XXIX. FEJEZET

EGYENÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖK

Abban a pillanatban, amint az emberek feladták a mágiába vetett évszázados hitüket, a tudomány nekik ajándékozta helyette az elektromos áram áldásait.

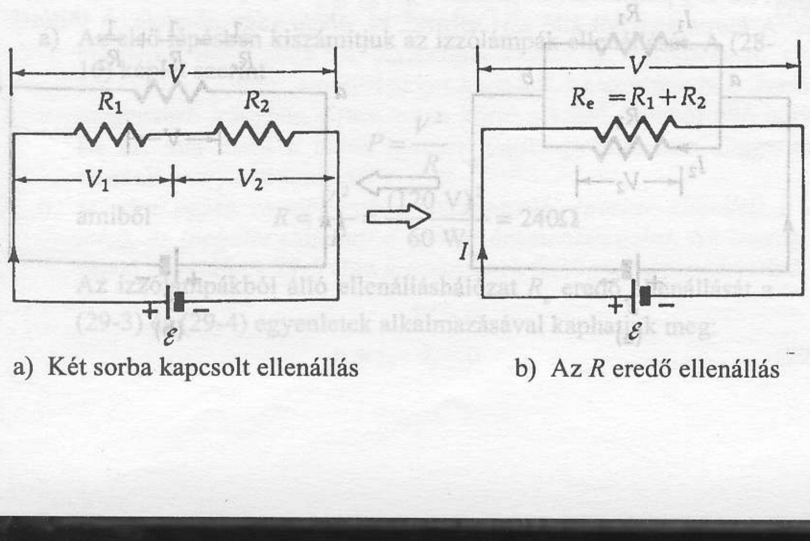
JEAN GIRARDOUX
Az elvarázsolt (1933)

29.1 Bevezetés

Az egyenáramú (DC) áramkörre az jellemző, hogy a töltések csak egy irányban áramlanak. Ebben a fejezetben azokat a módszereket ismertetjük, amelyekkel a feszültségforrásokból, ellenállásokból és kondenzátorokból álló, egyenáramú áramkörök tulajdonságait elemezhetjük. Az energia- és töltésmegmaradásból kiindulva megkapjuk a *Kirchhoff törvényeket*, melyek nagyban leegyszerűsítik az áramkörök tulajdonságainak elemzését. Ezután bemutatjuk azokat az áramköröket, amelyekből alapvető elektromos készülékek épülnek fel és amelyeket széleskörűen használnak a laboratóriumokban áramerősség, feszültség, és elektromotoros erő mérésére. Végezetül egy speciális RC áramkört elemzünk, melynél az áram az idő függvényében változik.

29.2 Sorosan és párhuzamosan kapcsolt ellenállások

Bármely áramkör elemzésének első lépése annak megállapítása, hogy vajon az áramkört egyszerűsíthetjük-e az áramkör elemeinek átcsoportosításával. Ellenállásláncokat könnyen leegyszerűsíthetünk oly módon, hogy alkalmasan



a) Két sorba kapcsolt ellenállás   b) Az R eredő ellenállás

29-1 ábra
Két sorba kapcsolt ellenállás eredője a két ellenállás összege.

megválasztott ellenállással helyettesítjük a láncot. Két vagy több *sorba* kapcsolt ellenállás (29-1a ábra) olyan R_e ellenállással egyenértékű, amelyen az áramkörön lévő V feszültség (ami az egyes ellenállásokon eső feszültségek összege)

$$V = V_1 + V_2$$

ugyanakkora I áramot hoz létre, mint ami az eredeti körben folyik. Az Ohm törvény szerint:

$$IR_e = IR_1 + IR_2,$$

amiből

$$R_e = R_1 + R_2.$$

Ha kettőnél több ellenállást kapcsolunk sorba, akkor hasonló levezetés eredményeként azt kapjuk, hogy az eredő ellenállás:

