

1. Feladat 3+6+4=13 pont)

Definiálja a Cauchy-sorozat fogalmát! Igazolja, hogy minden konvergens sorozat Cauchy! Igaz-e az állítás megfordítása \mathbb{Q} -ban, illetve \mathbb{R} -ben?

2. Feladat (3+3+9=15 pont)

- (a) Mikor mondjuk, hogy az f valós függvény az I intervallumon konkáv? (Adja meg a definíciót!)
- (b) Kétszer deriválható függvények esetén milyen kapcsolat van a konkavítás és a második derivált között? (Mondja ki a tanult tételt!)
- (c) Vizsgálja meg konvexitás szempontjából az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+5x^2}}$ függvényt!

3. Feladat (10 pont)

Az $f(x) = \cos(x)$ függvény grafikonjának a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumba eső részét megforgatjuk az x -tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?

4. Feladat (10 pont)

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 3e^{-2x}$$

Határozza meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását!

5. Feladat (4+11=15 pont)

- (a) Mikor integrálható tagonként a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvényt? Mondja ki a tanult tételt!
- (b) Határozza meg az $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$ hatványsor konvergenciatartományát és összegét!

6. Feladat (12 pont)

$$I = \int_{y=1}^e \int_{x=1/e}^{1/y} \cos(x - \ln x) dx dy$$

Az integrálok sorrendjének felcserélésével határozza meg a fenti I integrál értékét! Készítsen ábrát az integrálási tartományról!

7. Feladat * (10 pont)

Legyen f az a 2π -szerint periodikus függvény, amelyre $x \in [-\pi, \pi)$ esetén $f(x) = x$. Határozza meg az f függvény Fourier-sorában az a_0 , a_5 és b_3 együtthatókat!

8. Feladat * (4+7+4=15 pont)

- (a) Definiálja két függvény konvolúcióját
- (b) Igazolja, hogy a konvolúció kommutatív!
- (c) Mi a kapcsolat a Fourier-transzformáció és a konvolúció között? Írja fel a tanult egyenlőséget! (Bizonyítani nem kell.)
- (Felteheti, hogy „elegendően szép” függvényekkel dolgozunk.)

A *-al jelölt feladatokból legalább 7 pontot el kell érni!