Matematika A3

Készítette: Seyler Lajos

1. előadás

Differenciálegyenletek

$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x\right) = 0$ Implicit megadás

$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y, x)$ Explicit megadás (F folytonos)

$y' = F(y, x)$

Példa $y' = a \cdot y$ $(a > 0)$

$\frac{y'}{y} = a$

$\int \frac{y'}{y} dt = \int a dt$

$\ln|y| = a \cdot t + c$

$|y| = e^{a \cdot t + c} = e^{a \cdot t} \cdot e^{c} = e^{a \cdot t} \cdot c_1$ $(c_1 > 0)$

Bolzano-tétel → $y = e^{a \cdot t} + c_2$ $(c_2 \neq 0)$

Ez az általános megoldás.

Szinguláris megoldás, ha $F(y_0, x) = 0$ $y = y_0$

Ez az összes megoldás.

Tegyük fel, hogy: $u(t)$ is megoldás.

$\frac{d}{dt} \cdot \frac{u(t)}{e^{a \cdot t}} = \frac{u'(t) \cdot e^{a \cdot t} - u(t) \cdot a \cdot e^{a \cdot t}}{e^{2 \cdot a \cdot t}} = 0$

$y' = a \cdot y$ miatt a számlálóban lévő $u'(t) = u(t) \cdot a$. Ha ezt behelyettesítjük, akkor a számláló, ezért az egész tört is 0 lesz.

Példa

Mennyi idő alatt nő duplájára a népesség?

$2 = \frac{y(t_2)}{y(t_1)} = \frac{C \cdot e^{a \cdot t_2}}{C \cdot e^{a \cdot t_1}} = e^{a \cdot (t_2 - t_1)}$

$\frac{\ln 2}{a} = t_2 - t_1$

C rögzítése

$y(t) = k \cdot e^{a \cdot t}$ Partikuláris megoldás

$y(t) = 3{,}032 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}02 \cdot (t - 1960)}$

Nagy "t" esetén elszáll, nem ad a valósághoz közeli adatokat.

Korrigálás: $y' = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{N}\right)$

Lineáris differenciálegyeneltek

Általános lineáris egyenlet: $A \cdot x = b$, ahol "A" lineáris operátor

Kell: "A" n-szer folyamatosan differenciálható tere → folytonosak tere

Megoldások: $x_0 + KerA$ és $A \cdot x_0 = b$

- Ha y megoldás → $A \cdot y = b$ → $A \cdot (y - x_o) = A \cdot y - A \cdot x_0 = b - b = 0$
- Ha $y \in KerA$ → $A(x_0 + y) = A \cdot x_0 + A \cdot y = b$ $(A \cdot y = 0)$

$y_{iá} = y_{ip} + y_{há}$ (iá: inhomogén általános, ip: inhomogén partikuláris, há: homogén általános) pl. 1. $A \cdot y = y' + f(x) \cdot y$ $[\, y' + f(x) \cdot y = b(x)\,]$

2. $A \cdot y = y" + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y$

Állandó együtthatós egy lineáris differenciálegyenlet, ha $f(x)$, $g(x)$, ...konstansok. Egyébként függvényegyütthatós.

Állandó együtthatós differenciálegyenlet

$y'(t) + a \cdot y(t) = 0$ y-t $e^{\lambda \cdot t}$ alakban keressük $y' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} = \lambda \cdot y$

$0 = \lambda \cdot y(t) + a \cdot y(t) = y(t) \cdot (\lambda + a)$ $\lambda'' = \lambda \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} = \lambda^2 \cdot y$

$\lambda = -a$ jó → $e^{-a \cdot t}$

$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$

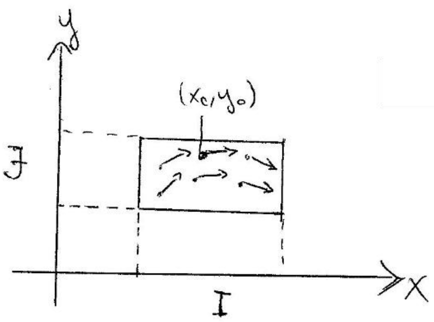
$y = e^{\lambda \cdot x}$ alakban keressük $y^{(k)} = \lambda^k \cdot y$

$y \cdot (\lambda^n + a_{n-1} + \cdots + a_0) = 0$ Karakterisztikus polinom (ami a zárójelben van)

Tegyül fel, hogy: λ^k egy $m \cdot k$-szoros gyök. Ekkor:

$\{e^{\lambda_k \cdot x}, x \cdot e^{\lambda_k \cdot x}, \ldots, x^{m_{k-1}} \cdot e^{\lambda_k \cdot x} | k = 1 \ldots m\}$ alaprendszer

1. gyakorlat



"Iránymező"

$F: I \times J \to R$

$(x, y) \to F(x, y)$

Az $y' = F(x, y)$ differenciálegyenlet (x_0, y_0) ponton áthaladó megoldása: az egy $y: K \to R$

1. $K \subseteq I$, $x_0 \in int(K)$
2. $y \in Diff(K, R)$
3. $y(x_0) = y_0$, $\forall x \in K \;\; y'(x) = F(x, y(x))$

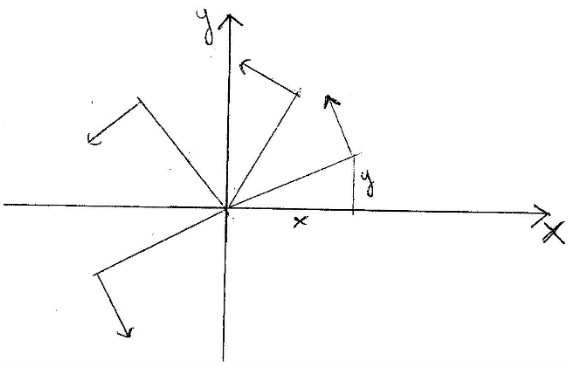
Ezt partikuláris megoldásnak nevezik.

Általános megoldás: $y(x, C)$ megadja az összes megoldást a "C" paramétertől függően

Nem biztos, hogy ez az összes megoldás. Lehet szinguláris megoldás is.

Példa

$y' = -\frac{x}{y}$



$\frac{y}{x}$: a meredekség

Tudjuk, hogy egy "m" merekségű egyenesre merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{m}$, ami $-\frac{x}{y}$. Ez áll az egyenlet jobb oldalán. A merőleges nyilak egy kört rajzolnak ki, ezért a sejtésün, hogy a megoldás alakja: $x^2 + y^2 = r^2$

Ez az implicit általános megoldás

Bizonyítás: 1. egyik irány: implicit deriválással

$$x^2 + \left(y(x)\right)^2 = r^2$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y(x) \cdot y'(x) = 0$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{\cancel{2} \cdot x}{\cancel{2} \cdot y}$$

2. másik irány:

$$g: x \to x^2 + \left(y(x)\right)^2$$

$$g' = 0$$

$$g = C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

Szeparábilis differenciálegyenlet

$$y' = \frac{\sin x}{y^6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y^6}$$

$$\int y^6 dy = \int \sin x \, dx$$

$\frac{y^7}{7} = -\cos x + C$ Implicit általános megoldás

$y = \sqrt[7]{-7 \cdot \cos x + 7 \cdot C}$ Explicit általános megoldás

Tétel: Legyen $f: I \to R$, $g: J \to R$ folytonos függvények, g sehol sem 0

Az $y' = f(x) \cdot g(y)$ szeparábilis differenciálegyenlet megoldása: $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$, ahol $G = \int \frac{1}{g}$; $F = \int f$

Példa

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) dx = G(y(x))$$

$$G\left(y(x)\right) = F(x) + C$$

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Darboux-tétel miatt biztosan létezik G^{-1}.

Példa

$$y' = a \cdot y$$

1. az $y = 0$ egy jó megoldás

2. $\frac{dy}{dx} = a \cdot y$ Tegyük fel, hogy: y sehol se 0

$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$

$\ln|y| = a \cdot x + C$

$|y| = e^{a \cdot x + C}$

$|y| = e^{a \cdot x} \cdot e^{C}$ e^C helyett írjunk K-t ($K > 0$)

$|y| = K \cdot e^{a \cdot x}$

Bolzano-tétel ...

$y = \pm K \cdot e^{a \cdot x}$

Egzisztencia-unicitás-tétel

1. Peano-féle egzisztenciatétel: Az $y' = F(x, y)$ differenciálegyenletnek létezik lokális megoldása az (x_0, y_0) pontban, ha F folytonos függvény.

2. Cauchy-Lipschitz-tétel (gyenge): Ha az F folytonosan differenciálható egy nyílt halmazon és ezen belül egy $I \times J$ téglalap belsejében kijelölünk egy (x_0, y_0) pontot, akkor van az egyenletnek egy I-n értelmezett (x_0, y_0)-n áthaladó megoldása.

Példa

$y' = \sqrt[3]{y}$ $y(0) = 0$

$y_1 = 0$ egy jó megoldás

Többi megoldás: $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$

$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx \quad (y > 0)$

$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}} = x + C \qquad (C = 0)$

$y = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot x\right)^3}$

Definíció: szinguláris pont: több megoldás (görbe) halad keresztül ezen a ponton

2. előadás

Példa

$y' - 2 \cdot y = 1$

Homogén általános megoldás ($y_{há}$): $y^{(n)}$ helyett λ^k-t írunk mindenhova és a jobb oldal 0. Itt most y' helyett λ, y (0. derivált) helyett $\lambda^0 = 1$

$\lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{2 \cdot x}$ (Mert a megoldást mindig $c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ alakban keressük)

Inhomogén partikuláris megoldás (y_{ip}): y helyére beírjuk, amit az előbb kaptunk, csak c helyett $c(x)$-et írunk, feltételezve, hogy egy függvény. Tehát $y = c(x) \cdot e^{2 \cdot x}$ és kifejezzük $c(x)$-et.

$\underbrace{c'(x) \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot c(x) \cdot e^{2 \cdot x}}_{y'} - 2 \cdot \underbrace{c(x) \cdot e^{2 \cdot x}}_{y} = 1$

$c'(x) = e^{-2 \cdot x}$

$c(x) = \int e^{-2 \cdot x} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} + C$ Ezt visszahelyettesítjük a c helyére a homogén megoldásba.

$y_{ip} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot e^{2 \cdot x} = -\frac{1}{2}$

Ezekből összerakhatjuk az **inhomogén általános megoldást** ($y_{iá}$):

$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c \cdot e^{2\cdot x} - \frac{1}{2}$

Példa

$y' + y = \sin(x)$

Homogén általános megoldás

$\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-x}$

Inhomogén partikuláris megoldás

$y = c(x) \cdot e^{-x}$

$c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + c(x) \cdot e^{-x} = \sin(x)$

$c'(x) = e^{x} \cdot \sin(x)$

$c(x) = \int e^{x} \cdot \sin(x)\, dx = \cdots = \frac{1}{2} \cdot e^{x} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$

$y_{ip} = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$

Inhomogén általános megoldás:

$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$

Elsőrendű függvényegyütthatós differenciálegyenletek

Alakjuk: $y' + f(x) \cdot y = b(x)$

Ha homogén: $y' = -f(x) \cdot y$

Állítás: Ha van 2 megoldás, akkor hányadosuk konstans.

Bizonyítás: $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2'}{y_2^2} = \frac{-f(x) \cdot y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot (-f(x)) \cdot y_2}{y_2^2} = 0$

Példa

$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3 \cdot x^2$

Homogén általános megoldás

$y' = -\frac{1}{x} \cdot y$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{y'}{y} = \int -\frac{1}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + C = \ln\frac{1}{|x|} + C$

$|y| = \frac{1}{|x|} \cdot C_1 \qquad C_1 > 0$

Bolzano tételét alkalmazva: $y_{há} = \frac{1}{x} \cdot C_2 \qquad C_2 \neq 0$

Inhomogén partikuláris megoldás

$y = c(x) \cdot x^{-1}$

$3 \cdot x^2 = c'(x) \cdot x^{-1} - c(x) \cdot x^{-2} + c(x) \cdot x^{-2}$

$c'(x) = 3 \cdot x^3$

$c(x) = \int 3 \cdot x^3 dx = \frac{3}{4} \cdot x^4 + C$

$y_{ip} = \frac{3}{4} \cdot x^3$

Inhomogén általános megoldás

$y_{iá} = \frac{c}{x} + \frac{3}{4} \cdot x^3 \qquad c \neq 0$

Példa

$y' + 2 \cdot t \cdot y = t$ Kezdeti feltétel: $y(1) = 2$

Homogén általános megoldás

$y' = -2 \cdot t \cdot y$

$\frac{y'}{y} = -2 \cdot t$

$\ln|y| = -t^2 + C \rightarrow |y| = e^{-t^2} \cdot C_1 \qquad C_1 > 0$

$y_{há} = e^{-t^2} \cdot C_2$

Inhomogén partikuláris megoldás

$y(t) = c(t) \cdot e^{-t^2}$

$t = c'(t) \cdot e^{-t^2} - c(t) \cdot e^{-t^2} \cdot 2 \cdot t + 2 \cdot t \cdot c(t) \cdot e^{-t^2}$

$c'(t) = t \cdot e^{t^2}$

$c(t) = \int t \cdot e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + C$

$y_{ip} = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = \frac{1}{2}$

Inhomogén általános megoldás

$y_{iá} = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}$

Kezdeti érték feltétel

$y(1) = 2$

$2 = c \cdot e^{-1} + \frac{1}{2}$

$c = \frac{1}{2} \cdot e$

$y = \frac{1}{2} \cdot e \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{1-t^2} + \frac{1}{2}$

Példa

$y' + \frac{2}{t} \cdot y = e^t$

Homogén általános megoldás

$y' = -\frac{2}{t} \cdot y$

$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{t}$

$\ln|y| = \ln|t|^{-2} + C \rightarrow |y| = \frac{1}{t^2} \cdot C_1 \qquad C_1 > 0$

$y = \frac{C_2}{t^2} \qquad C_2 \neq 0$

Inhomogén partikuláris megoldás

$y = c(t) \cdot t^{-2}$

$e^t = c'(t) \cdot t^{-2} - c(t) \cdot 2 \cdot t^{-3} + 2 \cdot c(t) \cdot t^{-3}$

$c'(t) = t^2 \cdot e^t$

$c(t) = \int t^2 \cdot e^t dt = e^t \cdot (t^2 - 2 \cdot t + 2)$

$y_{ip} = e^t \cdot \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right)$

Inhomogén általános megoldás

$y_{iá} = \frac{c}{t^2} + e^t \cdot \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \qquad c \neq 0$

Másodrendű, állandó együtthatós differenciálegyenletek

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa (D):

- $D > 0$: - két különböző gyök van

  - $y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ (λ_1, λ_2 a megoldások)

- $D = 0$: - kétszeres multiplicitású gyök

  - $y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$ (λ a kétszeres gyök)

- $D < 0$: - komplex gyökök (konjugált párok)

  $\lambda_1 = \mu_1 + \tau \cdot j \quad , \quad \lambda_2 = \mu_2 - \tau \cdot j$

  - $y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$

Alkalmazzuk a következő átalakítást: $e^{x + j \cdot y} = e^x \cdot (\cos y + j \cdot \sin y)$

$e^{\lambda_1 \cdot x} = e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\tau \cdot x) + j \cdot \sin(\tau \cdot x))$

$e^{\lambda_2 \cdot x} = \overline{e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\tau \cdot x) + j \cdot \sin(\tau \cdot x))}$

$y_{há} = (c_1 + c_2) \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x) + j \cdot (c_1 - c_2) \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$

$\rightarrow \qquad y_{há} = C_3 \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x) + c_4 \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$

2. gyakorlat

Példa

$y' = x^2 \cdot \dfrac{\cos^4 y}{\sin y}$

Kezdeti feltételek:

a, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

b, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

c, $y(0) = \frac{3\pi}{4}$

d, $y(0) = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi$

Nézzük meg, hol nincs megoldás: 0-val való osztás → $y_0 = k \cdot \pi$ esetén nincs megoldás

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \cos^4 y}{\sin y}$

$\int \frac{\sin y}{\cos^4 y} dy = \int x^2 dx$

megjegyzés: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$

$-\int \cos^{-4} y\, (-\sin y) dy = \int x^2 dx$

$-\frac{\cos^{-3} y}{-3} = \frac{x^3}{3} + C$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+3\cdot C}}$

$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+3\cdot C}}\right) + A\cdot 2\cdot \pi$ $\qquad$ $A\epsilon\mathbb{Z}$

Nem szeparábilis megoldás

$y \equiv \frac{\pi}{2}$

b, $\quad C = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3}$ $\qquad A = 0$

c, $\quad C = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3}$ $\qquad A = 0$

d, $\quad C = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3}$ $\qquad A = 1$

I. Lineáris helyettesítéssel megoldható differenciálegyenletek

Példa

$y' = \sqrt{y - 2\cdot x}$ $\qquad$ $y = y(x)$

$u' + 2 = \sqrt{u}$ $\qquad$ $u(x) = y(x) - 2\cdot x$ $\qquad$ $u = y - 2\cdot x$

$u' = \sqrt{u} - 2$ $\qquad$ $u'(x) = y'(x) - 2$ $\qquad$ $u' = y' - 2$

$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} - 2$

$\int \frac{du}{\sqrt{u}-2} = \int dx$ $\qquad$ Helyettesítés: $\quad t = \sqrt{u}$

Nem elég a $\sqrt{u}$ helyett t-t írni, a du-t is át kell írni dt-re, de ezt ki kell számolni.

$t^2 = u$

$2\cdot t\cdot t' = u'$

$2\cdot t\cdot \frac{dt}{dx} = \frac{du}{dx}$

$2\cdot t\cdot dt = du$ $\qquad$ Tehát a du helyett $2\cdot t\cdot dt$-t írunk.

$$\int \frac{2\cdot t\cdot dt}{t-2} = \int \frac{2\cdot(t-2)+4}{t-2}dt = \int 2 + \frac{4}{t-2}dt = 2\cdot t + 4\cdot \ln\left|\sqrt{t-2}\right|$$

Visszahelyettesíthetjük t helyett a $\sqrt{u}$-t, u helyett pedig az $y - 2\cdot x$-et.

$2\cdot\sqrt{y-2\cdot x} + 4\cdot\ln\left|\sqrt{y-2\cdot x} - 2\right| = x + C$

II. Homogén fokszámú differenciálegyenletek

$u = \frac{y}{x}$ $\quad\rightarrow\quad$ $y = u\cdot x$ $\quad\rightarrow\quad$ $y' = u'\cdot x + u$

Példa

$y' = -\frac{2\cdot x+y}{x+y} = -\frac{2+\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

$u'\cdot x + u = -\frac{2+u}{1+u}$

$u'\cdot x = -\frac{2+u}{1+u} - u = -\frac{2+u+u\cdot(1+u)}{1+u}$

$\frac{du}{dx}\cdot x = -\frac{u^2+2\cdot u+2}{1+u}$

$\int \frac{1+u}{u^2+2\cdot u+2}du = \int -\frac{1}{x}dx$

2-vel beszorozzuk a töret, majd 2-vel osztjuk és így a tört $\frac{f'}{f}$-es lesz, aminek tudjuk az integrálját.

$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot u + 2}{u^2 + 2 \cdot u + 2} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u^2 + 2 \cdot u + 2|$

$\frac{1}{2} \cdot \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 2\right| = -\ln|x| + C$

Ezt szépíthetjük egy kicsit. Pl.: C helyett írhatjuk, hogy $\ln K$, és így összevonhatjuk a 2 logaritmust a jobb oldalon, az $\frac{1}{2}$-t bevihetjük a logaritmusba kitevőnek, majd eltüntetjük a logaritmust mindkét oldalról.

