

# Matematika A3

- 1. előadás (2013.09.11.)
- 1. gyakorlat (2013.09.12.)
- 2. előadás (2013.09.18.)
- 2. gyakorlat (2013.09.19.)
- 3. előadás (2013.09.25.)
- 3. gyakorlat (2013.09.26.)
- 4. előadás (2013.10.02.)
- 4. gyakorlat (2013.10.03.)
- 5. előadás (2013.10.09.)
- 6. előadás (2013.10.16.)
- 5. gyakorlat (2013.10.17.)
- 6. gyakorlat (2013.10.24.)
- 7. előadás (2013.10.30.)
- 7. gyakorlat (2013.10.31.)
- 8. előadás (2013.11.06.)
- 8. gyakorlat (2013.11.07.)
- 9. előadás (2013.11.13.)
- 9. gyakorlat (2013.11.14.)
- 10. előadás (2013.11.20.)
- 10. gyakorlat (2013.11.21.)
- 11. előadás (2013.11.27.)
- 11. gyakorlat (2013.11.28.)
- 12. előadás (2013.12.04.)
- 12. gyakorlat (2013.12.05.)
- 13. előadás (2013.12.11.)
- 13. gyakorlat (2013.12.12.)

Készítette: Seyler Lajos

## 1. előadás

### Differenciálegyenletek

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$$

Implicit megadás

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$$

Explicit megadás ( $F$  folytonos)

$$y' = F(y, x)$$

**Példa**  $y' = a \cdot y \quad (a > 0)$

$$\frac{y'}{y} = a$$

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int a dt$$

$$\ln|y| = a \cdot t + c$$

$$|y| = e^{a \cdot t + c} = e^{a \cdot t} \cdot e^c = e^{a \cdot t} \cdot c_1 \quad (c_1 > 0)$$

Bolzano-tétel  $\rightarrow y = e^{a \cdot t} + c_2 \quad (c_2 \neq 0)$

Ez az általános megoldás.

Szinguláris megoldás, ha  $F(y_0, x) = 0 \quad y = y_0$

Ez az összes megoldás.

Tegyük fel, hogy:  $u(t)$  is megoldás.

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{u(t)}{e^{a \cdot t}} = \frac{u'(t) \cdot e^{a \cdot t} - u(t) \cdot a \cdot e^{a \cdot t}}{e^{2 \cdot a \cdot t}} = 0$$

$y' = a \cdot y$  miatt a számlálóban lévő  $u'(t) = u(t) \cdot a$ . Ha ezt behelyettesítjük, akkor a számláló, ezért az egész tört is 0 lesz.

**Példa**

Mennyi idő alatt nő duplájára a népesség?

$$2 = \frac{y(t_2)}{y(t_1)} = \frac{C \cdot e^{a \cdot t_2}}{C \cdot e^{a \cdot t_1}} = e^{a \cdot (t_2 - t_1)}$$

$$\frac{\ln 2}{a} = t_2 - t_1$$

$C$  rögzítése

$$y(t) = k \cdot e^{a \cdot t} \quad \text{Partikuláris megoldás}$$

$$y(t) = 3,032 \cdot 10^9 \cdot e^{0,02 \cdot (t - 1960)}$$

Nagy " $t$ " esetén elszáll, nem ad a valósághoz közeli adatokat.

Korrigálás:  $y' = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{N}\right)$

### Lineáris differenciálegyenletek

Általános lineáris egyenlet:  $A \cdot x = b$ , ahol " $A$ " lineáris operátor

Kell: " $A$ "  $n$ -szer folyamatosan differenciálható tere  $\rightarrow$  folytonosak tere

Megoldások:  $x_0 + Ker A$  és  $A \cdot x_0 = b$

- Ha  $y$  megoldás  $\rightarrow A \cdot y = b \rightarrow A \cdot (y - x_0) = A \cdot y - A \cdot x_0 = b - b = 0$

- Ha  $y \in \text{Ker}A \rightarrow A(x_0 + y) = A \cdot x_0 + A \cdot y = b \quad (A \cdot y = 0)$

$y_{\text{ia}} = y_{\text{ip}} + y_{\text{há}}$  (já: inhomogén általános, ip: inhomogén partikuláris, há: homogén általános)

pl. 1.  $A \cdot y = y' + f(x) \cdot y \quad [y' + f(x) \cdot y = b(x)]$

2.  $A \cdot y = y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y$

Állandó együtthatós egy lineáris differenciálegyenlet, ha  $f(x), g(x), \dots$  konstansok. Egyébként függvényegyütthatós.

### Állandó együtthatós differenciálegyenlet

$y'(t) + a \cdot y(t) = 0 \quad y\text{-t } e^{\lambda t} \text{ alakban keressük} \quad y' = \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot y$

$0 = \lambda \cdot y(t) + a \cdot y(t) = y(t) \cdot (\lambda + a) \quad \lambda'' = \lambda \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda^2 \cdot y$

$\lambda = -a \text{ jó} \rightarrow e^{-at}$

$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$

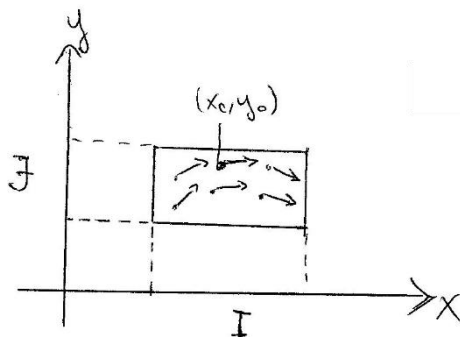
$y = e^{\lambda x}$  alakban keressük  $y^{(k)} = \lambda^k \cdot y$

$y \cdot (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0 \quad \text{Karakterisztikus polinom (ami a zárójelben van)}$

Tegyük fel, hogy:  $\lambda^k$  egy  $m \cdot k$ -szoros gyök. Ekkor:

$\{e^{\lambda_k x}, x \cdot e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x} | k = 1 \dots m\}$  alrendszer

### 1. gyakorlat



"Iránymező"

$F: I \times J \rightarrow R$

$(x, y) \rightarrow F(x, y)$

Az  $y' = F(x, y)$  differenciálegyenlet  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó

megoldása: az egy  $y: K \rightarrow R$

1.  $K \subseteq I, x_0 \in \text{int}(K)$

2.  $y \in \text{Diff}(K, R)$

3.  $y(x_0) = y_0, \forall x \in K \quad y'(x) = F(x, y(x))$

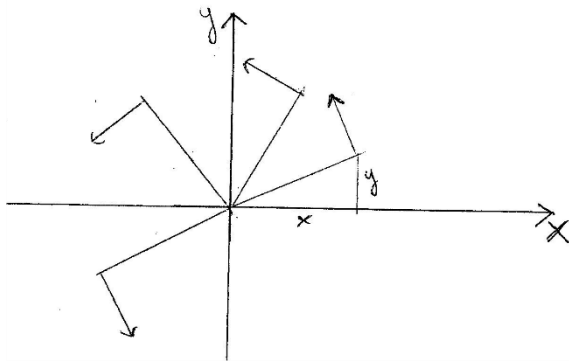
Ezt partikuláris megoldásnak nevezik.

Általános megoldás:  $y(x, C)$  megadja az összes megoldást a "C" paramétertől függően

Nem biztos, hogy ez az összes megoldás. Lehet szinguláris megoldás is.

### Példa

$y' = -\frac{x}{y}$



$\frac{y}{x}$ : a meredekség

Tudjuk, hogy egy "m" meredekségű egyenesre merőleges egyenes meredeksége  $-\frac{1}{m}$ , ami  $-\frac{x}{y}$ . Ez áll az egyenlet jobb oldalán. A merőleges nyilak egy kört rajzolnak ki, ezért a sejtésün, hogy a megoldás alakja:  $x^2 + y^2 = r^2$

Ez az implicit általános megoldás

**Bizonyítás:** 1. egyik irány: implicit deriválással

$$x^2 + (y(x))^2 = r^2$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y(x) \cdot y'(x) = 0$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

2. másik irány:

$$g: x \rightarrow x^2 + (y(x))^2$$

$$g' = 0$$

$$g = C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

### Szeperábilis differenciálegyenlet

$$y' = \frac{\sin x}{y^6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y^6}$$

$$\int y^6 dy = \int \sin x dx$$

$$\frac{y^7}{7} = -\cos x + C \quad \text{Implicit általános megoldás}$$

$$y = \sqrt[7]{-7 \cdot \cos x + 7 \cdot C} \quad \text{Explicit általános megoldás}$$

**Tétel:** legyen  $f: I \rightarrow R, g: J \rightarrow R$  folytonos függvények,  $g$  sehol sem 0

Az  $y' = f(x) \cdot g(y)$  szeperábilis differenciálegyenlet megoldása:  $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ , ahol  $G = \int \frac{1}{g}$ ;  $F = \int f$

**Példa**

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) dx = G(y(x))$$

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Darboux-tétel miatt biztosan létezik  $G^{-1}$ .

**Példa**

$$y' = a \cdot y$$

1. az  $y = 0$  egy jó megoldás

2.  $\frac{dy}{dx} = a \cdot y$  Tegyük fel, hogy:  $y$  sehol se 0

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\ln|y| = a \cdot x + C$$

$$|y| = e^{a \cdot x + C}$$

$$|y| = e^{a \cdot x} + e^C \quad e^C \text{ helyett írjunk } K\text{-t } (K > 0)$$

$$|y| = K \cdot e^{a \cdot x}$$

Bolzano-tétel ...

$$y = \pm K \cdot e^{a \cdot x}$$

### Egyszincencia-unicitás-tétel

**1. Peano-féle egyszincenciatétel:** Az  $y' = F(x, y)$  differenciálegyenletnek létezik lokális megoldása az  $(x_0, y_0)$  pontban, ha  $F$  folytonos függvény.

**2. Cauchy-Lipschitz-tétel (gyenge):** Ha az  $F$  folytonosan differenciálható egy nyílt halmazon és ezen belül egy  $I \times J$  téglalap belsejében kijelölünk egy  $(x_0, y_0)$  pontot, akkor van az egyenletnek egy  $I$ -n értelmezett  $(x_0, y_0)$ -n áthaladó megoldása.

#### Példa

$$y' = \sqrt[3]{y}; y(0) = 0$$

$y_1 = 0$  egy jó megoldás

Többi megoldás:  $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$

$$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx \quad (y > 0)$$

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = x + C \quad (C = 0)$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot x\right)^3}$$

**Definíció:** szinguláris pont: több megoldás (görbe) halad keresztül ezen a ponton

## 2. előadás

#### Példa

$$y' - 2 \cdot y = 1$$

Homogén általános megoldás ( $y_{há}$ ):  $y^{(n)}$  helyett  $\lambda^k$ -t írunk mindenhova és a jobb oldal 0. Itt most  $y'$  helyett  $\lambda$ ,  $y$  (0. derivált) helyett  $\lambda^0 = 1$

$$\lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{2 \cdot x}$$

Inhomogén partikuláris megoldás ( $y_{ip}$ ):  $y$  helyére beírjuk, amit az előbb kaptunk, csak  $c$  helyett  $c(x)$ -et írunk, feltételezve, hogy egy függvény. Tehát  $y = c(x) \cdot e^{2 \cdot x}$  és kifejezzük  $c(x)$ -et.

$$\frac{c'(x) \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot c(x) \cdot e^{2 \cdot x}}{y'} - 2 \cdot \frac{c(x) \cdot e^{2 \cdot x}}{y} = 1$$

$$c'(x) = e^{-2 \cdot x}$$

$$c(x) = \int e^{-2 \cdot x} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} + C \quad \text{Ezt visszahelyettesítjük a } c \text{ helyére a homogén megoldásba.}$$

$$y_{ip} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot e^{2 \cdot x} = -\frac{1}{2}$$

Ezekből összerakhatjuk az inhomogén általános megoldást ( $y_{iá}$ ):

$$y_{\text{ia}} = y_{\text{há}} + y_{\text{ip}} = c \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{2}$$

**Példa**

$$y' + y = \sin x$$

Homogén általános megoldás

$$\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-x}$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + c(x) \cdot e^{-x} = \sin(x)$$

$$c'(x) = e^x \cdot \sin(x)$$

$$c(x) = \int e^x \cdot \sin(x) dx = \dots = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

$$y_{\text{ip}} = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y_{\text{ia}} = y_{\text{há}} + y_{\text{ip}} = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

### Elsőrendű függvényegytthatós differenciálegyenletek

Alakjuk:  $y' + f(x) \cdot y = b(x)$

Ha homogén:  $y' = -f(x) \cdot y$

**Állítás:** Ha van 2 megoldás, akkor hányadosuk konstans.

Bizonyítás: 
$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2'}{y_2^2} = \frac{-f(x) \cdot y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot (-f(x)) \cdot y_2}{y_2^2} = 0$$

**Példa**

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3 \cdot x^2$$

Homogén általános megoldás

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{y'}{y} = \int -\frac{1}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C = \ln \frac{1}{|x|} + C$$

$$|y| = \frac{1}{|x|} \cdot C_1 \quad C_1 > 0$$

Bolzano tételét alkalmazva:  $y_{\text{há}} = \frac{1}{x} \cdot C_2 \quad C_2 \neq 0$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y = c(x) \cdot x^{-1}$$

$$3 \cdot x^2 = c'(x) \cdot x^{-1} - c(x) \cdot x^{-2} + c(x) \cdot x^{-2}$$

$$c'(x) = 3 \cdot x^3$$

$$c(x) = \int 3 \cdot x^3 dx = \frac{3}{4} \cdot x^4 + C$$

$$y_{\text{ip}} = \frac{3}{4} \cdot x^3$$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{i\acute{a}} = \frac{c}{x} + \frac{3}{4} \cdot x^3 \quad c \neq 0$$

**Példa**

$$y' + 2 \cdot t \cdot y = t \quad \text{Kezdeti feltétel:} \quad y(1) = 2$$

Homogén általános megoldás

$$y' = -2 \cdot t \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = -2 \cdot t$$

$$\ln|y| = -t^2 + C \quad \rightarrow \quad |y| = e^{-t^2} \cdot C_1 \quad C_1 > 0$$

$$y_{há} = e^{-t^2} \cdot C_2$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y(t) = c(t) \cdot e^{-t^2}$$

$$t = c'(t) \cdot e^{-t^2} - c(t) \cdot e^{-t^2} \cdot 2 \cdot t + 2 \cdot t \cdot c(t) \cdot e^{-t^2}$$

$$c'(t) = t \cdot e^{t^2}$$

$$c(t) = \int t \cdot e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + C$$

$$y_{ip} = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = \frac{1}{2}$$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{i\acute{a}} = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

Kezdeti érték feltétel

$$y(1) = 2$$

$$2 = c \cdot e^{-1} + \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{1-t^2} + \frac{1}{2}$$

**Példa**

$$y' + \frac{2}{t} \cdot y = e^t$$

Homogén általános megoldás

$$y' = -\frac{2}{t} \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{t}$$

$$\ln|y| = \ln|t|^{-2} + C \quad \rightarrow \quad |y| = \frac{1}{t^2} \cdot C_1 \quad C_1 > 0$$

$$y = \frac{C_2}{t^2} \quad C_2 \neq 0$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y = c(t) \cdot t^{-2}$$

$$e^t = c'(t) \cdot t^{-2} - c(t) \cdot 2 \cdot t^{-3} + 2 \cdot c(t) \cdot t^{-3}$$

$$c'(t) = t^2 \cdot e^t$$

$$c(t) = \int t^2 \cdot e^t dt = e^t \cdot (t^2 - 2 \cdot t + 2)$$

$$y_{ip} = e^t \cdot \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right)$$

$$y_{há} = \frac{c}{t^2} + e^t \cdot \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \quad c \neq 0$$

## Másodrendű, állandó együtthatós differenciálegyenletek

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa ( $D$ ):

-  $D > 0$ : - két különböző gyök van

$$- y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ a megoldások})$$

-  $D = 0$ : - kétszeres multiplicitású gyök

$$- y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad (\lambda \text{ a kétszeres gyök})$$

-  $D < 0$  - komplex gyökök (konjugált párok)

$$\lambda_1 = \mu_1 + \tau \cdot j \quad , \quad \lambda_2 = \mu_2 - \tau \cdot j$$

$$- y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

Alkalmazzuk a következő átalakítást:  $e^{x+j \cdot y} = e^x \cdot (\cos y + j \cdot \sin y)$

$$e^{\lambda_1 \cdot x} = e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\tau \cdot x) + j \cdot \sin(\tau \cdot x))$$

$$e^{\lambda_2 \cdot x} = \overline{e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\tau \cdot x) + j \cdot \sin(\tau \cdot x))}$$

$$y_{há} = (c_1 + c_2) \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x) + j \cdot (c_1 - c_2) \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$$

$$\rightarrow y_{há} = C_3 \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x) + C_4 \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$$

## 2. gyakorlat

### Példa

$$y' = x^2 \cdot \frac{\cos^4 y}{\sin y}$$

Kezdeti feltételek:

$$\text{a,} \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b,} \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{c,} \quad y(0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{d,} \quad y(0) = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi$$

Nézzük meg, hol nincs megoldás: 0-val való osztás  $\rightarrow y_0 = k \cdot \pi$  esetén nincs megoldás

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \cos^4 y}{\sin y}$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos^4 y} dy = \int x^2 dx$$

$$\text{megjegyzés:} \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

$$- \int \cos^{-4} y (-\sin y) dy = \int x^2 dx$$

$$- \frac{\cos^{-3} y}{-3} = \frac{x^3}{3} + C$$



$$\cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+3 \cdot C}}$$

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+3 \cdot C}}\right) + A \cdot 2 \cdot \pi \quad A \in \mathbb{Z}$$

Nem szeparálható megoldás

$$y \equiv \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b,} \quad C = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3} \quad A = 0$$

$$\text{c,} \quad C = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3} \quad A = 0$$

$$\text{d,} \quad C = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3} \quad A = 1$$

## I. Lineáris helyettesítéssel megoldható differenciálegyenletek

**Példa**

$$y' = \sqrt{y-2 \cdot x} \quad y = y(x)$$

$$u' + 2 = \sqrt{u} \quad u(x) = y(x) - 2 \cdot x \quad u = y - 2 \cdot x$$

$$u' = \sqrt{u} - 2 \quad u'(x) = y'(x) - 2 \quad u' = y' - 2$$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} - 2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}-2} = \int dx \quad \text{Helyettesítés:} \quad t = \sqrt{u}$$

Nem elég a  $\sqrt{u}$  helyett  $t$ -t írni, a  $du$ -t is át kell írni  $dt$ -re, de ezt ki kell számolni.

$$t^2 = u$$

$$2 \cdot t \cdot t' = u'$$

$$2 \cdot t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$2 \cdot t \cdot dt = du \quad \text{Tehát a } du \text{ helyett } 2 \cdot t \cdot dt \text{-t írunk.}$$

$$\int \frac{2 \cdot t \cdot dt}{t-2} = \int \frac{2 \cdot (t-2) + 4}{t-2} dt = \int 2 + \frac{4}{t-2} dt = 2 \cdot t + 4 \cdot \ln|\sqrt{t-2}|$$

Visszahelyettesíthetjük  $t$  helyett a  $\sqrt{u}$ -t,  $u$  helyett pedig az  $y - 2 \cdot x$ -et.

$$2 \cdot \sqrt{y-2 \cdot x} + 4 \cdot \ln|\sqrt{y-2 \cdot x} - 2| = x + C$$

## II. Homogén fokszámú differenciálegyenletek

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = u \cdot x \quad \rightarrow \quad y' = u' \cdot x + u$$

**Példa**

$$y' = -\frac{2 \cdot x + y}{x + y} = -\frac{2 + \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

$$u' \cdot x + u = -\frac{2+u}{1+u}$$

$$u' \cdot x = -\frac{2+u}{1+u} - u = -\frac{2+u+u(1+u)}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{u^2+2 \cdot u+2}{1+u}$$

$$\int \frac{1+u}{u^2+2 \cdot u+2} du = \int -\frac{1}{x} dx$$

2-vel beszorozzuk a törtet, majd 2-vel osztjuk és így a tört  $\frac{f'}{f}$ -es lesz, aminek tudjuk az integrálját.

