Villamosmérnök A4

5. gyakorlat (2012. 10. 08.-09.)

Folytonos valószínűségi változók. Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény fogalma. Egyenletes eloszlás.

1. Van egy mérlegünk, ami két tizedesjegy pontossággal írja ki kilogrammban, kerekítve, a lemérendő tárgy tömegét. Feltesszük, hogy a készülékünk pontosan mér, és utána kerekít. Ha a mérleg által kiírt értéket fogadjuk el, mi a valószínűségsége, hogy a tényleges értéktől való tévedésünk

   (a) legfeljebb 3 gramm?

   (b) legalább 1 gramm?

   (c) több, mint 1 gramm, de kevesebb, mint 3 gramm?

   Megoldás: A hiba egyenletes eloszlású a $[0, 0,005]$ intervallumon, ennek megfelelően az eltérés eloszlásfüggvénye $F(x) = \frac{x}{0,005} = 200x, 0 < x < 0,005$. A válaszok pedig

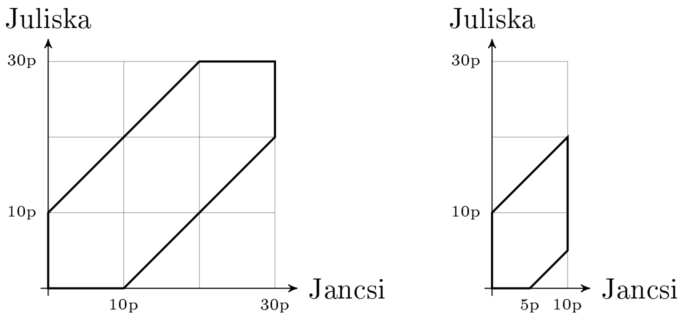
   (a) $F(0,003) = 0,6$

   (b) $1 - F(0,001) = 0,8$

   (c) $F(0,003) - F(0,001) = 0,4$

2. Jancsi és Juliska randevút beszéltek meg este 6 órára. Mindketten elég pontatlanok, de legfeljebb 30 percet késnek, a találka helyszínére való érkezési idejük tehát véletlen, egyenletes eloszlású a 6 óra és fél 7 közti időintervallumban. Amikor valamelyikük megérkezik, ha nem találja ott a másikat, akkor 10 percet vár, és ha addigra sem érkezett meg a másik, akkor csalódottan hazamegy. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?

   Megoldás: A két ember lehetséges érkezési időpontjait ábrázoljuk két dimenzióban (lásd a bal oldali ábrát). A szöveg szerint a lehetséges időpont-párok a négyzeten belül helyezkednek el. A négyzeten belül beazonosítható azon pontok halmaza, aminek megfelelő érkezési időpont-párok esetén a találkozó létrejön, nevezetesen akkor, hogyha a két koordináta eltérése maximum 10 perc (vastag vonallal körülhatárolt tartomány). Mivel a teljes négyzet területen egyenletesen érkezik meg a pár, ezért a jó esetek és az összes eset területének aránya adja meg a valószínűséget. Megoldás: $\frac{5}{9}$.



1. ábra. Jancsi és Juliska feladatok ábrái

3. Jancsi és Juliska randevút beszéltek meg este 6 órára. Mindketten elég pontatlanok, de Jancsi legfeljebb 10 percet, Juliska legfeljebb 30 percet késik. Jancsi, amennyiben érkezésekor nem találja ott Juliskát, hajlandó még 10 percet várni rá, a lány azonban csak 5 percig vár, ha a fiút nem találja ott. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?

   Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan beazonosítható a "jó esetek" és "összes eset" aránya, lásd a fenti ábra jobb oldali részét. Megoldás: $\frac{11}{24}$.

4. Egy R sugarú körre rádobunk egy $r < R$ sugarú kört úgy, hogy középpontja a nagy körön egyenletes eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy a kis kör teljes egészében a nagy körre esik?

   Megoldás: A nagy körön egyenletes eloszlású pontot úgy generálunk, hogy választunk egyenletesen a $[0°, 360°]$ intervallumból egy φ szöget, majd ettől függetlenül a $[0, R]$ intervallumból egyenletesen egy s számot, és a véletlen pontunk az (s, φ) polárkoordináták által meghatározott pont lesz. Ha az s pont köré most egy r sugarú kis kört rajzolunk, az pontosan akkor nem fog kilógni a nagy körből, hogyha $s < R - r$, és mindegy, hogy φ mekkorának adódott. Azaz a keresett valószínűség $\frac{R-r}{R} = 1 - \frac{r}{R}$.

5. Mi az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

   Megoldás: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

6. Egy kalapácsvető bekötött szemmel hajítja el a kalapácsot, pár forgás után, véletlenszerűen. A sportolót 0° és 300° szög között védőháló veszi körül, amin azonban tátong egy 2 foknyi rés 100° és 102° között.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy a háló megfogja a kalapácsot?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy a kalapács a 2 fokos résen keresztül kirepül a védőhálón kívülre?