$\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 2\right|^{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{1}{|x|}$

Egzakt differenciálegyenletek

Definíció: Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, $P, Q: U \to \mathbb{R}$ folytonos, Q sehol sem 0. Azt mondjuk, hogy az $y' = -\frac{P}{Q}$ differenciálegyenlet egzakt, ha van olyam $F: U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre:

I. $\frac{\partial F}{\partial x} = P$

II. $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$

Példa

$y' = -\frac{x}{y}$

Ennek a megoldását már korábban megkaptuk: $\underbrace{x^2 + y^2}_{F(x,y)} = C$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2 \cdot x = P \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2 \cdot y = Q \end{aligned}\right\} -\frac{P}{Q} = -\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y} = y'$$

Megjegyzések:

1. $gradF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, Q)$

2. Implicit függvény-tétel: Ha F (x_0, y_0) környezetében mindenhol folytonosan diffható és $\partial y F(x_0, y_0) \neq 0$, akkor egyértelműen létezik az (x_0, y_0) környezetben az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ egyenletnek implicit függvénye és enne deriváltja: $y'(x) = \frac{\partial x F(x, y(x))}{\partial y F(x, y(x))}$

3. $F\big(g(x), h(x)\big)' = gradF\big(g(x), h(x)\big) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$

Tétel (Egzisztencia)

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, $P, Q: U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, Q sehol sem 0. $(x_0, y_0) \epsilon U, \frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$.
Ilyenkor $y' = -\frac{P}{Q}$ megoldása pontosan az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ implicit megoldása.

Bizonyítás: $\Leftarrow y'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot (x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot (x, y(x))} = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$

$\Rightarrow$ Legyen y olyan, hogy $y' = \frac{P}{Q}$, ami egzakt.

$Q \cdot y' = P$

$P + Q \cdot y' = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$ Ez egy skaláris szorzat.

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = 0$

$\left(F\left(x, y(x)\right)\right)' = 0$

$F(x, y) = C$

Általános megoldás: $F(x, y) = C$

Tétel (Egzaktság jellemzése)

Legyen az U ezen kívül egyszeresen összefüggő halmaz. $y' = -\frac{P}{Q}$ pontosan akkor egzakt, ha $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$y' = -\frac{P}{Q}$ másik jelölése: $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \rightarrow Q \cdot dy = -P \cdot dx \rightarrow \underline{P \cdot dx + Q \cdot dy = 0}$

Példa

$$\underbrace{(y \cdot e^{x \cdot y} + \cos x)}_{P} dx + \underbrace{(x \cdot e^{x \cdot y} + \cosh y)}_{Q} dy = 0$$

Megoldás:

1. Tényleg egzakt-e?

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x \cdot y} + y \cdot x \cdot e^{x \cdot y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x \cdot y} + x \cdot y \cdot e^{x \cdot y}$

A kettő egyenlő → tényleg egzakt

2. Egyenletrendszer

I. $\frac{\partial F}{\partial x} = y \cdot e^{x \cdot y} + \cos x$

II. $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot e^{x \cdot y} + \cosh y$

Elsőt kiintegráljuk: $F(x, y) = y \cdot \frac{e^{x \cdot y}}{y} + \sin x + C_1(y)$ $C_1(y)$ csak y-nak a függvénye

Majd deriváljuk y szerint: $\underbrace{x \cdot e^{x \cdot y} + C_1'(y)}_{a\ derivált} = \underbrace{x \cdot e^{x \cdot y} + \cosh y}_{Q}$

$C_1'(y) = \cosh y$

$C_1(y) = \sinh y$

$F(x, y) = e^{x \cdot y} + \sin x + \sinh y$

$\underline{e^{x \cdot y} + \sin x + \sinh y = C}$

Példa

$y' = -\frac{y \cdot \cos(x \cdot y) + 1}{x \cdot \cos(x \cdot y)}$ $y(1) = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cdot \cos(x \cdot y) + 1}{x \cdot \cos(x \cdot y)}$

$(x \cdot \cos(x \cdot y))dy = -(y \cdot \cos(x \cdot y) + 1)dx \rightarrow \underbrace{(y \cdot \cos(x \cdot y) + 1)}_{P} dx + \underbrace{(x \cdot \cos(x \cdot y))}_{Q} dy = 0$

Megoldás:

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(x \cdot y) + y \cdot (-\sin(x \cdot y)) \cdot x$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(x \cdot y) + x \cdot (-\sin(x \cdot y)) \cdot y$

Tényleg egzakt

2. $\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x \cdot y) + 1 \rightarrow F(x, y) = y \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + x + C_1(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot \cos(x \cdot y)$ → $F(x,y) = x \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + C_2(x)$

$C_2(x)$ csak x függvénye, az első egyenletben van egy $+x$, ami a másodikban nincs és ez csak x függvénye, ezért ez lesz a $C_2(x)$. $C_1(y)$ nulla lesz, mert a második egyenletben nincs olyan tag, ami csak y függvénye.

$F(x,y) = \sin(x \cdot y) + x$

$\underline{\sin(x \cdot y) + x = C}$

3. előadás

$D < 0$ esetén a 2 gyök: $\mu \pm j \cdot \tau$ → A két megoldás: $e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x)$, $e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$

$e^{a \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \cos(b \cdot x) + q(x) \cdot \sin(b \cdot x))$

$y_{ip} = x^m \cdot e^{a \cdot x} \cdot (P(x) \cdot \cos(b \cdot x) + Q(x) \cdot \sin(b \cdot x))$

P és Q polinomok. $gr(P) = gr(Q) = \max\{p(x), q(x)\}$ (gr: a polinom foka)

m: $a + b \cdot j$ multiplicitása a karakterisztikus polinomban

Példa

$y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 6 \cdot e^{4 \cdot t}$

Homogén általános megoldás

$\lambda^2 + 3 \cdot \lambda - 10 = 0$ → $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$ → $y_{há} = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot t}$

Inhomogén partikuláris megoldás

$6 \cdot e^{4 \cdot t} = e^{4 \cdot t} \cdot (6 \cdot \cos(0 \cdot t) + 0 \cdot \sin(0 \cdot t))$ → $a = 4$, $b = 0$, p és q nulladfokú

$a + b \cdot j = 4$ nullaszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak → $m = 0$

$y_{ip} = t^0 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} = P \cdot e^{4 \cdot t}$

Visszahelyettesítés

$y'_{ip} = 4 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$

$y''_{ip} = 16 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$

$6 \cdot e^{4 \cdot t} = 16 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot 4 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} - 10 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$

$P = \frac{1}{3}$

$y_{ip} = \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t}$ → $y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t}$

Példa

$y'' + 4 \cdot y = 3 \cdot \sin t$

Homogén általános megoldás

$\lambda^2 = -4$ → $\lambda_{1,2} = 0 \pm 2 \cdot j$ → $y_{há} = c_1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot t) + c_2 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)$

Inhomogén partikuláris megoldás

$3 \cdot \sin(t) = e^{0 \cdot t} \cdot (0 \cdot \cos(1 \cdot t) + 3 \cdot \sin(1 \cdot t))$ → $a = 0, b = 1$

$m = 0$, mert $0 + 1 \cdot j$ nullaszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak

p és q foka 0 → $gr(P) = gr(Q) = 0$

$y_{ip} = P \cdot \cos(t) + Q \cdot \sin(t)$ $(P, Q \in R)$

Visszahelyettesítés

$y'_{ip} = -P \cdot \sin(t) + Q \cdot \cos(t)$

$y_{ip}'' = -P\cdot\cos(t) - Q\cdot\sin(t)$

$3\cdot\sin(t) = -P\cdot\cos(t) - Q\cdot\sin(t) + 4\cdot P\cdot\cos(t) + 4\cdot Q\cdot\sin(t) = 3\cdot P\cdot\cos(t) + 3\cdot Q\cdot\sin(t)$

$P = 0, Q = 1$

$y_{ip} = \sin(t)$ → $y_{iá} = c_1\cdot\cos(2\cdot t) + c_2\cdot\sin(2\cdot t) + \sin(t)$

Példa

$y'' - 2\cdot y' + y = 3\cdot t\cdot e^t$

Homogén általános megoldás

$\lambda^2 - 2\cdot\lambda + 1 = 0$ → $\lambda_{1,2} = 1$ (kétszeres gyök) → $y_{há} = c_1\cdot e^t + c_2\cdot t\cdot e^t$

Inhomogén partikuláris megoldás

$3\cdot t\cdot e^t = e^{1\cdot t}\cdot(3\cdot t\cdot\cos(0\cdot t) + 0\cdot\sin(0\cdot t))$ → $a = 1, b = 0$

p foka 1, q foka 0 → $gr(P) = gr(Q) = 1$

$m = 2$, mert $1 + 0\cdot j$ kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak

$$y_{ip} = t^2\cdot e^t\cdot\left(\overbrace{(u\cdot t + v)}^{P\ (elsőfokú\ polinom)}\cdot\cos(0\cdot t) + Q\cdot\sin(0\cdot t)\right) = t^2\cdot e^t\cdot(u\cdot t + v) =$$

$= e^t\cdot(u\cdot t^3 + v\cdot t^2)$

Visszahelyettesítés

$y_{ip}' = e^t\cdot(3\cdot u\cdot t^2 + 2\cdot v\cdot t) + e^t\cdot(u\cdot t^3 + v\cdot t^2)$

$y_{ip}'' = e^t\cdot(u\cdot t^3 + (6\cdot u + v)\cdot t^2 + (6\cdot u + 4\cdot v)\cdot t + 2\cdot v)$

$3\cdot t\cdot e^t = y_{ip}'' - 2\cdot y_{ip}' + y = \cdots = e^t\cdot(6\cdot u\cdot t + 2\cdot v)$ → $u = \frac{1}{2}, v = 0$

$y_{ip} = e^t\cdot\frac{1}{2}\cdot t^3$ → $y_{iá} = c_1\cdot e^t + c_2\cdot t\cdot e^t + \frac{1}{2}\cdot t^3\cdot e^t$

Lineáris differenciálegyenlet rendszer (állandó együtthatós)

$y' - a\cdot y = b(x)$ analógiájára $\underline{\underline{y}}' - \underline{\underline{A}}\cdot y = \underline{\underline{b}}(x)$

$n = 2$ esetén:

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$,azaz $\begin{matrix} y_1' = a_{11}\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2 + b_1 \\ y_2' = a_{21}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2 + b_2 \end{matrix}$

Példa

$y_1' = y_1 + y_2 - 2\cdot e^{-t}$

$y_2' = 4\cdot y_1 + y_2 + 3\cdot t$

Homogén általános megoldás

$\underline{\underline{y}}' = \underline{\underline{A}}\cdot y$

a, $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei: $|A - \lambda\cdot I| = 0$ gyökei

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

b, sajátvektorok

$\lambda = 3$-hoz tartozó: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

$$-2 \cdot v_1 + v_2 = 0 \quad \rightarrow \quad v_2 = 2 \cdot v_1 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{V}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(A másik egyenlet ennek a duplája)

$\lambda = -1$-hez tartozó: $\underline{\underline{V}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c, alaprendszer

$$\underline{\underline{\Psi}} = (e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \underline{\underline{V}}^1, \dots, e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \underline{\underline{V}}^n)$$

Homogén általános megoldás: Ψ oszlopainak összes lineáris kombinációja

Most: $\Psi = \begin{pmatrix} e^{3 \cdot t} & e^{-t} \\ 2 \cdot e^{3 \cdot t} & -2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$

Ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} = \lambda \cdot \underline{\underline{v}}$, akkor $\underline{\underline{y}} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}}$ tényleg megoldás, mert $\underline{\underline{y}}' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} =$

$= \underline{\underline{A}} \cdot (e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}}) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y}}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}}$

3. gyakorlat

Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek

$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \rightarrow \quad$ Egzakt

Ha ez nem teljesül, akkor nem egzakt. Ekkor beszorozzuk egy μ függvénnyel, hogy egzakt legyen. Biztosan létezik minden egyenlethez ilyen μ. Nincs általános megoldás. Mi két módszert tanulunk μ keresésére.

$$\underbrace{\mu \cdot P}_{M} \cdot dx + \underbrace{\mu \cdot Q}_{N} \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial dx} \cdot \mu + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\mu \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{dx}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P \qquad$ μ-vel osztás + használjuk: $\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \ln x}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \ln y}{\partial y} \cdot P$$

1. módszer: $\mu = \mu(x)$ (csak x-től függ) → y szerinti deriváltja 0

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

$$\ln \mu = \int R(x) dx$$

$$\mu(x) = e^{\int R(x) dx}$$

2. módszer: $\mu = \mu(y)$

$$S(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

$$\mu(y) = e^{-\int S(y) dy}$$

Példa

$y' = \frac{x^3 + y^3}{x \cdot y^2} \qquad x > 0$

$$x \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$$

$$\underbrace{-(x^3 + y^3)}_{P} dx + \underbrace{x \cdot y^2}_{Q} dy = 0$$

1. Egzakt-e?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

Nem egzakt → tegyük egzakttá, keressük egy μ-t.

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-3 \cdot y^2 - y^2}{x \cdot y^2} = -\frac{4}{x}$$

Azért Q-val osztunk, és nem P-vel, mert így kiesik az y és csak x-től fog függeni a μ.

$\mu = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = e^{-4 \cdot \ln x} = \frac{1}{x^4}$ Az abszolút értéket el lehet hagyni, mert feltettük az elején, hogy x pozitív. Az integrál utáni konstanst is el lehet hagyni, mert nekünk csak egy μ kell, amivel beszorozva az eredeti egyenletet egzakttá tesszük.

Tehát szorozzuk be az egyenletet $\mu = \frac{1}{x^4}$-nel.

$$-\frac{x^3 + y^3}{x^4} dx + \frac{y^2}{x^3} dy = 0$$

2. Ez már egzakt-e?

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{x^4} \cdot 3 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -3 \cdot y^2 \cdot x^{-4}$$

Igen, ez már egzakt.

3.

I. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x^3+y^3}{x^4}$ $\xrightarrow{\int dx}$ $F(x,y) = -\ln x - \frac{x^{-3} \cdot y^3}{-3} + C(y)$ Beírjuk a II. egyenletbe.

II. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y^2}{x^3}$

$$\frac{1}{3} \cdot x^{-3} \cdot 3 \cdot y^2 + C'(y) = \frac{y^2}{x^3}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = konstans$$

$$F(x,y) = -\ln x - \frac{y^3}{3 \cdot x^3} + konstans$$

$$-\ln x - \frac{y^3}{3 \cdot x^3} = C$$

Ez a μ-vel beszorzott (x^4-nel leosztott) egyenlet megoldása, de e miatt nem csökken a megoldáshalmaz.

Elsőrendű függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$e^{\int f(x) dx} = \mu(x)$-el egzakttá tehető, vagy megoldható a Lagrange-féle állandók variálása módszerrel

Példa

$$y' - \frac{y}{x-2} = 2 \cdot (x-2)^2$$

Megoldás:

1, **Homogén általános megoldás**

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x-2} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-2}$$

$\ln|y| = \ln|x-2| + C$ $\qquad C \in R$ $\qquad C = \ln C^*$

$\ln|y| = \ln C^* \cdot |x-2|$

$|y| = C^* \cdot |x-2|$ $\qquad$ + Bolzano

$y_{há} = K \cdot (x-2)$ $\qquad K \in R$

2, Keressünk egy **inhomogén partikuláris megoldást**

$y_{ip} = K(x) \cdot (x-2)$ $\qquad$ Visszahelyettesítés

$$K'(x) \cdot (x-2) + \cancel{K(x)} - \frac{\cancel{K(x) \cdot (x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 2 \cdot (x-2)^2$$

$K'(x) = 2 \cdot (x-2)$

$K(x) = (x-2)^2$ $\qquad$ Nem kell a $+C$, elég egy megoldás.

$y_{ip} = K(x) \cdot (x-2) = (x-2)^3$

3, **Inhomohén általános megoldás**

$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = K \cdot (x-2) + (x-2)^3$

4. előadás

Példa

$y_1' = y_1 + y_2 - 2 \cdot e^{-t}$

$y_2' = 4 \cdot y_1 + y_2 + 3 \cdot t$

Homogén általános megoldás

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda \cdot E)$-ből a saját értékek: $\qquad \lambda_1 = 3$

Ehhez tartozó sajátvektor: $\underline{\underline{v}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$

Ehhez tartozó sajátvektor: $\underline{\underline{v}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Alaprendszer

$$\psi = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}}^1, \ldots, e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}}^n$$

Most: $\quad \psi = \begin{pmatrix} e^{3 \cdot t} & e^{-t} \\ 2 \cdot e^{3 \cdot t} & -2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$

A homogén megoldás pedig: $y_h = \psi \cdot c = \begin{pmatrix} y_{h1} \\ y_{h2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ 2 \cdot c_1 \cdot e^{3-t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$

Inhomogén partikuláris megoldás

$y_{ip} = \psi \cdot c(t)$

1. állítás: Ha ψ oszlopai $y' = A \cdot y$ megoldásai, akkor $\underline{\underline{\psi}}'(t) = A \cdot \underline{\underline{\psi}}(t)$

$\psi' \triangleq (\psi_1', \ldots, \psi_n')$, ahol ψ_i a ψ i. oszlopa

Bizonyítás: $\left(\underline{\underline{\psi}}'\right)_i = \left(\underline{\underline{\psi_i}}\right)' = A \cdot \underline{\underline{\psi}}_i = \left(A \cdot \underline{\underline{\psi}}\right)_i$

2. állítás: Az első állítás feltételei melett:

Ha $c(t)$ kiegyenlíti $\psi \cdot c'(t) = b(t)$ egyenletet, akkor $y = \psi \cdot c$ egy jó partikuláris megoldása az inhomogénnek.

Bizonyítás: $\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{\psi}} \cdot \underline{\underline{c}} \Rightarrow \underline{\underline{y'}} = \underbrace{\underline{\underline{\psi}}'}_{\underline{\underline{A \cdot \psi}}} \cdot \underline{\underline{c}} + \underbrace{\underline{\underline{\psi}} \cdot \underline{\underline{c'}}}_{\underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{\psi}} \cdot \underline{\underline{c}}}_{\underline{\underline{y}}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}} + \underline{\underline{b}}$

Elég a $\psi \cdot c' = b$ egyenletet megoldani c'-re.

$b = \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot t \end{pmatrix}$

Azaz $\left.\begin{aligned} c_1'(t) \cdot e^{3 \cdot t} + c_2'(t) \cdot e^{-t} = 2 \cdot e^{-t} \\ 2 \cdot c_1'(t) \cdot e^{3 \cdot t} - 2 \cdot c_2'(t) \cdot e^{-t} = 3 \cdot t \end{aligned}\right\}$

A felső kétszeresét hozzáadva az alsóhoz:

$$4 \cdot c_1'(t) \cdot e^{3*t} = 3 \cdot t - 4 \cdot e^{-t}$$

$$c_1'(t) = \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{-3*t} - e^{-4 \cdot t}$$

A felső kétszeresét kivonva az alsóból:

$$-4 \cdot c_2'(t) \cdot e^{-t} = 3 \cdot t + 3 \cdot e^{-t}$$

$$c_2'(t) = -\frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{t} - 1$$

Integrálások után...

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{4} \cdot e^{-4 \cdot t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot t - \frac{1}{12} \cdot e^{-3 \cdot t} \\ c_2(t) &= -t - \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{t} + \frac{3}{4} \cdot e^{t} \end{aligned}\right\} \text{visszahelyettesítés}$$

$$y_{ip1} = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{2}{3}$$

$$y_{ip2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t} + t - \frac{5}{3}$$

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{2}{3} \\ 2 \cdot c_1 \cdot e^{3-t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t} + t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Példa

$y_1' = y_1 - 10 \cdot y_2 + e^t$

$y_2' = -y_1 + 4 \cdot y_2 + \sin(t)$

→ $A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -10 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 10 = 4 - 5 \cdot \lambda + \lambda^2 - 10 = 0$

$\lambda^2 - 5 \cdot \lambda - 6 = 0$ → $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$

λ_1-hez tartozó sajátvektor: $\underline{\underline{v^1}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

λ_2-hez tartozó sajátvektor: $\underline{\underline{v^2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ezekből már tudjuk ψ-t.