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot u + 2}{u^2 + 2 \cdot u + 2} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u^2 + 2 \cdot u + 2|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 2 \right| = -\ln|x| + C$$

Ezt szépíthetjük egy kicsit. Pl.:  $C$  helyett írhatjuk, hogy  $\ln K$ , és így összevonhatjuk a 2 logaritmust a jobb oldalon, az  $\frac{1}{2}$ -t bevihetjük a logaritmusba kitevőnek, majd eltüntetjük a logaritmust mindkét oldalról.

$$\left| \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 2 \right|^{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{1}{|x|}$$

## Egzakt differenciálegyenletek

**Definíció:** Legyen  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  nyílt,  $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos,  $Q$  sehol sem 0. Azt mondjuk, hogy az  $y' = -\frac{P}{Q}$  differenciálegyenlet egzakt, ha van olyan  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény, melyre:

$$I. \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P$$

$$II. \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

### Példa

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Ennek a megoldását már korábban megkaptuk:  $\underbrace{x^2 + y^2}_{F(x,y)} = C$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 2 \cdot x = P \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \cdot y = Q \end{array} \right\} -\frac{P}{Q} = -\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y} = y'$$

Megjegyzések:

$$1. \quad \text{grad}F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = (P, Q)$$

2. Implicit függvény-tétel: Ha  $F(x_0, y_0)$  környezetében mindenhol folytonosan diffható és  $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ , akkor egyértelműen létezik az  $(x_0, y_0)$  környezetben az  $F(x, y) = F(x_0, y_0)$  egyenletnek implicit függvénye és ennek deriváltja:  
 $y'(x) = \frac{\partial_x F(x, y(x))}{\partial_y F(x, y(x))}$

$$3. \quad F(g(x), h(x))' = \text{grad}F(g(x), h(x)) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$$

**Tétel** (Egzisztencia)

$U \subseteq \mathbb{R}^2$  nyílt,  $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható,  $Q$  sehol sem 0.  $(x_0, y_0) \in U$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ .

Ilyenkor  $y' = -\frac{P}{Q}$  megoldása pontosan az  $F(x, y) = F(x_0, y_0)$  implicit megoldása.

$$\text{Bizonyítás:} \quad \Leftrightarrow y'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

$\Rightarrow$  Legyen  $y$  olyan, hogy  $y' = -\frac{P}{Q}$ , ami egzakt.

$$Q \cdot y' = -P$$

$$P + Q \cdot y' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \text{Ez egy skaláris szorzat.}$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$(F(x, y(x)))' = 0$$

$$F(x, y) = C$$

Általános megoldás:  $F(x, y) = C$

**Tétel** (Egzaktság jellemzése)

Legyen az  $U$  ezen kívül egyszeresen összefüggő halmaz.  $y' = -\frac{P}{Q}$  pontosan akkor egzakt, ha  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$y' = -\frac{P}{Q} \text{ másik jelölése: } \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \rightarrow Q \cdot dy = -P \cdot dx \rightarrow \underline{P \cdot dx + Q \cdot dy = 0}$$

**Példa**

$$\underbrace{(y \cdot e^{xy} + \cos x)}_P dx + \underbrace{(x \cdot e^{xy} + \cosh y)}_Q dy = 0$$

**Megoldás:**

1. Tényleg egzakt-e?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy} + y \cdot x \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy}$$

A kettő egyenlő  $\rightarrow$  tényleg egzakt

2. Egyenletrendszer

$$I. \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y \cdot e^{xy} + \cos x$$

$$II. \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot e^{xy} + \cosh y$$

Elsőt kiintegráljuk:  $F(x, y) = y \cdot \frac{e^{xy}}{y} + \sin x + C_1(y)$   $C_1(y)$  csak  $y$ -nak a függvénye

$$\text{Majd deriváljuk } y \text{ szerint: } \underbrace{x \cdot e^{xy} + C_1'(y)}_{a \text{ derivált}} = \underbrace{x \cdot e^{xy} + \cosh y}_Q$$

$$C_1'(y) = \cosh y$$

$$C_1(y) = \sinh y$$

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin x + \sinh y$$

$$\underline{e^{xy} + \sin x + \sinh y = C}$$

**Példa**

$$y' = -\frac{y \cdot \cos(xy) + 1}{x \cdot \cos(xy)} \quad y(1) = 0$$

**Megoldás:**

$$1. \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \cos(x \cdot y) + y \cdot (-\sin(x \cdot y)) \cdot x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(x \cdot y) + x \cdot (-\sin(x \cdot y)) \cdot y$$

Tényleg egzakt

$$2. \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x \cdot y) + 1 \quad \rightarrow \quad F(x, y) = y \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + x + C_1(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot \cos(x \cdot y) \rightarrow \quad F(x, y) = x \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + C_2(x)$$

$C_2(x)$  csak  $x$  függvénye, az első egyenletben van egy  $+x$ , ami a másodikban nincs és ez csak  $x$  függvénye, ezért ez lesz a  $C_2(x)$ .  $C_1(y)$  nulla lesz, mert a második egyenletben nincs olyan tag, ami csak  $y$  függvénye.

$$F(x, y) = \sin(x \cdot y) + x$$

$$\underline{\sin(x \cdot y) + x = C}$$

### 3. előadás

$D < 0$  esetén a 2 gyök:  $\mu \pm j \cdot \tau \rightarrow$  A két megoldás:  $e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x), e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$

$$e^{a \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \cos(b \cdot x) + q(x) \cdot \sin(b \cdot x))$$

$$y_{ip} = x^m \cdot e^{a \cdot x} \cdot (P(x) \cdot \cos(b \cdot x) + Q(x) \cdot \sin(b \cdot x))$$

$P$  és  $Q$  polinomok.  $gr(P) = gr(Q) = \max\{p(x), q(x)\}$  ( $gr$ : a polinom foka)

$m$ :  $a + b \cdot j$  multiplicitása a karakterisztikus polinomban

#### Példa

$$y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 6 \cdot e^{4 \cdot t}$$

**Homogén általános megoldás**

$$\lambda^2 + 3 \cdot \lambda - 10 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5 \rightarrow y_{há} = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot t}$$

**Inhomogén partikuláris megoldás**

$$6 \cdot e^{4 \cdot t} = e^{4 \cdot t} \cdot (6 \cdot \cos(0 \cdot t) + 0 \cdot \sin(0 \cdot t)) \rightarrow a = 4, b = 0, p \text{ és } q \text{ nulladfokú}$$

$a + b \cdot j = 4$  nullszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak  $\rightarrow m = 0$

$$y_{ip} = t^0 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} = P \cdot e^{4 \cdot t}$$

**Visszahelyettesítés**

$$y'_{ip} = 4 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$y''_{ip} = 16 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$6 \cdot e^{4 \cdot t} = 16 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot 4 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} - 10 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$P = \frac{1}{3}$$

$$y_{ip} = \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t} \rightarrow y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t}$$

#### Példa

$$y'' + 4 \cdot y = 3 \cdot \sin t$$

**Homogén általános megoldás**

$$\lambda^2 = -4 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 2 \cdot j \rightarrow y_{há} = c_1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot t) + c_2 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)$$

**Inhomogén partikuláris megoldás**

$$3 \cdot \sin(t) = e^{0 \cdot t} \cdot (0 \cdot \cos(1 \cdot t) + 3 \cdot \sin(1 \cdot t)) \rightarrow a = 0, b = 1$$

$m = 0$ , mert  $0 + 1 \cdot j$  nullszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak

$p$  és  $q$  foka 0  $\rightarrow gr(P) = gr(Q) = 0$

$$y_{ip} = P \cdot \cos(t) + Q \cdot \sin(t) \quad (P, Q \in R)$$

**Visszahelyettesítés**

$$y'_{ip} = -P \cdot \sin(t) + Q \cdot \cos(t)$$

$$y''_{ip} = -P \cdot \cos(t) - Q \cdot \sin(t)$$

$$3 \cdot \sin(t) = -P \cdot \cos(t) - Q \cdot \sin(t) + 4 \cdot P \cdot \cos(t) + 4 \cdot Q \cdot \sin(t) = 3 \cdot P \cdot \cos(t) + 3 \cdot Q \cdot \sin(t)$$

$$P = 0, Q = 1$$

$$y_{ip} = \sin(t) \quad \rightarrow \quad y_{i\acute{a}} = c_1 \cdot \cos(2 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(2 \cdot t) + \sin(t)$$

**Példa**

$$y'' - 2 \cdot y' + y = 3 \cdot t \cdot e^t$$

**Homogén általános megoldás**

$$\lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \text{ (kétszeres gyök)} \quad \rightarrow \quad y_{há} = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$$

**Inhomogén partikuláris megoldás**

$$3 \cdot t \cdot e^t = e^{1 \cdot t} \cdot (3 \cdot t \cdot \cos(0 \cdot t) + 0 \cdot \sin(0 \cdot t)) \quad \rightarrow \quad a = 1, b = 0$$

$$p \text{ foka } 1, q \text{ foka } 0 \rightarrow gr(P) = gr(Q) = 1$$

$m = 2$ , mert  $1 + 0 \cdot j$  kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak

$$y_{ip} = t^2 \cdot e^t \cdot \left( \frac{P \text{ (elsőfokú polinom)}}{(u \cdot t + v)} \cdot \cos(0 \cdot t) + Q \cdot \sin(0 \cdot t) \right) = t^2 \cdot e^t \cdot (u \cdot t + v) =$$

$$= e^t \cdot (u \cdot t^3 + v \cdot t^2)$$

**Visszahelyettesítés**

$$y'_{ip} = e^t \cdot (3 \cdot u \cdot t^2 + 2 \cdot v \cdot t) + e^t \cdot (u \cdot t^3 + v \cdot t^2)$$

$$y''_{ip} = e^t \cdot (u \cdot t^3 + (6 \cdot u + v) \cdot t^2 + (6 \cdot u + 4 \cdot v) \cdot t + 2 \cdot v)$$

$$3 \cdot t \cdot e^t = y''_{ip} - 2 \cdot y'_{ip} + y = \dots = e^t \cdot (6 \cdot u \cdot t + 2 \cdot v) \quad \rightarrow \quad u = \frac{1}{2}, v = 0$$

$$y_{ip} = e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot t^3 \quad \rightarrow \quad y_{i\acute{a}} = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + \frac{1}{2} \cdot t^3 \cdot e^t$$

**Lineáris differenciálegyenlet rendszer (állandó együtthatós)**

$$y' - a \cdot y = b(x) \text{ analógiájára } \underline{y}' - \underline{A} \cdot y = \underline{b}(x)$$

$n = 2$  esetén:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ azaz } y'_1 = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + b_1$$

$$y'_2 = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + b_2$$

**Példa**

$$y'_1 = y_1 + y_2 - 2 \cdot e^{-t}$$

$$y'_2 = 4 \cdot y_1 + y_2 + 3 \cdot t$$

**Homogén általános megoldás**

$$\underline{y}' = \underline{A} \cdot y$$

**a,**  $\underline{A}$  sajátértékei:  $|A - \lambda \cdot I| = 0$  gyökei

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -1$$

**b,** sajátvektorok

$$\lambda = 3\text{-hoz tartozó: } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2 \cdot v_1 + v_2 = 0 \quad \rightarrow \quad v_2 = 2 \cdot v_1 \quad \rightarrow \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(A másik egyenlet ennek a duplája)

$$\lambda = -1\text{-hez tartozó: } \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c, alrendszer

$$\underline{\underline{\Psi}} = (e^{\lambda_1 t} \cdot \underline{\underline{V}}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \cdot \underline{\underline{V}}^n)$$

Homogén általános megoldás:  $\Psi$  oszlopainak összes lineáris kombinációja

$$\text{Most: } \Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2 \cdot e^{3t} & -2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} &= \lambda \cdot \underline{\underline{v}}, \text{ akkor } \underline{\underline{y}} = e^{\lambda t} \cdot \underline{\underline{v}} \text{ tényleg megoldás, mert } \underline{\underline{y}}' = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \underline{\underline{v}} = e^{\lambda t} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} = \\ &= \underline{\underline{A}} \cdot (e^{\lambda t} \cdot \underline{\underline{v}}) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y}}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}} \end{aligned}$$

### 3. gyakorlat

#### Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek

$$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \text{Egzakt}$$

Ha ez nem teljesül, akkor nem egzakt. Ekkor beszorozzuk egy  $\mu$  függvénnyel, hogy egzakt legyen. Biztosan létezik minden egyenlethez ilyen  $\mu$ . Nincs általános megoldás. Mi két módszert tanulunk  $\mu$  keresésére.

$$\underbrace{\mu \cdot P}_{M} \cdot dx + \underbrace{\mu \cdot Q}_{N} \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\mu \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P \quad \mu\text{-vel osztás + használjuk: } \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \cdot P$$

**1. módszer:**  $\mu = \mu(x)$  (csak  $x$ -től függ)  $\rightarrow y$  szerinti deriváltja 0

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

$$\ln \mu = \int R(x) dx$$

$$\mu(x) = e^{\int R(x) dx}$$

**2. módszer:**  $\mu = \mu(y)$

$$S(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

$$\mu(y) = e^{-\int S(y) dy}$$

**Példa**

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{x \cdot y^2} \quad x > 0$$

$$x \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$$

$$\underbrace{-(x^3 + y^3)}_P dx + \underbrace{x \cdot y^2}_Q dy = 0$$

**1. Egzakt-e?**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

Nem egzakt  $\rightarrow$  tegyük egzakttá, keressük egy  $\mu$ -t.

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-3 \cdot y^2 - y^2}{x \cdot y^2} = -\frac{4}{x}$$

Azért  $Q$ -val osztunk, és nem  $P$ -vel, mert így kiesik az  $y$  és csak  $x$ -től fog függeni a  $\mu$ .

$\mu = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = e^{-4 \cdot \ln x} = \frac{1}{x^4}$  Az abszolút értéket el lehet hagyni, mert feltettük az elején, hogy  $x$  pozitív. Az integrál utáni konstans is el lehet hagyni, mert nekünk csak egy  $\mu$  kell, amivel beszorozva az eredeti egyenletet egzakttá tesszük.

Tehát szorozzuk be az egyenletet  $\mu = \frac{1}{x^4}$ -nel.

$$-\frac{x^3 + y^3}{x^4} dx + \frac{y^2}{x^3} dy = 0$$

**2. Ez már egzakt-e?**

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{x^4} \cdot 3 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -3 \cdot y^2 \cdot x^{-4}$$

Igen, ez már egzakt.

**3.**

$$\text{I. } \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x^3 + y^3}{x^4} \quad \xrightarrow{\int dx} \quad F(x, y) = -\ln x - \frac{x^{-3} \cdot y^3}{-3} + C(y) \quad \text{Beírjuk a II. egyenletbe.}$$

$$\text{II. } \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y^2}{x^3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot x^{-3} \cdot 3 \cdot y^2 + C'(y) = \frac{y^2}{x^3}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = \text{konstans}$$

$$F(x, y) = -\ln x - \frac{y^3}{3 \cdot x^3} + \text{konstans}$$

$$-\ln x - \frac{y^3}{3 \cdot x^3} = C$$

Ez a  $\mu$ -vel beszorozott ( $x^4$ -nel leosztott) egyenlet megoldása, de  $e$  miatt nem csökken a megoldáshalmaz.

## Elsőrendű függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$e^{\int f(x) dx} = \mu(x)$ -el egzakttá tehető, vagy megoldható a Lagrange-féle állandók variálása módszerrel

**Példa**

$$y' - \frac{y}{x-2} = 2 \cdot (x-2)^2$$

**Megoldás:** 1, Homogén általános megoldás

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x-2} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-2}$$

$$\ln|y| = \ln|x-2| + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$C = \ln C^*$$

$$\ln|y| = \ln C^* \cdot |x - 2|$$

$$|y| = C^* \cdot |x - 2| \quad + \text{Bolzano}$$

$$y_{há} = K \cdot (x - 2) \quad K \in R$$

2, Keressünk egy inhomogén partikuláris megoldást

$$y_{ip} = K(x) \cdot (x - 2) \quad \text{Visszahelyettesítés}$$

$$K'(x) \cdot (x - 2) + \cancel{K(x)} - \frac{K(x) \cdot (x - 2)}{(x - 2)} = 2 \cdot (x - 2)^2$$

$$K'(x) = 2 \cdot (x - 2)$$

$$K(x) = (x - 2)^2 \quad \text{Nem kell a } +C, \text{ elég egy megoldás.}$$

$$y_{ip} = K(x) \cdot (x - 2) = (x - 2)^3$$

3, Inhomogén általános megoldás

$$y_{ia} = y_{há} + y_{ip} = K \cdot (x - 2) + (x - 2)^3$$

## 4. előadás

### Példa

$$y_1' = y_1 + y_2 - 2 \cdot e^{-t}$$

$$y_2' = 4 \cdot y_1 + y_2 + 3 \cdot t$$

**Homogén általános megoldás**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda \cdot E)$ -ből a saját értékek:  $\lambda_1 = 3$

Ehhez tartozó sajátvektor:  $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = -1$$

Ehhez tartozó sajátvektor:  $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Alaprendszer

$$\psi = e^{\lambda_1 t} \cdot \underline{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \cdot \underline{v}^n$$

$$\text{Most: } \psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2 \cdot e^{3t} & -2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

A homogén megoldás pedig:  $y_h = \psi \cdot c = \begin{pmatrix} y_{h1} \\ y_{h2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ 2 \cdot c_1 \cdot e^{3t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$

**Inhomogén partikuláris megoldás**

$$y_{ip} = \psi \cdot c(t)$$

**1. állítás:** Ha  $\psi$  oszlopai  $y' = A \cdot y$  megoldásai, akkor  $\underline{\psi}'(t) = A \cdot \underline{\psi}(t)$

$\psi' \triangleq (\psi'_1, \dots, \psi'_n)$ , ahol  $\psi_i$  a  $\psi$  i. oszlopa

$$\text{Bizonyítás: } \left( \underline{\psi}' \right)_i = \left( \underline{\psi}_i \right)' = A \cdot \underline{\psi}_i = \left( A \cdot \underline{\psi} \right)_i$$

**2. állítás:** Az első állítás feltételei mellett:

Ha  $c(t)$  kiegyenlíti  $\psi \cdot c'(t) = b(t)$  egyenletet, akkor  $y = \psi \cdot c$  egy jó partikuláris megoldása az inhomogénnek.