(c) Feltéve, hogy a kalapács kiröpült a védőhálón kívülre, mi a valószínűsége, hogy a 2 fokos résen repült ki?

Megoldás:

(a) $\frac{298}{360} = 0,8278$

(b) $\frac{2}{360} = 0,0056$

(c) $\frac{2}{62} = 0,0323$

7. A reggeli buszom egyenletes eloszlású időpontban érkezik 7:30 és 7:40 között.

(a) Hányra menjek oda a megállóba, ha legalább 80%-os esélyt szeretnék arra, hogy elérjem?

(b) Már késésben vagyok, mikor elindulok otthonról, és látom, hogy csak 7:37-re fogok kiérni a megállóba. Gyorsan kötök egy fogadást a lakótársammal, 100 Ft-ot teszek arra, hogy lekésem a buszt, de azért mindketten tudjuk, hogy rohanni fogok és odaérek 7:37-re. Mennyit tegyen ellenemben a lakótársam, hogy igazságos legyen a fogadás?

Megoldás:

(a) Legkésőbb 7:32-re.

(b) 70%, hogy megnyerem a fogadást, tehát a várható nyereségem $0,7 \cdot 100\text{Ft} - 0,3x$, vagyis ahhoz, hogy igazságos legyen a játék, a lakótársamnak $x = \frac{0,7}{0,3}100\text{Ft} = 233$ Ft-ot kell tennie ellenem.

8. Generálunk két véletlen egyenletes eloszlású számot egymástól függetlenül a $[0,1]$ intervallumon.

(a) Mi a kettő maximumának sűrűségfüggvénye?

(b) Mi a valószínűségsége, hogy a nagyobbik szám nagyobb, mint 0,75?

Megoldás:

(a) $P(\max(X,Y) < x) = P(X < x \text{ és } Y < x) = P(X < x)P(Y < x) = x^2$, ahol $0 < x < 1$. A metszet valószínűsége a két változó függetlensége miatt írható fel a valószínűségek szorzataként. Ebből a sűrűségfüggvény deriválással adódik, $f(x) = 2x$, ahol $0 < x < 1$.

(b) $P(\max(X,Y) > 0,75) = \int_{0,75}^{1} 2x\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_{0,75}^{1} = 1 - 0,75^2 = 0,4375$.

9. Vegyünk egy félkört, aminek a kerületére egyenletes eloszlással dobjunk le egy pontot, majd ezt vetítsük le merőlegesen az átmérőre. Az átmérőn ilyen módon kapott pont milyen eloszlású?

Megoldás: A félkörön egyenletes eloszlású pontot a $(0,\pi)$ intervallumon egyenletesen választott φ szög határozza meg. Ennek a szögnek az eloszlásfüggvénye $P(\varphi < y) = \frac{y}{\pi}$. Az átmérőre vetített pont első koordinátája pedig $\cos\varphi$ lesz. Ennek megfelelően az átmérőre vetített X pont eloszlása $(-1 < x < 1)$:

$$F(x) = P(X < x) = P(\cos\varphi < x) = P(\varphi > \arccos x) = 1 - P(\varphi < \arccos x) = 1 - \frac{\arccos x}{\pi},$$

a sűrűségfüggvény ennek a deriváltja,

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

10. Legyen X egyenletes eloszlású $[0,1]$-en.

(a) Mi $Y = \sqrt{X}$ sűrűségfüggvénye?

(b) Mi $Z = X^2$ sűrűségfüggvénye?

Megoldás:

(a) $F(y) = P(Y < y) = P(\sqrt(X) < y) = P(X < y^2) = y^2$ $(0 < y < 1)$, tehát a sűrűségfüggvény $f(y) = 2y,\ 0 < y < 1$.

(b) $F(z) = P(Z < z) = P(X^2 < z) = P(X < \sqrt(z)) = \sqrt{z}$ $(0 < z < 1)$, tehát a sűrűségfüggvény $f(z) = \frac{1}{2\sqrt(z)}$, $(0 < z < 1)$.

11. Lehetnek-e az alábbi függvények abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók eloszlásfüggvényei? Ha igen, számoljuk ki a sűrűségfüggvényt és a mediánt, valamint a $P(0 < X < 1)$ értéket, ahol X olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F(x)$.

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0 \\ \cos x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0 \\ \sin x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

Megoldás:

(a) Nem, mert monoton csökken.

(b) Igen, mert monoton nő, deriválható, az alsó határon 0, a felsőn pedig 1. Sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyébként} . \end{cases}$$

Mediánja az $F(x) = 1/2$ egyenlet megoldása, azaz $x = \arcsin 1/2 = 0,5236$. A kérdezett valószínűség $P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \sin 1 - \sin 0 = 0,8415$.