$\psi = \begin{pmatrix} 5 \cdot e^{-t} & -2 \cdot e^{6 \cdot t} \\ 1 \cdot e^{-t} & e^{6 \cdot t} \end{pmatrix}$

$y_{há} = \psi \cdot c$, azaz $\begin{matrix} y_{há1} = 5 \cdot c_1 \cdot e^{-t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{6 \cdot t} \\ y_{há2} = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{6 \cdot t} \end{matrix}$

Kéne olyan c, hogy $\psi * c' = b$, azaz

$$\left.\begin{matrix} e^t = 5 \cdot c_1' \cdot e^{-t} - 2 \cdot c_2' \cdot e^{6 \cdot t} \\ \sin(t) = c_1' \cdot e^{-t} + c_2' \cdot e^{6 \cdot t} \end{matrix}\right\}$$

Alsó kétszeresét hozzáadjuk a másikhoz:

$$e^t + 2\sin(t) = 7 \cdot c_1' \cdot e^{-t} \Rightarrow c_1' = \frac{1}{7} \cdot e^{2t} + \frac{2}{7} \cdot e^t \cdot \sin(t)$$

Alsó ötszörösét kivonjuk a felsőből:

$$e^t - 5 \cdot \sin(t) = 7 \cdot c_2' \cdot e^{6 \cdot t} \Rightarrow c_2' = -\frac{1}{7} \cdot (e^{-5 \cdot t} - 5 \cdot e^{-6} \cdot \sin(t))$$

Integrálás után:

$$c_1(t) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot t} - e^t \cdot (\cos(t) - \sin(t))\right)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{5}{37} \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot (\cos(t) - 6 \cdot \sin(t))\right)$$

visszahelyettesítve az $y_{há} = \psi \cdot c$-be $\Rightarrow$ $\begin{matrix} y_{ip1} = \frac{3}{10} \cdot e^t + \frac{35}{37} \cdot \sin(t) - \frac{25}{37} \cdot \cos(t) \\ y_{ip2} = \frac{1}{10} \cdot e^t + \frac{1}{37} \cdot \sin(t) - \frac{6}{37} \cdot \cos(t) \end{matrix}$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} \ldots$$

Laplace-transzformáció

$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$

Definíció: Ha $Do(f) \supseteq R^+ \cup \{0\}$, akkor $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$, feltéve, hogy ez az integrál konvergens

Tétel: Ha f szakaszonként folytonos $R^+ \cup \{0\}$-n és $\exists M, c \in R$, hogy $|f(t)| \leq M \cdot e^{c \cdot t}$, akkor $\forall s > c$-re $\exists F(s)$

Definícióból következik: $\mathcal{L}$ lineáris operátor

4. gyakorlat

$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$ $\quad$ $P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

egzakt, ha $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Young-tétel: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

$\Leftarrow$ Feladatokból adódik, hogy kell megcsinálni F-et

Komplex analízis

Komplex aritmetika

I. Algebrai definíció:

$$\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n\}, n \in \mathbb{N}, a_0 \ldots a_n = \mathbb{R}$$

$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$
$x^3 - x^2$
$x^2 - 1$
$x^2 - x$
$x - 1$

$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}[X]/x^2 - 1 = \{a * x + b; a, b \in \mathbb{R}\}$

$p^2(x) + 1 = 0$

$x^2 + 1 = 0$

$x = i$ $\qquad\qquad\qquad\qquad i^2 = -1$

2. Halmazelméleti definíció

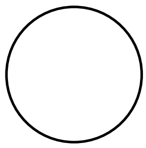
$w \cdot z = (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$

lineárisan izomorf: $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

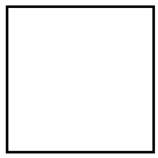
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$

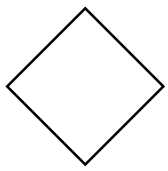
$\|z\|_2$



$\|z\|_\infty$



$\|z\|_1 = |x| + |y|$



(egyes norma)

3. Geometriai definíció

$w \xrightarrow{\mathcal{A}} z \cdot w$ $\qquad$ forgatva nyújtás: $\begin{matrix} \text{forgatás} \arg(\mathrm{z}) - \text{vel} \\ \text{nyújtás r} - \text{szeresére} \end{matrix}$

$[\mathcal{A}] = ?$ $\qquad \left[\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix}$

forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$

$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$

$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{C}$ topológia

gömbi környezet: $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \varepsilon\}$

$\dot{B}_\varepsilon(z_0) = B_\varepsilon(z_0) \backslash z_0$ $\qquad$ (kipontozott környezet)

$H \subseteq \mathbb{C}$ nyílt, ha minden $z \in H$-ra $\exists \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(z) \subseteq H$

$H \subseteq \mathbb{C}$ zárt, ha $\mathbb{C} \backslash H$ nyílt

$H \subseteq \mathbb{C}$ korlátos, ha $\exists \varepsilon > 0$: $H \subseteq B_\varepsilon(0)$

Heine-Borel tétel: Véges dimenziós normált térben zárt és korlátos halmaz kompakt.

Definíció: $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, ha minden $\{U_i\}_{i\in I}$ nyílt halmazokból álló rendszer esetén, ha $H \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$; akkor van $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $H \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$

$\mathbb{C}$ kompaktifikációja

(Alexandrov-féle egypontú kompaktifikáció)

$P \to z$

$E \to \infty$

sztereografikus projekció

$\bar{\mathbb{C}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\dot{B}_\varepsilon(\infty) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$

Állítás: $\bar{\mathbb{C}}$ kompakt

Bizonyítás: $\bar{\mathbb{C}} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

$\infty \in U_i \rightarrow B_\varepsilon(\infty) \subseteq U_{i_0}$

$\overline{B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)} \in \bigcup_{j\in J} U_j$ J véges

$|J| + 1$ db U_i-vel le van fedve $\bar{\mathbb{C}}$.

Folytonosság

Definíció: $f: \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}, z_0 \in Dom(f)$. Az f folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\forall z \in Dom(f)$, $z \in B_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon\big(f(z_0)\big)$

$f = u + i \cdot v$

$u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

$f = \binom{u}{v}$ $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ $x, y \in \mathbb{R}$

Állítás: f folytonos $\Leftrightarrow$ u és v is folytonos

Példa: $f(x + i \cdot y) = x + y + i \cdot (x^2 + y^2)$

$u(x,y) = x + y$

$v(x,y) = x^2 + y^2$

Határérték

$\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}, u \in Dom(f), A \in \bar{\mathbb{C}}$

$\exists \lim\limits_{u} f = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0) \, \exists\delta > 0 \; \forall z\varepsilon Dom(f)\backslash\{u\}$ teljesül, hogy $z \in B_\delta(u) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon(A)$

Példa

a, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$ $\varepsilon > 0$, kell $\delta > 0$: $|z| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\varepsilon}$

$\delta \coloneqq \varepsilon$

b, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$ $\varepsilon > 0$, kell $\delta > 0$: $|z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \varepsilon$

$\delta \coloneqq \varepsilon$

5. előadás

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
$t^n \; (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$e^{a\cdot t}$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\cdot\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{2\cdot\omega\cdot s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cdot\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$sh(a\cdot t)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$ch(a\cdot t)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$e^{a\cdot t}$-re végigszámolva: $\mathcal{L}\{e^{a\cdot t}\}(s)=\int_0^\infty e^{a\cdot t}\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^\infty e^{a-s\cdot t}dt \overset{ha\ a\neq s}{\triangleq} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)\cdot t}}{a-s}\right]_0^b=$

$=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{(a-s)\cdot b}-1}{a-s}=\begin{cases}\infty, \text{ha a} > \text{s}\\ \frac{1}{s-a}, \text{ha a} < \text{s}\end{cases}$

Tétel: $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=s\cdot\mathcal{L}\{(t)\}-f(0)=s\cdot F(s)-f(0)$, ha $\lim_{t\to\infty}f(t)\cdot e^{-st}=0, f, f'$ folytonos $[0,\infty]$-en

Bizonyítás: $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=\int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-st}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(t)\cdot e^{-st}dt=$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{[f(t)\cdot e^{-st}]_0^\infty}_{0-f(0)}+s\cdot\underbrace{\int_0^b f(t)\cdot e^{-st}dt}_{F(s)}\right)=s\cdot F(s)-f(0)$$

Következmény: $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s)=s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0)-f'(0)$

Bizonyítás: $s\cdot\mathcal{L}\{f'\}-f'(0)=s\cdot\big(s\cdot F-f(0)-f'(0)\big)$

Általánosan: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)=s^n\cdot F(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^i\cdot f^{(n-1-i)}(0)$

Példa

$y''+3\cdot y'-10\cdot y=6\cdot e^{4\cdot t}$ Kezdeti feltételek: $y(0)=0$ $y'(0)=0$

$\underbrace{s^2\cdot Y-s\cdot y(0)-y'(0)}_{\mathcal{L}\{y''\}}+3\cdot\underbrace{\big(s\cdot Y-y(0)\big)}_{\mathcal{L}\{y'\}}-10\cdot Y=\frac{6}{s-4}$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve:

$$(s^2+3\cdot y-10)\cdot Y=\frac{6}{s-4}\Rightarrow Y=\frac{6}{(s-4)\cdot(s-2)\cdot(s+5)}=\cdots=\frac{-\frac{3}{7}}{s-2}+\frac{\frac{1}{3}}{s-4}+\frac{\frac{2}{21}}{s+5}$$

Ilyen alakból már vissza tudjuk alakítani az inverz transzformáció képleteivel:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)=-\frac{3}{7}\cdot e^{2\cdot t}+\frac{1}{3}\cdot e^{4\cdot t}+\frac{2}{21}\cdot e^{-5\cdot t}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1) $t\cdot g(t)$	$-1\cdot\frac{d}{ds}\cdot G(S)$
2) $t^n\cdot g(t)$ $(n\in\mathbb{N})$	$(-1)^n\cdot\frac{d^n}{ds^n}\cdot G(s)$
3) $e^{a\cdot t}\cdot g(t)$	$G(s-a)$ (eltolás)
4) $g(a\cdot t)$	$\frac{1}{a}\cdot G\left(\frac{s}{a}\right)$ (nyújtás)

Példa

- $\mathcal{L}^{-1}\{\cos(\omega\cdot t)\}$ kiszámítható $\mathcal{L}\{\sin(\omega\cdot t)\}$-ből, mert: $\frac{1}{\omega}\cdot\mathcal{L}\cdot\{\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\}=\frac{1}{\omega}\cdot\mathcal{L}\cdot\{\sin(\omega\cdot t)'\}=\frac{1}{\omega}\cdot\left(s\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-s(\omega\cdot 0)\right\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}\{t\cdot\sin(\omega\cdot t)\}$ kiszámítható $\mathcal{L}\{\sin(\omega\cdot t)\}$-ből az 1) segítségével

- $ch(a \cdot t)$ kiszámítható $sh(a \cdot t)$-ből a 2) segítségével

Példa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\}$$

1. megoldás $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \overset{2)\ felhasználásával}{\Rightarrow} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\} = -e^{2\cdot t} \cdot \underbrace{t}_{g(t)} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2}$

2. megoldás $\quad \int \frac{-1}{(s-2)^2} ds = \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{G \to g = e^{2\cdot t}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = -t \cdot e^{2\cdot t}$

Példa

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{s-4}\right)'' = \frac{2}{(s-4)^3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\} = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{4\cdot t}$$

$$\frac{1}{s-4} = G \Rightarrow g = e^{4\cdot t}$$

Példa

$y'' - 2 \cdot y' + y = x \qquad$ Kezdeti feltétel: $\qquad y(0) = 0 = y'(0)$

Laplace transzformálás után:

$$\underbrace{s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)}_{y''} - 2 \cdot \underbrace{(s \cdot Y - y(0))}_{y'} + Y = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 - 2 \cdot s + 1) \cdot Y = \frac{1}{s^2}$$

$$Y = \frac{1}{s^2 \cdot (s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} = \cdots = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Inverz Laplace-transzformálva:

$$y = 2 + x - 2 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

Példa

$y' = z \qquad$ Kezdeti feltétel: $\qquad y(0) = 1$ és $z(0) = 0$

$z' = y$

$$\left.\begin{aligned} -Z &= s \cdot Y - y(0) \\ s \cdot Z - z(0) &= Y \end{aligned}\right\}$$

$(s^2 + 1) \cdot Y = s \qquad -(s^2 + 1) \cdot Z = -1$

$Y = \frac{s}{s^2+1} \qquad Z = \frac{-1}{s^2+1}$

$y = \cos(t) \qquad z = \sin(t)$

Példa

$y' + z' + y + z = 1 \qquad y(0) = -1$

$y' + z' = e^t \qquad z(0) = 2$

…

Megoldás

$$y = 1 - 2 \cdot e^t + t \cdot e^t$$

$$z = 2 \cdot e^t - t \cdot e^t$$

Példa (Általános megoldás keresése Laplace-transzformációval)

$y'' + y = e^{-t}$ Új jelölések: $y_0 = y(0)$ $y_1 = y'(0)$

$s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1 + Y = \frac{1}{s+1}$

$Y = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{s \cdot y_0}{s^2+1} + \frac{y_1}{s^2+1}$

$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot (-\cos(t) + \sin(t)) + y_0 \cdot \cos(t) + y_1 \cdot \sin(t)$

$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) \cdot \cos(t) + \left(y_1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t)$

6. előadás

Példa

$y'' - y = 0$ $y_0 = y(0)$

$y_1 = y'(0)$

$0 = s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1 - Y = (s^2 - 1) \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1$

$Y = \frac{s \cdot y_0 + y_1}{s^2-1} = y_0 \cdot \frac{s}{s-1} + y_1 \cdot \frac{1}{s^2-1}$ → $Y = y_0 \cdot \mathrm{ch}(t) + y_1 \cdot \mathrm{sh}(t) = c_1 \cdot \mathrm{ch}(t) + c_2 \cdot \mathrm{sh}(t)$

Példa

$y''' - y = 1$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Visszavezethető elsőrendűre

$y_1 = y'$ $y_2 = {y_1}'$ $y_2' + y = 1$

$\frac{1}{s} = s^3 \cdot Y - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) + Y$ → $Y = \frac{1}{s \cdot (s^3+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C \cdot s + D}{s^2-s+1}$

$Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{\frac{2}{3} \cdot s - \frac{1}{3}}{s^2-s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s - \frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-t} - \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$

Konvolúció ($\mathcal{L}^{-1}$ kiszámolásához)

Definíció: $\forall (t > 0)$ $f * g(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x) dx$

1. Állítás: kommutatív $f * g = g * f$

2. Állítás: $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$ $(\Rightarrow f * g = \mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\})$

Példa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s \cdot (s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right\} = 1 * \sin(t) = \sin(t) * 1 = \int_0^t \sin(x)\, dx =$

$= -[\cos(t)]_0^t = 1 - \cos(t)$

Ellenőrzés: $\mathcal{L}\{1 - \cos(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^1+1} = \frac{s^2+1-s^2}{s \cdot (s^2+1)} = \frac{1}{s \cdot (s^2+1)}$

Vektoranalízis

Vektorértékű függvényeket akarunk integrálni görbéken és felületeken

1. Mik ezek a görbék, felületek?

2. Mekkorák ezek?

3. Irányítás.

Felület

Definíció: $1 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt, korlátos, összefüggő, mérhető, nem üres belsejű halmaz

$r = r(u)$ A-n értelmezett, szakaszonként folytonosan differenciálható, $\mathbb{R}^n$-be képező injektív (1-1) függvény úgy, hogy a Jakobi-determináns oszlopai lineárisan függetlenek (A belsejében)

$$\begin{pmatrix} \nabla r_1 \\ \vdots \\ \nabla r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr_1}{du_1} & \cdots & \frac{dr_1}{du_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dr_n}{du_1} & \cdots & \frac{dr_n}{du_n} \end{pmatrix}$$

$Rg(r)$ (Rg: értékkészlet) az r általá definiált **n-dimenziós** (m-dimenzióbeli) **felület**. r ennek a felületnek az explicit egyenlete.

A felület **térrész**, ha $m = n$, **valódi felület**, ha $n = m - 1$, **görbe**, ha $n = 1$.

Egy pont **belső pont**, ha van olyan homeomorfizmus (folytonos és kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, bijekció), ami a (nyílt) n-dimenziós egységgömböt a felületbe képezi úgy, hogy a pont benne van a képben. Ezek halmaza: $IntF$ (ha F a felület). F **zárt**, ha minden pontja belső pont.

5. gyakorlat

Példa

$$f(z) = \begin{cases} \underbrace{\bar{z} + z}_{\text{valós}} + \underbrace{\frac{i \cdot Im(z)}{|z|}}_{\text{valós}}, \text{ha } z = 0 \\ \\ 0, \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

$z = x + i \cdot y$

$$v(x, y) = \bar{z} + z = 2 \cdot x$$

$$u(x, y) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \neq \lim\limits_{y \to 0}$, ezért nincs határértéke.

