68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény defínícióját!

Az $X_1, X_2, \dots, X_p$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ skalár-vektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(t) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i,\ \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke $\underline{t}$-ben a $\underline{t}$-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
3) Ha $\underline{X}$-nek *legalább egyik* komponensével a $-\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
4) Ha $\underline{X}$-nek *minden* komponensével a $+\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
5) Legyen $T : [\underline{a}, \underline{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_p, b_p)$ p-dimenziós téga és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p-dimenziós bináris vektor. Ekkor:

   $P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}\left(\underline{a\varepsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\varepsilon})\right) > 0\,;\ j = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$

Vagyis a téglalap csúcsaihoz tartozó eloszlásértékek megfelelően előjelezett összege soha nem negatív.

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k-dimenziós perem- vagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k-dimenziós $(2 \le k < p - 1)$ vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \le i_1 < \dots < i_k \le p$ index-kombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$

Vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne $\underline{Y}$-ban.

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $P(a \le X < b; c \le Y < d$?

$P(a \le X < b; c \le Y < d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz.

91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűség-függvényből?

Az . $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$-től $+\infty$-ig kiintegráljuk.

92. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlásokat az együttes eloszlásból?

Ugyanaz, mint a 80-as.

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

1) $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \geq 0, \forall \underline{t}$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{t})\, dt_1 \dots dt_n = 1$ $\qquad \left(\lim_{\forall t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1\right)$

94. Adja meg a konvolúciós képletet diszkrét esetben!

X, Y függetlenek, $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z}, Z = X + Y, R_z \subseteq \mathbb{Z}$ és tegyük fel, hogy $X, Y \geq 0$ $(\Rightarrow Z \geq 0)$.

$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l)$

95. Ha $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Po}(\boldsymbol{\lambda})$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$?

Legyen $X \in Po(\lambda)$, $Y \in Po(\mu)$, ekkor:

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l}{l!} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \mathrm{e}^{-\mu} = \dots =$$

$$= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \;\Longrightarrow\; X + Y \in Po(\lambda + \mu)$$

Jelen esetben $X + Y \in Po(2\lambda)$.

96. Ha $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$?

Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor $X + Y \in N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.

Jelen esetben $X + Y \in N(0, \sqrt{2})$.

97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?

Az $X_1, X_2, \dots, X_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall\, 2 \leq k \leq n$-re és $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}\left(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(X_{j_i} = x_{j_i}\right)$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-\varrho^2}}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

102. Adja meg a konvolúciós képletet folytonos esetben!

X, Y folytonos, függetlenek, $f_{X,Y}(t,s) = f_X(t) \cdot f_Y(s)$ $\forall t, s$-re.

$Z = X + Y : f_Z(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u - s)\, ds$

103. Mikor független két valószínűségi változó?

X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha

$\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j)$, $i, j = 1,2, \dots$

104. Egy n-dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?

$n-1$

107. Mi a konvolúciós sűrűségfüggvény $X,Y\in U(0,1)$ esetben?

$X+Y=Z\in(0,2)$, mert tetszőleges z esetén:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x)f_Y(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\max\{0,z-1\}}^{\min\{1,z\}} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^z 1\,\mathrm{d}x=z, & \text{ha } z\in(0,1)\\ \int_{z-1}^1 1\,\mathrm{d}x=z, & \text{ha } z\in(1,2)\\ 0, & \text{ha } z\notin(0,2)\end{cases}$$

108. Ha X,Y függetlenek és létezik várható értékük, mi $X+Y$ és $X\cdot Y$ várható értéke?

Ha $Z_1=X+Y$, akkor $\mathbf{E}Z_1=\mathbf{E}X+\mathbf{E}Y$.

Ha $Z_2=XY$, akkor $\mathbf{E}Z_2=\mathbf{E}X\cdot\mathbf{E}Y$.