SORBA KAPCSOLT ELLENÁLLÁSOK

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \tag{29-1}$$

Két vagy több, párhuzamosan kapcsolt ellenállás (29-2a ábra) is helyettesíthető egyetlen R_e ellenállással. Ezt arra a felismerésre alapozva határozhatjuk meg, hogy az áram az a pontnál kettéoszlik: I_1 áram az R_1 ellenálláson, míg I_2 áram az R_2 ellenálláson halad át. A **töltésmegmaradás elvéből** következően egységnyi idő alatt az a és b pontoknál ugyanannyi töltés halad át, hiszen az a pontnál töltés nem halmozódhat fel. Így:

$$I = I_1 + I_2 \tag{29-2}$$

Az Ohm törvényből következik, hogy

$$\frac{V}{R_e} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \tag{29-3}$$

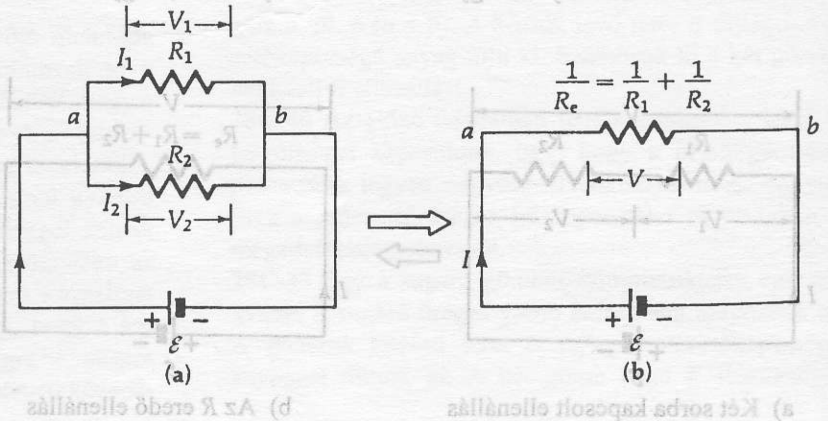
Minthogy mindkét ellenállást ugyanazon a és b pontok közé kapcsoltuk, a végpontjaik közötti feszültségesés azonos: $V = V_1 = V_2$. Ennélfogva a (29-3) összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\frac{V}{R_e} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}.$$

V-vel elosztva:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ha kettőnél több ellenállást kapcsolunk párhuzamosan, hasonló levezetés eredményeként azt kapjuk, hogy



29-2 ábra
Két párhuzamosan kapcsolt R_e ellenállás eredője kisebb, mint bármelyik a kettő közül.

PÁRHUZAMOSAN
KAPCSOLT
ELLENÁLLÁSOK

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \qquad (29\text{-}4)$$

Ismerjük fel, hogy párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője mindig kisebb, mint az ellenállások bármelyike. Megjegyzendő továbbá, hogy párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredő ellenállását úgy kell kiszámítani, ahogyan a sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitását, és megfordítva.

29-1 PÉLDA

Számítsuk ki a 29-3a ábrán látható ellenálláshálózat eredő ellenállását.

MEGOLDÁS

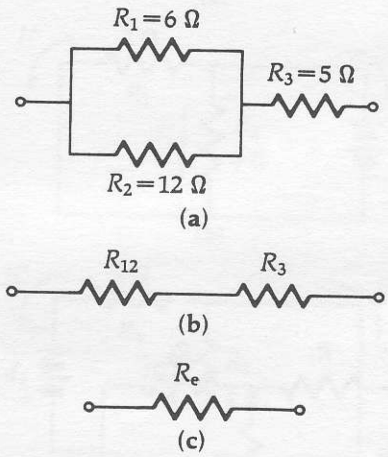
Rendszerint a legcélravezetőbb eljárás az, hogy kiszámítjuk a párhuzamos tagokból álló ellenálláscsoportok és a soros tagokból álló ellenálláscsoportok eredőjét. Ezeket tovább egyszerűsítve végül egyetlen eredő ellenállás marad. Ebben a példában, az R_1 és R_2 ellenállások eredőjét, R_{12} értékét számítjuk ki. Minthogy ezek párhuzamosan vannak kapcsolva, a (29-4) képletet használjuk fel:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{12\Omega},$$

ahonnan $R_{12} = 4\Omega$.

A következő lépésben R_{12} és R_3 eredőjét számítjuk ki. Minthogy ezek sorba vannak kapcsolva:

$$R_e = R_{12} + R_3 = 4\Omega + 5\Omega = 9\Omega$$



29-3 ábra
A 29-1 példához

29-2 PÉLDA

Három 60 W-os, 120 V-os izzólámpát csatlakoztatunk 120 V-os feszültségforráshoz, a 29-4 ábrán látható módon. Számítsuk ki a) a három izzólámpa fogyasztását (a rajtuk disszipált teljesítményt) és b) az egyes izzólámpákon eső feszültséget. Tételezzük fel, hogy a lámpák ellenállása ohmikus (noha a valóságban az izzólámpák ellenállása nagymértékben függ az áramerősségtől).

