ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI

2010. március 11.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

Írja le a $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ definícióját és ennek alapján mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4-3n}{n^4+3} = 4 \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

D $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon) > 0$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 3

$$|a_n - A| = \left|\frac{4n^4-3n}{n^4+3} - 4\right| = \left|\frac{4n^4-3n-4(n^4+3)}{n^4+3}\right| \; 2 \; = \left|\frac{-3n-12}{n^4+3}\right| =$$

$$= \frac{3n+12}{n^4+3} \; 2 \; \le \frac{3n+12n}{n^4} = \frac{15}{n^3} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \sqrt[3]{\frac{15}{\varepsilon}} \; 2 \; : \quad N(\varepsilon) = \left[\sqrt[3]{\frac{15}{\varepsilon}}\right] \; 1$$

2. feladat (28 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}+n^2}{2^{3n}+8} = ?$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+4}{3n^2+1}\right)^{n^2} = ?$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+4}{3n^2+1}\right)^{n^3} = ?$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+7} - \sqrt{4n^2-5n}\right) = ?$

a.) $\boxed{7}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}3^n + n^2}{8^n + 8} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{3^n}{8^n}}_{=\left(\frac{3}{8}\right)^n \to 0} \frac{\frac{1}{3} + n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + 8\left(\frac{1}{8}\right)^n} = 0 \cdot \frac{\frac{1}{3}+0}{1+0} = 0$$

Felhasználtuk:

$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a| < 1$

$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}^+$

b.) $\boxed{6}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{4/3}{n^2}\right)^{n^2}}{\underbrace{\left(1+\frac{1/3}{n^2}\right)^{n^2}}_{:=b_n}} = \frac{e^{4/3}}{e^{1/3}} = e$$

an1z1100311/1.

c.) $\boxed{6}$ $c_n = \left(\left(\frac{3n^2+4}{3n^2+1}\right)^{n^2}\right)^n = (b_n)^n$

b.) -ből tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$

$$\Rightarrow \quad e-0{,}1 < b_n < e+0{,}1 \quad , \text{ha } n > N_1 \quad (\exists N_1)$$

$$\Rightarrow \quad c_n = (b_n)^n > (e-0{,}1)^n \to \infty$$

$$\underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Rightarrow} c_n \to \infty$$

d.) $\boxed{9}$ $d_n = \left(\sqrt{4n^2+7} - \sqrt{4n^2-5n}\right) \frac{\sqrt{4n^2+7} + \sqrt{4n^2-5n}}{\sqrt{4n^2+7} + \sqrt{4n^2-5n}} =$

$$= \frac{4n^2+7-(4n^2-5n)}{\sqrt{4n^2+7} + \sqrt{4n^2-5n}} = \frac{5n+7}{\sqrt{4n^2+7} + \sqrt{4n^2-5n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=\frac{n}{n}=1} \frac{5+\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{7}{n^2}} + \sqrt{4-\frac{5}{n}}} \to \frac{5+0}{\sqrt{4+0} + \sqrt{4-0}} = \frac{5}{4}$$

3. feladat (15 pont)

Tekintsük az

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n + 4}$$

$$(a_n) = (1,\ 2.646,\ 3.46\,, \ldots)$$

rekurzióval megadott sorozatot!

a) Igazolja, hogy a sorozat monoton növő!

b) Igazolja, hogy a sorozat elemei 4-nél kisebbek!

c) Határozza meg a sorozat határértékét! (Indokoljon!)

a.) $\boxed{5}$ 1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül (Teljes indukció)

2.) Tegyük fel, hogy
$a_{n-1} < a_n$

3.) Igaz-e?
$$\sqrt{3a_{n-1}+4} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4}$$

2.) miatt : $a_{n-1} < a_n \Rightarrow 3a_{n-1} < 3a_n$

$$\Rightarrow \quad 0 < 3a_{n-1}+4 < 3a_n+4$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1}+4} < \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1}$$

Tehát valóban monoton nő (sőt szigorúan monoton nő).

an1z1 100311/2.

b.) Szintén teljes indukcióval mutatjuk meg:

$\boxed{5}$ 1.) $a_i < 4$ $i = 1,2,3$-ra igaz

2.) Tegyük fel, hogy

$a_n < 4$

3.) Igaz-e $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \overset{?}{<} 4$

2.) miatt: $a_n < 4 \Rightarrow 3a_n < 12 \Rightarrow 0 < 3a_n + 4 < 16$

$\Rightarrow \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1} < \sqrt{16} = 4$

Tehát a sorozat elemei valóban 4-nél kisebbek.

c.) (a_n) monoton nő és felülről korlátos $\Rightarrow (a_n)$ konv.