Példa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4 \cdot x_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} t \to x_1(t) \in Diff \\ t \to x_2(t) \in Diff \end{matrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) = 3$$

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 8 = 3$$

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 5 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

Sajátvektorok

$$\lambda = 1: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2: \quad \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ψ együtthatómátrixa:

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} -3 \cdot e^t & 1 \cdot e^{5 \cdot t} \\ 1 \cdot e^t & 1 \cdot e^{5 \cdot t} \end{bmatrix}$$

$$x = \psi(t) \cdot c = \begin{pmatrix} -3 \cdot c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{5 \cdot t} \\ c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{5 \cdot t} \end{pmatrix}$$

Kezdeti érték feltétel

$x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = -1$

Ha már megvan ψ, akkor

$1 = -3 \cdot c_2 + c_2$

$-1 = c_1 + c_2$

Egyébként Laplace-transzformálással:

$(\mathcal{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0))$

$s \cdot X_1 - 1 = 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2$

$s \cdot X_2 + 1 = X_1 + 4 \cdot X_2 \quad \rightarrow \quad X_1 = (s-4) \cdot X_2 + 1$ (elsőbe beírjuk)

$(s-2) \cdot [(s-4) \cdot X_2 + 1] - 1 = 3 \cdot X_2$

$(s-2) \cdot (s-4) \cdot X_2 + s - 2 - 1 = 3 \cdot X_2$

$\big((s-2) \cdot (s-4) - 3\big) \cdot X_2 = 3 - s$

$X_2 = \frac{3-s}{s^2-6 \cdot s+8} = \frac{3-s}{(s-1)\cdot(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} = \frac{A\cdot(s-5)+B(s-1)}{(s-1)\cdot(s-5)}$

$s = 1$: $A \cdot (-4) = 2 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$

$s = 5$: $B \cdot 4 = -2 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$

$X_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-5}$

$\mathcal{L}^{-1}\{X_2\} = -\frac{1}{2} \cdot e^t + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{5 \cdot t}$

2. egyenlet: $\dot{x}_2 = x_1 + 4 \cdot x_2$ Ebből kifejezzük x_1-et:

$x_1 = \dot{x}_2 - 4 \cdot x_2 = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{5 \cdot t}\right)' - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{5 \cdot t}\right)$

Példa

$\dot{x}_1 = 3 \cdot x_1 + x_2 \qquad x_1(0) = 1$

$\dot{x}_2 = x_1 + 3 \cdot x_2 \qquad x_2(0) = -1$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$s \cdot X_1 - 1 = 3 \cdot X_1 + X_2$

$s \cdot X_2 + 1 = X_1 + 3 \cdot X_2$

$s \cdot (X_1 + X_2) = 4 \cdot (X_1 + X_2)$

$(s-4) \cdot (X_1 + X_2) = 0 \quad \forall s$-re

$X_1 = -X_2$

Inhomogén általános differenciál egyenletrendszer általános megoldása

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_1 + e^{2 \cdot t}$

I. Homogén általános megoldás

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2 \cdot t} \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_h = \psi(t) \cdot c = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

II. Inhomogén partikuláris megoldás

$c = c(t)$, állandók variálása módszer

$$\psi(t) \cdot c'(t) = b$$

$$\underline{c}'(t) = \underline{\underline{\psi}}(t)^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\left.\begin{matrix} (1) & e^t \cdot c_1' + e^{-t} \cdot c_2' = 0 \\ (2) & e^t \cdot c_1' - e^{-t} \cdot c_2' = e^{2\cdot t} \end{matrix}\right\}$$

Két egyenletet összeadva:

$$2 \cdot c_1' \cdot e^t = e^{2\cdot t}$$

$$c_1' = \frac{1}{2} \cdot e^t$$

$$c_1 = \int \frac{1}{2} \cdot e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t$$

Első egyenletbe behelyettesítve és átrendezve:

$$c_2' = -\frac{e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t}{e^{-t}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{3\cdot t}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \cdot \int e^{3\cdot t} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3\cdot t}$$

$$\underline{x}_p = \underline{\underline{\psi}}(t) \cdot \underline{c}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t - e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3\cdot t} \\ e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t + e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$x = x_h + x_p = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t - e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3\cdot t} \\ e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t + e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3\cdot t} \end{pmatrix}$$

Példa

$$y' + \frac{2\cdot y}{x} = \sin(x^3 + 1)$$

I. $y' + \frac{2y}{x} = 0$

$$y' = -\frac{2\cdot y}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \qquad /\int$$

$$\ln|y| = -2 \cdot \ln|x| + C \qquad /e^{()}$$

$$|y| = e^{\ln|x|^{-2}} + C$$

$$|y| = |x|^{-2} \cdot C^*$$

Bolzano-tétel

$$y = K \cdot x^{-2}$$

$$y_p = K(x) \cdot x^{-2}$$

Visszahelyettesítés: $K'(x) \cdot x^{-2} + \cancel{K(x) \cdot (-2) \cdot x^{-3}} + \frac{\cancel{2\cdot K(x) \cdot x^{-2}}}{\cancel{x}} = \sin(x^3 + 1)$

$$K'(x) \cdot x^{-2} = \sin(x^3 + 1)$$

$K'(x) = x^2 \cdot \sin(x^3+1)$

$K(x) = \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x^3+1)\,dx = \frac{1}{3} \cdot (-\cos(x^3+1))$ (helyettesítéses integrálás)

Példa

$y'' - 10 \cdot y' + 9 \cdot y = 5 \cdot t$ $\quad y(0) = -1,$ $\quad y'(0) = 2$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)$

$s^2 \cdot Y + s - 2 - 10 \cdot (s \cdot Y + 1) + 9 \cdot Y = \frac{5}{s^2}$

$Y \cdot \underbrace{(s^2 - 10 \cdot s + 9)}_{(s-1)\cdot(s-9)} + s - 12 = \frac{5}{s^2}$

$Y = \frac{\frac{5}{s^2} - s + 12}{(s-1)\cdot(s-9)} = \frac{5 - s^3 + 12 \cdot s^2}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-9} = \frac{A \cdot s \cdot (s-1)\cdot(s-9) + B \cdot (s-1) \cdot (s-9) + C \cdot s^2 \cdot (s-9) + D \cdot s^2 \cdot (s-1)}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-9)}$

$\left.\begin{array}{l} s = 0 \\ s = 1 \\ s = 9 \end{array}\right\} \text{nem elég, kell még egy: } s = -1$

Példa

$y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = 2 \cdot e^{3 \cdot x}$

$\lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = 2$

$y_{há} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2 \cdot x}$

Ha $e^{\alpha \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) + q(x) \cdot \cos(\beta \cdot x))$

→ $x^m \cdot e^x \cdot (P(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) + Q(x) \cdot \cos(\beta \cdot x))$

m: $\alpha \pm \beta \cdot i$ multiplicitása a karakterisztikus polinomban

Példa

$y'' + 6 \cdot y' + 9 \cdot y = 2 \cdot e^{-3 \cdot x}$

$\lambda^2 + 6 \cdot \lambda + 9 = 0$

$\lambda_{1,2} = -3$

$y_{há} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$

$y_p = x^2 \cdot A \cdot e^{-3 \cdot x}$

Példa

$y'' + 4 \cdot y = \cos(2 \cdot x)$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2 \cdot i$ $\quad \alpha = 0, \beta = 2, 0 \pm 2 \cdot i$ $\quad \to m = 1$

$y_{há} = C_1 \cdot \sin(2 \cdot x) + C_2 \cdot \cos(2 \cdot x)$

$y_p = x \cdot (A \cdot \sin(2 \cdot x) + B \cdot \cos(2 \cdot x))$

6. gyakorlat

Differenciálhatóság

$\mathbb{R}$-beli

$f \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad x_0 \in int(Domf)$

f $\mathbb{R}$-differenciálható (totálisan), ha van olyan $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés, hogy: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$

$$\binom{x}{y} = \binom{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

Jakobi-determináns: $Jf_{x(0)} = [A] = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix}$ $\qquad A = df(x)$

Példa

$$z \xrightarrow{f} w \cdot z = (w_1 + i \cdot w_2) \cdot (x + i \cdot y) = \underbrace{w_1 \cdot x - w_2 \cdot y}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(w_2 \cdot x + w_1 \cdot y)}_{v(x,y)}$$

$$f = u + i \cdot v$$

$$z = x + i \cdot y$$

konst: $w = w_1 + i \cdot w_2$

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} = [w_1 + i \cdot w_2] = w$$

$$(w \cdot z)' = w$$

$$(5 \cdot x)' = 5$$

Példa

$$z \to z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(2 \cdot x \cdot y)}_{v(x,y)}$$

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x & -2 \cdot y \\ 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix} = [2 \cdot x + i \cdot 2 \cdot y] = [2 \cdot z]$$

$$(z^2)' = 2 \cdot z$$

Példa

$$z \to \bar{z} = \overline{(x + i \cdot y)} = x - i \cdot y$$

$$u(x,y) = x$$

$$v(x,y) = -y$$

$$Jf = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{C}$$

Definíció: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} z_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(f))$. Azt mondjuk, hogy f komplex differenciálható, ha van olyan $w \in \mathbb{C}$, hogy $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w$. Ilyenkor $f'(z_0) = w$. $\qquad f \in \mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0)$

Példa

Milyen $n \in \mathbb{Z}$-re komplex differenciálható a 0-ban az $f = \begin{cases} \bar{z} \cdot z^n, \text{ha } z \neq 0 \\ 0, \text{ha } z = 0 \end{cases}$ függvény?

$n = 0$ $\qquad f(z) = \bar{z}$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z} - 0}{z} = \nexists$$

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$\bar{z} = r \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi))$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \cos(-2 \cdot \varphi) + i \cdot \sin(-2 \cdot \varphi)$$

Milyen hosszú?

$$\left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|} = 1$$

$n = 1$ $\qquad f(z) = \bar{z} \cdot z$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\cdot z-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\cdot z}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$

$f'(0)=0$ $\qquad$ $n\geq 1$ esetén $f\in Diff_{\mathbb{C}}(0)$

$n<1$ esetén $f\notin Diff_{\mathbb{C}}$

Tétel: $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}\ z_0\in Int(Dom(f))$

$$f\in Diff_{\mathbb{C}}(z_0)\Leftrightarrow\begin{cases} f=\binom{u}{v}\in Diff_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)\\ \text{és}\\ \underbrace{Jf(x_0,y_0)}_{\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}}\in\mathbb{C}\end{cases}$$

$z_0=x_0+i\cdot y_0$

$f=u+i\cdot v$

Bizonyítás: $[w]=Jf(x_0,y_0)$

$$\exists\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-[w]\cdot(z-z_0)}{|z-z_0|}=0$$

$$\exists\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-|w|\cdot\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right|=0$$

$$\exists\lim_{z\to z_0}\underbrace{\left|\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right|}_{1}\cdot\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-[w]\right)=0$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-w\right)=0$$

Cauchy-Riemann-egyenletek

$f=u+v\cdot i$

$$\begin{bmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} I,\quad \partial_x u=\partial_y v\\ II,\quad \partial_y u=-\partial_x v\end{array}\right\}$$

f komplex differenciálható $\Leftrightarrow\begin{cases}\text{1. (u, v) totálisan diffható}\\ \text{2. Teljesíti a C} - \text{R egyenleteket}\end{cases}$

Definíció: $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ reguláris a $z_0\in int(Dom(f))$ pontban, ha a z_0-nak van olyan $B_\varepsilon(z_0)$ nyílt környezete, ahol a függvény minden pontban komplex differenciálható.

Példa

Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z)=|x|+|y|\cdot i,\ z=x+i\cdot y$

$u=|x|,\ v=|y|$

Totálisan differenciálható: tengelyeken kívül

$-x+i\cdot y$ $\qquad$ $x+i\cdot y$

$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$-x-i\cdot y$ $\qquad$ $x-i\cdot y$

$\mathbb{C}$ differenciálható: I. és III. síknegyed (nyílt: tengelyek nincsenek benne)

$\{x + i \cdot y \in \mathbb{C} | x \cdot y > 0\}$

Reguláris: ugyanitt

Példa

$f(x + i \cdot y) = x^2 + i \cdot y^3$

$u = x^2, \qquad v = y^3$

$\binom{u}{v}$ totálisan differenciálható

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot x & 0 \\ 0 & 3 \cdot y^2 \end{bmatrix}$$

Differenciálhatóság feltétele: $2 \cdot x = 3 \cdot y^2$

$y^2 = \frac{2}{3} \cdot x$ parabola

$\{x + i \cdot y \in \mathbb{C} | 2 \cdot x = 3 \cdot y^2\}$

Reguláris: sehol, mert nincs belső pontja

Harmonikus társkeresés

$\phi(x, y)$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}^2 \to R$ függvény harmonikus, ha ($\Delta\phi \equiv 0$)

$\partial_{xx}^2 \phi + \partial_{yy}^2 \phi = 0$

Tétel: U egyszeresen összefüggő, nyílt, $\subseteq \mathbb{C}$.

$f: U \to \mathbb{C}$ harmonikus komponensekkel rendelkezik $\Leftrightarrow f$ reguláris.

Ekkor $f = u + i \cdot v$-ben is harmonikus társa v-nek. Young-tétel

I. $\partial_x u = \partial_y v$ II. $\partial_y u = -\partial_x v$

$\partial_{xx}^2 u = \partial_{xy}^2 v$ $\partial_{yy}^2 u = -\partial_{xy}^2 v = -\partial_{yx}^2 v$

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 v = \partial_{xy}^2 v - \partial_{xy}^2 v = 0$$

7. előadás

Felület definíciója:

$n < m$ $\qquad r_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad$ n-dimenziós, m-dimenzióbeli felület

- folytonos legyen → tudjuk deriválni

- Jakobi-determináns oszlopai lineárisan függetlenek

$r(u, v) = r^*(u, v, w)$ → $3.\, oszlop\!: \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ → lineárisan függő

$r(u, v) = (u + v, u + v, u + v)$ → $r(t) = (t, t, t)$

$$\begin{pmatrix} \frac{dr}{du} & \frac{dr}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(t) = (t, f(t))$ görbe $\qquad$ deriváltja: $\qquad \left(t, \dot{f(t)}\right)\Big|_{t=t_0} = \underbrace{\left(1, f'(t_0)\right)}_{\substack{(t_0, f(t_0)) - beli \\ érintő}}$

$\dot{r}(t)$ az $r(t_0)$-beli érintővektor

Érintősík normálisa merőleges a felületi görbék érintővektoraira.

Görbék és felületek paraméteres megadása:

- a,b pontot összekötő szakasz

  $r(t) = a + t \cdot (b - a) \qquad t \in [0;1], \qquad (a, b \in \mathbb{R}^2)$

- R sugarú, 0 középpontú kör $\mathbb{R}^2$-ben

  $r(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0; 2 \cdot \pi]$

- R sugarú, z tengelyű, origó csúcsú, $\frac{\pi}{4}$ félnyílásszőgű, egyenletes emelkedésű kúp

  $r(t) = R \cdot (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t), t) \qquad t \in [0; 2 \cdot \pi]$

- R sugarú, 0 középpontú gömbfelület

  $r(u, v) = R \cdot (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u))$

  $v \in [0; 2 \cdot \pi], \qquad u \in [0; \pi]$

- R sugarú, z tengelyű, h magasságú hengerpalást

  $r(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v) \qquad u \in [0; 2 \cdot \pi], \qquad v \in [0; h]$

- R sugarú, R magasságú, 0 középpontú, z tengelyű, $\frac{\pi}{4}$ félnyílásszögű kúppalást

  $r(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), v) \qquad u \in [0; 2 \cdot \pi], \qquad v \in [0; R]$

- R sugarú, 0 középpontú körlap az x,y síkban

  - mint 2-dimenziós térrész ($n = m = 2$)

  $r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) \qquad v \in [0; 2 \cdot \pi], \qquad u \in [0; R]$

  - mint 3-dimenziós valódi felület ($n = 2, m = 3$)

  $r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0)$

- R sugarú, z tengelyű, h magasságú henger

$$r(u, v) = \begin{cases} ((u + v) \cdot \cos(u), (v + R) \cdot \sin(u), 0) & u \in [0; 2 \cdot \pi],\ v \in [-R; 0] \\ (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v) & u \in [0; 2 \cdot \pi],\ v \in [0; h] \\ ((v - R) \cdot \cos(u), (v - R) \cdot \sin(u), h) & u \in [0; 2 \cdot \pi],\ v \in [h; h + R] \end{cases}$$

Speciális esetek: görbék

$r: I \to \mathbb{R}^m \qquad r(t)$ irányítása $\dot{r}(t)$

t_0-beli érintővektor: $\dot{r}(t_0)$

t_0-beli érintő egységvektor: $\frac{r(\dot{t_0})}{|\dot{r}(t_0)|}$

Ívhossz

Közelítő poligon hossza: $\sum_{i=0}^{n} |r(t_i + 1) - r(t_i)|$

$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{r(t_i + 1) - r(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{\dot{r}(t_i)} \cdot (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n} |\dot{r}(t_i)| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

→ $\int_a^b |\dot{r}(t)| dt$ ívhossz

Példa

origó középpontú, R sugarú kör kerülete = ?

$r(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)) \qquad t \in [0,2 \cdot \pi]$

$\dot{r}(t) = (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t))$ → $|\dot{r}(t)| = \sqrt{R^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = R$

→ ívhossz: $\int_0^{2\cdot\pi} R = 2\cdot R\cdot\pi$

Példa

$s(t) = \int_a^t |\dot{r}(\tau)| d\tau$ Szigorúan, monoton nő: invertálható

r ívhossz szerinti paraméterezése

$\rho(s) = r\big(t(s)\big)$

→ $\rho'(s) = \cdots = \frac{\dot{r}(t(s))}{|\dot{r}(t(s))|}$

Speciális esetek: felületek

$r(u,v)$ $r_u \times r_v$ ← irányítás

(u_0, v_0)-beli vektor az $r(u_0, v_0)$-beli felületi normális

Felületi normális normálva: felületi egységnormális

Gömb (egységgömb)

$r(u,v) = (\sin(u)\cdot\cos(v), \sin(u)\cdot\sin(v), \cos(u))$ $u \in [0,\pi]$, $v \in [0, 2\cdot\pi]$

$r_u = (\cos(u)\cdot\cos(v), \cos(u)\cdot\sin(v), -\sin(u))$

$r_v = (-\sin(u)\cdot\sin(v), \sin(u)\cdot\cos(v), 0)$

$$r_u \times r_v = \left(\sin^2(u)\cdot\cos(v), \sin^2(u)\cdot\sin(v), \underbrace{\sin(u)\cdot\cos(u)\cdot\cos^2(v) + \sin(u)\cdot\cos(u)\cdot\sin^2(v)}_{\sin(u)\cdot\cos(u)}\right) = \sin(u)\cdot r(u,v)$$

7. gyakorlat

Komplex integrálás

Definíció: $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$, ez görbe, ha van olyan $G: [a;b] \subseteq \mathbb{R}$, ami véges kivétellel folytonosan differenciálható és folytonos. (néhol eltörhet a görbe) $Ran(b) = \Gamma$

$G(a)$ kezdőpontja Γ-nak

$G(b)$ végpontja Γ-nak

Γ zárt, ha $G(a) = G(b)$

Γ egyszerű, ha G injektív (egy értéket csak egyszer vesz fel, nem metszi át magát)

Példa

$$z(t) = x(t) + i\cdot y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cdot\cos(t) \\ R\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$z(t) = R\cdot\cos(t) + i\cdot R\cdot\sin(t) = R\cdot e^{i\cdot t}$$

$\dot{z}(t) = R\cdot(-\sin(t)) + i\cdot R\cdot\cos(t) = R\cdot(\sin(-t) + i\cdot\cos(-t)) = R\cdot\frac{1}{i}\cdot(i\cdot\sin(-t) + i^2\cdot\cos(-t)) = R\cdot\frac{1}{i}\cdot (-\cos(-t) + i\cdot\sin(-t)) = R\cdot\underbrace{\frac{1}{i}}_{-i}\cdot(-\cos(t) - i\cdot\sin(t)) = R\cdot i\cdot(\cos(\mathrm{t}) + \mathrm{i}\cdot\sin(t)) = \mathrm{R}\cdot i\cdot e^{i\cdot t}$

Komplex Riemann-integrál

Egyváltozós valós függvények integráljához hasonló módon értelmezzük.

Legyen G a komplex sík egy irányított szakasza. Osszuk fel ezt a G görbét osztópontokkal $(z_0, z_1, z_2 \ldots)$, és minden z_{k-1}, z_k íven vegyünk fel egy tetszőleges ρ_k pontot.

Ha a felosztást minden határon túl finomítva a $\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k)\cdot(z_k - z_{k-1})$ integrálközelítő összegnek létezik véges határértéke, akkor ez a határérték az f komplex függvény G görbe menti integrálja.

$\int_G f(z)dz$

Integrálok kiszámítása

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)dt$$

$$[a;b] \to \mathbb{C}$$

Vonalra

$$\int_\Gamma vdr = \int_a^b \underline{v}(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt$$

A paraméterezést mindegy, az eredmény ugyan az.

Megjegyzés: $h: \mathbb{R} \ni t \to h(t) \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b h(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b h_1(t)dt \\ \int_a^b h_2(t)dt \end{pmatrix} \equiv \int_a^b Re(h) + i \cdot \int_a^b Im(h)$$

Példa

$z(t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$ (egységkör a komplex számsíkon)

$$\dot{z}(t) = -\sin(t) + i \cdot \cos(t)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\cdot\pi} \underbrace{\frac{1}{\cos(t) + i \cdot \sin(t)}}_{e^{i\cdot t}} \cdot \underbrace{(-\sin(t) + i \cdot \cos(t))}_{i \cdot e^{i \cdot t}} dt = \int_0^{2\cdot\pi} \frac{i \cdot e^{i\cdot t}}{e^{i\cdot t}} dt = \int_0^{2\cdot\pi} i \cdot dt = \begin{pmatrix} \int_0^{2\cdot\pi} 0dt \\ \int_0^{2\cdot\pi} idt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot\pi \end{pmatrix} = 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

$z(t) = t \cdot (1 + 2 \cdot i)$ $\qquad$ $\dot{z}(t) = 1 + 2 \cdot i$

$$\int_\Gamma \bar{z}dz = \int_0^1 \overline{(t \cdot (1 + 2 \cdot i))} \cdot (1 + 2 \cdot i)dt = \int_0^1 (t - 2 \cdot i \cdot t) \cdot (1 + 2 \cdot i)dt = \int_0^1 t \cdot 5dt = \left[\frac{5 \cdot t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

Komplex Newton-Lebnitz formula

Definíció: Legyen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett függvény. Az $F: Dom(f) \to \mathbb{C}$ primitív függvénye f-nek, ha reguláris és $F' = f$.