**Bizonyítás:**  $\underline{y} = \underline{\psi} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{y}' = \underbrace{\underline{\psi}'} \cdot \underline{c} + \underbrace{\underline{\psi} \cdot \underline{c}'} = \underline{A} \cdot \underbrace{\underline{\psi} \cdot \underline{c}}_{\underline{y}} + \underline{b} = \underline{A} \cdot \underline{y} + \underline{b}$

Elég a  $\psi \cdot c' = b$  egyenletet megoldani  $c'$ -re.

$$b = \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot t \end{pmatrix}$$

Azaz 
$$\left. \begin{aligned} c_1'(t) \cdot e^{3t} + c_2'(t) \cdot e^{-t} &= 2 \cdot e^{-t} \\ 2 \cdot c_1'(t) \cdot e^{3t} - 2 \cdot c_2'(t) \cdot e^{-t} &= 3 \cdot t \end{aligned} \right\}$$

A felső kétszeresét hozzáadva az alsóhoz:

$$4 \cdot c_1'(t) \cdot e^{3t} = 3 \cdot t - 4 \cdot e^{-t}$$

$$c_1'(t) = \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{-3t} - e^{-4t}$$

A felső kétszeresét kivonva az alsóból:

$$-4 \cdot c_2'(t) \cdot e^{-t} = 3 \cdot t + 3 \cdot e^{-t}$$

$$c_2'(t) = -\frac{3}{4} \cdot t \cdot e^t - 1$$

Integrálás után...

$$\left. \begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-3t} \cdot t - \frac{1}{12} \cdot e^{-3t} \\ c_2(t) &= -t - \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^t + \frac{3}{4} \cdot e^t \end{aligned} \right\} \text{visszahelyettesítés}$$

$$y_{ip1} = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{2}{3}$$

$$y_{ip2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t} + t - \frac{5}{3}$$

$$y_{ia} = y_{há} + y_{ip} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{2}{3} \\ 2 \cdot c_1 \cdot e^{3t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t} + t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

### Példa

$$y_1' = y_1 - 10 \cdot y_2 + e^t$$

$$y_2' = -y_1 + 4 \cdot y_2 + \sin(t)$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -10 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 10 = 4 - 5 \cdot \lambda + \lambda^2 - 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 5 \cdot \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1\text{-hez tartozó sajátvektor: } \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2\text{-hez tartozó sajátvektor: } \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezekből már tudjuk  $\psi$ -t.

$$\psi = \begin{pmatrix} 5 \cdot e^{-t} & -2 \cdot e^{6t} \\ 1 \cdot e^{-t} & e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$y_{há1} = 5 \cdot c_1 \cdot e^{-t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{6t}$$

$y_{há} = \psi \cdot c$ , azaz

$$y_{há2} = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{6t}$$

Kéne olyan  $c$ , hogy  $\psi \cdot c' = b$ , azaz

$$\left. \begin{aligned} e^t &= 5 \cdot c_1' \cdot e^{-t} - 2 \cdot c_2' \cdot e^{6t} \\ \sin(t) &= c_1' \cdot e^{-t} + c_2' \cdot e^{6t} \end{aligned} \right\}$$

Alsó kétszeresét hozzáadjuk a másikhoz:

$$e^t + 2 \sin(t) = 7 \cdot c_1' \cdot e^{-t} \Rightarrow c_1' = \frac{1}{7} \cdot e^{2t} + \frac{2}{7} \cdot e^t \cdot \sin(t)$$

Alsó ötszörösét kivonjuk a felsőből:

$$e^t - 5 \cdot \sin(t) = 7 \cdot c_2' \cdot e^{6t} \Rightarrow c_2' = -\frac{1}{7} \cdot (e^{-5t} - 5 \cdot e^{-6t} \cdot \sin(t))$$

Integrálás után:

$$c_1(t) = \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot e^{2t} - e^t \cdot (\cos(t) - \sin(t)) \right)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1}{5} \cdot e^{-5t} + \frac{5}{37} \cdot e^{-6t} \cdot (\cos(t) - 6 \cdot \sin(t)) \right)$$

$$\text{visszahelyettesítve az } y_{há} = \psi \cdot c \text{-be} \Rightarrow y_{ip1} = \frac{3}{10} \cdot e^t + \frac{35}{37} \cdot \sin(t) - \frac{25}{37} \cdot \cos(t)$$

$$y_{ip2} = \frac{1}{10} \cdot e^t + \frac{1}{37} \cdot \sin(t) - \frac{6}{37} \cdot \cos(t)$$

**Inhomogén általános megoldás**

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} \dots$$

## Laplace-transzformáció

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

**Definíció:** Ha  $Do(f) \supseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , akkor  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$ , feltéve, hogy ez az integrál konvergens

**Tétel:** Ha  $f$  szakaszonként folytonos  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ -n és  $\exists M, c \in \mathbb{R}$ , hogy  $|f(t)| \leq M \cdot e^{ct}$ , akkor  $\forall s > c$ -re  $\exists F(s)$

Definícióból következik:  $\mathcal{L}$  lineáris operátor

## 4. gyakorlat

$$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$$

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\text{egzakt, ha } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\text{Bizonyítás:} \Rightarrow \text{Young-tétel: } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

← Feladatokból adódik, hogy kell megcsinálni F-et

## Komplex analízis

### Komplex aritmetika

**I. Algebrai definíció:**

$$\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n\}, n \in \mathbb{N}, a_0 \dots a_n = \mathbb{R}$$

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

$$x^3 - x^2$$

$$x^2 - 1$$

$$x^2 - x$$

$$x - 1$$

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}[X]/x^2 - 1 = \{a \cdot x + b; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$p^2(x) + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = i$$

$$i^2 = -1$$

## 2. Halmazelméleti definíció

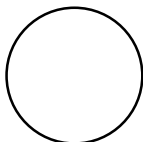
$$w \cdot z = (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$$

lineárisan izomorf:  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

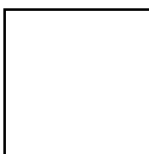
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

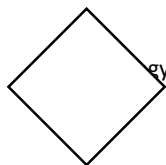
$$\|z\|_2$$



$$\|z\|_\infty$$



$$\|z\|_1 = |x| + |y|$$



egyes norma)

## 3. Geometriai definíció

$$w \xrightarrow{\mathcal{A}} z \cdot w$$

forgatva nyújtás: forgatás  $\arg(z)$  – vel  
nyújtás  $r$  – szeresére

$$[\mathcal{A}] = ?$$

$$\left[ \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\text{forgatás mátrixa: } \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## $\mathbb{C}$ topológia

$$\text{gömbi környezet: } B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$$\dot{B}_\varepsilon(z_0) = B_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$$

(kipontozott környezet)

$$H \subseteq \mathbb{C} \text{ nyílt, ha minden } z \in H \text{-ra } \exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(z) \subseteq H$$

$$H \subseteq \mathbb{C} \text{ zárt, ha } \mathbb{C} \setminus H \text{ nyílt}$$

$$H \subseteq \mathbb{C} \text{ korlátos, ha } \exists \varepsilon > 0 : H \subseteq B_\varepsilon(0)$$

**Heine-Borel tétel:** Véges dimenziós normált térben zárt és korlátos halmaz kompakt.

**Definíció:**  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt, ha minden  $\{U_i\}_{i \in I}$  nyílt halmazokból álló rendszer esetén, ha  $H \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ; akkor van  $J \subseteq I$  véges halmaz, hogy  $H \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

$\mathbb{C}$  kompaktifikációja

(Alexandrov-féle egypontú kompaktifikáció)

$$P \rightarrow z$$

$$E \rightarrow \infty$$

sztereografikus projekció

$$\bar{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$B_\varepsilon(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

**Állítás:**  $\bar{\mathbb{C}}$  kompakt

**Bizonyítás:**  $\bar{\mathbb{C}} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

$$\infty \in U_i \rightarrow B_\varepsilon(\infty) \subseteq U_{i_0}$$

$$\overline{B_\varepsilon(0)} \in \bigcup_{j \in J} U_j \quad J \text{ véges}$$

$|J| + 1$  db  $U_i$ -vel le van fedve  $\bar{\mathbb{C}}$ .

**Folytonosság**

Definíció:  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{Dom}(f)$ . Az  $f$  folytonos, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy  $\forall z \in \text{Dom}(f), z \in B_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$

$$f = u + i \cdot v$$

$$u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

**Állítás:**  $f$  folytonos  $\Leftrightarrow u$  és  $v$  is folytonos

**Példa:**  $f(x + i \cdot y) = x + y + i \cdot (x^2 + y^2)$

$$u(x, y) = x + y$$

$$v(x, y) = x^2 + y^2$$

**Határérték**

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u \in \text{Dom}(f), A \in \bar{\mathbb{C}}$$

$$\exists \lim_u f = A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \text{Dom}(f) \setminus \{u\} \text{ teljesül, hogy } z \in B_\delta(u) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon(A)$$

**Példa**

a,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$   $\varepsilon > 0$ , kell  $\delta > 0: |z| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\delta := \varepsilon$$

b,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$   $\varepsilon > 0$ , kell  $\delta > 0: |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \varepsilon$

$$\delta := \varepsilon$$

## 5. előadás

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s - a}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$t \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{2 \cdot \omega \cdot s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$sh(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$ch(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

$$e^{a \cdot t}\text{-re végigszámolva: } \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\}(s) = \int_0^\infty e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^\infty e^{a-s \cdot t} dt \stackrel{\text{ha } a \neq s}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)b} - 1}{a-s} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a > s \\ \frac{1}{s-a}, & \text{ha } a < s \end{cases}$$

**Tétel:**  $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$ , ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$ ,  $f, f'$  folytonos  $[0, \infty]$ -en

**Bizonyítás:**  $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{[f(t) \cdot e^{-st}]_0^b}{0-f(0)} + s \cdot \int_0^b f(t) \cdot e^{-st} dt \right) = s \cdot F(s) - f(0)$

**Következmény:**  $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$

**Bizonyítás:**  $s \cdot \mathcal{L}\{f'\} - f'(0) = s \cdot (s \cdot F - f(0) - f'(0))$

**Általános:**  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \cdot F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i \cdot f^{(n-1-i)}(0)$

**Példa**

$$y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 6 \cdot e^{4t} \quad \text{Kezdeti feltételek: } y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$\underbrace{s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}\{y''\}} + 3 \cdot \underbrace{(s \cdot Y - y(0))}_{\mathcal{L}\{y'\}} - 10 \cdot Y = \frac{6}{s-4}$$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve:

$$(s^2 + 3 \cdot y - 10) \cdot Y = \frac{6}{s-4} \Rightarrow Y = \frac{6}{(s-4) \cdot (s-2) \cdot (s+5)} = \dots = \frac{-\frac{3}{7}}{s-2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-4} + \frac{\frac{2}{21}}{s+5}$$

Ilyen alakból már vissza tudjuk alakítani az inverz transzformáció képleteivel:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = -\frac{3}{7} \cdot e^{2t} + \frac{1}{3} \cdot e^{4t} + \frac{2}{21} \cdot e^{-5t}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1) $t \cdot g(t)$	$-1 \cdot \frac{d}{ds} \cdot G(s)$
2) $t^n \cdot g(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \cdot G(s)$
3) $e^{a \cdot t} \cdot g(t)$	$G(s - a)$ (eltolás)
4) $g(a \cdot t)$	$\frac{1}{a} \cdot G\left(\frac{s}{a}\right)$ (nyújtás)

**Példa**

- $\mathcal{L}^{-1}\{\cos(\omega \cdot t)\}$  kiszámítható  $\mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\}$ -ből, mert:  $\frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}\{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)'\} = \frac{1}{\omega} \cdot \left( s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - s(\omega \cdot 0) \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}\{t \cdot \sin(\omega \cdot t)\}$  kiszámítható  $\mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\}$ -ből az 1) segítségével
- $ch(a \cdot t)$  kiszámítható  $sh(a \cdot t)$ -ből a 2) segítségével

**Példa**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\}$$

1. megoldás  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \stackrel{2) \text{ felhasználásával}}{\Rightarrow} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\} = -e^{2 \cdot t} \cdot \underbrace{t}_{g(t)} \quad G(s) = \frac{1}{s^2}$

2. megoldás  $\int \frac{-1}{(s-2)^2} ds = \frac{1}{\underbrace{s-2}_{G \rightarrow g=e^{2 \cdot t}}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = -t \cdot e^{2 \cdot t}$

**Példa**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{s-4}\right)'' = \frac{2}{(s-4)^3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\} = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$\frac{1}{s-4} = G \Rightarrow g = e^{4 \cdot t}$$

**Példa**

$$y'' - 2 \cdot y' + y = x \quad \text{Kezdeti feltétel:} \quad y(0) = 0 = y'(0)$$

Laplace transzformálás után:

$$\underbrace{s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)}_{y''} - 2 \cdot \underbrace{(s \cdot Y - y(0))}_{y'} + Y = 1/s^2$$

$$(s^2 - 2 \cdot s + 1) \cdot Y = \frac{1}{s^2}$$

$$Y = \frac{1}{s^2 \cdot (s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} = \dots = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Inverz Laplace-transzformálva:

$$y = 2 + x - 2 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

**Példa**

$$y' = z \quad \text{Kezdeti feltétel:} \quad y(0) = 1 \text{ és } z(0) = 0$$

$$z' = y$$

$$\left. \begin{array}{l} -Z = s \cdot Y - y(0) \\ s \cdot Z - z(0) = Y \end{array} \right\}$$

$$(s^2 + 1) \cdot Y = s \quad \quad \quad -(s^2 + 1) \cdot Z = -1$$

$$Y = \frac{s}{s^2+1} \quad \quad \quad Z = \frac{-1}{s^2+1}$$

$$y = \cos(t) \quad \quad \quad z = \sin(t)$$

**Példa**

$$y' + z' + y + z = 1 \quad \quad \quad y(0) = -1$$

$$y' + z' = e^t \quad \quad \quad z(0) = 2$$

...

Megoldás

$$y = 1 - 2 \cdot e^t + t \cdot e^t$$

$$z = 2 \cdot e^t - t \cdot e^t$$

**Példa** (Általános megoldás keresése Laplace-transzformációval)

$$y'' + y = e^{-t} \quad \quad \quad \text{Új jelölések:} \quad y_0 = y(0) \quad \quad \quad y_1 = y'(0)$$

$$s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1 + Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{s \cdot y_0}{s^2+1} + \frac{y_1}{s^2+1}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot (-\cos(t) + \sin(t)) + y_0 \cdot \cos(t) + y_1 \cdot \sin(t)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) \cdot \cos(t) + \left(y_1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t)$$

## 6. előadás

### Példa

$$y'' - y = 0 \qquad y_0 = y(0)$$

$$y_1 = y'(0)$$

$$0 = s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1 - Y = (s^2 - 1) \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1$$

$$Y = \frac{s \cdot y_0 + y_1}{s^2 - 1} = y_0 \cdot \frac{s}{s^2 - 1} + y_1 \cdot \frac{1}{s^2 - 1} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow Y = y_0 \cdot \text{ch}(t) + y_1 \cdot \text{sh}(t) = c_1 \cdot \text{ch}(t) + c_2 \cdot \text{sh}(t)$$

### Példa

$$y''' - y = 1 \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Visszavezethető elsőrendűre

$$y_1 = y' \qquad y_2 = y_1' \qquad y_2' + y = 1$$

$$\frac{1}{s} = s^3 \cdot Y - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) + Y \Rightarrow Y = \frac{1}{s \cdot (s^3 + 1)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C \cdot s + D}{s^2 - s + 1}$$

$$Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{\frac{2}{3}s - \frac{1}{3}}{s^2 - s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s - \frac{1}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-t} - \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$$

### Konvolúció ( $\mathcal{L}^{-1}$ kiszámolásához)

$$\text{Definíció: } \forall (t > 0) \qquad f * g(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x) dx$$

$$1. \text{ Állítás: kommutatív} \qquad f * g = g * f$$

$$2. \text{ Állítás: } \mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} \quad (\Rightarrow f * g = \mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\})$$

### Példa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s \cdot (s^2 + 1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}\right\} = 1 * \sin(t) = \sin(t) * 1 = \int_0^t \sin(x) dx =$$

$$= -[\cos(t)]_0^t = 1 - \cos(t)$$

$$\text{Ellenőrzés: } \mathcal{L}\{1 - \cos(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^2 + 1 - s^2}{s \cdot (s^2 + 1)} = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 1)}$$

## Vektoranalízis

Vektorértékű függvényeket akarunk integrálni görbéken és felületeken

1. Mik ezek a görbék, felületek?
2. Mekkora ezek?
3. Irányítás.

Felület

**Definíció:**  $1 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  zárt, korlátos, összefüggő, mérhető, nem üres belsejű halmaz

$r = r(u)$   $A$ -n értelmezett, szakaszonként folytonosan differenciálható,  $\mathbb{R}^n$ -be képező injektív (1-1) függvény úgy, hogy a Jakobi-determináns oszlopai lineárisan függetlenek ( $A$  belsejében)

$$\begin{pmatrix} \nabla r_1 \\ \vdots \\ \nabla r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr_1}{du_1} & \dots & \frac{dr_1}{du_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dr_n}{du_1} & \dots & \frac{dr_n}{du_n} \end{pmatrix}$$

$Rg(r)$  ( $Rg$ : értékészlet) az  $r$  által definiált  **$n$ -dimenziós** ( $m$ -dimenziós) **felület**.  $r$  ennek a felületnek az explicit egyenlete.

A felület **térrész**, ha  $m = n$ , **valódi felület**, ha  $n = m - 1$ , **görbe**, ha  $n = 1$ .

Egy pont **belső pont**, ha van olyan homeomorfizmus (folytonos és kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, bijekció), ami a (nyílt)  $n$ -dimenziós egységömböt a felületbe képezi úgy, hogy a pont benne van a képben. Ezek halmaza:  $IntF$  (ha  $F$  a felület).  $F$  **zárt**, ha minden pontja belső pont.

## 5. gyakorlat

**Példa**

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z} + z + \frac{i \operatorname{Im}(z)}{|z|}}{\text{valós}}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

$$z = x + i \cdot y$$

$$v(x, y) = \bar{z} + z = 2 \cdot x$$

$$u(x, y) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \neq \lim_{y \rightarrow 0}$ , ezért nincs határértéke.

