $f''(x) \ge 0 \iff f$ konvex $\iff |x| \ge \frac{1}{\sqrt6}$

$f''(x) \le 0 \iff f$ konkáv $\iff |x| \le \frac{1}{\sqrt6}$ (2)

c, [3]



10 a,

[4] $\dfrac{n}{n^2+2} > \dfrac{n}{n^2+2n^2} = \dfrac{1}{3n}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n} = \infty$,

tehát a minoráns krit. értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+2} = \infty$.

b,

[6] $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\dfrac{n}{n^2+2}}_{a_n}$ Leibniz típusú, mert

- alternáló ✓
- $|a_n| = \dfrac{n}{n^2+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ✓
- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, hiszen

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+2} \overset{?}{\leq} \frac{n}{n^2+2}$$

$$(n+1)(n^2+2) \overset{?}{\leq} n(n^2+2n+3)$$

$$\cancel{n^3} + n^2 + 2n + 2 \overset{?}{\leq} \cancel{n^3} + 2n^2 + 3n$$

$$0 \overset{?}{\leq} n^2 + n - 2$$ teljesül, ha $n \geq 1$

És minden Leibniz sor konvergens.