Tétel (Newton-Leibnitz):

Ha az előbbiek szerint f folytonos és $F' = f$, akkor minden $\Gamma \subseteq Dom(f)$-re, aminek a kezdő- és végpontja z_1, z_2:
$\int_\Gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$

Példa

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = ?$ és $F(z) = ?$, ha $F'(z) = \frac{1}{z^2}$

$F(z) = -z^{-1} = -\frac{1}{z}$ → $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0$

Követelmény: Ha f-nek van primitív függvénye, akkor $\int_\Gamma f = 0$

A komplex függvénytan alaptétele (Cauchy-tétel):

Megjegyzés: $\mathbb{C}$-beli integrálok előállítása vonalintegrálként:

$$\int_\Gamma f(z)dz = f = u + i \cdot v \text{ és } dz = dx + i \cdot dy = \int_\Gamma (u + i \cdot v) \cdot (dx + i \cdot dy) =$$

$$= \int_\Gamma udx - vdy + i \cdot \int_\Gamma vdx + udy$$

$P = (u; -v)$ és $Q = (v, u)$

→ $\int Pdr + i \cdot \int Qdr$

Newton-Leibnitz $\mathbb{R}^3$-ban

$v = grad(\phi)$

$\int_\Gamma grad(\phi)dr = \phi(r_2) - \phi(r_1)$ Ez az I. gradiens-tétel

Γ kezdő- és végpontja: r_1 és r_2

Bizonyítás: $\mathbb{C}$ N-beli

$f = u + i \cdot v$

$F = \phi + i \cdot \psi$

$$\begin{bmatrix} \partial_x\phi & \partial_y\phi \\ \partial_x\psi & \partial_y\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$F' = \partial_x\phi + i \cdot (-\partial_y\phi) = u + i \cdot v$

$F' = \partial_y\psi + i \cdot \partial_x\psi = u + i \cdot v$

$\int f = \int udx - vdy + i \cdot \int vdx + udy = \int \partial_x\phi dx + \partial_y\phi dy + i \cdot \int \partial_x\psi dx + \partial_y\psi dy =$

$$= \int grad\phi + i \cdot \int grad\psi = \phi(r_2) - \phi(r_1) + i \cdot (\psi(r_2) - \psi(r_1)) = F(r_2) - F(r_1)$$

8. előadás

Implicit egyenlet:

$u(r) = 0$ $u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$u(r(t)) = 0$ $grad(u)\big|_{r(t)} \cdot \dot{r}(t) = 0$

→ $grad(u) \perp \dot{r}(t)$

A felületi normális a gradiens.

Példa

Gömb: $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ $grad = (2 \cdot x, 2 \cdot y, 2 \cdot z)$

Irányítás általánosan n-dimenzióra

Definíció:

CROSS: $\mathbb{R}^n$-ben $a_1, \dots, a_{n-1} \to CROSS(a_1, \dots, a_{n-1})$ az egyetlen olyan, aki:

1. Merőleges az $a_1, \dots, a_{n-1}$ által kifeszített altérre

2. Nagysága: $a_1, \dots, a_{n-1}$ által kifeszített paralelotop n-1-dimenziós térfogata

3. $a_1, \dots, a_{n-1}, CROSS(a_1, \dots, a_{n-1})$ jobb sodrású (⇔ a szokásos bázisról az erre való áttérés mátrixának determinánsa >0)

$$CROSS(a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot \left| \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ a_1(1) & \cdots & a_1(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}(1) & \cdots & a_{n-1}(n) \end{pmatrix} \right|$$

2-dimenzióban: $CROSS\left(\underbrace{a}_{x,y}\right) = -1 \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix} = -(y, -x) = (-y, x)$ (balra forgatás)

Állítás: - argumentumok cserélése → -1-szeresére változik

- minden argumentumban lineáris

- $\exists i \neq j: a_i = a_j \Rightarrow CROSS(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$

$r = r(u)$ által adott valódi felület irányítása: $cross(r_u(u))$. Egy pontbeli értéke az ottani felületi normális.

$\frac{cross(r_u(u))}{|cross(r_u(u))|}$: felületi egységnormális

$F: r(u_1 \dots u_n)$ $(u_1 \dots u_n) \in A$

$A' = \{(u_1 \dots u_n) | (-u_1 \dots u_n) = A)$

$-F: s(u_1 \dots u_n) = r(-u_1 \dots u_n)$ $(u_1 \dots u_n) \in A'$

***F* zárt felület kifelé irányított** $\Leftrightarrow \forall u \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in (0, \varepsilon) \quad r(u) + \delta \cdot cross(r_u(u)) \notin V$

F felület a V-t határolja

2D-ben: $|F| = \iint_A |r_a \times r_b| dudv$ $\Delta f \approx f' \cdot \Delta x$

Általában: F felszíne = $|F| = \iint_A |cross(r_u)| du$

Példa

R sugarú, h magasságú hengerpalást

$$r(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v), u \in [0,2 \cdot \pi], v \in [0, h]$$

$$r_u = (-R \cdot \sin(u), R \cdot \cos(u), 0)$$

$$r_v = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \quad r_u \times r_v = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), 0)$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{R^2 \cdot (\cos^2(u) + \sin^2(u))} = R$$

$$|F| = \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^h R dv du = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot R$$

$H \subseteq \mathbb{R}^m$ $v: H \to \mathbb{R}^k$ $k = m + 1$ v folytonos

1. Vonalintegrálok

Legyen $L: r = r(t)\ t \in I$ $L \subseteq H$ adott görbe

a, v görbementi integrálja L-en

$$\int_L vdr \stackrel{\text{def}}{=} \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

b, v ívhossz szerinti integrálja L-en

$$\int_L v|dr| \stackrel{\text{def}}{=} \int_I v(r(t)) \cdot |\dot{r}(t)| dt$$

2. Felületi integrálok

$F \subseteq H$ valódi felület $r = r(u), u \in A \subseteq A^{m-1}$

a, v felületmenti integrálja F-en

$$\int_F vdf \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r(u)) \cdot cross(r_u(u)) du$$

b, v felszín szerinti integrálja F-en

$$\int_F v|df| \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r(u)) \cdot |cross(r_u(u))| du$$

Tétel

A fent definiált integrálok alaptulajdonságai

1. Lineáris operátorok
2. Additív halmazfüggvény

3. $\int_{-L} vdr = -\int_L vdr$

$\int_{-F} vdf = -\int_F vdf$

4. $m \leq v(r) \leq M \quad \Rightarrow \quad m \cdot |L| \leq \int_L vdr \leq M \cdot |L|$

$m \cdot |F| \leq \int_F vdf \leq M \cdot |F|$

5. $\int_L 1|dr| = |L|$ és $\int_F 1|df| = |F|$

6. v_e a v-nek r érintő egységvektorára eső vetületének előjeles hossza, azaz $v \cdot e$ →

$$\int_L vdr = \int_L v_e|dr| \qquad \left(e = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}\right)$$

7. v_n a v-nek felületi normálisra eső vetületének előjeles hossza, azaz $v \cdot n$ →

$$\int_F vdf = \int_F v_n|df| \qquad \left(n = \frac{cross(r_u)}{|cross(r_u)|}\right)$$

6-os bizonyítása: $\int_L v_e|dr| = \int_I \underbrace{v_e(r(t))}_{v(r(t))\cdot\frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}} \cdot |\dot{r}(t)| = \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt$

8. gyakorlat

Stokes-tétel: F felület $\mathbb{R}^3$-ban. ∂F pereme F-nek. $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, folytonosan differenciálható. $Dom(\underline{v})$ nyílt. $F \cup \partial F \subseteq Dom(\underline{v})$

$$\int_{\partial F} \underline{v} = \int_F rot(\underline{v})$$

$$rot(\underline{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad v = (v_1, v_2, v_3)$$

Keressük $\mathbb{C}$-ben az alakját.

$v_3 = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_1(x,y)$ és $v_2 = v_2(x,y)$

$rot(v) = \partial_x \cdot v_2 - \partial_y \cdot v_1$

$\oint_{\partial T} f = ? \qquad f = u + i \cdot v$

$$P = \binom{u}{-v}$$

$$Q = \binom{u}{v}$$

Cauchy-Riemann szerint: $\partial_x u = \partial_y v$ és $\partial_y u = -\partial_x v$

$$\oint_{\partial T} f = \oint P \cdot dr + i \cdot \oint Qdr = \int_T \overbrace{-\partial_x v}^{\partial_y u} - \partial_y u + i \cdot \int_T \overbrace{\partial_x u}^{\partial_y v} - d_y v =$$

$$= \iint_T 0dxdy + i \cdot \iint_T 0dxdy = 0 \in \mathbb{C}$$

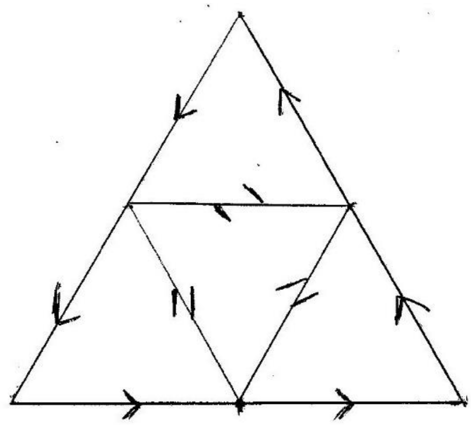
Megjegyzés: A bizonyításban feltettük, hogy f folytonosan differenciálható (valójában nem szükséges)

Perem és tartomány helyett egy görbére mondjuk majd ki.

Goursat-lemma

f $\mathbb{C}$-differenciálható függvényt háromszögön (T) értelmezünk, akkor $\int_{\partial T} f = 0$

Bizonyítás:



$$\int_{\partial T} f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta 1} f + \int_{\Delta 2} f + \int_{\Delta 3} f + \int_{\Delta 4} f$$

Középső szakaszokon kétszer integrálunk, egyszer az egyik, majd a másik irányba, így azok kiesnek.

$$\left|\oint_{\partial T} f\right| \le \underbrace{\left|\int_{\Delta 1} f\right| + \left|\int_{\Delta 2} f\right| + \left|\int_{\Delta 3} f\right| + \left|\int_{\Delta 4} f\right|}_{ezek\ közül\ van\ egy\ maximális} \le 4 \cdot \left|\int_{\partial T} f\right|$$

$$K \to K_{T(1)} = \frac{K}{2^1}$$

1. $\left|\oint_{\partial T} f\right| \le 4^n \cdot \left|\int_{\partial T^{(n)}} f\right|$
2. $K_{T^{(n)}} = \frac{K}{2^n}$
3. Ezek egymásba skatulyázott határértékeke sorozata, z_0 lesz a határértéke

$$\left|\oint_{\partial T^{(n)}} f(z) dz\right| = \left|\oint_{\partial T^{(n)}} f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz\right|$$

$\exists \varepsilon > 0$, hogyha $|z - z_0| < \delta$, akkor $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$

$\rightarrow$ $$\left|\oint \underbrace{f(z_0)}_{0} + \underbrace{f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{0} + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz\right| = \left|\oint_{\partial T^{(n)}} \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz\right| \le$$

$$\le \oint_{\partial T^{(n)}} \underbrace{|\varepsilon(z)|}_{\varepsilon} \cdot \underbrace{|z - z_0|}_{\frac{K}{2^n}} \cdot d|z| \le \varepsilon \cdot \frac{K}{2^n} \cdot \underbrace{\oint_{\partial T^{(n)}} d|z|}_{\frac{K}{2^n}} = \varepsilon \cdot \frac{K^2}{4^n}$$

$\rightarrow$ $$\left|\oint_{\partial T} f\right| \le 4^n \cdot \left|\int_{\partial T^{(n)}} f\right| = 4^n \cdot \frac{\varepsilon \cdot K^2}{4^n} = \varepsilon \cdot K^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Cauchy-féle integráltétel

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reguláris a Γ görbén és belsejében, $Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyílt tartomány. Ekkor $\oint_{\Gamma} f = 0$

Cauchy-féle integrálformula

$f: T \to \mathbb{C}$ reguláris a T tartományon, T egyszeresen összefüggő, Γ egyszerű zárt görbe a T-ben, amely körülhurkolja z_0-at. Ekkor:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Példa

$$\oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz$$

A Cauchy-féle integrálformulát kell használni. Adjuk meg a képletben szereplő paramétereket:

$f(z) = ch(z)$

$z_0 = 0$ (mert $(z - z_0)$ most $(z - 0)$)

$n = 4$ (mert $n + 1 = 5$)

Most már felírhatjuk a formulát:

$$ch^{(4)}(0) = \frac{4!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz$$ /átszorzunk $2 \cdot \pi \cdot i$-vel, leosztunk 4!-al

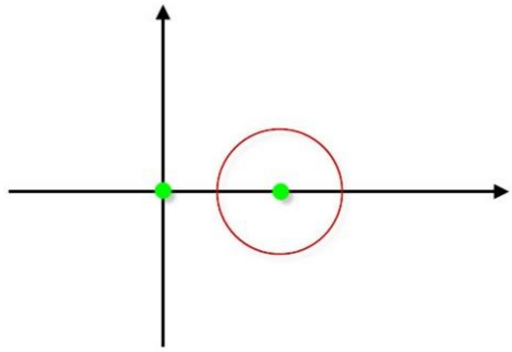
$$\oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz = ch^{(4)}(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = ch(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!}$$

$ch' = sh,\quad ch'' = sh' = ch \quad ch^{(3)} = sh \quad ch^{(4)} = ch$

Használjuk fel, hogy $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ és $ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$$ch(0)\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot i}{4!}=\frac{e^0+e^{-0}}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot i}{4!}=\frac{\pi\cdot i}{12}$$

Példa



$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{2\cdot z-1}{z^2-z}$$

$|z-1|=\frac{1}{2}$ → $\frac{1}{2}$ sugarú kör, aminek a középpontja az (1,0) pontban van

Át kell alakítani a törtet, hogy a nevezőbe csak $(z-z_0)$-os dolog kerüljön.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{2\cdot z-1}{z^2-z}=\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{2\cdot z-1}{z\cdot(z-1)}$$

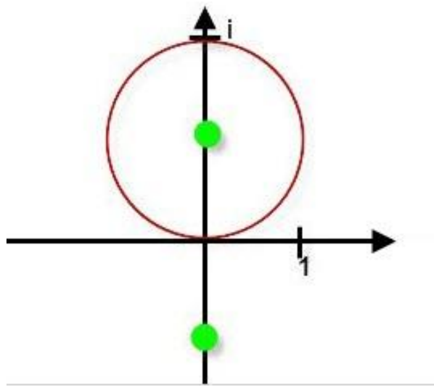
A $(z-1)$ van a körön belül → a többit felvisszük a számlálóba. $z-1$ marad a nevezőbe, ami már jó.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{2\cdot z-1}{z}}{z-1}$$ Ebből az alakból már felírhatjuk a formulát:

$f(z)=\frac{2\cdot z-1}{z}$ $\quad n+1=1$ → $n=0$ $\quad z_0=1$

→ $\frac{2\cdot\pi\cdot i}{0!}\cdot f^{(0)}(1)=2\cdot\pi\cdot i\cdot\frac{2\cdot z-1}{z}\Big|_{z=1}=2\cdot\pi\cdot i$

Példa



$$\oint_{|z-i|=1}\frac{\sin\left(\frac{i\cdot z\cdot\pi}{2}\right)}{z^2+1}dz$$

$|z-i|=1$ → 1 sugarú kör, aminek a középpontja $(0,i)$-ben van

Megint átalakítjuk a törtet:

$$\oint_{|z-i|=1}\frac{\sin\left(\frac{i\cdot z\cdot\pi}{2}\right)}{(z-i)\cdot(z+i)}dz$$

A $(z-i)$-s gyök van a körön belül, a többi felkerül a számlálóba:

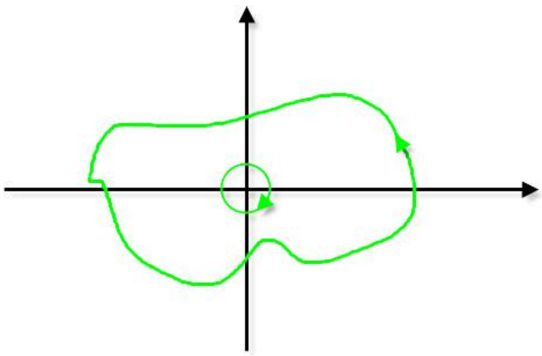
$$\oint_{|z-i|=1}\frac{\frac{\sin\left(\frac{i\cdot z\cdot\pi}{2}\right)}{z+i}}{z-i}dz$$ Ebből felírhatjuk a Cauchy-formulát:

$f(z)=\frac{\sin\left(\frac{i\cdot z\cdot\pi}{2}\right)}{z+i}$ $\quad n=0$ $\quad z_0=i$

→ $\frac{2\cdot\pi\cdot i}{0!}\cdot\frac{\sin\left(\frac{i\cdot z\cdot\pi}{2}\right)}{z+i}\Big|_{z=i}=2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot i}\right)=-\pi$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Van egy kompatibilisen irányított felületünk. Mennyi ezen $\int_{\partial T}\frac{1}{z}dz$?

Kompatibilis irányítás: ha az iránynak megfelelően sétálok, akkor bal kéz felől legyen a felület.



A belső kör egy egységsugarú kör: $|z|=1$

A külső görbe Γ.

$$\int_{\partial T}\frac{1}{z}dz=\int_{\substack{|z|=1\\ \circlearrowright}}\frac{1}{z}dz+\oint_{\Gamma}\frac{1}{z}dz=\int_{\substack{|z|=1\\ \circlearrowright}}\frac{1}{z}dz+\int_{\substack{|z|=1\\ \circlearrowleft}}\frac{1}{z}dz=-2\cdot\pi\cdot i+2\cdot\pi\cdot i=0$$

↺ pozitívan irányított kör, amire tudjuk, hogy $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$

Negatívan irányított körre ennek a -1-szerese.

9. előadás

Példa

$\int_L \; r dr$ (r: identitás függvény)

L: origó középpontú, 3 sugarú, pozitívan irányított kör

$r(t) = 3 \cdot (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0{,}2 \cdot \pi]$

$\dot{r}(t) = 3 \cdot (-\sin(t), \cos(t))$

$\int_0^{2\cdot\pi} 9 \cdot (\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t) \cdot \cos(t)) dr = \int_0^{2\cdot\pi} 0 dr = 0$

Példa

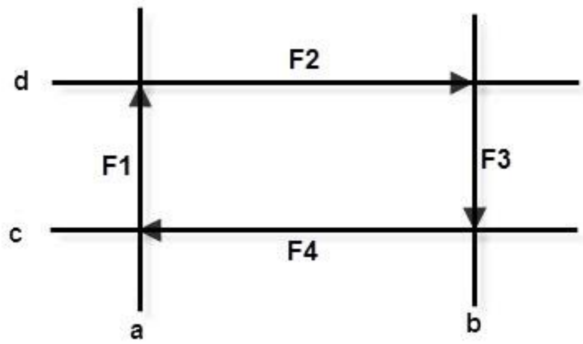
$\int_F \; 2 \cdot r df$ F: z tengelyű, origó csúcsú, $\frac{\pi}{4}$ felnyílásszögű, kifelé irányított kúp

$r(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), u) \qquad u \in [0{,}2 \cdot \pi], \qquad v \in [0, \pi]$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v \cdot \sin(u) & v \cdot \cos(u) & 0 \\ \cos(u) & \sin(u) & 1 \end{vmatrix} = \left(v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), -v \cdot \left(\underbrace{\cos^2(u) + \sin^2(u)}_{1} \right) \right)$$

$\int_F \; 2 \cdot r df = \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^R 2 \cdot v^2 \cdot (\cos(u), \sin(u), 1) \cdot (\cos(u), \sin(u), -1) dv du =$

$= \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^R 0 dv dr = 0$



$cross(r_u(u)) = (-1{,}0)$

90°-os forgatás balra

Példa

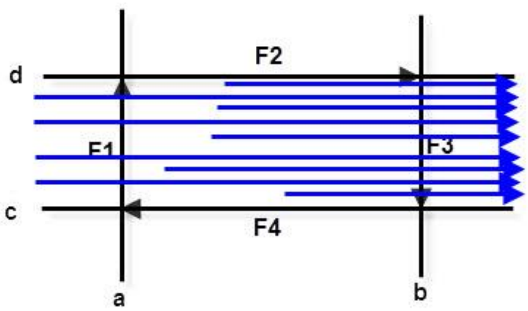
$v(x, y) = (f(x), 0)$ nem negatív, monoton nő (jobbra sűrűsödik)

Több megy ki, mint be.