**Példa**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4 \cdot x_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \rightarrow x_1(t) \in Diff \\ t \rightarrow x_2(t) \in Diff \end{array}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) = 3$$

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 8 = 3$$

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

Sajátvektorok

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5: \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\psi$  együtthatómátrixa:

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} -3 \cdot e^t & 1 \cdot e^{5t} \\ 1 \cdot e^t & 1 \cdot e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$x = \psi(t) \cdot c = \begin{pmatrix} -3 \cdot c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{5t} \\ c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{5t} \end{pmatrix}$$



Kezdeti érték feltétel

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1$$

Ha már megvan  $\psi$ , akkor

$$1 = -3 \cdot c_2 + c_2$$

$$-1 = c_1 + c_2$$

Egyébként Laplace-transzformálással:

$$(\mathcal{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0))$$

$$s \cdot X_1 - 1 = 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2$$

$$s \cdot X_2 + 1 = X_1 + 4 \cdot X_2 \quad \rightarrow \quad X_1 = (s - 4) \cdot X_2 + 1 \quad (\text{elsőbe beírjuk})$$

$$(s - 2) \cdot [(s - 4) \cdot X_2 + 1] - 1 = 3 \cdot X_2$$

$$(s - 2) \cdot (s - 4) \cdot X_2 + s - 2 - 1 = 3 \cdot X_2$$

$$((s - 2) \cdot (s - 4) - 3) \cdot X_2 = 3 - s$$

$$X_2 = \frac{3-s}{s^2-6s+8} = \frac{3-s}{(s-1)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} = \frac{A \cdot (s-5) + B \cdot (s-1)}{(s-1)(s-5)}$$

$$s = 1: \quad A \cdot (-4) = 2 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$s = 5: \quad B \cdot 4 = -2 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_2\} = -\frac{1}{2} \cdot e^t + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{5t}$$

2. egyenlet:  $\dot{x}_2 = x_1 + 4 \cdot x_2$  Ebből kifejezzük  $x_1$ -et:

$$x_1 = \dot{x}_2 - 4 \cdot x_2 = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{5t}\right)' - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{5t}\right)$$

**Példa**

$$\dot{x}_1 = 3 \cdot x_1 + x_2 \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3 \cdot x_2 \quad x_2(0) = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$s \cdot X_1 - 1 = 3 \cdot X_1 + X_2$$

$$s \cdot X_2 + 1 = X_1 + 3 \cdot X_2$$

$$s \cdot (X_1 + X_2) = 4 \cdot (X_1 + X_2)$$

$$(s - 4) \cdot (X_1 + X_2) = 0 \quad \forall s\text{-re}$$

$$X_1 = -X_2$$

**Inhomogén általános differenciál egyenletrendszer általános megoldása**

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + e^{2 \cdot t}$$

I. Homogén általános megoldás

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2 \cdot t} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_h = \psi(t) \cdot c = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

## II. Inhomogén partikuláris megoldás

$c = c(t)$ , állandók variálása módszer

$$\psi(t) \cdot c'(t) = b$$

$$\underline{c}'(t) = \underline{\psi}(t)^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad e^t \cdot c_1' + e^{-t} \cdot c_2' = 0 \\ (2) \quad e^t \cdot c_1' - e^{-t} \cdot c_2' = e^{2t} \end{array} \right\}$$

Két egyenletet összeadva:

$$2 \cdot c_1' \cdot e^t = e^{2t}$$

$$c_1' = \frac{1}{2} \cdot e^t$$

$$c_1 = \int \frac{1}{2} \cdot e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t$$

Első egyenletbe behelyettesítve és átrendezve:

$$c_2' = -\frac{e^t \cdot \frac{1}{2} e^t}{e^{-t}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{3t}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \cdot \int e^{3t} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3t}$$

$$\underline{x}_p = \underline{\psi}(t) \cdot \underline{c}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t - e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \\ e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t + e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$x = x_h + x_p = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t - e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \\ e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t + e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \end{pmatrix}$$

## Példa

$$y' + \frac{2y}{x} = \sin(x^3 + 1)$$

i.  $y' + \frac{2y}{x} = 0$

$$y' = -\frac{2y}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \quad / \int$$

$$\ln|y| = -2 \cdot \ln|x| + C \quad / e^{\quad}$$

$$|y| = e^{\ln|x|^{-2} + C}$$

$$|y| = |x|^{-2} \cdot C^*$$

$$\downarrow \text{Bolzano-tétel}$$

$$y = K \cdot x^{-2}$$

$$y_p = K(x) \cdot x^{-2}$$

Visszahelyettesítés:  $K'(x) \cdot x^{-2} + K(x) \cdot (-2) \cdot x^{-3} + \frac{2 \cdot K(x) \cdot x^{-2}}{x} = \sin(x^3 + 1)$

$$K'(x) \cdot x^{-2} = \sin(x^3 + 1)$$

$$K'(x) = x^2 \cdot \sin(x^3 + 1)$$

$$K(x) = \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x^3 + 1) dx = \frac{1}{3} \cdot (-\cos(x^3 + 1)) \quad (\text{helyettesítéses integrálás})$$

**Példa**

$$y'' - 10 \cdot y' + 9 \cdot y = 5 \cdot t \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)$$

$$s^2 \cdot Y + s - 2 - 10 \cdot (s \cdot Y + 1) + 9 \cdot Y = \frac{5}{s^2}$$

$$Y \cdot \frac{(s^2 - 10 \cdot s + 9)}{(s-1) \cdot (s-9)} + s - 12 = \frac{5}{s^2}$$

$$Y = \frac{\frac{5}{s^2} - s + 12}{(s-1) \cdot (s-9)} = \frac{5 - s^3 + 12 \cdot s^2}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-9} =$$

$$= \frac{A \cdot s \cdot (s-1) \cdot (s-9) + B \cdot (s-1) \cdot (s-9) + C \cdot s^2 \cdot (s-9) + D \cdot s^2 \cdot (s-1)}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-9)}$$

$$\left. \begin{matrix} s = 0 \\ s = 1 \\ s = 9 \end{matrix} \right\} \text{nem elég, kell még egy: } s = -1$$

**Példa**

$$y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = 2 \cdot e^{3 \cdot x}$$

$$\lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{há} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$\text{Ha } e^{\alpha \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) + q(x) \cdot \cos(\beta \cdot x))$$

$$\rightarrow x^m \cdot e^x \cdot (P(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) + Q(x) \cdot \cos(\beta \cdot x))$$

m:  $\alpha \pm \beta \cdot i$  multiplicitása a karakterisztikus polinomban

**Példa**

$$y'' + 6 \cdot y' + 9 \cdot y = 2 \cdot e^{-3 \cdot x}$$

$$\lambda^2 + 6 \cdot \lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -3$$

$$y_{há} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

$$y_p = x^2 \cdot A \cdot e^{-3 \cdot x}$$

**Példa**

$$y'' + 4 \cdot y = \cos(2 \cdot x)$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2 \cdot i \quad \alpha = 0, \beta = 2, 0 \pm 2 \cdot i \quad \rightarrow m = 1$$

$$y_{há} = C_1 \cdot \sin(2 \cdot x) + C_2 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

$$y_p = x \cdot (A \cdot \sin(2 \cdot x) + B \cdot \cos(2 \cdot x))$$

## 6. gyakorlat

### Differenciálhatóság

$\mathbb{R}$ -beli

$$f \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x_0 \in \text{int}(\text{Dom}f)$$

$f$   $\mathbb{R}$ -differenciálható (totálisan), ha van olyan  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris leképezés, hogy:  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jakobi-determináns: } Jf_{x(x_0)} = [A] = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} \quad A = df(x)$$

**Példa**

$$z \xrightarrow{f} w \cdot z = (w_1 + i \cdot w_2) \cdot (x + i \cdot y) = \underbrace{w_1 \cdot x - w_2 \cdot y}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(w_2 \cdot x + w_1 \cdot y)}_{v(x,y)}$$

$$f = u + i \cdot v$$

$$z = x + i \cdot y$$

konst:  $w = w_1 + i \cdot w_2$

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} = [w_1 + i \cdot w_2] = w$$

$$(w \cdot z)' = w$$

$$(5 \cdot x)' = 5$$

**Példa**

$$z \rightarrow z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(2 \cdot x \cdot y)}_{v(x,y)}$$

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x & -2 \cdot y \\ 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix} = [2 \cdot x + i \cdot 2 \cdot y] = [2 \cdot z]$$

$$(z^2)' = 2 \cdot z$$

**Példa**

$$z \rightarrow \bar{z} = \overline{(x + i \cdot y)} = x - i \cdot y$$

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = -y$$

$$Jf = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{C}$$

Definíció:  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ . Azt mondjuk, hogy  $f$  komplex differenciálható, ha van olyan  $w \in \mathbb{C}$ , hogy  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w$ . Ilyenkor  $f'(z_0) = w$ .  $f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0)$

**Példa**

Milyen  $n \in \mathbb{Z}$ -re komplex differenciálható a 0-ban az  $f = \begin{cases} \bar{z} \cdot z^n, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$  függvény?

$$n = 0 \quad f(z) = \bar{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} - 0}{z} = \nexists$$

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$\bar{z} = r \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi))$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \cos(-2 \cdot \varphi) + i \cdot \sin(-2 \cdot \varphi)$$

Milyen hosszú?

$$\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|} = 1$$

$n = 1$

$$f(z) = \bar{z} \cdot z$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} \cdot z - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} \cdot z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$n \geq 1$  esetén  $f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(0)$

$n < 1$  esetén  $f \notin \text{Diff}_{\mathbb{C}}$

**Tétel:**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   $z_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(f))$

$$f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \text{Diff}_{\mathbb{R}}(x_0, y_0) \\ \text{és} \\ Jf(x_0, y_0) \in \mathbb{C} \\ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$z_0 = x_0 + i \cdot y_0$$

$$f = u + i \cdot v$$

**Bizonyítás:**  $[w] = Jf(x_0, y_0)$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - [w] \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|} - [w] \cdot \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right| = 0$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right|}_1 \cdot \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - [w] \right) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - w \right) = 0$$

**Cauchy-Riemann-egyenletek**

$$f = u + v \cdot i$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} I, \quad \partial_x u = \partial_y v \\ II, \quad \partial_y u = -\partial_x v \end{array} \right\}$$

$f$  komplex differenciálható  $\Leftrightarrow \begin{cases} 1. (u, v) \text{ totálisan diffható} \\ 2. \text{Teljesíti a C - R egyenleteket} \end{cases}$

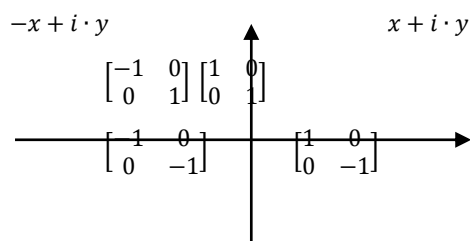
**Definíció:**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  reguláris a  $z_0 \in \text{int}(\text{Dom}(f))$  pontban, ha a  $z_0$ -nak van olyan  $B_\varepsilon(z_0)$  nyílt környezete, ahol a függvény minden pontban komplex differenciálható.

**Példa**

Hol differenciálható és hol reguláris az  $f(z) = |x| + |y| \cdot i$ ,  $z = x + i \cdot y$

$$u = |x|, v = |y|$$

Totálisan differenciálható: tengelyeken kívül



$$-x - i \cdot y$$

$$x - i \cdot y$$

$\mathbb{C}$  differenciálható: I. és III. síknegyed (nyílt: tengelyek nincsenek benne)

$$\{x + i \cdot y \in \mathbb{C} \mid x \cdot y > 0\}$$

Reguláris: ugyanitt

**Példa**

$$f(x + i \cdot y) = x^2 + i \cdot y^3$$

$$u = x^2, \quad v = y^3$$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  totálisan differenciálható

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot x & 0 \\ 0 & 3 \cdot y^2 \end{bmatrix}$$

Differenciálhatóság feltétele:  $2 \cdot x = 3 \cdot y^2$

$$y^2 = \frac{2}{3} \cdot x \text{ parabola}$$

$$\{x + i \cdot y \in \mathbb{C} \mid 2 \cdot x = 3 \cdot y^2\}$$

Reguláris: sehol, mert nincs belső pontja

**Harmonikus társkeresés**

$\phi(x, y)$  nyílt halmazon értelmezett  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény harmonikus, ha  $(\Delta\phi \equiv 0)$

$$\partial_{xx}^2 \phi + \partial_{yy}^2 \phi = 0$$

**Tétel:**  $U$  egyszeresen összefüggő, nyílt,  $\subseteq \mathbb{C}$ .

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$  harmonikus komponensekkel rendelkezik  $\Leftrightarrow f$  reguláris.

Ekkor  $f = u + i \cdot v$ -ben is harmonikus társa  $v$ -nek.

Young-tétel

I.  $\partial_x u = \partial_y v$

II.  $\partial_y u = -\partial_x v$

$$\partial_{xx}^2 u = \partial_{xy}^2 v$$

$$\partial_{yy}^2 u = -\partial_{xy}^2 v = -\partial_{yx}^2 v$$

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 v = \partial_{xy}^2 v - \partial_{xy}^2 v = 0$$

**7. előadás**

**Felület definíciója:**

$$n < m$$

$$r_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

n-dimenziós, m-dimenzióbeli felület

- folytonos legyen  $\rightarrow$  tudjuk deriválni

- Jakobi-determináns oszlopai lineárisan függetlenek

$$r(u, v) = r^*(u, v, w) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \\ \text{3. oszlop: } 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \text{lineárisan függő}$$

$$r(u, v) = (u + v, u + v, u + v) \quad \rightarrow \quad r(t) = (t, t, t)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dr}{du} & \frac{dr}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(t) = (t, f(t))$  görbe

deriváltja:  $(t, \dot{f}(t)) \Big|_{t=t_0} = \underbrace{(1, f'(t_0))}_{(t_0, f(t_0))\text{-beli érintő}}$

$\dot{r}(t)$  az  $r(t_0)$ -beli érintővektor

Érintősík normálisa merőleges a felületi görbék érintővektoraira.

Görbék és felületek paraméteres megadása:

- a,b pontot összekötő szakasz

$$r(t) = a + t \cdot (b - a) \quad t \in [0; 1], \quad (a, b \in \mathbb{R}^2)$$

- R sugarú, 0 középpontú kör  $\mathbb{R}^2$ -ben

$$r(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0; 2 \cdot \pi]$$

- R sugarú, z tengelyű, origó csúcspól,  $\frac{\pi}{4}$  félnyílásszögű, egyenletes emelkedésű kúp

$$r(t) = R \cdot (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t), t) \quad t \in [0; 2 \cdot \pi]$$

- R sugarú, 0 középpontú gömbfelület

$$r(u, v) = R \cdot (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u))$$

$$v \in [0; 2 \cdot \pi], \quad u \in [0; \pi]$$

- R sugarú, z tengelyű, h magasságú hengerpalást

$$r(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v) \quad u \in [0; 2 \cdot \pi], \quad v \in [0; h]$$

- R sugarú, R magasságú, 0 középpontú, z tengelyű,  $\frac{\pi}{4}$  félnyílásszögű kúppalást

$$r(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), v) \quad u \in [0; 2 \cdot \pi], \quad v \in [0; R]$$

- R sugarú, 0 középpontú körlap az x,y síkban

- mint 2-dimenziós térrész ( $n = m = 2$ )

$$r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) \quad v \in [0; 2 \cdot \pi], \quad u \in [0; R]$$

- mint 3-dimenziós valódi felület ( $n = 2, m = 3$ )

$$r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0)$$

- R sugarú, z tengelyű, h magasságú henger

$$r(u, v) = \begin{cases} ((u + v) \cdot \cos(u), (v + R) \cdot \sin(u), 0) & u \in [0; 2 \cdot \pi], v \in [-R; 0] \\ (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v) & u \in [0; 2 \cdot \pi], v \in [0; h] \\ ((v - R) \cdot \cos(u), (v - R) \cdot \sin(u), h) & u \in [0; 2 \cdot \pi], v \in [h; h + R] \end{cases}$$

#### Speciális esetek: görbék

$r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$   $r(t)$  irányítása  $\dot{r}(t)$

$t_0$ -beli érintővektor:  $\dot{r}(t_0)$

$t_0$ -beli érintő egységvektor:  $\frac{\dot{r}(t_0)}{|\dot{r}(t_0)|}$

#### Ívhossz

Közelítő poligon hossza:  $\sum_{i=0}^n |r(t_{i+1}) - r(t_i)|$

$$\sum_{i=0}^n \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^n |\dot{r}(t_i)| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\rightarrow \int_a^b |\dot{r}(t)| dt \quad \text{ív hossz}$$

#### Példa

origó középpontú, R sugarú kör kerülete = ?

$$r(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)) \quad t \in [0, 2 \cdot \pi]$$

$$\dot{r}(t) = (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t)) \quad \rightarrow \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{R^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = R$$

$$\Rightarrow \text{ív hossz:} \quad \int_0^{2\pi} R = 2 \cdot R \cdot \pi$$

### Példa

$$s(t) = \int_a^t |\dot{r}(\tau)| d\tau \quad \text{Szigorúan, monoton nő: invertálható}$$

$r$  ívhossz szerinti paraméterezése

$$\rho(s) = r(t(s))$$

$$\Rightarrow \rho'(s) = \dots = \frac{\dot{r}(t(s))}{|\dot{r}(t(s))|}$$

### Speciális esetek: felületek

$$r(u, v) \quad r_u \times r_v \quad \leftarrow \text{irányítás}$$

$(u_0, v_0)$ -beli vektor az  $r(u_0, v_0)$ -beli felületi normális

Felületi normális normálva: felületi egységnormális

Gömb (egységgömb)

$$r(u, v) = (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u)) \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

$$r_u = (\cos(u) \cdot \cos(v), \cos(u) \cdot \sin(v), -\sin(u))$$

$$r_v = (-\sin(u) \cdot \sin(v), \sin(u) \cdot \cos(v), 0)$$

$$r_u \times r_v = \left( \sin^2(u) \cdot \cos(v), \sin^2(u) \cdot \sin(v), \underbrace{\sin(u) \cdot \cos(u) \cdot \cos^2(v) + \sin(u) \cdot \cos(u) \cdot \sin^2(v)}_{\sin(u) \cdot \cos(u)} \right) = \sin(u) \cdot r(u, v)$$

## 7. gyakorlat

### Komplex integrálás

**Definíció:**  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ , ez görbe, ha van olyan  $G: [a; b] \subseteq \mathbb{R}$ , ami véges kivétellel folytonosan differenciálható és folytonos. (néhol eltörhet a görbe)  $Ran(b) = \Gamma$

$G(a)$  kezdőpontja  $\Gamma$ -nak

$G(b)$  végpontja  $\Gamma$ -nak

$\Gamma$  zárt, ha  $G(a) = G(b)$

$\Gamma$  egyszerű, ha  $G$  injektív (egy értéket csak egyszer vesz fel, nem metszi át magát)

### Példa

$$z(t) = x(t) + i \cdot y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$z(t) = R \cdot \cos(t) + i \cdot R \cdot \sin(t) = R \cdot e^{it}$$

$$\dot{z}(t) = R \cdot (-\sin(t)) + i \cdot R \cdot \cos(t) = R \cdot (\sin(-t) + i \cdot \cos(-t)) = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (i \cdot \sin(-t) + i^2 \cdot \cos(-t)) = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (-\cos(-t) + i \cdot \sin(-t)) = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (-\cos(t) - i \cdot \sin(t)) = R \cdot i \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) = R \cdot i \cdot e^{it}$$

### Komplex Riemann-integrál

Egyváltozós valós függvények integráljához hasonló módon értelmezzük.

Legyen  $G$  a komplex sík egy irányított szakasza. Osszuk fel ezt a  $G$  görbét osztópontokkal  $(z_0, z_1, z_2 \dots)$ , és minden  $z_{k-1}, z_k$  íven vegyünk fel egy tetszőleges  $\rho_k$  pontot.

Ha a felosztást minden határon túl finomítva a  $\sum_{k=1}^n f(\rho_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$  integrálközelítő összegnek létezik véges határértéke, akkor ez a határérték az  $f$  komplex függvény  $G$  görbe menti integrálja.



$$\int_G f(z) dz$$

### Integrálok kiszámítása

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

$$[a; b] \rightarrow \mathbb{C}$$

Vonalra

$$\int_\Gamma v dr = \int_a^b \underline{v}(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

A paraméterezést mindegy, az eredmény ugyan az.

Megjegyzés:  $h: \mathbb{R} \in t \rightarrow h(t) \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b h(t) dt = \left( \int_a^b h_1(t) dt \right) + i \cdot \left( \int_a^b h_2(t) dt \right) \equiv \int_a^b \operatorname{Re}(h) + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(h)$$

### Példa

$$z(t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t) \quad (\text{egységkör a komplex számsíkon})$$

$$\dot{z}(t) = -\sin(t) + i \cdot \cos(t)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t) + i \sin(t)} \cdot \frac{(-\sin(t) + i \cos(t))}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i \cdot dt =$$

$$= \left( \int_0^{2\pi} 0 dt \right) + i \left( \int_0^{2\pi} 1 dt \right) = \left( 0 \right) + i \cdot (2 \cdot \pi) = 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$$

### Példa

$$z(t) = t \cdot (1 + 2 \cdot i) \quad \dot{z}(t) = 1 + 2 \cdot i$$

$$\int_\Gamma \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{t \cdot (1 + 2 \cdot i)} \cdot (1 + 2 \cdot i) dt = \int_0^1 (t - 2 \cdot i \cdot t) \cdot (1 + 2 \cdot i) dt =$$

$$= \int_0^1 t \cdot 5 dt = \left[ \frac{5 \cdot t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

### Komplex Newton-Lebnitz formula

Definíció: Legyen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nyílt halmazon értelmezett függvény. Az  $F: \operatorname{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{C}$  primitív függvénye  $f$ -nek, ha reguláris és  $F' = f$ .

