

1. Feladat (5+6=11 pont) Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \quad a_n = \left(\frac{3n+2}{3(n-1)} \right)^n; \quad (b) \quad b_n = \left(\frac{3n+2}{3(n-1)} \right)^{n^2}.$$

2. Feladat (5+5+5=15 pont)

Számolja ki a következő integrálokat!

$$(a) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx =? \quad (b) \quad \int \arctg(x) dx =? \quad (c) \quad \int_{x=0}^4 e^{|2x-6|} dx =?$$

3. Feladat (5+5+3=13 pont)

Az $y(x)$ valós függvény eleget tesz az

$$\ln y + y = x + 1$$

összefüggésnek ($x \in \mathbb{R}, y \in (0, \infty)$).

- (a) Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pontosan egy $y \in (0, \infty)$ érték elégíti ki az adott egyenletet! (Tanult tételekre hivatkozhat.)
- (b) Próbálgatással határozza meg $y(0)$ értékét, és implicit deriválással $y'(0)$ és $y''(0)$ értékét! (Feltesszük, hogy $y(x)$ kétszer differenciálható.)
- (c) Írja fel az $y(x)$ függvény origó körüli másodrendű Taylor-polinomját!

4. Feladat (11 pont)

$$y'(x) = 4 \frac{y(x)}{x} + x^5 \frac{1}{x^2+3}$$

Határoza meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását!

5. Feladat (10 pont)

Írja föl azt a legalacsonyabb rendű, homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az

$$-\cos(2x)e^x \quad \text{és a} \quad 7e^x$$

függvény! Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

6. Feladat (8 pont)

Mondja ki és bizonyítsa be a numerikus sorok konvergenciájára tanult hányados-kritérium *limesz nélküli alakját!*

7. Feladat * (8 pont)

$$f(x, y) = xy + y^2 - y + x^2 - 6$$

Van-e a függvénynek lokális szélsőértéke?

8. Feladat * (6+9=15 pont)

- (a) Egy ábrán ismertesse a síkbeli polárkoordinátákat! Vezesse le a síkbeli polárkoordinátákra való áttérés Jakobi-determinánsát!
- (b) Számolja ki a $z = x^2 + y^2$ és a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

9. Feladat * (9 pont)

Az f függvény 2π -periódusú, és $x \in (-\pi, 0)$ esetén $f(x) = 1$, $x \in [0, \pi]$ esetén $f(x) = 0$. Határozza meg f Fourier-sorát!

A *-al jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!