Alul és felül az integrál 0.

Előző előadáson tanult képlet szerint:

$\int_F \; v df \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A \; v(r_u(u)) \cdot cross(r_u(u)) du$



$\int_{F_1} v df = \int_c^d (f(a), 0) \cdot (-1{,}0) du = \int_c^d -f(a) = (c - d) \cdot f(a)$

$\int_{F_3} v df = -\int_{-F_3} v df = \cdots = -(c - d) \cdot f(b)$

Egész felületen: $\int_F \; v df = (d - c) \cdot (f(b) - f(a))$

Példa

$v(x,y) = (f(y),0)$ f folytonos

Alul és felül továbbra is 0.

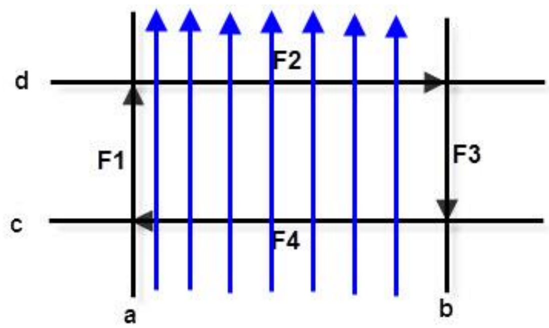
$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(u),0) \cdot (-1,0)du = \int_c^d -f(u)$

$\int_{F_3} vdf = -\int_{-F_3} vdf = \cdots = \int_c^d f(u)$

$\Rightarrow$ $\int_F \ vdf = 0$ Ugyanannyi megy be, mint ki.

Példa

$w(x,y) = \big(0, f(x)\big)$ f folytonos $cross\big(r_u(u)\big) = (0,1)$



Bal és jobb oldalon 0.

$\int_{F_2} vdf = \int_a^b \big(0, f(d)\big) \cdot (0,1)du = (b-a) \cdot f(d)$

$\int_{F_4} vdf = -\int_{-F_4} vdf = \cdots = -(b-a) \cdot f(c)$

Eredmény

$\int_F \ udf = (b-a) \cdot \big(f(d) - d(c)\big)$

Példa

$v(x,y) = (f(x,y),0)$ f folytonos

Alul és felül 0

$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(a,u),0) \cdot (-1,0)du = \int_c^d -f(a,u)\, du$

$\int_{F3} vdf = -\int_{-F_3} vdf = \cdots = \int_c^d f(b,u)\, du$

$\Rightarrow$ $\int_F \ vdf = \int f(b,u) - f(a,u)du$

Példa

$w(x,y) = \big(0, g(x,y)\big)$ Előzően hasonlóan

$\int_F \ wdf = \int_a^b g(u,d) - g(u,c)du$

Definíció:

(1) $H \subseteq \mathbb{R}^n$ (korlátos halmaz) átmérője $= d|H| = \{\sup|x-y|\,; x,y \in H\}$

(2) $H_k \subseteq \mathbb{R}^n$ $r_0 \in \mathbb{R}^n$-re zsugorodik, ha $r_0 \in IntH_k$ $\forall k$ és $\lim\limits_{k\to\infty} d(H_k) = 0$

Definíció (forrássűrűség): $r_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^n$, $v: G \to \mathbb{R}^n$ folytonos $G\backslash\{r_0\}$. Ha normál térrészek minden $\mathbb{R}^n$-beli r_0-ra zsugorodó V_k sorozatára $\lim \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} vdf$ létezik, és ugyanannyi, akkor ezt hívjuk v forrássűrűségének az r_0-ban. (F_k a V_k-t határoló kifelé irányított felület)

$s(v)(r_0) = \lim \frac{1}{|V_k|} \cdot \int vdf$

Példa

v forrássűrűsége (x_0, y_0) pontban $\big((x_0,y_0) \in (a,b) \times (c,d)\big)$

$V_k = \underbrace{[a_k, b_k]}_{x_0 \in} \times \underbrace{[c_k, d_k]}_{y_0 \in}$ $\lim b_k - a_k = 0$

$\lim d_k - c_k = 0$

$\rightarrow \qquad \int_{F_k} v\,df = \int_{c_k}^{d_k} \big(f(d_k,u) - f(a_k,u)\big)du$

$$\frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{c_k}^{d_k} \big(f(d_k,u) - f(a_k,u)\big)du = \frac{1}{(b_k - a_k)\cdot(d_k - c_k)} \cdot \int_{c_k}^{d_k} \big(f(d_k,u) - f(a_k,u)\big)du =$$

$$\overset{\exists \xi \in [c_k,d_k]}{\triangleq} \frac{\big(f(b_k,\xi_k) - f(a_k,\xi_k)\big)\cdot(d_k - c_k)}{(b_k - a_k)\cdot(d_k - c_k)} \overset{\substack{Lagrange \\ \exists \rho_k \leftarrow (a_k,b_k)}}{\triangleq} f_x(\rho_k,\xi_k) \rightarrow f_x(x_0,y_0)$$

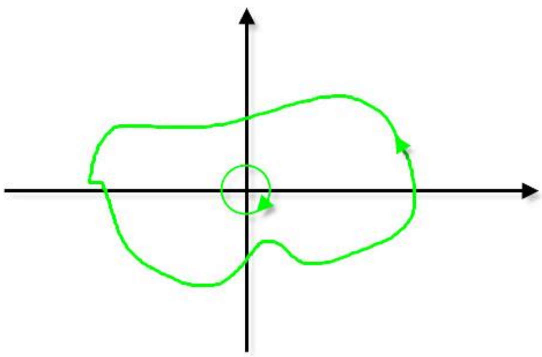
Ha f_x folytonos

9. gyakorlat

8. gyakorlat végén volt:

Van egy kompatibilisen irányított felületünk. Mennyi ezen $\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz$?

Kompatibilis irányítás: ha az iránynak megfelelően sétálok, akkor bal kéz felől legyen a felület.



A belső kör egy egységsugarú kör: $|z| = 1$

A külső görbe Γ.

$$\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz = \int_{\underset{\circlearrowright}{|z|=1}} \frac{1}{z} dz + \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\underset{\circlearrowright}{|z|=1}} \frac{1}{z} dz + \int_{\underset{\circlearrowleft}{|z|=1}} \frac{1}{z} dz = -2 \cdot \pi \cdot i + 2 \cdot \pi \cdot i = 0$$

$\circlearrowleft$ pozitívan irányított kör, amire tudjuk, hogy $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$

Negatívan irányított körre ennek a -1-szerese.

Azt kaptuk, hogy egy függvény integrálja a nagy görbére ugyan az, mint az integrálja a kis körre. → A kis körökre Integrálunk.

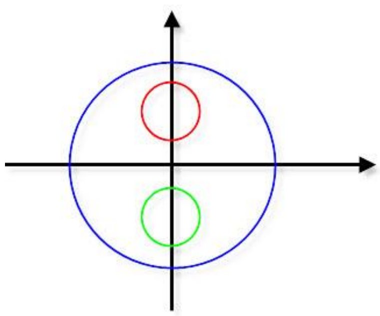
Példa

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z+i)\cdot(z-i)}$$

Felrajzoljuk: $|z| = 2$ → origó középpontú, 2 sugarú kör

Kis körök középpontjai: $(0,i)$ és $(0,-i)$

Erre a két kis körre integrálunk. A sugarat tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyen $\frac{1}{2}$, hogy ne lógjon a nagy körön kívülre.



$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)\cdot(z+i)} dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)\cdot(z+i)} dz$$

A Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmaznunk, tehát a nevezőben valahogy $(z - z_0)$ alakra kell hozni.

A piros kornél a $(z - i)$ van a körön belül, a többit felvisszük a számlálóba, a zöld kornél pedig a $(z + i)$ van a körön belül.

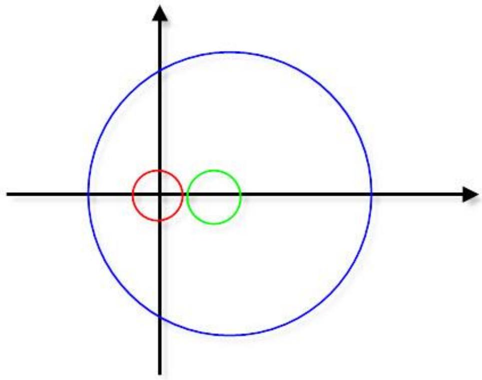
$$\rightarrow \qquad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i} dz$$

Most már alkalmazhatjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot i}{0!} \cdot \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} + \frac{2\cdot\pi\cdot i}{0!} \cdot \frac{1}{z-i} \Big|_{z=-i} = \pi - \pi = 0$$

Példa

$$\oint_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^4-z^3}dz=\oint_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^3\cdot(z-1)}dz$$



Megint rajzoljuk fel:

$|z-2|=3$

→ Középpont: (2,0), sugár 3

2 kis kör középpontja: (1,0) és (0,0). Ezekre integrálunk.

Kis körök sugarát válasszuk $\frac{1}{3}$-nak, hogy ne érjenek össze.

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{e^z}{z^3\cdot(z-1)}dz+\int_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{e^z}{z^3\cdot(z-1)}dz$$

A piros körnél a z van a körön belül, a többit felvisszük a számlálóba, a zöld körnél pedig a $(z-1)$ van a körön belül, a z^3 kerül fel a számlálóba.

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}dz+\int_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}dz$$

$f(z)=\frac{e^z}{z-1}$ $\qquad$ $f(z)=\frac{e^z}{z^3}$

$n+1=3\rightarrow n=2$ $\qquad$ $n+1=1\rightarrow$ $\quad n=0$

$z_0=0$ $\qquad$ $z_0=-1$

Használjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$n=2$, vagyis az $\frac{e^z}{z-1}$ függvényt kell kétszer deriválni és a $z_0=0$ pontbeli értékét venni:

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'=\frac{e^z\cdot(z-1)-e^z\cdot 1}{(z-1)^2}=\frac{e^z\cdot(z-2)}{(z-1)^2}$$

$$\left(\frac{e^z\cdot(z-2)}{(z-1)^2}\right)'=\frac{(e^z\cdot(z-2)+e^z)\cdot(z-1)^2}{(z-1)^4}+e^z\cdot(z-2)\cdot 2\cdot(z-1)\,\Big|_{z=1}=-5$$

$n=0$, vagyis az $\frac{e^z}{z^3}$ függvényt kell vennünk a $z_0=1$ helyen: e^1

A végeredmény

$$\frac{2\cdot\pi\cdot i}{2!}\cdot(-5)+\frac{2\cdot\pi\cdot i}{0!}\cdot e^1=-5\cdot\pi\cdot i+2\cdot e\cdot\pi\cdot i$$

Elemi függvények

Négyzetre emelés

$z\rightarrow z^2$

$z=e\cdot(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))$

$w=z^2=r^2\cdot(\cos(2\cdot\varphi)+i\cdot\sin(2\cdot\varphi))$

z^2-nek nincs inverze, de a z^2 Riemann felületén már invertálható.

Exponenciális

$z\rightarrow e^z$

$z=r\cdot(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))$

$z\rightarrow w$

$$e^z=e^{x+i\cdot y}=\underbrace{e^x}_{|w|}\cdot\underbrace{e^{i\cdot y}}_{\arg(w)=y}$$

Nem invertálható, de Riemann felületen igen.

$z \to e^z$ periodikus:

$$e^z \to e^{z+k\cdot 2\cdot\pi\cdot i} = e^z \cdot \left[\left(e^{i\cdot\pi}\right)^2\right]^k = e^z \cdot 1^k \qquad (e^{i\cdot\pi} = -1)$$

Periódus: $2 \cdot \pi \cdot i$

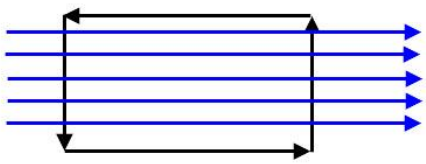
10. előadás

$(f(x,y),0)$ forrássűrűsége az (x_0,y_0) pontban $f_x(x_0,y_0)$

$(0,g(x,y))$ forrássűrűsége az (x_0,y_0) pontban $g_y(x_0,y_0)$

$\underbrace{(f(x,y),g(x,y))}_{v(x,y)}$ forrássűrűsége az (x_0,y_0) pontban $\underbrace{f_x(x_0,y_0)+g_y(x_0,y_0)}_{div(v)|_{(x_0,y_0)}}$

Példa



$\int_L vdv = ?$ L a görbe.

Bal és jobb oldalt az integrál 0, mert a felületi normális merőleges az erővonalakra.

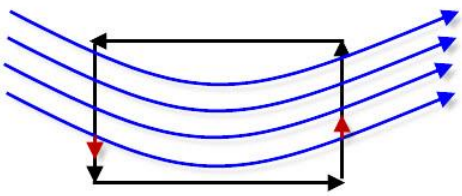
Felül pedig az integrál az alsó integrál -1-szerese → $\int_L vdv = 0$

Példa

Ugyan ez, csak az erővonalak ferdén haladnak.

A szemben lévő oldalak integráljai kiejtik egymás (egymás -1szeresei) → $\int_L vdv = 0$

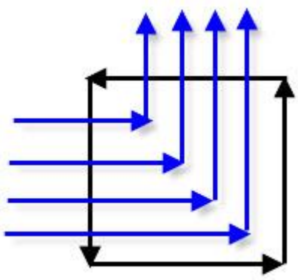
Példa



Alul és felül megint kiejtik egymást, viszont bal és jobb oldalon is pozitív lesz az integrál, mert az erővonalak merőleges vetülete (piros nyilak) pozitív irányba mutat.

→ Az integrál értéke pozitív

Példa



Jobb oldalon és alul nem halad át erővonal, így ott az integrál 0.

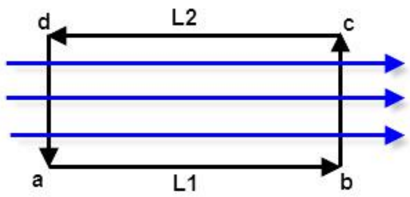
Felül és bal oldalon pedig ugyan annyi megy be mint ki, ez egy négyzet.

→ $\int df = 0$

Példa

$v(x,y) = (f(x,y),0)$

Bal oldalon és jobb oldalon ismét 0.



$r(t) = (t, c)$

$\dot{r}(t) = (1,0)$

Alul: $\int_{L_1} vdr = \int_{L_1} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt = \int_a^b (f(t,c), 0) \cdot (1,0)dt = \int_a^b f(t,c)dt$

Felül: $\int_{L_2} vdr = \int_a^b -f(t,d)dt$

→ $\int_L vdr = \int_a^b f(t,c) - f(t,d)dt$

$\mathbb{R}^2$-beli normált térrészek minden r_0-ra zsugorodó F_k sorozatára ha $\exists \lim \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} vdr$ (ahol L_k az F_k pozitívan irányított határa) és ez ugyanannyi, akkor ezt v r-beli örvénysűrűségének nevezzük.

Jele: $c(v)(r_0)$

Példa

$F_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ $\qquad x_0 \in [a_k, b_k], \qquad y_0 \in [c_k, d_k]$

$\lim b_k a_k = \lim d_k - c_k = 0$

$$c(f(x,y), 0)(x_0, y_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(b_k - a_k)\cdot(d_k - c_k)} \cdot \int_a^b f(t,c) - f(t,d)dt \overset{\exists \xi_k \in [a,b]}{\triangleq}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(f(\xi_k, c) - f(\xi_k, d))\cdot(b_k - a_k)}{(b_k - a_k)\cdot(d_k - c_k)} \underbrace{=}_{\substack{Lagrange \\ \exists \rho_k \in [c_k, d_k]}} \lim_{k\to\infty} -f_y(\xi_k, \rho_k) \underbrace{=}_{f_y\, folytonos} -f_y(x_0, y_0)$$

Hasonlóan: $c(0, g(x,y))(x_0, y_0) = \cdots = g_x(x_0, y_0)$

Következmény: $c(f(x,y), g(x,y))(x_0, y_0) \underbrace{=}_{\substack{ha\, \exists\, f,g \\ folytonosan \\ diffható}} g_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) = rot(v)\big|_{(x_0, y_0)}$

Lemma: Ha F a síkbeli V valamelyik tengely szerinti normál tartomány kifelé irányított határa és $\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható valós értékű függvény V-n, akkor

1. $\int_F (0,h)df = \int_v h_y(x,y)dV$, ha V x-re nézve normál tartomány
2. $\int_F (h,0)df = \int_V h_x(x,y)dV$, ha V y-ra nézve normál tartomány

Tétel (Gauss–Osztrogradszkij-tétel):

Ha F a V síkbeli normál tartomány kifelé irányított határa és $v: H \to \mathbb{R}^2$, $V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható, akkor $\int_F vdf = \int_V div(v)dV$

Bizonyítás:

$$\int_F \underbrace{v}_{(g,h)} df = \int_F (g,0)df + \int_F (0,g)df = \int_V g_x(x,y)dV + \int_V h_y(x,y)dV =$$

$$\int_V \underbrace{g_x + h_y}_{div(v)} dV$$

Következmény: Az előző igaz akárhány dimenzióban és normál tartomány helyett normál térrészre is.