Tétel (Newton-Leibnitz):

Ha az előbbieket szerint  $f$  folytonos és  $F' = f$ , akkor minden  $\Gamma \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ -re, aminek a kezdő- és végpontja  $z_1, z_2$ :

$$\int_\Gamma f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

### Példa

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = ?$$

$$F(z) = ?, \text{ ha } F'(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$F(z) = -z^{-1} = -\frac{1}{z}$$

$$\rightarrow \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{1} - \left( -\frac{1}{1} \right) = 0$$

Követelmény: Ha  $f$ -nek van primitív függvénye, akkor  $\int_{\Gamma} f = 0$

A komplex függvénytan alaptétele (Cauchy-tétel):

Megjegyzés:  $\mathbb{C}$ -beli integrálok előállítására vonalintegrálként:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u + i \cdot v) \cdot (dx + i \cdot dy) = \int_{\Gamma} (u \cdot dx - v \cdot dy + i \cdot (v \cdot dx + u \cdot dy)) =$$

$$P = (u, -v) \quad \text{és} \quad Q = (v, u)$$

$$\rightarrow \int P dx + i \cdot \int Q dx$$

**Newton-Leibnitz  $\mathbb{R}^3$ -ban**

$$v = \text{grad}(\phi)$$

$$\int_{\Gamma} \text{grad}(\phi) dr = \phi(r_2) - \phi(r_1) \quad \text{Ez az I. gradiens-tétel}$$

$\Gamma$  kezdő- és végpontja:  $r_1$  és  $r_2$

Bizonyítás:  $\mathbb{C}$  N-beli

$$f = u + i \cdot v$$

$$F = \phi + i \cdot \psi$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x \phi & \partial_y \phi \\ \partial_x \psi & \partial_y \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$F' = \partial_x \phi + i \cdot (-\partial_y \phi) = u + i \cdot v$$

$$F' = \partial_y \psi + i \cdot \partial_x \psi = u + i \cdot v$$

$$\begin{aligned} \int f = \int u dx - v dy + i \cdot \int v dx + u dy &= \int \partial_x \phi dx + \partial_y \phi dy + i \cdot \int \partial_x \psi dx + \partial_y \psi dy = \\ &= \int \text{grad} \phi + i \cdot \int \text{grad} \psi = \phi(r_2) - \phi(r_1) + i \cdot (\psi(r_2) - \psi(r_1)) = F(r_2) - F(r_1) \end{aligned}$$

## 8. előadás

Implicit egyenlet:

$$u(r) = 0 \quad u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u(r(t)) = 0 \quad \text{grad}(u) \big|_{r(t)} \cdot \dot{r}(t) = 0$$

$$\rightarrow \text{grad}(u) \perp \dot{r}(t)$$

A felületi normális a gradiens.

**Példa**

$$\text{Gömb:} \quad u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \quad \text{grad} = (2 \cdot x, 2 \cdot y, 2 \cdot z)$$

Irányítás általánosan n-dimenzióra

**Definíció:**

CROSS:  $\mathbb{R}^n$ -ben  $a_1, \dots, a_{n-1} \rightarrow \text{CROSS}(a_1, \dots, a_{n-1})$  az egyetlen olyan, aki:

1. Merőleges az  $a_1, \dots, a_{n-1}$  által kifeszített altérre
2. Nagysága:  $a_1, \dots, a_{n-1}$  által kifeszített paralelotop n-1-dimenziós térfogata
3.  $a_1, \dots, a_{n-1}, \text{CROSS}(a_1, \dots, a_{n-1})$  jobb sodrású ( $\Leftrightarrow$  a szokásos bázisról az erre való áttérés mátrixának determinánsa  $>0$ )

$$CROSS(a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot \left| \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ a_1(1) & \dots & a_1(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}(1) & \dots & a_{n-1}(n) \end{pmatrix} \right|$$

2-dimenzióban:  $CROSS \begin{pmatrix} a \\ x, y \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix} = -(y, -x) = (-y, x)$  (balra forgatás)

- Állítás:**
- argumentumok cserélése  $\rightarrow -1$ -szeresére változik
  - minden argumentumban lineáris
  - $\exists i \neq j: a_i = a_j \Rightarrow CROSS(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$

$r = r(u)$  által adott valódi felület irányítása:  $cross(r_u(u))$ . Egy pontbeli értéke az ottani felületi normális.

$$\frac{cross(r_u(u))}{|cross(r_u(u))|}: \text{felületi egységnormális}$$

$$F: r(u_1 \dots u_n) \quad (u_1 \dots u_n) \in A$$

$$A' = \{(u_1 \dots u_n) | (-u_1 \dots -u_n) = A\}$$

$$-F: s(u_1 \dots u_n) = r(-u_1 \dots -u_n) \quad (u_1 \dots u_n) \in A'$$

$$F \text{ zárt felület kifelé irányított} \Leftrightarrow \forall u \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in (0, \varepsilon) \quad r(u) + \delta \cdot cross(r_u(u)) \notin V$$

$F$  felület a  $V$ -t határolja

$$2D\text{-ben: } |F| = \iint_A |r_u \times r_v| dudv \quad \Delta f \approx f' \cdot \Delta x$$

$$\text{Általában: } F \text{ felszíne} = |F| = \iint_A |cross(r_u)| du$$

### Példa

$R$  sugarú,  $h$  magasságú hengerpalást

$$r(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v), u \in [0, 2 \cdot \pi], v \in [0, h]$$

$$r_u = (-R \cdot \sin(u), R \cdot \cos(u), 0)$$

$$r_v = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow r_u \times r_v = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), 0)$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{R^2 \cdot (\cos^2(u) + \sin^2(u))} = R$$

$$|F| = \int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^h R dv du = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot R$$

$$H \subseteq \mathbb{R}^m \quad v: H \rightarrow \mathbb{R}^k \quad k = m + 1 \quad v \text{ folytonos}$$

### 1. Vonalintegrálok

$$\text{Legyen } L: r = r(t) \quad t \in I \quad L \subseteq H \quad \text{adott görbe}$$

$a, v$  görbementi integrálja  $L$ -en

$$\int_L v dr \stackrel{\text{def}}{=} \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

$b, v$  ívhossz szerinti integrálja  $L$ -en

$$\int_L v |dr| \stackrel{\text{def}}{=} \int_I v(r(t)) \cdot |\dot{r}(t)| dt$$

### 2. Felületi integrálok

$$F \subseteq H \text{ valódi felület } r = r(u), u \in A \subseteq A^{m-1}$$

$a, v$  felületmenti integrálja  $F$ -en

$$\int_F v df \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r(u)) \cdot \text{cross}(r_u(u)) du$$

b,  $v$  felszín szerinti integrálja  $F$ -en

$$\int_F v |df| \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r(u)) \cdot |\text{cross}(r_u(u))| du$$

### Tétel

A fent definiált integrálok alaptulajdonságai

1. Lineáris operátorok

2. Additív halmazfüggvény

$$3. \int_{-L} v dr = - \int_L v dr$$

$$\int_{-F} v df = - \int_F v df$$

$$4. m \leq v(r) \leq M \Rightarrow m \cdot |L| \leq \int_L v dr \leq M \cdot |L|$$

$$m \cdot |F| \leq \int_F v df \leq M \cdot |F|$$

$$5. \int_L 1 |dr| = |L| \quad \text{és} \quad \int_F 1 |df| = |F|$$

6.  $v_e$  a  $v$ -nek  $r$  érintő egységvektorára eső vetületének előjeles hossza, azaz  $v \cdot e \rightarrow$

$$\int_L v dr = \int_L v_e |dr| \quad \left( e = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} \right)$$

7.  $v_n$  a  $v$ -nek felületi normálisra eső vetületének előjeles hossza, azaz  $v \cdot n \rightarrow$

$$\int_F v df = \int_F v_n |df| \quad \left( n = \frac{\text{cross}(r_u)}{|\text{cross}(r_u)|} \right)$$

$$6\text{-os bizonyítása: } \int_L v_e |dr| = \int_I \underbrace{v_e(r(t))}_{v(r(t)) \cdot \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}} \cdot |\dot{r}(t)| dt = \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

## 8. gyakorlat

**Stokes-tétel:**  $F$  felület  $\mathbb{R}^3$ -ban.  $\partial F$  pereme  $F$ -nek.  $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , folytonosan differenciálható.

$Dom(\underline{v})$  nyílt.  $F \cup \partial F \subseteq Dom(\underline{v})$

$$\int_{\partial F} \underline{v} = \int_F \text{rot}(\underline{v})$$

$$\text{rot}(\underline{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

Keressük  $\mathbb{C}$ -ben az alakját.

$$v_3 = 0 \rightarrow v_1 = v_1(x, y) \text{ és } v_2 = v_2(x, y)$$

$$\text{rot}(v) = \partial_x \cdot v_2 - \partial_y \cdot v_1$$

$$\oint_{\partial T} f = ? \quad f = u + i \cdot v$$

$$P = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Cauchy-Riemann szerint:  $\partial_x u = \partial_y v$  és  $\partial_y u = -\partial_x v$

$$\oint_{\partial T} f = \oint P \cdot dr + i \cdot \oint Q dr = \int_T \overbrace{-\partial_x u}^{\partial_y u} - \partial_y u + i \cdot \int_T \overbrace{\partial_x u}^{\partial_y v} - \partial_y v =$$

$$= \iint_T 0 dx dy + i \cdot \iint_T 0 dx dy = 0 \in \mathbb{C}$$

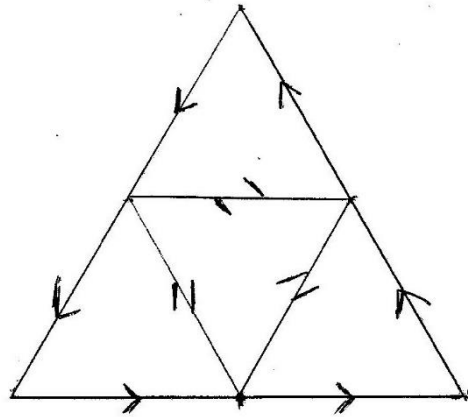
Megjegyzés: A bizonyításban feltettük, hogy:

1.  $f$  folytonosan differenciálható (valójában nem szükséges)
2. perem és tartomány helyett egy görbére mondjuk majd ki

### Goursat-lemma

$f$   $\mathbb{C}$ -differenciálható függvényt háromszögön ( $T$ ) értelmezünk, akkor  $\int_{\partial T} f = 0$

Bizonyítás:



$$\int_{\partial T} f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \int_{\Delta_3} f + \int_{\Delta_4} f$$

Középső szakaszokon kétszer integrálunk, egyszer az egyik, majd a másik irányba, így azok kiesnek.

$$\left| \oint_{\partial T} f \right| \leq \underbrace{\left| \int_{\Delta_1} f \right| + \left| \int_{\Delta_2} f \right| + \left| \int_{\Delta_3} f \right| + \left| \int_{\Delta_4} f \right|}_{\text{ezek közül van egy maximális}} \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial T} f \right|$$

$$K \rightarrow K_{T(1)} = \frac{K}{2^1}$$

$$1. \quad \left| \oint_{\partial T} f \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial T^{(n)}} f \right|$$

$$2. \quad K_{T^{(n)}} = \frac{K}{2^n}$$

3. Ezek egymásba skatulyázott határértékeke sorozata,  $z_0$  lesz a határértéke

$$\left| \oint_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\partial T^{(n)}} f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz \right|$$

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogyha } |z - z_0| < \delta, \text{ akkor } |\varepsilon(z)| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \left| \underbrace{f(z_0)}_0 + \underbrace{f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_0 + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz \right| = \left| \oint_{\partial T^{(n)}} \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz \right| \leq$$

$$\leq \oint_{\partial T^{(n)}} \underbrace{|\varepsilon(z)|}_{\varepsilon} \cdot \underbrace{|z - z_0|}_{\frac{K}{2^n}} \cdot \underbrace{d|z|}_{\frac{K}{2^n}} \leq \varepsilon \cdot \frac{K}{2^n} \cdot \frac{K}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{K^2}{4^n}$$

$$\rightarrow \left| \oint_{\partial T} f \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial T^{(n)}} f \right| = 4^n \cdot \frac{\varepsilon \cdot K^2}{4^n} = \varepsilon \cdot K^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

### Cauchy-féle integráltétel

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  reguláris a  $\Gamma$  görbén és belsejében,  $Dom(f)$  egyszeresen összefüggő nyílt tartomány. Ekkor  $\oint_{\Gamma} f = 0$

### Cauchy-féle integrálformula

$f: T \rightarrow \mathbb{C}$  reguláris a  $T$  tartományon,  $T$  egyszeresen összefüggő,  $\Gamma$  egyszerű zárt görbe a  $T$ -ben, amely körülhurkolja  $z_0$ -at. Ekkor:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

### Példa

$$\oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz$$

A Cauchy-féle integrálformulát kell használni. Adjuk meg a képletben szereplő ismeretleneket:

$$f(z) = ch(z)$$

$$z_0 = 0 \quad (\text{mert } (z - z_0) \text{ most } (z - 0))$$

$$n = 4 \quad (\text{mert } n + 1 = 5)$$

Most már felírhatjuk a formulát:

$$ch^{(4)}(0) = \frac{4!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz \quad / \text{átszorunk } 2 \cdot \pi \cdot i \text{-vel, leosztunk } 4! \text{-al}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz = ch^{(4)}(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = ch(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!}$$

$$ch' = sh, \quad ch'' = sh' = ch \quad ch^{(3)} = sh \quad ch^{(4)} = ch$$

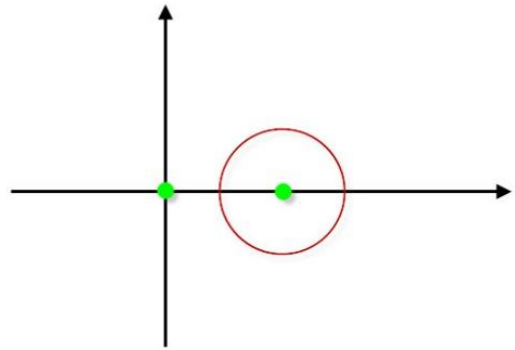
Használjuk fel, hogy  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  és  $ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$$ch(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = \frac{\pi \cdot i}{12}$$

**Példa**

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z^2 - z} dz$$

$|z - 1| = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  sugarú kör, aminek a középpontja az (1,0) pontban van



Át kell alakítani a törtet, hogy a nevezőbe csak  $(z - z_0)$ -os dolog kerüljön.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z^2 - z} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z \cdot (z - 1)} dz$$

A  $(z - 1)$  okozza a gondot  $\rightarrow$  a többit felvisszük a számlálóba.  $z - 1$  marad a nevezőbe, ami már jó.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z - 1} dz \quad \text{Ebből az alakból már felírhatjuk a formulát:}$$

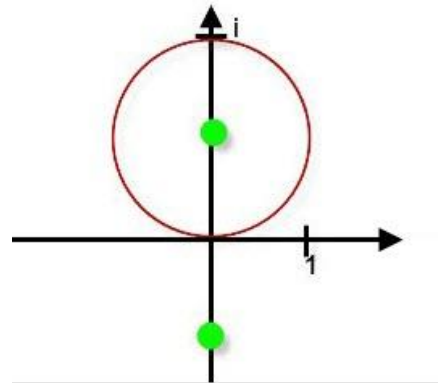
$$f(z) = \frac{2 \cdot z - 1}{z} \quad n + 1 = 1 \rightarrow n = 0 \quad z_0 = 1$$

$$\rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot f^{(0)}(1) = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{2 \cdot z - 1}{z} \Big|_{z=1} = 2 \cdot \pi \cdot i$$

**Példa**

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\left(\frac{i \cdot z \cdot \pi}{2}\right)}{z^2 + 1} dz$$

$|z - i| = 1 \rightarrow 1$  sugarú kör, aminek a középpontja  $(0, i)$ -ben van



Megint átalakítjuk a törtet:

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\left(\frac{i \cdot z \cdot \pi}{2}\right)}{(z-i) \cdot (z+i)} dz$$

A  $(z - i)$ -s gyök okozza a gondot, a többi felkerül a számlálóba:

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\left(\frac{i \cdot z \cdot \pi}{2}\right)}{z+i} dz \quad \text{Ebből felírhatjuk a Cauchy-formulát:}$$

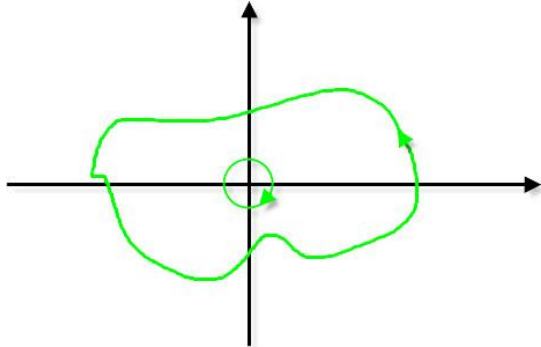
$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{z+i} \quad n = 0 \quad z_0 = i$$

$$\rightarrow \frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{z+i} \Big|_{z=i} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) = -\pi \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$


---

Van egy kompatibilisen irányított felületünk. Mennyi ezen  $\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz$  ?

Kompatibilis irányítás: ha az iránynak megfelelően sétálok, akkor bal kéz felől legyen a felület.



A belső kör egy egységsugarú kör:  $|z| = 1$

A külső görbe  $\Gamma$ .

$$\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz = \int_{\cup} \frac{1}{z} dz + \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\cup} \frac{1}{z} dz + \int_{\cup} \frac{1}{z} dz = -2 \cdot$$

$$\pi \cdot i + 2 \cdot \pi \cdot i = 0$$

$\cup$  pozitívan irányított kör, amire tudjuk, hogy  $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$

Negatívan irányított körre ennek a -1-szerese.

## 9. előadás

### Példa

$$\int_L r dr \quad (r: \text{identitás függvény})$$

$L$ : origó középpontú, 3 sugarú, pozitívan irányított kör

$$r(t) = 3 \cdot (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2 \cdot \pi]$$

$$\dot{r}(t) = 3 \cdot (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\int_0^{2\pi} 9 \cdot (\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} 0 dr = 0$$

### Példa

$$\int_F 2 \cdot r df \quad F: z \text{ tengelyű, origó csúcsú, } \frac{\pi}{4} \text{ felnyílásszögű, kifelé irányított kúp}$$

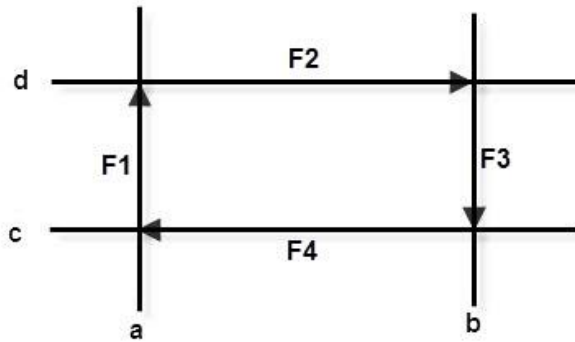
$$r(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), u) \quad u \in [0, 2 \cdot \pi], \quad v \in [0, \pi]$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v \cdot \sin(u) & v \cdot \cos(u) & 0 \\ \cos(u) & \sin(u) & 1 \end{vmatrix} = \left( v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), -v \cdot \left( \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{1} \right) \right)$$

$$\int_F 2 \cdot r df = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \cdot v^2 \cdot (\cos(u), \sin(u), 1) \cdot (\cos(u), \sin(u), -1) dv du =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 0 dv du = 0$$


---



$$\text{cross}(r_u(u)) = (-1, 0)$$

90°-os forgatás balra

**Példa**

$$v(x, y) = (f(x), 0)$$

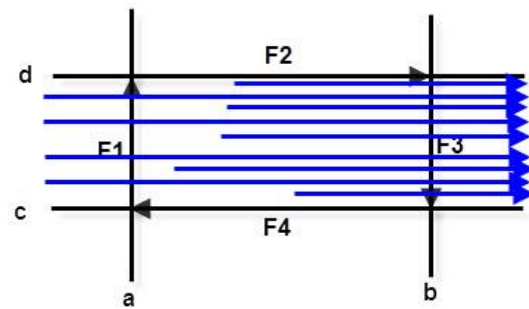
nem negatív, monoton nő (jobbra sűrűsödik)

Több megy ki, mint be.

Alul és felül az integrál 0.

