

91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűségfüggvényből?

Az $f_{\underline{X}}(t)$ együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig kiintegráljuk.

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(t)$$

92. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlásokat az együttes eloszlásból?

$F_{\underline{X}}(t)$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(t)$$

Vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne \underline{Y} -ban.

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

$$1) f_{\underline{X}}(t) \geq 0, \forall t$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(t) dt_1 \dots dt_n = 1 \quad (\lim_{\forall t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(t) = 1)$$

94. Adja meg a konvolúciós képletet diszkrét esetben!

X, Y függetlenek, $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z}, Z = X + Y, R_z \subseteq \mathbb{Z}$ és tegyük fel, hogy $X, Y \geq 0$ ($\Rightarrow Z \geq 0$).

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{l=0}^k \mathbf{P}(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l)$$

95. Ha $X, Y \in Po(\lambda)$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $X + Y$?

Legyen $X \in Po(\lambda), Y \in Po(\mu), k = 0, 1, 2, \dots$, ekkor:

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\mu} = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda + \mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X + Y \in Po(\lambda + \mu)$$

Tehát jelen esetben $X + Y \in Po(2\lambda)$.

96. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $X + Y$?

Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1), Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor $X + Y \in N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Jelen esetben $X + Y \in N(0, \sqrt{2})$.

97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?

Az X_1, X_2, \dots, X_n diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall 2 \leq k \leq n$ -re és $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(X_{j_i} = x_{j_i})$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

100. Mik a polinomiális eloszlás peremeloszlásai?

A polinomiális eloszlás egydimenziós peremeloszlásai binomiális eloszlások.

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?

$X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$

102. Adja meg a konvolúciós képletet folytonos esetben!

X, Y folytonos, függetlenek, $f_{X,Y}(t, s) = f_X(t) \cdot f_Y(s) \quad \forall t, s$ -re.

$$Z = X + Y : f_Z(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u - s) ds$$

103. Mikor független két valószínűségi változó?

X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall i, j$ -re

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

104. Egy n -dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?

$$n - 1$$

107. Mi a konvolúciós sűrűségfüggvény $X, Y \in U(0, 1)$ esetben?

$X + Y = Z \in (0, 2)$, mert tetszőleges z esetén:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x)f_Y(x) dx = \int_{\max(0, z-1)}^{\min(1, z)} 1 \cdot 1 dx = \begin{cases} \int_0^z 1 dx = z, & \text{ha } z \in (0, 1) \\ \int_{z-1}^1 1 dx = z, & \text{ha } z \in (1, 2) \\ 0, & \text{ha } z \notin (0, 2) \end{cases}$$

108. Ha X, Y függetlenek és létezik várható értékük, mi $X + Y$ és $X \cdot Y$ várható értéke?

Ha $Z_1 = X + Y$, akkor $EZ_1 = EX + EY$.

Ha $Z_2 = XY$, akkor $EZ_2 = EX \cdot EY$.

109. Az egészértékű diszkrét változókra adja meg a konvolúciós képletet!

Ha $\{p_i\}$ az X és $\{q_j\}$ az Y független valószínűségi változók eloszlásai, akkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változó $\{r_k\}$ eloszlása:

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i} = \sum_{j=0}^k p_{k-j} \cdot q_j$$

110. Ha $X, Y \in B(n, p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X + Y$ -nak?

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1 - p)^{n-l} \cdot \binom{n}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1 - p)^{n-k+l}$$

111. Ha $X, Y \in G(p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X + Y$ -nak?

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k p \cdot (1 - p)^{l-1} \cdot p \cdot (1 - p)^{k-l-1} = \\ = (k + 1) \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{k-2}$$

112. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

113. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$$

114. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1$$

115. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(x)$ -el!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \cdot \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

116. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = xy$$

117. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda(x+y)}$$

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du$?

Az $f_Y(v)$ sűrűségfüggvénnyel.

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv$?

Az $F_{X,Y}$ eloszlásfüggvénnyel.

120. Mivel egyenlő $\lim_{v \rightarrow \infty} F_{X,Y}(u, v)$?

$$F_X(u)$$