Példa

H: R sugarú, h magasságú, z tengelyű henger

$$v(x,y,z) = v(x,y,0)$$

$$\int_H vdf = \int_{\underbrace{V}_{hengertest}} \overbrace{div(v)}^{2} dV = 2 \cdot \int_{dV} 1dV = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$$

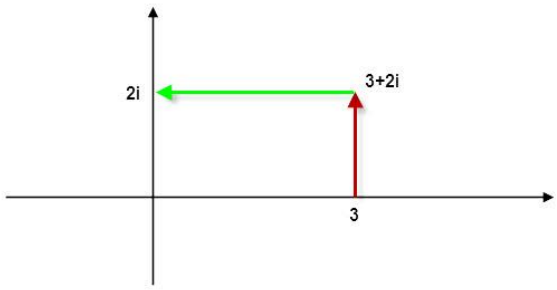
Vagy: $\int_H vdf = \int_H v_n |df| = \int_{H^-} R|df| = R \cdot \int_{H^-} 1|df| = R \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$

10. gyakorlat

Példa

Komplex integrálás megtört szakaszon (két részre kell bontani az integrált)

$f(z) = Re(Z) + i \cdot (Im(z))^2$ $(x + i \cdot y^2)$



Γ: a görbe, amin integrálunk

$f(z)$ sehol sem differenciálható → $z(t)$-s képletet kell használni

$$\int_\Gamma f = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)dt$$

$$\Gamma = \underbrace{[3; 3 + 2 \cdot i]}_{piros\ szakasz} \to \underbrace{[3 + 2 \cdot i; 2 \cdot i]}_{zöld\ szakasz}$$

A teljes integrál a 2 integrál összege: $I = I_1 + I_2$

A piros szakasz egyenlete: $z_1(t) = 3 + t \cdot i \quad 0 \le t \le 2$

Kell még: $\dot{z}_1(t) = i$

Behelyettesíthetünk a képletbe: $I_1 = \int_0^2 \underbrace{(3 + i \cdot t^2)}_{f(z_1(t))} \cdot \underbrace{i}_{\dot{z}_1(t)} dt = \int_0^2 3 \cdot i - t^2 dt = \left[3 \cdot i \cdot t - \frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 6 \cdot i - \frac{8}{3}$

A zöld szakasz egyenlete: $z_2(t) = 2 \cdot i + 3 - t \quad 0 \le t \le 3$

Kell még: $\dot{z}_2(t) = -1$

Behelyettesítés: $I_2 = \int_0^3 \underbrace{(3 - t + i \cdot 4)}_{f(z_2(t))} \cdot \underbrace{(-1)}_{\dot{z}_2(t)} dt = \left[\frac{(t-3)^2}{2} - 4 \cdot i \cdot t\right]_0^3 = -12 \cdot i - \frac{9}{2}$

Végeredmény: $I = I_1 + I_2 = -6 \cdot i - \frac{8}{3} - \frac{9}{2}$

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2 \cdot i} \left(= \frac{1}{i} \cdot sh(i \cdot z)\right)$$

$$\cos(z) = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2} (= ch(i \cdot z))$$

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Példa

$$e^z = -1 \qquad z = ?$$

Átírjuk a jobb oldalt

$$e^z = e^{i\cdot\pi}$$

$$z = i \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

$$e^z = i$$

Átírjuk a jobb oldalt

$$e^z = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$z = i \cdot \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

$$sh\left(1 + \frac{\pi}{2} \cdot i\right) = \frac{e^{1+\frac{\pi}{2}i} - e^{-1-\frac{\pi}{2}i}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(e \cdot \left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right) - \frac{1}{e} \cdot \left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left(e + \frac{1}{e}\right)$$

Példa

$$sh(z) = sh(x + i \cdot y) = \frac{e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) - e^{-x} \cdot (\cos(-y) + i \cdot \sin(-y))}{2} = \frac{1}{2} \cdot \cos(y) \cdot (e^x - e^{-x}) + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(y) \cdot (e^x + e^{-x})$$

Példa (Harmonikus társkeresés)

$$u = x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2$$

$u = ?$ $\qquad$ $f = u + i \cdot v$ reguláris $\qquad$ $f(0) = 2 \cdot i$ $\qquad$ $(u = 0, v = 2)$

$$\partial_x u = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 \quad \rightarrow \quad \partial_{xx}^2 u = 6 \cdot x$$

$$\partial_y u = -6 \cdot x \cdot y \quad \rightarrow \quad \partial_{yy}^2 u = -6 \cdot x$$

$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = 0$ → Laplace-féle parciális diffegyenleteket kielégíti → harmonikus függvény.

A Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek szerint:

$$\partial_x u = \partial_y v$$

$$\partial_y u = -\partial_x v$$

(u-t ismerjük, v-t keressük, ez lesz a harmonikus társa)

Az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

I. $\qquad \partial_y v = \underbrace{3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2}_{\partial_x u}$

II. $\qquad \partial_x v = \underbrace{6 \cdot x \cdot y}_{-\partial_y u}$

I. egyenletet parciálisan integráljuk y szerint:

$v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^3 + C(x)$ $\qquad$ $C(x)$ csak x-től függ, mert y szerint deriváltunk

II. egyenletbe ezt behelyettesítjük v helyére (majd x szerint deriváljuk)

$6 \cdot x \cdot y + C'(x) = 6 \cdot x \cdot y$

$C'(x) = 0$

$C(x) = konst.$

Vagyis $v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^2 + konst$

Kezdeti feltétel szerint ez a $(0,0)$ pontban egyenlő 2-vel:

$v = 3 \cdot 0^2 \cdot 0 - 0^2 + konst = 2$ → $konst = 2$

→ $v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^2 + 2$

Példa

$$r(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \cdot \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2$$

Ívhossz = ?

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$$

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sin(t) \\ e^t \cdot \sin(t) + e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{e^{2\cdot t} \cdot (\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2\cdot t} \cdot (\sin(t) \cdot \cos(t))^2 + e^{2\cdot t}} dt =$$

$$= \int_0^2 e^t \cdot (\cos^2(t) - 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + \sin^2(t) + (\sin^2(t) + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + \sin^2(t)) + 1) dt$$

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ és $-2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)$ kiesik így a gyök alatt marad 1+1+1

$$= \int_0^2 e^t \cdot \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \cdot \int_0^2 e^t dt = \sqrt{3} \cdot [e^t]_0^2 = \sqrt{3} \cdot (e^2 - 1)$$

Igazoljuk, hogy ez egy kúpfelület!

45°-os kúp paraméterezése: $\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}$ ami megegyezik a megadott felülettel, ha $r = e^t$ és $\varphi = t$

ZH-ban lehet a kúp, henger és a gömb paraméterezése. Kúp már megvan.

Hengerfelület paraméterezése: $\begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$

Gömb paraméterezése: $\begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\ R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\ R \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

Példa

Mennyi a 8-ad gömb felszíne?

$$F = \iint_{T_{u,v}} |\partial_u r \times \partial_v r| du dv =$$

$\partial_u r \times \partial_v r$ számolása

$$\begin{array}{c} \\ \partial\varphi \rightarrow \\ \partial\vartheta \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) & R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) & 0 \\ R \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) & R \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) & -R \cdot \sin(\vartheta) \end{vmatrix}$$

$$= \iint \sqrt{R^4 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^4(\vartheta) + R^4 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \sin^4(\vartheta) + R^4 \cdot (\sin^2(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) + \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta))^2} d\varphi d\vartheta$$

$= \iint R^2 \cdot \sqrt{\sin^4(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi)} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \sin(\vartheta)\, d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot [-\cos(\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$

$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 d\varphi = R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ Ez tényleg a teljes gömb $(4 \cdot R^2 \cdot \pi)$ $\frac{1}{8}$-ad része

11. előadás

TÉTEL (Stokes) 2D:

F 2-dimenziós normált térrész, melynek határa a pozitívan irányított L görbe.

$F \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2$ $v: H \to \mathbb{R}^2$ F-en folytonosan diffható → $\int_L vdr = \int_F rot(v)dV$

Bizonyítás: 1. $\int_L vdr = \int_L cross(v)df$ $L: r(t)\ \ t \in [a, b]$

→ $\int_a^b v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt = \int_a^b cross\Big(v\big(r(t)\big)\Big) \cdot cross\big(\dot{r}(t)\big)dt$

2. $div\big(-cross(v)\big) = rot(v) = div(g, -f) = g_x - f_y = rot(f, g)$

3. $\int_L vdr = \int_L cross(v)df = \int_{-L} -cross(v)df = \int_F \underbrace{div\big(-cross(v)\big)}_{rot(v)} dV = \int_F rot(v)dV$

TÉTEL (stokes) 3D:

V 3-dimenziós normált térrész, melynek határa felosztható az F kifelé irányított valódi felületre és a kifelé irányított $-G$ normált síkfelületre. Legyen G határa a G-ből nézve pozitívan irányítitt L görbe. Ha $V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}$, $v: H \to \mathbb{R}^2$ folytonosan diffható, akkor

$$\int_L vdr = \int_F rot(v)df$$

Példa

$$\int_F rot(k \times r)df \xrightarrow{Stokes} \int_L k \times r\, dr$$

L: $[x, y]$ síkban az origó középpontú R sugarú pozitívan irányított kör. (egyik megoldás)

Korábbi előadáson tanultak alapján az integrál egyik alaptulajdonsága: $\int_L vdr = \int_L v_e|dr|$

Tehát: $\int_L k \times r\, dr = \int_L (k \times r)_e|dr| = \int_L R|dr| = R \cdot \int_L 1|dr| = 2 \cdot R^2 \cdot \pi$

Másik megoldás

$(h \times r) = v$

$|h \times r| = |h| \cdot |r| = |v| = R$

$h \times r$ párhuzamos az érintővektorral

$$\int_L (h \times r)dr = \int_L \underbrace{(h \times r)_e}_{R} |dr| = \underbrace{\int_L R|dr|}_{L \cdot |R|} = R \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Definíció:

A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés skalárinvariánsa: A főátlóinak összege

Állítás: Ez bázis független.

Definíció:

$div(v)$: v deriváltoperátorának skalárinvariánsa, azaz a Jacobi-mátrix főátlójának összege: $\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

$\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \Rightarrow div(v) = \nabla \cdot v\right)$

Definíció: A lineáris transzformáció adjungáltja A^*

A szimmetrikus, ha $A = A^*$, antiszimmetrikus, ha $A^* = -A$

megjegyzés: A antiszimmetrikus lineáris transzformáció → deriváltoperátorának mátrixának (Jakobi) főátlója csupa 0 ⇒ $div(A) = 0$

speciálisan 2 dimenzióban a cross ilyen.

$cross = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow div(cross) = 0$

Állítás:

A antiszimmetrikus lineáris transzformáció, ha

2D-ben: $\exists c \in \mathbb{R}\ A \cdot r = c \cdot cross(r)$ $\qquad (c = a_{21})$

3D-ben: $\exists \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, hogy $A \cdot r = c \times r$ $\qquad \big(c = (a_{32}, a_{13}, a_{21})\big)$

Bizonyítás:

Egyértelműség $\mathbb{R}^3$-ban: $c_1, c_2, \cancel{c_3}$ is jó

$0 = c_1 \times r - c_2 \times r = (c_1 - c_2) \times r \Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$

$\exists\mathbb{R}^3$-ban: $\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ -a_{13} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-a_{21} \cdot y + a_{13} \cdot z) \cdot (a_{21} \cdot x - a_{32} \cdot z) \cdot (-a_{13} \cdot x + a_{32} \cdot y)$

$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_{32} & a_{13} & a_{21} \\ x & y & z \end{pmatrix}$ Ez megegyezik az előbb kapott végeredménnyel.

Definíció: A antiszimmetrikus lineáris transzformáció vektorinvariánsa az az egyetlen $c \in \mathbb{R}$, illetve $c \in \mathbb{R}^3$, amire $A \cdot r = cross(r)$, illetve $A \cdot r = c \times r$.

Definíció: A tetszőleges lineáris transzformáció antiszimmetrikus része: $\frac{1}{2} \cdot (A - A^*)$ és szimmetrikus része $\frac{1}{2} \cdot (A + A^*)$

Definíció:

$rot(v)$: v deriváltoperátorának antiszimmetrikus része invariánsának kétszerese

kiszámolása: $\quad \mathbb{R}^2$-ben $a_{21} - a_{12}$

$\mathbb{R}^3$-ban $(a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{32}, a_{21} - a_{12})$

Ha A a v Jakobija:

- $\mathbb{R}^2$-ben: $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$
- $\mathbb{R}^3$-ben$\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}; \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \nabla \times \mathrm{v}$

11. gyakorlat

Egyszeres összefüggőség

$\Gamma: t \to z(t)$, $t \in [a, b]$ görbe

Definíció: Γ zárt görbe a T tartományban a z_0 pontra deformálható, ha létezik olyan $\Gamma: [0,1] \to T^{[a,b]}$ folytonos leképezés, hogy $\gamma(1) = \Gamma$, $\gamma(0) = z_0$ konstans görbe.

Definíció: T egyszeresen összefüggő, ha benne minden zárt görbe pontra deformálható.

Ellenpélda

$Dom\left(\frac{1}{z}\right) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$Dom\left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}}}\right) \qquad id: z \to z$

Ez a tartomány nem egyszeresen összefüggő.

Zsugorodás közben át kellene mennie az origón, de ez nem lehetséges, mert az origó nincs benne a T tartományban (ellentmond a definíciónak) → Kétszeresen összefüggő

Példa

Csillagszerű tartomány, ha $\exists z_0 \in T$, hogy $\forall z \in T$ esetén $[z; z_0] \subseteq T$

$0 \leq \lambda \leq 1$ Középpontos kicsinyítés

Egyszeresen összefüggő, mert a z_0 középpontú , λ arányú kicsinyítések a γ-t alkotják.

$\|f - g\| = \sup(f - g)$

távolság = szuprémumnorma

Komplex logaritmus

$e^z = w$

$e^z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

$e^z = e^{\ln(r)} \cdot e^{i \cdot \varphi}$

$e^z = e^{\ln(r) + i \cdot \varphi}$

$z = \ln(r) + i \cdot \varphi + 2 \cdot \pi \cdot i \cdot k$

$\operatorname{Ln}(w) = ln|w| + i \cdot (arg|w| + 2 \cdot \pi \cdot k)$

$k = 0$ → logaritmus főértéke $\ln(w)$

$z^w := e^{w \cdot Ln(z)}$

$e^{Ln(z^w)} = e^{w \cdot Ln(z)}$ (komplex logaritmust nagy „L” betűvel írjuk)

Példa

$i^i = e^{i \cdot Ln(i)} = e^{i \cdot \left(ln 1 + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \pi \cdot k}$

Példa

$e^{i \cdot z} = 1 + i$

$e^{i \cdot z} = e^{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

Hatványsorok

1, Nem negatív kitevőjű hatványsor

$z \xrightarrow{s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (id_{\mathbb{C}} - z_0)^n\right)$

$z_0 = \mathbb{C}$ - középpontja / centruma a hatványsornak

$c_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_0^+}$ - együttható sorozat

TÉTEL (Cauchy-Hadamard-tétel):

s konvergenciatartománya egy $B_r(z_0)$ alakú halmaz, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|c_n|}}, & ha \ \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & ha \ \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = +\infty \\ +\infty, & ha \ \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = 0 \end{cases}$$

Példa

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots$$

$z_0 = 0$

$$c_n = \begin{cases} 1, ha\ n\ páros \\ 0, ha\ n\ páratlan \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{0} \qquad \rightarrow \qquad limsup\sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad R = \frac{1}{limsup\sqrt[n]{|c_n|}} = 1$$

Ez egy körlap belseje.

Taylor-sor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{c_n} \cdot (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$$

Példa

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

Mert: $\frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$, ami $z \to 0$ esetén $= 1$

Példa

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z) - z}{z^3} = -\frac{1}{6}$$

$\sin(z) = z - \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$ Mindkét oldalból kivonva z-t és elosztva z^3-nal

$\frac{\sin(z) - z}{z^3} = -\frac{1}{6} + \frac{z^2}{5!} - \cdots$, ami $z \to 0$ esetén $= -\frac{1}{6}$

Példa

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$$

$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$ Kivonva z-t, z^2-tel osztva és előjeleket cserélve

$\frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} - \cdots$, ami $z \to 0$ esetén $= \frac{1}{2}$

Egész kitevőjű sorok

$$z \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

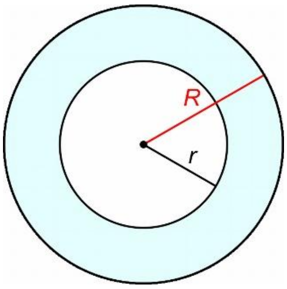
$$\underbrace{c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^{-2}} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z}}_{főrész} + \underbrace{c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \cdots}_{reguláris\ rész}$$

$$limsup\sqrt[n]{\left|c_{-n} \cdot \frac{1}{z^n}\right|} < 1$$

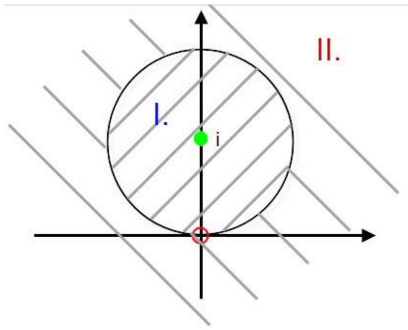
$$limsup\sqrt[n]{|c_{-n}|} \cdot \frac{1}{|z|} < 1$$

$limsup\sqrt[n]{c_{-n}} < |z|$ Ez egy végtelenbe nyúló körgyűrű.

$B_\delta(\infty)$ alakú a konvergencia tartomány.



A két tartomány (egy R sugarú körlap belseje, és egy r sugarú végtelenbe nyúló körgyűrű) metszete: körgyűrűn konvergens.



Példa

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$z_0 = i$ körül fejtsük sorba

$$z_1 = \frac{i}{2}$$

Kell: $\sum c_n \cdot (z-i)^n$

Ehhez átírjuk az $f(z)$-t úgy, hogy a nevezőben kivonunk és hozzáadunk i-t, majd alkalmazzuk a mértani sor összegképletét.

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)+i}$$

Mértani sor összegképlete: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$f(z)$-t valahogy $\frac{1}{1-q}$ alakra kell hozni. Emeljük ki a nevezőben i-t:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{i\cdot(z-i)}_{q}} = \frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(i\cdot(z-i)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}\cdot(z-i)^n$$

Ez a nem negatív kitevőjű rész, vagyis a reguláris rész.

Meg kell vizsgálni, hogy hol konvergens:

A mértani sorösszeg $|q| < 1$ esetén konvergál:

$$|q| < 1$$

$$|i\cdot(z-i)| < 1$$

$$|z-i| < 1$$

Ez az ábrán az I-es tartomány, vagyis megkaptuk az i körüli 1 sugarú körben a Taylor-sort.

Most emeljük ki a nevezőben a másik tagot, $(z-i)$-t:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{-i}{z-i}}_{q}} = \frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{n-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot\frac{1}{(z-i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot(z-i)^{-n-1}$$

Ez a negatív kitevőjű rész, vagyis a főrész.

Ennek a konvergencia tartománya:

$$|q| < 1$$

$$\left|\frac{-i}{z-i}\right| < 1$$

$$\frac{1}{|z-i|} < 1$$

$|z-i|>1$ Ez az ábrán a II-es tartomány.