109. Az egészértékű diszkrét változókra adja meg a konvolúciós képletet!

Ha $\{p_i\}$ az X és $\{q_j\}$ az Y független valószínűségi változók eloszlásai, akkor a $Z=X+Y$ valószínűségi változó $\{r_k\}$ eloszlása:

$r_k=\sum_{i=0}^{k} p_i\cdot q_{k-i}=\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}\cdot q_j$

110. Ha $X,Y\in B(n,p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X+Y$-nak?

111. Ha $X,Y\in G(p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X+Y$-nak?

112. Ha $X,Y\in N(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

113. Ha $\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathrm{E}(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

lambda^2 *ue^(-lambda*u)

114. Ha $\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathrm{U}(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

115. Ha $\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathrm{N}(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(\mathrm{x})$-el!

116. Ha $X,Y\in U(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

117. Ha $X,Y\in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$\int_{-\infty}^{u}\lambda^2\cdot u\cdot \mathrm{e}^{(-\lambda u)}\,du$

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du$?

$f_Y(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du=\cdots=v+\frac{1}{2}$

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du\,dv$?

Az $F_{X,Y}$ eloszlásfüggvénnyel.

120. Mivel egyenlő $\lim_{v\to\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}(\mathrm{u},\mathrm{v})$?

$F_X(u)$

121. Mik a kovariancia tulajdonságai?

1) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$, vagyis kommutatív
2) $\mathrm{cov}(X,X) = \sigma^2\{X\}$
3) $\mathrm{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha\,\mathrm{cov}(X,Z) + \beta\,\mathrm{cov}(Y,Z)$

122. Mi a feltételes eloszlásfüggvény definíciója?

Az $F_{X|Y}(x \mid y) \triangleq \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$ kétváltozós függvényt az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénynek nevezzük.

123. Mi a feltételes sűrűségfüggvény definíciója?

A feltételes eloszlásfüggvény x-szerinti parciális derivált-függvényét az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényének nevezzük:

$$f_{X|Y}(x \mid y) \triangleq \frac{\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y \partial x}}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

125. Mi a feltételes várható érték definíciója diszkrét esetben?

Az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ valószínűségi változót értjük, melynek eloszlása: $\mathbf{P}(\mathbf{E}(X \mid Y) = i) = \sum_{\forall k: i = \mathbf{E}\{X_k\}} \mathbf{P}(Y = y_k)$.

126. Mi a feltételes várható érték definíciója folytonos esetben?

Az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén az $\mathbf{E}(X \mid Y) = r(Y)$ valószínűségi változót értjük, ahol: $r(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f_{X|Y}(u \mid v)\, du = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u\, f_{X,Y}(u,v)\, du}{f_Y(v)}$

127. Mik a korrelációs együttható tulajdonságai?

1) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{R}(X,Y) = 0$
2) Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, akkor $-1 \le \mathbf{R}(X,Y) \le 1$
3) Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X,Y) = \pm 1 \iff \exists a,b \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$

128. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között?

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ és $\mathbf{R}(X,Y) = 0$.

129. Mikor korrelálatlan két valószínűségi változó?

Az X és Y valószínűségi változók korrelálatlanok, ha $\mathrm{R}(X,Y) = cov(X,Y) =$ $= \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y) = 0$.

130. Mik a feltételes várható érték tulajdonságai?

4) $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \mid Y)\big) = \mathbf{E}X$
5) $\mathbf{E}(h(Y) \cdot X \mid Y) = h(Y) \cdot \mathbf{E}(X \mid Y)$
6) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}X$

132. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között kétdimenziós normális esetben?

Ha X és Y együttes eloszlása normális, akkor X és Y akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.

133. Mik a kovariancia-mátrix tulajdonságai?

III.5.8. Tétel: $\underline{\underline{\Sigma}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T$ és $\forall\, \underline{a} \in \mathbb{R}^p$-re $\underline{a}^T \underline{\underline{\Sigma}}\, \underline{a} \geq 0$.

134. Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) =$?

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}X$.

135. Ha $X = \alpha Y + \beta$, akkor $R(X, Y) =$?

Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X, Y) = \pm 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$

136. Mi a kritériuma annak, hogy egy valószínűségi változó szórása 0 legyen?

A valószínűségi változó legyen konstans.

137. Mi a kritériuma annak, hogy a korralációs együttható értéke 1 legyen?

A két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat legyen (egyenes arányosság).

138. Mi a kritériuma annak, hogy a korralációs együttható értéke -1 legyen?

A két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat legyen, de ellentétes (fordított arányosság).