$\boxed{5}$ (2)

A határérték kielégíti a rekurziós összefüggést:

$A = \sqrt{3A+4} \Rightarrow A^2 - 3A - 4 = 0 \Rightarrow (A+1)(A-4) = 0$

Tehát $A = -1$ vagy $A = 4$. (2) $A = -1$ nem jöhet szóba, hiszen a sorozat elemei pozitívak.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ (1)

4. feladat (20 pont)

$$a_n = \sqrt{\frac{5n^2 + (-1)^n n^2 + 7}{3n^2 + 5}}, \qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{8n^3 + 5}{2n^3 + 7n}}$$

a) $\overline{\lim}\, a_n = ?$, $\underline{\lim}\, a_n = ?$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

b) $\overline{\lim}\, b_n = ?$, $\underline{\lim}\, b_n = ?$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

a.) Ha n ps.:

$$a_n = \sqrt{\frac{5n^2+n^2+7}{3n^2+5}} = \sqrt{\underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \frac{6+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}} \to \sqrt{\frac{6+0}{3+0}} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Ha n ptl.:

$$a_n = \sqrt{\frac{5n^2-n^2+7}{3n^2+5}} = \sqrt{\underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \frac{4+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}} \to \sqrt{\frac{4+0}{3+0}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (3)$$

$\overline{\lim}\, a_n = \sqrt{2}$ (1), $\underline{\lim}\, a_n = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (1); $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \nexists$ (1)

an1z1100311/3.

$$\frac{\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n]{9}\,(\sqrt[n]{n})^3} = \sqrt[n]{\frac{5}{2n^3+7n^3}} \le b_n = \sqrt[n]{\frac{8n^3+5}{2n^3+7n}} \le \sqrt[n]{\frac{8n^3+5n^3}{2n^3}} = \sqrt[n]{\frac{13}{2}}$$

$\sqrt[n]{5} \nearrow 1$, $\sqrt[n]{9} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, so the left side $\to 1$; $\sqrt[n]{\frac{13}{2}} \to 1$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} \quad b_n \to 1 \qquad (8)$$

$$\overline{\lim}\, b_n = \underline{\lim}\, b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \qquad (2)$$

5. feladat (12 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}+3^n}{7+2^{3n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+5}{2n^2+n-2}$

a.) $\boxed{6}$

$$0 < a_n = \frac{2\cdot 4^n + 3^n}{7+8^n} \le \frac{2\cdot 4^n + 4^n}{8^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$3\sum^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ konv. geom. sor } \left(0 < q = \frac{1}{2} < 1\right)$$

$$\underset{\text{maj.kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

b.) $\boxed{6}$

$b_n > 0$

$$b_n = \frac{n\sqrt{n}+5}{2n^2+n-2} \ge \frac{n\cdot\sqrt{n}}{2n^2+n^2-0} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{3}\sum^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\sum^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}} \text{ div } \left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$$

$$\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} b_n \text{ div.}$$

6. feladat (15 pont)

Abszolút konvergens-e, illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{n^2+1}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

$$c_n := \frac{3n-1}{n^2+1} = |a_n|$$

$$c_n \geq \frac{3n-n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n} \quad ; \quad \sum^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div} \underset{\text{min.kr.}}{\Longrightarrow} \sum |a_n| \text{ div.}$$

Tehát a sor nem abszolút konv. 5

Leibniz sor-e?

$$c_n = \frac{3n-1}{n^2+1} = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \underbrace{\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\to 3} \longrightarrow 0$$

$c_n \overset{?}{\geq} c_{n+1}$ (monoton csökkenő-e?)

$$\frac{3n-1}{n^2+1} \overset{?}{\geq} \frac{3(n+1)-1}{(n+1)^2+1}$$

$$(3n-1)(n^2+2n+2) \overset{?}{\geq} (3n+2)(n^2+1)$$

$$\cancel{3n^3} + 6n^2 + 6n - n^2 - 2n - 2 \overset{?}{\geq} \cancel{3n^3} + 3n + 2n^2 + \cancel{2}$$

$$3n^2 + n - 4 \overset{?}{\geq} 0 \quad \text{Ez pedig teljesül } n \geq 1\text{-re.}$$

Tehát $c_n \searrow 0$, így Leibniz sor és ezért konvergens. 6

Így a sor feltételesen konvergens. 1

$$s \approx s_{100} \qquad |H| \leq c_{101} = \frac{3 \cdot 101 - 1}{101^2 + 1}$$, mert Leibniz típusú sor.

3

anl z1100311/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (13 pont)

$$a_n = \frac{3 + 4^n}{8 + 5^n}, \qquad b_n = \frac{3 + 2^{2n}}{8 + 4^{n+1}}, \qquad c_n = \sqrt[n]{2^{n+2}\, n^2 \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{2n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ?, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = ?, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = ?$$

$$a_n = \underbrace{\frac{4^n}{5^n}}_{=\left(\frac{4}{5}\right)^n} \frac{3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{8\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1} \to 0 \cdot \frac{0+1}{0+1} = 0$$

3

$$b_n = \frac{3 + 4^n}{8 + 4 \cdot 4^n} = \frac{3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{8\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4} \longrightarrow \frac{0+1}{0+4} = \frac{1}{4}$$

4

$$c_n = 2\sqrt[n]{4}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \left(1 + \frac{-3}{2n}\right)^{2n} \longrightarrow 2 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot e^{-3} = \frac{2}{e^3}$$

6

8. feladat (7 pont)

Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^n}{7^n} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 3^n + (-2)^n}{7^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{7}\right)^n =$$

$q_1 = \frac{3}{7},\ |q_1| < 1 \qquad q_2 = -\frac{2}{7},\ |q_2| < 1$

$$= 3\,\frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} + \frac{-\frac{2}{7}}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)}$$

(Két konvergens geometriai sor összegéről van szó.)

an1z1100311/6.