12. előadás

Vektorfüggvények jellemzőinek számítása (grad, div, rot)

TÉTEL: 1. div, grad, rot lineáris operátorok (mert a deriválás lineáris operátor)

2. konstans vektorfüggvénynek $div=0$, $rot=0$ és konstans skalárfüggvénynek $grad=0$

3. Tegyük fel, hogy u skalárfüggvény, v vektorfüggvény

$div(u\cdot v)=u\cdot div(v)+v\cdot grad(u)$

Bizonyítás: $div(u\cdot v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(u\cdot v_i)}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot v_i+u\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)=$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot v_i+u\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=grad(u)\cdot v+u\cdot div(v)$

4. $rot(u\cdot v)=u\cdot rot(v)-CROSS(v)\cdot grad(u)$ 2D-ben

$rot(u\cdot v)=u\cdot rot(v)-v\times grad(u)+grad(u)\times v$ 3D-ben

Bizonyítás: $\left(rot(u\cdot v)\right)_1=\frac{\partial u\cdot v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u\cdot v_2}{\partial x_3}=\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot v_3+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\cdot u-\frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot v_2-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\cdot u=\left(grad(u\times v)\right)_1+u\cdot\left(rot(v)\right)_1$

5. $grad(u_1\cdot u_2)=u_1\cdot grad(u_2)+u_2\cdot grad(u_1)$

u_1 és u_2 skalárfüggvények

6. $\mathbb{R}^2$-ben rot és div kapcsolata

- $div(v)=rot\left(cross(v)\right)$
- $rot(v)=-div\left(cross(v)\right)$

Bizonyítás: a, $rot\left(cross(u)\right)=rot(-v_2,v_1)=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}-\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=div(v)$

b, $div\left(cross(v)\right)=rot\left(\underbrace{cross\left(cross(v)\right)}_{\substack{2\cdot 90°\ forgatás\\ -1szerésre\ vált}}\right)=rot(-v)=-rot(v)$

Tétel: 1. $div(r)=n$ $(\mathbb{R}^n-ben)$ r: identitásfüggvény

2. $div\left(cross(r)\right)=\sum főátló=0$

$rot\left(cross(r)\right)=div(r)=2$

3. $u(r)=c\cdot r\Rightarrow grad(u)=c$

$\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot x_i$ paricálisan deriválni kell

4. $u(r)=f(|r|)$ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény

→ $grad(u)=f'(|r|)\cdot\frac{r}{|r|}$

Bizonyítás: $grad(u)=f'(|r|)\cdot grad(|r|)$

$\left(grad(|r|)\right)_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot x_i}{|r|}=\frac{x_i}{|r|}$

$\forall i$-re: $\frac{1}{|r|}\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{r}{|r|}$

5. $v(r)=f(|r|)\cdot r$ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ differenciálható

→ $r\neq 0\Rightarrow rot(v)=0$

Bizonyítás: $\mathbb{R}^3$

4.-ből : $u(r) = f(|r|)$ $\quad v = r$

$$rot(v) = \underbrace{f(|r|) \cdot \underbrace{rot(r)}_{0}}_{0} - \underbrace{r \times grad\big(f(|r|)\big)}_{0}$$

6. $v(r)$ mint 5.-ben → $r \neq 0$

→ $div(v) = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|$

Bizonyítás: $div(f(|r|) \cdot r) = f(|r|) \cdot div(r) + r \cdot grad\big(f(|r|)\big) =$

$$= n \cdot f(|r|) + r \cdot f'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|} = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|$$

TÉTEL: u, v kétszer folytonosan differenciálható skalár illetve vektorfüggvények

1. $rot\big(grad(u)\big) = 0$
2. $div\big(rot(v)\big) = 0$
3. $div\big(grad(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \cdot x_i = \Delta u$ Laplace-operátor

TÉTEL: - G nyílt, összefüggő halmaz

- $v: G \to \mathbb{R}^2$ folytonos
- u potenciálfüggvénye v-nek

Ekkor: 1. $\int_L vdr = u(q) - u(p)$, ha L G-beli görbe p kezdő- és q végpontú

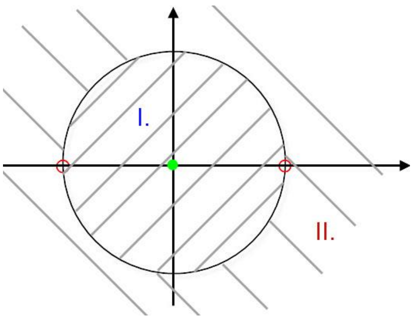
2. $\int_L vdr = 0$, ha L zárt G-beli görbe

3. ha v folytonosan differenciálható → $rot(v) = rot\big(grav(u)\big) = 0$ G-n

12. gyakorlat

Példa

$\frac{1}{(z-1)\cdot(z+1)}$ $\qquad z_0 = 0$



Parciális törtekre bontunk (pl. letakarásos módszer) és az előzőekhez hasonlóan kiemeljük az egyik tagot a nevezőben:

$$\frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-\underbrace{z}_{q_1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\underbrace{(-z)}_{q_2}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \overbrace{(-z)^n}^{(-1)^n \cdot z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n\right)}_{c_n} \cdot z^n$$

Konvergencia tartomány:

$|q_1| < 1$ → $|z| < 1$

$|q_2| < 1$ → $|-z| < 1$ Ez az I-es tartomány.

Másik tag kiemelése esetén a II-es tartományt kapjuk.

TÉTEL (Laurent-tétel): $0 \leq r \leq R$

$T = \{z \in \mathbb{C} | r < |z - z_0| < R\}$: f: $\mathbb{C} \to C$

f reguláris T-n. Ekkor f előáll egy z_0 körüli egész kitevőjű hatványsor formájában, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = f(z)$, ahol $c_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

$\Gamma \subseteq T$, egyszerű és egyszer hurkolja körbe a z_0-at.

Izolált szingularitás és szakadások osztályozása

Definíció: z_0-ban az $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$-nek izolált szingularitása van, ha f a z_0-ban szakad, de van olyan $B_\delta(z_0)$ kipontozott környezete, ahol f reguláris.

Példa

$\frac{1}{z}$ $\qquad \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$

0-ban van izolált szingularitása

Példa

$\frac{1}{(z-1) \cdot (z+1)}$

-1-nek van olyan környezete, ahol mindenhol reguláris (maximum 2 sugarú környezet, de a lényeg, hogy van)

$+1$-nek is

Ellenpélda

$z \to \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$

Hol szakad?

$z_0 = 0$-ban illetve a sinus függvény zérushelyeinél

Komplex sinus zérushelyei:

$\sin(z) = 0$

$\frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2 \cdot i} = 0$

$e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z} = 0$

$e^{i \cdot z} = e^{-i \cdot z}$

$i \cdot z = -i \cdot z + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$

$2 \cdot i \cdot z = k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$

$z = k \cdot \pi$ $\qquad$ Ugyan ott, ahol a valós sinusnak.

0-ban nem izolált szingularitása van az $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$-nek, mert akármilyen kis környezetben van szakadása. Az összes többi szingularitása izolált.

1. Megszüntethető szakadás

$\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$ és véges $\Leftrightarrow$ az f z_0 körüli Laurent-sorában nincs főrész $\left(\frac{1}{z} - \text{s tagok}\right)$

Példa

$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ $\qquad$ Megszüntethető szakadás 0-ban

$$f(z) = \frac{\overbrace{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots}^{e^z\ Taylor-sore} - 1 - z}{z^2} = \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} \ldots \overset{lim}{=\!\!\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

2. Lényeges szingularitás

$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow f$ z_0 körüli Laurent-sorában végtelen hosszú a főrész

Példa

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \cdots$$

3. Pólus szingularitás

$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow$ az f z_0-beli Laurent-sora véges sok (de nem nulla!) főrészbeli tagot tartalmaz

Példa

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}{z^4} = \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3! \cdot z}}_{főrész} + \frac{1}{5!} \cdot z - \cdots$$

3-ad fokú pólus, mert az utolsó $\frac{1}{z}$ kitevője 3.

Másképp:

A számlálónak a z egyszeres gyöke: egyszer emelhető ki z úgy, hogy a következő tag konstans legyen:

$$z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \ldots\right)$$

z^4-nek a 0 négyszeres gyöke.

Harmadfokú pólus = négyszeres multiplicitású gyök - egyszeres multiplicitású gyök = 3

Rezidumszámítás

Definíció: $z \xrightarrow{f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ reziduma a z_0 helyen $Res^f(z_0) = c_{-1}$

Példa

$$z_0 = 0$$

$$\ldots c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 \ldots$$

$$\int_\Gamma \ldots c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 \ldots dz = ?$$

Csak $c_{-1} \cdot \frac{1}{z}$ tagnak az integrálja nem 0. → $\oint_\Gamma \ldots dz = \oint_\Gamma c_{-1} \cdot \frac{1}{z} dz = Res^f(z_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot i = c_{-1} \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$

13. előadás

TÉTEL: $g: G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, $\exists u$ $G \to \mathbb{R}$

$v = grad(u)$ → ha L: G-beli görbe p kezdőponttal és q végponttal, akkor

$$\int_L vdr = u(q) - u(p)$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy L-et $r(t)$ $t \in [a, b]$ paraméterezi →

$$\int_L vdr = \int_L grad(u)dr = \int_a^b grad(u(t)) \cdot \dot{r}(t)dt = u(r(b)) - u(r(a)) = u(q) - u(p)$$

TÉTEL: az előző tétel feltételei mellett

1. v egy tetszőleges G-beli rögzített középpontú görbére vett görbementi integrálja, mint végpontjának függvénye megadja v egy potenciálfüggvényét

Bizonyítás: Legyen $p \in G$ rögzített és $\forall r \in G$-re $w(r) = \int_{L(r)} vdr = u(r) - u(p)$
($L(r)$: p középpontú, r végpontú G-beli görbe)

→ $grad(w(r)) = grad(u(r)) - \underbrace{grad(u(p))}_{\substack{0, mert\ p \\ rögzített}} = grad(u(r)) = v$

2. v potenciálfüggvényei csak konstansokban térnek el egymástól

Bizonyítás: Legyen $p \in G$ rögzített, $L(r)$ mint az előbb, w egy potenciálfüggvénye v-nek

$\int_{L(r)} vdr = u(r) - u(p) = w(r) - w(p)$ → $w(r) - u(r) = \underbrace{w(p) - u(p)}_{konstans}$

Potenciálfüggvény létezéséhez nem elég a folytonosság!

Például: $cross(r)$ folytonos, de $rot(cross(r)) = 2 \neq 0$

Nem elég $rot(r) = 0$

$v(r) = \frac{cross(r)}{|r|^2} = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ $r = 0$-ra $rot(v(r))$

$rot(v(r)) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{d}{dy} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-2\cdot x^2+x^2+y^2-2\cdot y^2}{x^2+y^2} = 0$, de ha L egy 0 körüli R sugarú kör, akkor $\int_L vdr = \int_L v_e \cdot |dr| = \int_L \frac{1}{R}|dr| = \frac{1}{R} \cdot \int_L 1|dr| = \frac{1}{R} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot \pi$

TÉTEL

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány

$v: G \to \mathbb{R}^2$ folytonos

Ekkor az alábbiak ekvivalens:

1. v-nek van G-n potenciálfüggvénye
2. $\int_L vdr = u(q) - u(p)$, ha L G-beli p kezdő- és q végpontú görbe és u egy potenciálfüggvénye v-nek
3. zárt egyszerű G-beli görbéken az integrál 0
4. $rot(v) = 0$ G-n

Példa (potenciál keresése)

$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ vektorfüggvény

⇒ $0 = rot(f) = Q_x \cdot P_y$, azaz $Q_x = P_y$

Példa (Coulomb-erő)

$v(r) = |f(r)| \cdot r$

$r = 0$-ban: $\underbrace{div(v) = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|}_{\substack{11. előadás\ vége\ felé \\ 6. pontban\ bizonyítva}} = 0$

Ez egy differenciálegyenlet. Más paramétereket használva:

$n \cdot y + y' \cdot t = 0$

$y' = -n \cdot \frac{y}{t}$

$\frac{dy}{dt} = -n \cdot \frac{y}{t}$

$\int \frac{1}{y} dy = -n \cdot \int \frac{1}{t} dt$

$\ln|y| = -n \cdot \ln|t| = \frac{1}{\ln|t|^n} + c$

$|y| = \frac{1}{|t|^n} + c \xrightarrow{Bolzano} y = \frac{c_1}{t^n} \Rightarrow v(r) = \frac{c_1 \cdot r}{|r|^n}$ n-dimenziós Coulomb-törvény

13. gyakorlat

Példa

$$I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^c} dz \qquad c \in \mathbb{Z}$$

I. eset: $c \leq 0$

Mivel $c \leq 0$, ezért z^c a számlálóba kerül: $f(z) = e^z \cdot z^c$, ekkor tehát a függvénynek nincs szakadása a $z_0 = 0$ helyen → reguláris → a Cauchy-féle integráltétel szerint ekkor az integrál 0

II. eset: $c > 0$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^c} dz$$

Cauchy-féle integrálformula: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Most: $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$, $c = n + 1$, $n = c - 1$

Tehát: $\int \frac{e^z}{z^c} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{e^0}{(c-1)!} = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{(c-1)!}$

Riemann-tétel: f korlátos, egyetlen szingularitása a z_0, Γ egyszerű és zárt görbe, egyszer körbehurkolja z_0-t → $\oint_\Gamma f = 0$

Példa

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz \qquad R > 0$$

Ennek a $z_0 = 1$ helyen van szakadása, ezért a megoldás függ attól, hogy mekkora az R.

I. eset

$0 < R < 1$

A körben nincs benne a szakadás → reguláris → a Cauchy-féle integráltétel szerint ekkor az integrál 0

II. eset

$R = 1$ (vizsgán nem kell)

III. eset

$R > 1$ A görbe körbehurkolja a szingularitást.

Két módszerrel is megoldható. 1. módszer: Cauchy-féle integrálformula

2. módszer: Residum-tétel

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz = Res^f(z_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Ha z_0 az f-nek n-edfokú pólusa, akkor a rezidum a z_0-ban:

$$Res^f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^n \cdot f(z)\right)^{n-1}$$

Most a $z_0 = 1$ elsőfokú pólus → $n = 1$

Tehát a képlet szerint: $Res^f(1) = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \lim_{z \to 1} \left((z-1)^1 \cdot \frac{e^z}{z-1}\right) = 1 \cdot \lim_{z \to 1} e^z = e$

Visszaírva a legelső képletbe: $\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz = e \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$

Példa

Hányadfokú pólusa van a $\frac{\sin(z^2)}{z^8}$ függvénynek?

$$\frac{\sin(z^2)}{z^8} = \frac{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \cdots}{z^8} = \frac{z^2 \cdot \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \frac{z^{12}}{7!} + \cdots\right)}{z^8} = \underbrace{\frac{1}{z^6} - \frac{1}{3! \cdot z^2}}_{főrész} + \frac{1}{5!} \cdot z^2 \ldots$$

6-odfokú pólus, mert a főrészben az utolsó $\frac{1}{z}$ kitevője 6.

Példa

$$f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2} \qquad\qquad z \neq 0$$

a, $f(0) = ?$

b, $f^{(4)}(0) = ?$

c, $f^{(100)}(0) = ?$

d, $f^{(n)}(0) = ?$

a, Nevezetes határértékek, amiket jó tudni:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ Most ez kell, pontosabban a -1-szerese → $f(0) = -\frac{1}{2}$

Vagy ha nem ismerjük ezeket:

$$f(z) = \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots-1}{z\text{^}2} = -\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\cdots \xrightarrow{z\to 0} -\frac{1}{2}$$

b, 4 deriválás (1. módszer) vagy Cauchy-féle integrálformula + rezidum tétel használata (2. módszer) vagy

3. módszer:

0 körüli Taylor-sor:

$$f(0) + f'(0)\cdot z + \frac{f''(0)}{2}\cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot z^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot z^4 + \cdots$$

Az előbb felírt Taylor-sor:

$$f(z) = -\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\cdots$$

A z^4-es tagok együtthatóit egyenlővé téve:

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-1}{6!} \qquad \rightarrow \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{6!}$$

b, z^{100}-os tagok együtthatói rövid gondolkozás után:

$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = -\frac{1}{102!}$ (akkor negatív, ha 4-gyel osztható a z kitevője)

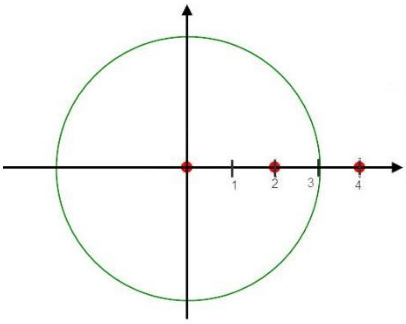
$$f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{102!}$$

c, n paraméter szerint szétbontva:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & ha\ n\ páratlan \\ -\frac{n!}{(n+2)!}, & ha\ n\ oszható\ 4-gyel \\ \frac{n!}{(n+2)!}, & ha\ n = 2(mod 4) \end{cases}$$

Példa

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z\cdot(z^2-6\cdot z+8)}dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z\cdot(z-2)\cdot(z-4)}dz = ?$$



3 kis kör van 0, 2 és 4 középponttal. A 4 középpontú kör nincs a nagy körön belül, ezért arra az integrál 0.

Az integrál a másik 2 kis körre vett integrál összege. A kis körök sugarát mi választhatjuk, csak ne lógjon a nagy körön kívülre és ne érje el a másik kiskört. Például $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{5}$ jó választás.

$$\underbrace{\int_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{(z-2)\cdot(z-4)}}{z}\,dz}_{\substack{\text{0 középpuntú kör, tehát} \\ \text{a z−0 marad a nevezőben}}} + \underbrace{\int_{|z-2|=\frac{1}{5}} \frac{\frac{1}{(z-4)\cdot z}}{z-2}\,dz}_{\substack{\text{2 középpontú kör, tehát} \\ \text{a z−2 marad a nevezőben}}}$$

Cauchy-féle integrálformula

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)\cdot(z-4)} \qquad z_0 = 0 \qquad n = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)\cdot z} \qquad z_0 = 2 \qquad n = 0$$

Tehát: $\int_{|z|=3} \frac{1}{z\cdot(z^2-6\cdot z+8)}dz = 2\cdot\pi\cdot i\cdot\frac{1}{(-2)\cdot(-4)} + 2\cdot\pi\cdot i\cdot\frac{1}{2\cdot(-2)} = 2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi\cdot i}{4}$

Példa

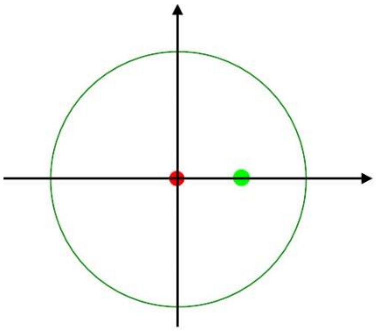
$f(z) = z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}$ Milyen szingularitása van?

$$f(z) = z^2\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2\cdot z^2}+\frac{1}{3!\cdot z^3}+\cdots\right) = z^2+z+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3!\cdot z}+\frac{1}{4!\cdot z^2}+\cdots}_{\text{végtelen főrész}}$$

Lehetnek:
- megszüntethető szakadás, ha nincs főrész
- lényeges szingularitás, ha végtelen hosszú a főrész
- <u>pólus szingularitás, ha véges hosszú a főrész</u>

Példa

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4\cdot(z-1)}\cdot dz$$



Kis körök középpontjai: 0 és 1, nagy kör sugara 2, középpontja 0.

$$\int_{|z|=\frac{1}{11}} \frac{\frac{e^{z^4}-1}{z-1}}{z^4}dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{23}} \frac{\frac{e^{z^4}-1}{z^4}}{z-1}dz$$

Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmazni, de a piros kör esetében z^4 miatt 4-szer kéne deriválni. Ehelyett trükközve: átírható $\frac{e^{z^4}-1}{z^4}\cdot\frac{1}{z-1}$ alakba.

Nevezetes határérték: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, vagyis $\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^4}-1}{z^4} = 1$ → 2 reguláris függvény szorzata → Integrálja 0

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4\cdot(z-1)}\cdot dz$$

$\int_{|z-1|=\frac{1}{23}} \frac{\frac{e^{z^4}-1}{z^4}}{z-1} dz$ → $f(z) = \frac{e^{z^4}-1}{z^4}$ $z_0 = 1$ $n = 1$

→ $\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4 \cdot (z-1)} \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{e^{1^4}-1}{1^4} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot (e-1)$

Példa

$$\left(\frac{z^3}{z-3}\right)^{(100)} (0) = ?$$

$f(z) = \frac{z^3}{z-3} = z^3 \cdot \frac{1}{z-3} = z^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)} = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{3} \cdot \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3} + \cdots\right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(z^3 + \frac{z^4}{3} + \frac{z^5}{3^2} + \frac{z^6}{3^3} + \cdots\right)$

z^{100}-on együtthatója: $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{97}} = -\frac{1}{3^{98}}$

z^{100}-on együtthatója a Taylor-sorban: $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$

Tehát $f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{3^{98}}$

Vektoranalízis

$$w(r) = r \cdot |r|^n$$

$div(r \cdot |r|^n) = div(r) \cdot |r|^n + v \cdot grad(|r|^n)$

Ha r egy n dimenziós vektor: $div(r) = div \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = n \cdot 1 = dim$

$$grad(|r|^n) = \underbrace{n \cdot |r|^{n-1}}_{nagyság} \cdot \underbrace{\frac{r}{|r|}}_{irány}$$

Visszahelyettesítve: $div(r \cdot |r|^n) = dim \cdot |r|^n + r \cdot n \cdot |r|^{n-1} \cdot \frac{r}{|r|} =$

$$= dim \cdot |r|^n + n \cdot |r|^{n-1} \cdot \frac{|r|^2}{|r|} = dim \cdot |r|^n + n \cdot |r|^n = (dim + n) \cdot |r|^n$$