(c) Igen, mert monoton nő, deriválható, az alsó határon 0, a felsőn pedig 1. Sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} . \end{cases}$$

Mediánja az $F(x) = 1/2$ egyenlet megoldása, azaz $x = 1/\sqrt{2} = 0,7071$. A kérdezett valószínűség $P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = 1$, ami abból is kiolvasható, hogy a (0,1) intervallumon van értelmezve, tehát biztosan 1-nél kisebb.

12. Lehetnek-e az alábbi függvények abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók sűrűségfüggvényei? Ha igen, számoljuk ki az eloszlásfüggvényt és a mediánt.

(a) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } 1 < x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

Megoldás:

(a) Nem, mert felvesz negatív értékeket is.

(b) Igen, mert csak nemnegatív értékeket vesz fel és az integrálja $\int_1^\infty x^{-2}\mathrm{d} = 1$. Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & \text{ha } x \geq 1 \\ 0, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

Mediánja az $F(x) = 1/2$ egyenlet megoldása, azaz $\frac{1}{x^2} = 1/2$, $x = \sqrt{(2)}$.

(c) Igen, mert csak nemnegatív értékeket vesz fel és az integrálja $\int_1^\infty \sin x \mathrm{d}x = 1$. Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \\ 1 - \cos x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Mediánja az $F(x) = 1/2$ egyenlet megoldása, azaz $1 - \cos x = 1/2$, $x = \arccos 1/2 = 0,6667$.

13. Határozzuk meg úgy az A paraméter értékét, hogy az alábbi $f(x)$ függvény sűrűségfüggvény lehessen, és számoljuk ki a $P(X < 2)$ valószínűséget.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^3}, & \text{ha } 1 \leq x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás: Az kell, hogy a függvény integrálja a teljes intervallumon 1 legyen.

$$\int_1^\infty \frac{A}{x^3} = \left[-\frac{1}{4} A x^{-4} \right]_1^\infty = \frac{1}{4} A = 1,$$

azaz $A = 4$ választás kell.

14. Az (1, 3) intervallumon egyenletes eloszlásból sorsolunk tízezerszer, egymástól függetlenül. Azt tapasztaljuk, hogy ezek közül 9985 érték kisebb lett, mint y, a többi pedig nagyobb. Mi a legjobb tippünk ez alapján y-ra?

Megoldás: $1 + \frac{9985}{10000} 2 = 2,997$.

15. A zsebemben van egy ropi. Egyenletesen véletlenül választott pontban kettétöröm, majd kiválasztom az egyik darab ropit, 1/2-1/2 valószínűséggel a két darab közül. Mi a valószínűsége annak, hogy annak a ropidarabnak a hossza, amit most a kezemben tartok, kisebb mint 0,25?

Megoldás: Józan ésszel: 1/2 annak valószínűsége, hogy van olyan darab ropi a kettő között, ami kisebb mint $0,25$. Ha ez a helyzet, akkor megint 1/2 annak az esélye, hogy azt a darabot választom ki, amelyik kisebb, mint $0,25$. Tehát a kérdezett valószínűség $(1/2)^2 = 0,25$. Képlettel: Legyen az osztópont, ahol eltöröm a ropit, X, és legyen a kiválasztott darab hossza Y. Tudjuk, hogy X eloszlása egyenletes a (0,1) intervallumon.

$$P(Y < 0,25) = \int_0^1 P(Y < 0,25 | X = x) f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 P(Y < 0,25 | X = x) \cdot 1 \, \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{0,25} P(Y < 0,25 | X = x) \mathrm{d}x + \int_{0,25}^{0,75} P(Y < 0,25 | X = x) \mathrm{d}x + \int_{0,75}^{1} P(Y < 0,25 | X = x) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{0,25} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x + \int_{0,25}^{0,75} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{0,75}^{1} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x = 0,25.$$

16. A zsebemben van egy ropi. Egyenletesen véletlenül választott pontban kettétöröm, majd kiválasztom az egyik darab ropit, a darabok hosszának megfelelő arányú valószínűségekkel. Mi a valószínűsége annak, hogy annak a ropidarabnak a hossza, amit most a kezemben tartok, kisebb mint 0,25?

Megoldás: Legyen az osztópont, ahol eltöröm a ropit, X, és legyen a kiválasztott darab hossza Y. Tudjuk, hogy X eloszlása egyenletes a (0,1) intervallumon.

$$P(Y < 0,25) = \int_0^1 P(Y < 0,25 | X = x) f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 P(Y < 0,25 | X = x) \cdot 1 \, \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{0,25} P(Y < 0,25 | X = x) \, \mathrm{d}x + \int_{0,25}^{0,75} P(Y < 0,25 | X = x) \, \mathrm{d}x + \int_{0,75}^{1} P(Y < 0,25 | X = x) \, \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{0,25} x \, \mathrm{d}x + \int_{0,25}^{0,75} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{0,75}^{1} (1 - x) \, \mathrm{d}x = 0,25^2 = 0,0625.$$