Előző előadáson tanult képlet szerint:

$$\int_F vdf \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r_u(u)) \cdot \text{cross}(r_u(u)) du$$



$$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(a), 0) \cdot (-1, 0) du = \int_c^d -f(a) = (c - d) \cdot f(a)$$

$$\int_{F_3} vdf = - \int_{-F_3} vdf = \dots = -(c - d) \cdot f(b)$$

$$\text{Egész felületen: } \int_F vdf = (d - c) \cdot (f(b) - f(a))$$

**Példa**

$$v(x, y) = (f(y), 0) \quad f \text{ folytonos}$$

Alul és felül továbbra is 0.

$$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(u), 0) \cdot (-1, 0) du = \int_c^d -f(u)$$

$$\int_{F_3} vdf = - \int_{-F_3} vdf = \dots = \int_c^d f(u)$$

$$\Rightarrow \int_F vdf = 0 \quad \text{Ugyanannyi megy be, mint ki.}$$

**Példa**

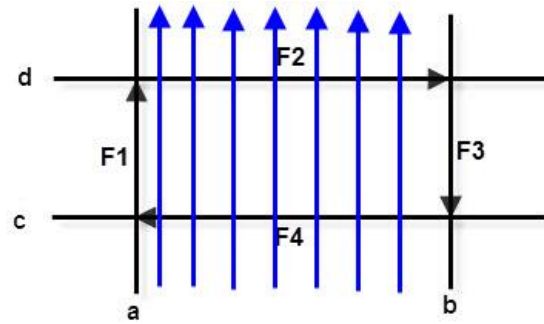


$$w(x, y) = (0, f(x))$$

$f$  folytonos

$$\text{cross}(r_u(u)) = (0, 1)$$

Bal és jobb oldalon 0.



$$\int_{F_2} vdf = \int_a^b (0, f(d)) \cdot (0, 1) du = (b-a) \cdot f(d)$$

$$\int_{F_4} vdf = - \int_{-F_4} vdf = \dots = -(b-a) \cdot f(c)$$

Eredmény

$$\int_F udf = (b-a) \cdot (f(d) - f(c))$$

**Példa**

$$v(x, y) = (f(x, y), 0)$$

$f$  folytonos

Alul és felül 0

$$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(a, u), 0) \cdot (-1, 0) du = \int_c^d -f(a, u) du$$

$$\int_{F_3} vdf = - \int_{-F_3} vdf = \dots = \int_c^d f(b, u) du$$

$$\Rightarrow \int_F vdf = \int f(b, u) - f(a, u) du$$

**Példa**

$$w(x, y) = (0, g(x, y))$$

Előzően hasonlóan

$$\int_F wdf = \int_a^b g(u, d) - g(u, c) du$$

**Definíció:**

$$(1) \quad H \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (korlátos halmaz) } \text{átmérője} = d|H| = \{\sup|x-y|; x, y \in H\}$$

$$(2) \quad H_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ } r_0 \in \mathbb{R}^n \text{-re zsugorodik, ha } r_0 \in \text{Int}H_k \forall k \text{ és } \lim_{k \rightarrow \infty} d(H_k) = 0$$

**Definíció** (forrassűrűség):  $r_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $v: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos  $G \setminus \{r_0\}$ . Ha normál térrészek minden  $\mathbb{R}^n$ -beli  $r_0$ -ra zsugorodó  $V_k$  sorozatára  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} vdf$  létezik, és ugyanannyi, akkor ezt hívjuk  $v$  forrassűrűségének az  $r_0$ -ban. ( $F_k$  a  $V_k$ -t határoló kifelé irányított felület)

$$s(v)(r_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int vdf$$

**Példa**

$v$  forrassűrűsége  $(x_0, y_0)$  pontban  $((x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d))$

$$V_k = \underbrace{[a_k, b_k]}_{x_0 \in} \times \underbrace{[c_k, d_k]}_{y_0 \in}$$

$$\lim b_k - a_k = 0$$

$$\lim d_k - c_k = 0$$

$$\rightarrow \int_{F_k} vdf = \int_{c_k}^{d_k} (f(d_k, u) - f(a_k, u)) du$$

$$\frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{c_k}^{d_k} (f(d_k, u) - f(a_k, u)) du = \frac{1}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \cdot \int_{c_k}^{d_k} (f(d_k, u) - f(a_k, u)) du =$$

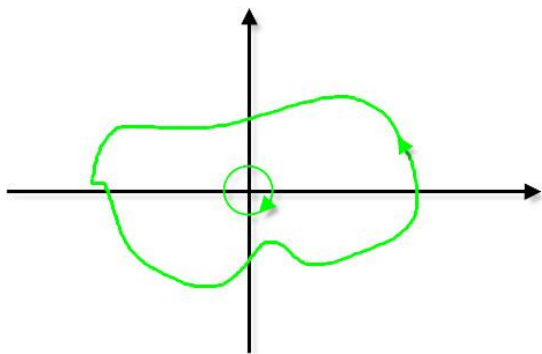
$$\exists \xi \in [c_k, d_k] \stackrel{\text{Lagrange}}{\cong} \frac{(f(b_k, \xi_k) - f(a_k, \xi_k)) \cdot (d_k - c_k)}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \stackrel{\exists \rho_k \leftarrow (a_k, b_k)}{\cong} f_x(\rho_k, \xi_k) \rightarrow f_x(x_0, y_0) \quad \text{Ha } f_x \text{ folytonos}$$

## 9. gyakorlat

8. gyakorlat végén volt:

Van egy kompatibilisen irányított felületünk. Mennyi ezen  $\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz$  ?

Kompatibilis irányítás: ha az iránynak megfelelően sétálok, akkor bal kéz felől legyen a felület.



A belső kör egy egységsugarú kör:  $|z| = 1$

A külső görbe  $\Gamma$ .

$$\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = -2 \cdot$$

$$\pi \cdot i + 2 \cdot \pi \cdot i = 0$$

$\cup$  pozitívan irányított kör, amire tudjuk, hogy  $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$

Negatívan irányított körre ennek a -1-szerese.

Azt kaptuk, hogy egy függvény integrálja a nagy görbére ugyan az, mint az integrálja a kis körre.  $\rightarrow$  A kis körökre Integrálunk.

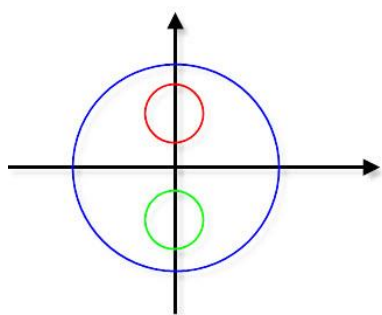
**Példa**

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z+i) \cdot (z-i)} dz$$

Felrajzoljuk:  $|z| = 2 \rightarrow$  origó középpontú, 2 sugarú kör

Kis körök középpontjai:  $(0, i)$  és  $(0, -i)$

Erre a két kis körre integrálunk. A sugarat tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyen  $\frac{1}{2}$ , hogy ne lógjon a nagy körön kívülre.



$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i) \cdot (z+i)} dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i) \cdot (z+i)} dz$$

A Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmaznunk, tehát a nevezőben valahogy  $(z - z_0)$  alakra kell hozni.

A piros körnél a  $(z - i)$  okoz problémát, a többit felvisszük a számlálóba, a zöld körnél pedig a  $(z + i)$  okozza a problémát.

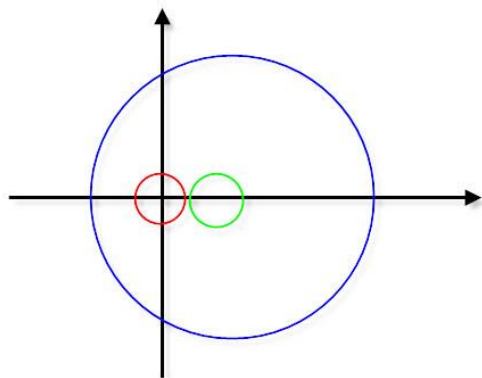
$$\rightarrow \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i} dz$$

Most már alkalmazhatjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot \frac{1}{z-i} \Big|_{z=-i} = \pi - \pi = 0$$

**Példa**

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^4 - z^3} dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3 \cdot (z-1)} dz$$



Megint rajzoljuk fel:

$$|z - 2| = 3$$

→ Közepont: (2,0), sugár 3

2 kis kör középpontja: (1,0) és (0,0). Ezekre integrálunk.

Kis körök sugarát válasszuk  $\frac{1}{3}$ -nak, hogy ne érjenek össze.

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz$$

A piros körnél a  $z$  okozza a gondot, a többit felvisszük a számlálóba, a zöld körnél pedig a  $(z - 1)$  okozza a problémát, a

$z^3$  kerül fel a számlálóba.

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3}$$

$$n + 1 = 3 \rightarrow n = 2$$

$$n + 1 = 1 \rightarrow n = 0$$

$$z_0 = 0$$

$$z_0 = -1$$

Használjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$n = 2$ , vagyis az  $\frac{e^z}{z-1}$  függvényt kell kétszer deriválni és a  $z_0 = 0$  pontbeli értékét venni:

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)' = \frac{e^z(z-1) - e^z \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}$$

$$\left(\frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}\right)' = \frac{(e^z(z-2) + e^z) \cdot (z-1)^2}{(z-1)^4} + e^z \cdot (z-2) \cdot 2 \cdot (z-1) \Big|_{z=1} = -5$$

$n = 0$ , vagyis az  $\frac{e^z}{z^3}$  függvényt kell vennünk a  $z_0 = 1$  helyen:  $e^1$

A végeredmény

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{2!} \cdot (-5) + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot e^1 = -5 \cdot \pi \cdot i + 2 \cdot e \cdot \pi \cdot i$$

## Elemi függvények

### Négyzetre emelés

$$z \rightarrow z^2$$

$$z = e \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$w = z^2 = r^2 \cdot (\cos(2 \cdot \varphi) + i \cdot \sin(2 \cdot \varphi))$$

$z^2$ -nek nincs inverze, de a  $z^2$  Riemann felületén már invertálható.

### Exponenciális

$$z \rightarrow e^z$$

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$z \rightarrow w$$

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{|w|} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\arg(w)=y}$$

Nem invertálható, de Riemann felületen igen.

$z \rightarrow e^z$  periodikus:

$$e^z \rightarrow e^{z+k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i} = e^z \cdot \left[ (e^{i \cdot \pi})^2 \right]^k = e^z \cdot 1^k \quad (e^{i \cdot \pi} = -1)$$

Periódus:  $2 \cdot \pi \cdot i$

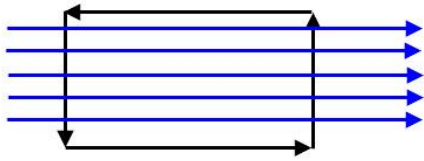
## 10. előadás

$(f(x, y), 0)$  forrassűrűsége az  $(x_0, y_0)$  pontban  $f_x(x_0, y_0)$

$(0, g(x, y))$  forrassűrűsége az  $(x_0, y_0)$  pontban  $g_y(x_0, y_0)$

$\underbrace{(f(x, y), g(x, y))}_{v(x, y)}$  forrassűrűsége az  $(x_0, y_0)$  pontban  $\underbrace{f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)}_{\text{div}(v)|_{(x_0, y_0)}}$

### Példa



$$\int_L v dv = ?$$

L a görbe.

Bal és jobb oldalt az integrál 0, mert a felületi normális merőleges az erővonalakra.

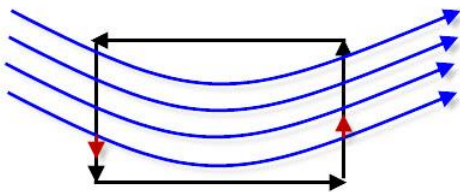
Felül pedig az integrál az alsó integrál -1-szerese  $\rightarrow \int_L v dv = 0$

### Példa

Ugyan ez, csak az erővonalak ferdén haladnak.

A szemben lévő oldalak integráljai kiejtik egymás (egymás -1-szeresei)  $\rightarrow \int_L v dv = 0$

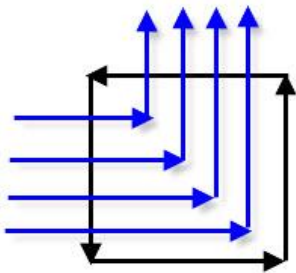
### Példa



Alul és felül megint kiejtik egymást, viszont bal és jobb oldalon is pozitív lesz az integrál, mert az erővonalak merőleges vetülete (piros nyilak) pozitív irányba mutat.

$\rightarrow$  Az integrál értéke pozitív

### Példa



Jobb oldalon és alul nem halad át erővonal, így ott az integrál 0.

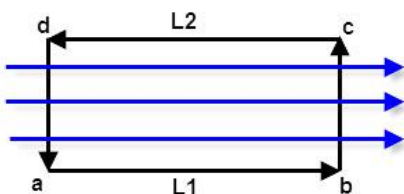
Felül és bal oldalon pedig ugyanannyi megy be mint ki, ez egy négyzet.

$$\rightarrow \int df = 0$$

### Példa

$$v(x, y) = (f(x, y), 0)$$

Bal oldalon és jobb oldalon ismét 0.



$$r(t) = (t, c)$$

$$\dot{r}(t) = (1, 0)$$

Alul:  $\int_{L_1} v dr = \int_{L_1} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = \int_a^b (f(t, c), 0) \cdot (1, 0) dt = \int_a^b f(t, c) dt$

$$\text{Felül: } \int_{L_2} v dr = \int_a^b -f(t, d) dt$$

$$\rightarrow \int_L v dr = \int_a^b f(t, c) - f(t, d) dt$$

$\mathbb{R}^2$ -beli normált térrészek minden  $r_0$ -ra zsugorodó  $F_k$  sorozatára ha  $\exists \lim_{|F_k|} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} v dr$  (ahol  $L_k$  az  $F_k$  pozitívan irányított határa) és ez ugyanannyit, akkor ezt  $v$   $r$ -beli örvénysűrűségének nevezzük.

Jele:  $c(v)(r_0)$

**Példa**

$$F_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \quad x_0 \in [a_k, b_k], \quad y_0 \in [c_k, d_k]$$

$$\lim b_k a_k = \lim d_k - c_k = 0$$

$$c(f(x, y), 0)(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \cdot \int_a^b f(t, c) - f(t, d) dt \stackrel{\exists \xi_k \in [a, b]}{=} \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f(\xi_k, c) - f(\xi_k, d)) \cdot (b_k - a_k)}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} -f_y(\xi_k, \rho_k) \stackrel{f_y \text{ folytonos}}{=} -f_y(x_0, y_0)$$

Hasonlóan:  $c(0, g(x, y))(x_0, y_0) = \dots = g_x(x_0, y_0)$

**Következmény:**  $c(f(x, y), g(x, y))(x_0, y_0) \stackrel{\text{ha } \exists f, g \text{ folytonosan diffható}}{=} g_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) = \text{rot}(v) \Big|_{(x_0, y_0)}$

**Lemma:** Ha  $F$  a síkbeli  $V$  valamelyik tengely szerinti normál tartomány kifelé irányított határa és  $\mathbb{R}$  folytonosan differenciálható valós értékű függvény  $V$ -n, akkor

- $\int_F (0, h) df = \int_V h_y(x, y) dV$ , ha  $V$   $x$ -re nézve normál tartomány
- $\int_F (h, 0) df = \int_V h_x(x, y) dV$ , ha  $V$   $y$ -ra nézve normál tartomány

**Tétel (Gauss–Osztrogradskij-tétel):**

Ha  $F$  a  $V$  síkbeli normál tartomány kifelé irányított határa és  $v: H \rightarrow \mathbb{R}^2, V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2$  folytonosan differenciálható, akkor  $\int_F v df = \int_V \text{div}(v) dV$

Bizonyítás:

$$\int_F \underbrace{v}_{(g, h)} df = \int_F (g, 0) df + \int_F (0, g) df = \int_V g_x(x, y) dV + \int_V h_y(x, y) dV = \\ \int_V \underbrace{g_x + h_y}_{\text{div}(v)} dV$$

**Következmény:** Az előző igaz akárhány dimenzióban és normál tartomány helyett normál térrészre is.

**Példa**

$H$ :  $R$  sugarú,  $h$  magasságú,  $z$  tengelyű henger

$$v(x, y, z) = v(x, y, 0)$$

$$\int_H v df = \int \underbrace{v}_{\text{hengertest}} \overbrace{dV}^2 = 2 \cdot \int_{dV} 1 dV = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$$

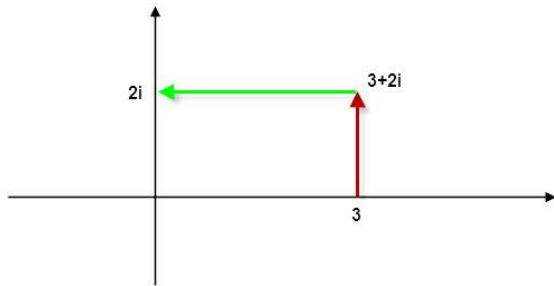
Vagy:  $\int_H v df = \int_H v_n |df| = \int_{H^-} R |df| = R \cdot \int_{H^-} 1 |df| = R \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$

**10. gyakorlat**

**Példa**

Komplex integrálás megtört szakaszon (két részre kell bontani az integrált)

$$f(z) = \operatorname{Re}(z) + i \cdot (\operatorname{Im}(z))^2 \quad (x + i \cdot y^2)$$



$\Gamma$ : a görbe, amin integrálunk

$f(z)$  sehol sem differenciálható  $\rightarrow z(t)$ -s képletet kell

használni

$$\int_{\Gamma} f = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

$$\Gamma = \underbrace{[3; 3 + 2 \cdot i]}_{\text{piros szakasz}} \rightarrow \underbrace{[3 + 2 \cdot i; 2 \cdot i]}_{\text{zöld szakasz}}$$

A teljes integrál a 2 integrál összege:  $I = I_1 + I_2$

A piros szakasz egyenlete:  $z_1(t) = 3 + t \cdot i \quad 0 \leq t \leq 2$

Kell még:  $\dot{z}_1(t) = i$

Behelyettesíthetünk a képletbe:  $I_1 = \int_0^2 \underbrace{(3 + i \cdot t^2)}_{f(z_1(t))} \cdot \underbrace{i}_{\dot{z}_1(t)} dt = \int_0^2 3 \cdot i - t^2 dt =$

$$= \left[ 3 \cdot i \cdot t - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = 6 \cdot i - \frac{8}{3}$$

A zöld szakasz egyenlete:  $z_2(t) = 2 \cdot i + 3 - t \quad 0 \leq t \leq 3$

Kell még:  $\dot{z}_2(t) = -1$

Behelyettesítés:  $I_2 = \int_0^3 \underbrace{(3 - t + i \cdot 4)}_{f(z_2(t))} \cdot \underbrace{(-1)}_{\dot{z}_2(t)} dt = \left[ \frac{(t-3)^2}{2} - 4 \cdot i \cdot t \right]_0^3 = -12 \cdot i - \frac{9}{2}$

$$I = I_1 + I_2 = -6 \cdot i - \frac{8}{3} - \frac{9}{2}$$

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2 \cdot i} \left( = \frac{1}{i} \cdot \operatorname{sh}(i \cdot z) \right)$$

$$\cos(z) = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2} \left( = \operatorname{ch}(i \cdot z) \right)$$

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

**Példa**

$$e^z = -1 \quad z = ?$$

Átírjuk a jobb oldalt

$$e^z = e^{i \cdot \pi}$$

$$z = i \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

**Példa**

$$e^z = i$$

Átírjuk a jobb oldalt

$$e^z = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$z = i \cdot \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

**Példa**

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi}{2} \cdot i\right) &= \frac{e^{1+\frac{\pi}{2}i} - e^{-1-\frac{\pi}{2}i}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e \cdot \left( \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + i \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 \right) - \frac{1}{e} \cdot \left( \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_0 + i \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left( e + \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

**Példa**

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(z) &= \operatorname{sh}(x + i \cdot y) = \frac{e^{x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))} - e^{-x \cdot (\cos(-y) + i \cdot \sin(-y))}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos(y) \cdot (e^x - e^{-x}) + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(y) \cdot (e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

**Példa** (Harmonikus társkeresés)

$$u = x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2$$

$$u = ? \quad f = u + i \cdot v \text{ reguláris} \quad f(0) = 2 \cdot i \quad (u = 0, v = 2)$$

$$\partial_x u = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 \quad \rightarrow \quad \partial_{xx}^2 u = 6 \cdot x$$

$$\partial_y u = -6 \cdot x \cdot y \quad \rightarrow \quad \partial_{yy}^2 u = -6 \cdot x$$

$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = 0 \rightarrow$  Laplace-féle parciális differenciálegyenletet kielégíti  $\rightarrow$  harmonikus függvény.

A Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek szerint:

$$\partial_x u = \partial_y v$$

$$\partial_y u = -\partial_x v$$

( $u$ -t ismerjük,  $v$ -t keressük, ez lesz a harmonikus társa)

Az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\text{I.} \quad \partial_y v = \underbrace{3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2}_{\partial_x u}$$

$$\text{II.} \quad \partial_x v = \underbrace{6 \cdot x \cdot y}_{-\partial_y u}$$

I. egyenletet parciálisan integráljuk  $y$  szerint:

$$v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^3 + C(x) \quad C(x) \text{ csak } x\text{-től függ, mert } y \text{ szerint deriváltunk}$$

II. egyenletbe ezt behelyettesítjük  $v$  helyére (majd  $x$  szerint deriváljuk)

$$6 \cdot x \cdot y + C'(x) = 6 \cdot x \cdot y$$

$$C'(x) = 0$$

$$C(x) = \text{konst.}$$

Vagyis  $v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^2 + \text{konst}$

Kezdeti feltétel szerint ez a (0,0) pontban egyenlő 2-vel:

$$v = 3 \cdot 0^2 \cdot 0 - 0^2 + konst = 2 \quad \rightarrow \quad konst = 2$$

$$\rightarrow v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^2 + 2$$

**Példa**

$$r(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \cdot \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Ívhossz = ?

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$$

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sin(t) \\ e^t \cdot \sin(t) + e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{e^{2t} \cdot (\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2t} \cdot (\sin(t) + \cos(t))^2 + e^{2t}} dt =$$

$$= \int_0^2 e^t \cdot (\cos^2(t) - 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + \sin^2(t) + (\sin^2(t) + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + \cos^2(t)) + 1) dt$$

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$  és  $-2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)$  kiesik így a gyök alatt marad  $1+1+1$

$$= \int_0^2 e^t \cdot \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \cdot \int_0^2 e^t dt = \sqrt{3} \cdot [e^t]_0^2 = \sqrt{3} \cdot (e^2 - 1)$$

Igazoljuk, hogy ez egy kúpfelület!

45°-os kúp paraméterezése:  $\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}$  ami megegyezik a megadott felülettel, ha  $r = e^t$  és  $\varphi = t$

ZH-ban lehet a kúp, henger és a gömb paraméterezése. Kúp már megvan.

$$\text{Hengerfelület paraméterezése: } \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

$$\text{Gömb paraméterezése: } \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\ R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\ R \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

**Példa**

Mennyi a 8-ad gömb felszíne?

$$F = \iint_{T_{u,v}} |\partial_u r \times \partial_v r| du dv =$$

$\partial_u r \times \partial_v r$  számolása

$$\partial \varphi \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) & R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) & 0 \\ R \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) & R \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) & -R \cdot \sin(\vartheta) \end{vmatrix}$$

$$= \iint \sqrt{R^4 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^4(\vartheta) + R^4 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \sin^4(\vartheta) + R^4 \cdot (\sin^2(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) + \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta))^2} d\varphi d\vartheta$$

$$= \iint R^2 \cdot \sqrt{\sin^4(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi)} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot [-\cos(\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 d\varphi = R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ez tényleg a teljes gömb  $(4 \cdot R^2 \cdot \pi) \frac{1}{8}$ -ad része

## 11. előadás



**TÉTEL** (Stokes) 2D:

$F$  2-dimenziós normált térrész, melynek határa a pozitívan irányított  $L$  görbe.

$$F \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2 \quad v: H \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ F-en folytonosan diffható} \rightarrow \int_L v dr = \int_F \text{rot}(v) dV$$

Bizonyítás:  $1. \int_L v dr = \int_L \text{cross}(v) df \quad L: r(t) \quad t \in [a, b]$

$$\rightarrow \int_a^b v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = \int_a^b \text{cross}(v(r(t))) \cdot \text{cross}(\dot{r}(t)) dt$$

$$2. \text{div}(-\text{cross}(v)) = \text{rot}(v) = \text{div}(g, -f) = g_x - f_y = \text{rot}(f, g)$$

$$3. \int_L v dr = \int_L \text{cross}(v) df = \int_{-L} -\text{cross}(v) df = \int_F \underbrace{\text{div}(-\text{cross}(v))}_{\text{rot}(v)} dV =$$

$$= \int_F \text{rot}(v) dV$$

**TÉTEL** (stokes) 3D:

$V$  3-dimenziós normált térrész, melynek határa felosztható az  $F$  kifelé irányított valódi felületre és a kifelé irányított  $-G$  normált síkfelületre. Legyen  $G$  határa a  $G$ -ből nézve pozitívan irányított  $L$  görbe. Ha  $V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^3, v: H \rightarrow \mathbb{R}^3$  folytonosan diffható, akkor

$$\int_L v dr = \int_F \text{rot}(v) df$$

**Példa**

$$\int_F \text{rot}(k \times r) df \xrightarrow{\text{Stokes}} \int_L k \times r dr$$

$L: [x, y]$  síkban az origó középpontú  $R$  sugarú pozitívan irányított kör. (egyik megoldás)

Korábbi előadáson tanultak alapján az integrál egyik alaptulajdonsága:  $\int_L v dr = \int_L v_e |dr|$

Tehát:  $\int_L k \times r dr = \int_L (k \times r)_e |dr| = \int_L R |dr| = R \cdot \int_L 1 |dr| = 2 \cdot R^2 \cdot \pi$

Másik megoldás

$$(h \times r) = v$$

$$|h \times r| = |h| \cdot |r| = |v| = R$$

$h \times r$  párhuzamos az érintővektorral

$$\int_L (h \times r) dr = \int_L \underbrace{(h \times r)_e}_R |dr| = \int_L \underbrace{R |dr|}_{L \cdot |R|} = R \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot R^2 \cdot \pi$$

**Definíció:**

$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris leképezés skalárinvariánsa:  $A$  főátlóinak összege

**Állítás:** Ez bázis független.

**Definíció:**

$\text{div}(v)$ :  $v$  deriváltoperátorának skalárinvariánsa, azaz a Jacobi-mátrix főátlójának összege:  $\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$  ( $\nabla =$   
 $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \Rightarrow \text{div}(v) = \nabla \cdot v$ )

**Definíció:**  $A$  lineáris transzformáció adjungáltja  $A^*$

$A$  szimmetrikus, ha  $A = A^*$ , antiszimmetrikus, ha  $A^* = -A$

megjegyzés:  $A$  antiszimmetrikus lineáris transzformáció  $\rightarrow$  deriváltoperátorának mátrixának (Jakobi) főátlója csupa 0  $\Rightarrow \text{div}(A) = 0$

speciálisan 2 dimenzióban a cross ilyen.

$$\text{cross} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div}(\text{cross}) = 0$$

**Állítás:**

$A$  antiszimmetrikus lineáris transzformáció, ha

$$2D\text{-ben: } \exists c \in \mathbb{R} \ A \cdot r = c \cdot \text{cross}(r) \quad (c = a_{21})$$

$$3D\text{-ben: } \exists \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \text{ hogy } A \cdot r = c \times r \quad (c = (a_{32}, a_{13}, a_{21}))$$

**Bizonyítás:**

Egyértelműség  $\mathbb{R}^3$ -ban:  $c_1, c_2, \vec{c}$  is jó

$$0 = c_1 \times r - c_2 \times r = (c_1 - c_2) \times r \Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$\exists \mathbb{R}^3\text{-ban: } \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ -a_{13} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-a_{21} \cdot y + a_{13} \cdot z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-a_{13} \cdot x + a_{32} \cdot y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_{32} & a_{13} & a_{21} \\ x & y & z \end{pmatrix} \text{ Ez megegyezik az előbb kapott végeredménnyel.}$$

**Definíció:**  $A$  antiszimmetrikus lineáris transzformáció vektorinvariánsa az az egyetlen  $c \in \mathbb{R}$ , illetve  $c \in \mathbb{R}^3$ , amire  $A \cdot r = \text{cross}(r)$ , illetve  $A \cdot r = c \times r$ .

**Definíció:**  $A$  tetszőleges lineáris transzformáció antiszimmetrikus része:  $\frac{1}{2} \cdot (A - A^*)$  és szimmetrikus része  $\frac{1}{2} \cdot (A + A^*)$

**Definíció:**

$\text{rot}(v)$ :  $v$  deriváltoperátorának antiszimmetrikus része invariánsának kétszerese

kiszámolása:  $\mathbb{R}^2$ -ben  $a_{21} - a_{12}$

$\mathbb{R}^3$ -ban  $(a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{32}, a_{21} - a_{12})$

Ha  $A$  a  $v$  Jakobija:

$$- \mathbb{R}^2\text{-ben: } \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$- \mathbb{R}^3\text{-ben: } \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \nabla \times v$$

## 11. gyakorlat

### Egyszeres összefüggőség

$\Gamma: t \rightarrow z(t), t \in [a, b]$  görbe

**Definíció:**  $\Gamma$  zárt görbe a  $T$  tartományban a  $z_0$  pontra deformálható, ha létezik olyan  $\Gamma: [0,1] \rightarrow T^{[a,b]}$  folytonos leképezés, hogy  $\gamma(1) = \Gamma, \gamma(0) = z_0$  konstans görbe.

**Definíció:**  $T$  egyszeresen összefüggő, ha benne minden zárt görbe pontra deformálható.

**Ellenpélda**

$$\text{Dom} \left( \frac{1}{z} \right) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{Dom} \left( \frac{1}{id_c} \right) \quad id: z \rightarrow z$$

Ez a tartomány nem egyszeresen összefüggő.

Zsugorodás közben át kellene mennie az origón, de ez nem lehetséges, mert az origó nincs benne a  $T$  tartományban (ellentmond a definíciónak)  $\rightarrow$  Kétszeresen összefüggő

**Példa**

Csillagszerű tartomány, ha  $\exists z_0 \in T$ , hogy  $\forall z \in T$  esetén  $[z; z_0] \subseteq T$

$0 \leq \lambda \leq 1$  Középpontos kicsinyítés

Egyszeresen összefüggő, mert a  $z_0$  középpontú,  $\lambda$  arányú kicsinyítések a  $\gamma$ -t alkotják.

$$\|f - g\| = \sup(f - g)$$

távolság = szuprémmnorma

**Komplex logaritmus**

$$e^z = w$$

$$e^z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$e^z = e^{\ln(r)} \cdot e^{i\varphi}$$

$$e^z = e^{\ln(r)+i\varphi}$$

$$z = \ln(r) + i \cdot \varphi + 2 \cdot \pi \cdot i \cdot k$$

$$\text{Ln}(w) = \ln|w| + i \cdot (\text{arg}|w| + 2 \cdot \pi \cdot k)$$

$k = 0 \rightarrow$  logaritmus főértéke  $\text{Ln}(w)$

$$z^w := e^{w \cdot \text{Ln}(z)}$$

$$e^{\text{Ln}(z^w)} = e^{w \cdot \text{Ln}(z)}$$

**Példa**

$$i^i = e^{i \cdot \text{Ln}(i)} = e^{i \cdot (\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \pi \cdot k}$$

**Példa**

$$e^{i \cdot z} = 1 + i$$

$$e^{i \cdot z} = e^{\sqrt{2}} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$$

**Hatványsorok**

**1, Nem negatív kitevőjű hatványsor**

$$z \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \quad (\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (id_{\mathbb{C}} - z_0)^n)$$

$z_0 = \mathbb{C}$  - középpontja / centruma a hatványsornak

$c_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_0^+}$  - együttható sorozat

**TÉTEL** (Cauchy-Hadamard-tétel):

s konvergenciatartománya egy  $B_r(z_0)$  alakú halmaz, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{ha } \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = 0 \end{cases}$$

**Példa**

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$$

$$z_0 = 0$$

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad \rightarrow \quad \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = 1$$

Ez egy körlap belseje.

### Taylor-sor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

#### Példa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

Mert:  $\frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ , ami  $z \rightarrow 0$  esetén = 1

#### Példa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z) - z}{z^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad \text{Mindkét oldalból kivonva } z\text{-t és elosztva } z^3\text{-nal}$$

$$\frac{\sin(z) - z}{z^3} = -\frac{1}{6} + \frac{z^2}{5!} - \dots, \text{ ami } z \rightarrow 0 \text{ esetén} = -\frac{1}{6}$$

#### Példa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad \text{Kivonva } z\text{-t, } z^2\text{-tel osztva és előjeleket cserélve}$$

$$\frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \dots, \text{ ami } z \rightarrow 0 \text{ esetén} = \frac{1}{2}$$

#### Egész kitevőjű sorok

$$z \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

$$\underbrace{c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z}}_{\text{főrész}} + \underbrace{c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \dots}_{\text{reguláris rész}}$$

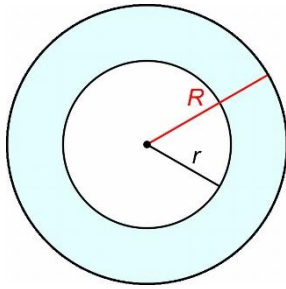
$$\limsup \sqrt[n]{\left| c_{-n} \cdot \frac{1}{z^n} \right|} < 1$$

$$\limsup \sqrt[n]{|c_{-n}|} \cdot \frac{1}{|z|} < 1$$

$$\limsup^n \sqrt[n]{|c_{-n}|} < |z|$$

Ez egy végtelenbe nyúló körgyűrű.

$B_\delta(\infty)$  alakú a konvergencia tartomány.



A két tartomány (egy  $R$  sugarú körlap belseje, és egy  $r$  sugarú végtelenbe nyúló körgyűrű) metszete: körgyűrűn konvergens.

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$z_0 = i$  körül fejtsük sorba

$$z_1 = \frac{i}{2}$$

Kell:  $\sum c_n \cdot (z - i)^n$

Ehhez átírjuk az  $f(z)$ -t úgy, hogy a nevezőben kivonunk és hozzáadunk  $i$ -t, majd alkalmazzuk a mértani sor összegképletét.

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)+i}$$

Mértani sor összegképlete:  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$f(z)$ -t valahogy  $\frac{1}{1-q}$  alakra kell hozni. Emeljük ki a nevezőben  $i$ -t:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{i}} = \frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (i \cdot (z-i))^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \cdot (z-i)^n$$

Ez a nem negatív kitevőjű rész, vagyis a reguláris rész.

Meg kell vizsgálni, hogy hol konvergens:

A mértani sorösszeg  $|q| < 1$  esetén konvergál:

$$|q| < 1$$

$$|i \cdot (z - i)| < 1$$

$$|z - i| < 1$$

Ez az ábrán az I-es tartomány, vagyis megkaptuk az  $i$  körüli 1 sugarú körben a Taylor-sort.

Most emeljük ki a nevezőben a másik tagot,  $(z - i)$ -t:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot \frac{1}{(z-i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot (z-i)^{-n-1}$$

Ez a negatív kitevőjű rész, vagyis a főrés.

Ennek a konvergencia tartománya:

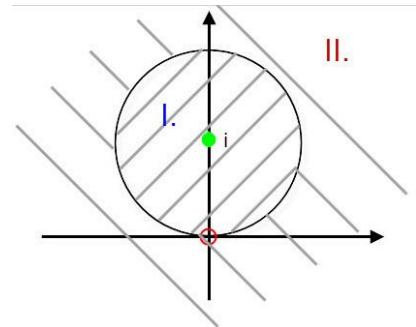
$$|q| < 1$$

$$\left| \frac{-i}{z-i} \right| < 1$$

$$\frac{1}{|z-i|} < 1$$

$$|z - i| > 1$$

Ez az ábrán a II-es tartomány.



## 12. előadás

### Vektorfüggvények jellemzőinek számítása (grad, div, rot)

- TÉTEL:**
1.  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$ ,  $\text{rot}$  lineáris operátorok (mert a deriválás lineáris operátor)
  2. konstans vektorfüggvénynek  $\text{div} = 0$ ,  $\text{rot} = 0$  és konstans skalárfüggvénynek  $\text{grad} = 0$
  3. Tegyük fel, hogy  $u$  skalárfüggvény,  $v$  vektorfüggvény

$$\text{div}(u \cdot v) = u \cdot \text{div}(v) + v \cdot \text{grad}(u)$$

Bizonyítás:  $\text{div}(u \cdot v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u \cdot v_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v_i + u \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) =$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v_i + u \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{grad}(u) \cdot v + u \cdot \text{div}(v)$$

4.  $\text{rot}(u \cdot v) = u \cdot \text{rot}(v) - \text{CROSS}(v) \cdot \text{grad}(u)$       2D-ben

$\text{rot}(u \cdot v) = u \cdot \text{rot}(v) - v \times \text{grad}(u) + \text{grad}(u) \times v$       3D-ben

Bizonyítás:  $(\text{rot}(u \cdot v))_1 = \frac{\partial u \cdot v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u \cdot v_2}{\partial x_3} =$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \cdot u - \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \cdot u = (\text{grad}(u \times v))_1 + u \cdot (\text{rot}(v))_1$$

5.  $\text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot \text{grad}(u_2) + u_2 \cdot \text{grad}(u_1)$

$u_1$  és  $u_2$  skalárfüggvények

6.  $\mathbb{R}^2$ -ben rot és div kapcsolata

-  $\text{div}(v) = \text{rot}(\text{cross}(v))$

-  $\text{rot}(v) = -\text{div}(\text{cross}(v))$

Bizonyítás: a,  $\text{rot}(\text{cross}(u)) = \text{rot}(-v_2, v_1) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \text{div}(v)$

b,  $\text{div}(\text{cross}(v)) = \text{rot} \left( \underbrace{\text{cross}(\text{cross}(v))}_{\substack{2 \cdot 90^\circ \text{ forgatás} \\ -1 \text{ szerésre vált}}} \right) = \text{rot}(-v) = -\text{rot}(v)$

**Tétel:** 1.  $\text{div}(r) = n$  ( $\mathbb{R}^n$ -ben)       $r$ : identitásfüggvény

2.  $\text{div}(\text{cross}(r)) = \sum f_{\text{óátló}} = 0$

$\text{rot}(\text{cross}(r)) = \text{div}(r) = 2$

3.  $u(r) = c \cdot r \Rightarrow \text{grad}(u) = c$

$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$  paricálisan deriválni kell

4.  $u(r) = f(|r|)$        $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény

$\Rightarrow \text{grad}(u) = f'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|}$

Bizonyítás:  $\text{grad}(u) = f'(|r|) \cdot \text{grad}(|r|)$

$(\text{grad}(|r|))_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot x_i}{|r|} = \frac{x_i}{|r|}$

$\forall i$ -re:  $\frac{1}{|r|} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{r}{|r|}$

5.  $v(r) = f(|r|) \cdot r$        $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható

$\Rightarrow r \neq 0 \Rightarrow \text{rot}(v) = 0$

Bizonyítás:  $\mathbb{R}^3$

4.-ből :  $u(r) = f(|r|) \qquad v = r$

$$\text{rot}(v) = \underbrace{f(|r|)}_0 \cdot \underbrace{\text{rot}(r)}_0 - \underbrace{r \times \text{grad}(f(|r|))}_0$$

6.  $v(r)$  mint 5.-ben  $\Rightarrow r \neq 0$

$$\Rightarrow \text{div}(v) = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|$$

Bizonyítás:  $\text{div}(f(|r|) \cdot r) = f(|r|) \cdot \text{div}(r) + r \cdot \text{grad}(f(|r|)) =$   
 $= n \cdot f(|r|) + r \cdot f'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|} = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|$

**TÉTEL:**  $u, v$  kétszer folytonosan differenciálható skalár illetve vektorfüggvények

1.  $\text{rot}(\text{grad}(u)) = 0$

2.  $\text{div}(\text{rot}(v)) = 0$

3.  $\text{div}(\text{grad}(u)) = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \cdot x_i = \Delta u$  Laplace-operátor

**TÉTEL:** -  $G$  nyílt, összefüggő halmaz

-  $v: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonos

-  $u$  potenciálfüggvénye  $v$ -nek

Ekkor: 1.  $\int_L v dr = u(q) - u(p)$ , ha  $L$   $G$ -beli görbe  $p$  kezdő- és  $q$  végpontú

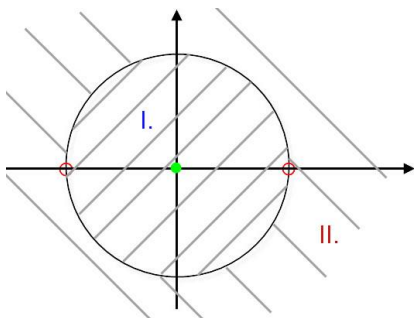
2.  $\int_L v dr = 0$ , ha  $L$  zárt  $G$ -beli görbe

3. ha  $v$  folytonosan differenciálható  $\Rightarrow \text{rot}(v) = \text{rot}(\text{grad}(u)) = 0$   $G$ -n

## 12. gyakorlat

**Példa**

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)} \qquad z_0 = 0$$



Parciális törtre bontunk (pl. letakarásos módszer) és az előzőekhez hasonlóan kiemeljük az egyik tagot a nevezőben:

$$\frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-z} + \frac{\frac{1}{2}}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \overbrace{(-z)^n}^{(-1)^n \cdot z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n\right)}_{c_n} \cdot z^n$$

Konvergencia tartomány:

$$|q_1| < 1 \Rightarrow |z| < 1$$

$$|q_2| < 1 \Rightarrow |-z| < 1 \qquad \text{Ez az I-es tartomány.}$$

Másik tag kiemelése esetén a **II-es tartományt** kapjuk.

**TÉTEL** (Laurent-tétel):  $0 \leq r \leq R$

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}: f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$f$  reguláris  $T$ -n. Ekkor  $f$  előáll egy  $z_0$  körüli egész kitevőjű hatványsor formájában,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = f(z)$ , ahol  $c_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

$\Gamma \subseteq T$ , egyszerű és egyszer hurkolja körbe a  $z_0$ -at.

### Izolált szingularitás és szakadások osztályozása

**Definíció:**  $z_0$ -ban az  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -nek izolált szingularitása van, ha  $f$  a  $z_0$ -ban szakad, de van olyan  $B_\delta(z_0)$  kipontozott környezete, ahol  $f$  reguláris.

**Példa**

$$\frac{1}{z} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$$

0-ban van izolált szingularitása

**Példa**

$$\frac{1}{(z-1) \cdot (z+1)}$$

-1-nek van olyan környezete, ahol mindenhol reguláris (maximum 2 sugarú környezet, de a lényeg, hogy van)

+1-nek is

**Ellenpélda**

$$z \rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

Hol szakad?

$z_0 = 0$ -ban illetve a sinus függvény zérushelyeinél

Komplex sinus zérushelyei:

$$\sin(z) = 0$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i} = 0$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$e^{iz} = e^{-iz}$$

$$i \cdot z = -i \cdot z + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$2 \cdot i \cdot z = k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$z = k \cdot \pi \quad \text{Ugyan ott, ahol a valós sinusnak.}$$

0-ban nem izolált szingularitása van az  $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ -nek, mert akármilyen kis környezetben van szakadása. Az összes többi szingularitása izolált.

### 1. Megszüntethető szakadás

$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  és véges  $\Leftrightarrow$  az  $f$   $z_0$  körüli Laurent-sorában nincs főrész  $\left(\frac{1}{z} - s$  tagok)

**Példa**

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad \text{Megszüntethető szakadás 0-ban}$$

$$f(z) = \frac{\overbrace{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots - 1 - z}^{e^z \text{ Taylor-sore}}}{z^2} = \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} \dots \xrightarrow{\lim} \frac{1}{2}$$



## 2. Lényeges szingularitás

$\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow f$   $z_0$  körüli Laurent-sorában végtelen hosszú a főrés

### Példa

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \dots$$

## 3. Pólus szingularitás

$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow$  az  $f$   $z_0$ -beli Laurent-sora véges sok (de nem nulla!) főrészbeli tagot tartalmaz

### Példa

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3! \cdot z} + \frac{1}{5!} \cdot z - \dots$$

főrészbeli tagok

3-ad fokú pólus, mert az utolsó  $\frac{1}{z}$  kitevője 3.

Másképp:

A számlálónak a  $z$  egyszeres gyöke: egyszer emelhető ki  $z$  úgy, hogy a következő tag konstans legyen:  $z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)$

$z^4$ -nek a 0 négyszeres gyöke.

Harmadfokú pólus = négyszeres multiplicitású gyök - egyszeres multiplicitású gyök = 3

### Rezidumszámítás

**Definíció:**  $z \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$  reziduma a  $z_0$  helyen  $Res^f(z_0) = c_{-1}$

### Példa

$$z_0 = 0$$

$$\dots c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 \dots$$

$$\int_{\Gamma} \dots c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 \dots dz = ?$$

Csak  $c_{-1} \cdot \frac{1}{z}$  tagnak az integrálja nem 0.  $\rightarrow$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} \dots dz = \oint_{\Gamma} c_{-1} \cdot \frac{1}{z} dz = Res^f(z_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot i = c_{-1} \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

## 13. előadás

**TÉTEL:**  $g: G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonos,  $\exists u: G \rightarrow \mathbb{R}$

$v = grad(u) \Rightarrow$  ha  $L: G$ -beli görbe  $p$  kezdőponttal és  $q$  végponttal, akkor

$$\int_L v dr = u(q) - u(p)$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy  $L$ -et  $r(t)$   $t \in [a, b]$  paraméterezi  $\Rightarrow$

$$\int_L v dr = \int_a^b grad(u) dr = \int_a^b grad(u(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = u(r(b)) - u(r(a)) = u(q) - u(p)$$

**TÉTEL:** az előző tétel feltételei mellett

1.  $v$  egy tetszőleges  $G$ -beli rögzített középpontú görbére vett görbementi integrálja, mint végpontjának függvénye megadja  $v$  egy potenciálfüggvényét

Bizonyítás: Legyen  $p \in G$  rögzített és  $\forall r \in G$ -re  $w(r) = \int_{L(r)} v dr = u(r) - u(p)$   
 $(L(r): p$  középpontú,  $r$  végpontú  $G$ -beli görbe)

$$\Rightarrow \text{grad}(w(r)) = \text{grad}(u(r)) - \underbrace{\text{grad}(u(p))}_{\substack{0, \text{mert } p \\ \text{rögzített}}} = \text{grad}(u(r)) = v$$

2.  $v$  potenciálfüggvényei csak konstansokban térnek el egymástól

Bizonyítás: Legyen  $p \in G$  rögzített,  $L(r)$  mint az előbb,  $w$  egy potenciálfüggvénye  $v$ -nek

$$\int_{L(r)} v dr = u(r) - u(p) = w(r) - w(p) \quad \Rightarrow \quad w(r) - u(r) = \underbrace{w(p) - u(p)}_{\text{konstans}}$$

Potenciálfüggvény létezéséhez nem elég a folytonosság!

Például:  $\text{cross}(r)$  folytonos, de  $\text{rot}(\text{cross}(r)) = 2 \neq 0$

Nem elég  $\text{rot}(r) = 0$

$$v(r) = \frac{\text{cross}(r)}{|r|^2} = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad r = 0\text{-ra } \text{rot}(v(r))$$

$$\text{rot}(v(r)) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{d}{dy} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2 \cdot x^2 + x^2 + y^2 - 2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = 0, \text{ de ha } L \text{ egy } 0 \text{ körüli } R \text{ sugarú kör, akkor}$$

$$\int_L v dr = \int_L v_e \cdot |dr| = \int_L \frac{1}{R} |dr| = \frac{1}{R} \cdot \int_L 1 |dr| = \frac{1}{R} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot \pi$$

### TÉTEL

$G \subseteq \mathbb{R}^2$  nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány

$v: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonos

Ekkor az alábbiak ekvivalens:

1.  $v$ -nek van  $G$ -n potenciálfüggvénye
2.  $\int_L v dr = u(q) - u(p)$ , ha  $L$   $G$ -beli  $p$  kezdő- és  $q$  végpontú görbe és  $u$  egy potenciálfüggvénye  $v$ -nek
3. zárt egyszerű  $G$ -beli görbéken az integrál 0
4.  $\text{rot}(v) = 0$   $G$ -n

**Példa** (potenciál keresése)

$$f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \text{ vektorfüggvény}$$

$$\Rightarrow 0 = \text{rot}(f) = Q_x \cdot P_y, \text{ azaz } Q_x = P_y$$

**Példa** (Coulomb-erő)

$$v(r) = |f(r)| \cdot r$$

$$r = 0\text{-ban: } \underbrace{\text{div}(v) = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|}_{\substack{11. \text{előadás vége felé} \\ 6. \text{pontban bizonyítva}}} = 0$$

Ez egy differenciálegyenlet. Más paramétereket használva:

$$n \cdot y + y' \cdot t = 0$$

$$y' = -n \cdot \frac{y}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -n \cdot \frac{y}{t}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -n \cdot \int \frac{1}{t} dt$$

$$\ln|y| = -n \cdot \ln|t| = \frac{1}{\ln|t|^n} + c$$

$$|y| = \frac{1}{|t|^n} + c \xrightarrow{\text{Bolzano}} y = \frac{c_1}{t^n} \Rightarrow v(r) = \frac{c_1 \cdot r}{|r|^n}$$

$n$ -dimenziós Coulomb-törvény

## 13. gyakorlat

**Példa**

$$I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^c} dz \quad c \in \mathbb{Z}$$

**I. eset:**  $c \leq 0$

Mivel  $c \leq 0$ , ezért  $z^c$  a számlálóba kerül:  $f(z) = e^z \cdot z^c$ , ekkor tehát a függvénynek nincs szakadása a  $z_0 = 0$  helyen  
→ reguláris → a Cauchy-féle integráltétel szerint ekkor az integrál 0

**II. eset:**  $c > 0$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^c} dz$$

Cauchy-féle integrálformula:  $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Most:  $f(z) = e^z, \quad z_0 = 0, \quad c = n + 1, \quad n = c - 1$

Tehát:  $\int \frac{e^z}{z^c} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{e^0}{(c-1)!} = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{(c-1)!}$

Riemann-tétel:  $f$  korlátos, egyetlen szingularitása a  $z_0, \Gamma$  egyszerű és zárt görbe, egyszer körbehurkolja  $z_0$ -t →  $\oint_{\Gamma} f = 0$

**Példa**

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz \quad R > 0$$

Ennek a  $z_0 = 1$  helyen van szakadása, ezért a megoldás függ attól, hogy mekkora az  $R$ .

**I. eset**

$$0 < R < 1$$

A körben nincs benne a szakadás → reguláris → a Cauchy-féle integráltétel szerint ekkor az integrál 0

**II. eset**

$$R = 1 \quad (\text{vizsgán nem kell})$$

**III. eset**

$$R > 1 \quad \text{A görbe körbehurkolja a szingularitást.}$$

Két módszerrel is megoldható. 1. módszer: Cauchy-féle integrálformula

2. módszer: Residum-tétel

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz = \text{Res}^f(z_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Ha  $z_0$  az  $f$ -nek  $n$ -edfokú pólusa, akkor a rezidum a  $z_0$ -ban:

$$\text{Res}^f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n \cdot f(z))^{n-1}$$

Most a  $z_0 = 1$  elsőfokú pólus →  $n = 1$

$$\text{Tehát a képlet szerint: } \text{Res}^f(1) = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \left( (z - 1)^1 \cdot \frac{e^z}{z-1} \right) = 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} e^z = e$$

$$\text{Visszaírva a legelső képletbe: } \int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz = e \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

**Példa**

Hányadfokú pólusa van a  $\frac{\sin(z^2)}{z^8}$  függvénynek?

$$\frac{\sin(z^2)}{z^8} = \frac{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \dots}{z^8} = \frac{z^2 \cdot \left( 1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \frac{z^{12}}{7!} + \dots \right)}{z^8} = \frac{1}{z^6} - \frac{1}{3! \cdot z^2} + \frac{1}{5!} \cdot z^2 \dots$$

főrész

6-odfokú pólus, mert a főrészben az utolsó  $\frac{1}{z}$  kitevője 6.

**Példa**

$$f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2} \quad z \neq 0$$

a,  $f(0) = ?$

b,  $f^{(4)}(0) = ?$

c,  $f^{(100)}(0) = ?$

d,  $f^{(n)}(0) = ?$

a, Nevezetes határértékek, amiket jó tudni:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{Most ez kell, pontosabban a -1-szerese} \rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$$

Vagy ha nem ismerjük ezeket:

$$f(z) = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \dots \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

b, 4 deriválás (1. módszer) vagy Cauchy-féle integrálformula + rezidum tétel használata (2. módszer) vagy

3. módszer:

0 körüli Taylor-sor:

$$f(0) + f'(0) \cdot z + \frac{f''(0)}{2} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot z^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot z^4 + \dots$$

Az előbb felírt Taylor-sor:

$$f(z) = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \dots$$

A  $z^4$ -es tagok együtthatóit egyenlővé téve:

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-1}{6!} \quad \rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{6!}$$

b,  $z^{100}$ -os tagok együtthatói rövid gondolkozás után:

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = -\frac{1}{102!} \quad (\text{akkor negatív, ha 4-gyel osztható a } z \text{ kitevője})$$

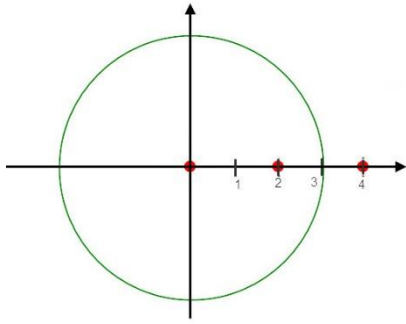
$$f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{102!}$$

c,  $n$  paraméter szerint szétbontva:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ -\frac{n!}{(n+2)!}, & \text{ha } n \text{ osztható } 4 - \text{gyel} \\ \frac{n!}{(n+2)!}, & \text{ha } n = 2(\text{mod}4) \end{cases}$$

**Példa**

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z \cdot (z^2 - 6z + 8)} dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z \cdot (z-2) \cdot (z-4)} dz = ?$$



3 kis kör van 0, 2 és 4 középponttal. A 4 középpontú kör nincs a nagy körön belül, ezért arra az integrál 0.

Az integrál a másik 2 kis körre vett integrál összege. A kis körök sugarát mi választhatjuk, csak ne lógjon a nagy körön kívülre és ne érje el a másik kiskört. Például  $\frac{1}{4}$  és  $\frac{1}{5}$  jó választás.

$$\int_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{1}{(z-2)(z-4)} dz + \int_{|z-2|=\frac{1}{5}} \frac{1}{(z-4)z} dz$$

0 középpontú kör, tehát a z=0 marad a nevezőben      2 középpontú kör, tehát a z=2 marad a nevezőben

Cauchy-féle integrálformula

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)} \quad z_0 = 0 \quad n = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)z} \quad z_0 = 2 \quad n = 0$$

Tehát:  $\int_{|z|=3} \frac{1}{z(z^2-6z+8)} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{1}{(-2) \cdot (-4)} + 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{1}{2 \cdot (-2)} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi \cdot i}{4}$

**Példa**

$$f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}} \quad \text{Milyen szingularitása van?}$$

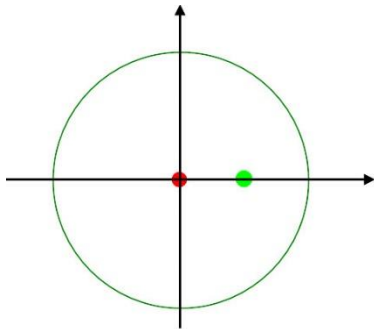
$$f(z) = z^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2 \cdot z^2} + \frac{1}{3! \cdot z^3} + \dots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3! \cdot z} + \frac{1}{4! \cdot z^2} + \dots$$

végtelen főrészes

- Lehetnek:
- megszüntethető szakadás, ha nincs főrészes
  - lényeges szingularitás, ha végtelen hosszú a főrészes
  - pólus szingularitás, ha véges hosszú a főrészes

**Példa**

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4 \cdot (z-1)} \cdot dz$$



Kis körök középpontjai: 0 és 1, nagy kör sugara 2, középpontja 0.

$$\int_{|z|=\frac{1}{11}} \frac{e^{z^4}-1}{z^4} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{23}} \frac{e^{z^4}-1}{z-1} dz$$

Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmazni, de a piros kör esetében  $z^4$  miatt 4-szer kéne deriválni. Ehelyett trükközve: átírható  $\frac{e^{z^4}-1}{z^4} \cdot \frac{1}{z-1}$  alakba.

Nevezetes határérték:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ , vagyis  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^4}-1}{z^4} = 1 \rightarrow$  2 reguláris függvény szorzata  $\rightarrow$   
Integrálja 0

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4 \cdot (z-1)} \cdot dz$$

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{23}} \frac{e^{z^4}-1}{z-1} dz \rightarrow f(z) = \frac{e^{z^4}-1}{z^4} \quad z_0 = 1 \quad n = 1$$

$$\rightarrow \int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4(z-1)} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{e^{1^4}-1}{1^4} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot (e-1)$$

**Példa**

$$\left(\frac{z^3}{z-3}\right)^{(100)}(0) = ?$$

$$f(z) = \frac{z^3}{z-3} = z^3 \cdot \frac{1}{z-3} = z^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)} = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \left(z^3 + \frac{z^4}{3} + \frac{z^5}{3^2} + \frac{z^6}{3^3} + \dots\right)$$

$$z^{100}\text{-on együtthatója: } -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{97}} = -\frac{1}{3^{98}}$$

$$z^{100}\text{-on együtthatója a Taylor-sorban: } \frac{f^{(100)}(0)}{100!}$$

$$\text{Tehát } f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{3^{98}}$$

## Vektoranalízis

$$w(r) = r \cdot |r|^n$$

$$\operatorname{div}(r \cdot |r|^n) = \operatorname{div}(r) \cdot |r|^n + r \cdot \operatorname{grad}(|r|^n)$$

$$\text{Ha } r \text{ egy } n \text{ dimenziós vektor: } \operatorname{div}(r) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dots \\ \vdots & \ddots \\ \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = n \cdot 1 = \operatorname{dim}$$

$$\operatorname{grad}(|r|^n) = \underbrace{n \cdot |r|^{n-1}}_{\text{nagyság}} \cdot \underbrace{\frac{r}{|r|}}_{\text{irány}}$$

$$\text{Visszahelyettesítve: } \operatorname{div}(r \cdot |r|^n) = \operatorname{dim} \cdot |r|^n + r \cdot n \cdot |r|^{n-1} \cdot \frac{r}{|r|} =$$

$$= \operatorname{dim} \cdot |r|^n + n \cdot |r|^{n-1} \cdot \frac{|r|^2}{|r|} = \operatorname{dim} \cdot |r|^n + n \cdot |r|^n = (\operatorname{dim} + n) \cdot |r|^n$$