MEGOLDÁS

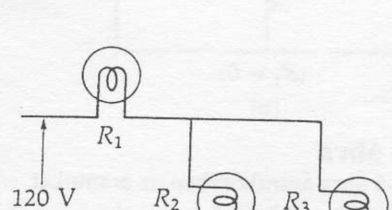
a) Az első lépésben kiszámítjuk az izzólámpák ellenállását. A (28-16) képlet szerint

$$P = \frac{V^2}{R}$$

amiből

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\text{ V})^2}{60\text{ W}} = 240\Omega$$

Az izzólámpákból álló ellenálláshálózat R_e eredő ellenállását a (29-3) és (29-4) egyenletek alkalmazásával kaphatjuk meg:



29-4 ábra
A 29-2 példához

$$R_e = R_1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = 240\ \Omega + 120\ \Omega = 360\ \Omega$$

A 360 W ellenálláson disszipált teljesítmény:

$$P = \frac{V^2}{R_e} = \frac{(120\ \text{V})^2}{360\ \Omega} = 40\ \text{W}$$

b.) A hálózaton áthaladó áram I áramerőssége (28-16) összefüggés szerint:

$$P = I^2 R_e$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $I = \sqrt{\dfrac{P}{R_e}} = \sqrt{\dfrac{40\ \text{W}}{360\ \Omega}} = \dfrac{1}{3}\ \text{A}$

Az R_1 ellenálláson eső feszültség

$$V_1 = IR_1 = (\tfrac{1}{3}\ \text{A})(240\ \Omega) = 80{,}0\ \text{V}$$

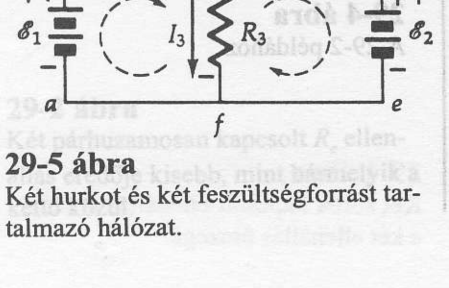
A párhuzamosan kapcsolt R_2 és R_3 ellenállásokon eső V_{23} feszültség:

$$V_{23} = IR_{23} = \left(\frac{1}{3}\ \text{A}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{240\ \Omega} + \frac{1}{240\ \Omega}}\right) = 40{,}0\ \text{V}$$

29.3 Sokhurkú áramkörök és a Kirchhoff törvények

Több elemet tartalmazó hálózatok tulajdonságainak tanulmányozására mindenekelőtt egyszerűsítsük le a hálózatot oly módon, hogy a párhuzamosan, illetve sorba kapcsolt ellenállásokat helyettesítsük az eredőjükkel. Gyakran előfordul azonban, hogy a hálózatot ilyen módon nem lehet egyetlen egyszerű hurokká alakítani, különösen akkor nem, ha a hálózat több feszültségforrást is tartalmaz. Ilyenkor a hálózat több hurokból áll (29-5 ábra). A *Kirchhoff törvények* segítségével nagy mértékben leegyszerűsíthetjük azt az eljárást, amellyel az áramkör egyes pontjaiban a feszültség- és áramerősség értékét meghatározhatjuk. A Kirchhoff törvények nem alapvető természettörvények, hanem az energia- és töltésmegmaradás tételeinek olyan következményei, amelyek a hálózatanalízist leegyszerűsítik.

Definiáljunk először néhány fogalmat. A *csomópont* a hálózat olyan pontja, ahol három vagy több áramvezető csatlakozik egymáshoz. A 29-5 ábrán a c és f pontok csomópontok. Az *ág* két csomópont közötti összeköttetés. A *hurok* ágakból álló zárt sorozat, pl. *abcfa* vagy *abcdefa*. A töltések a



29-5 ábra
Két hurkot és két feszültségforrást tartalmazó hálózat.

hurok mentén növekvő és csökkenő potenciálú szakaszokon haladnak át. Az energiamegmaradás törvénye szerint egy hurok mentén a potenciálváltozások algebrai összegének zérusnak kell lennie, azaz a huroktörvény szerint $\Sigma V = 0$. A töltésmegmaradás törvénye következtében a csomópontokon töltés nem halmozódhat fel, így a csomópontokhoz tartó összes áram algebrai összegének zérusnak kell lennie, azaz a csomóponti törvény szerint $\Sigma I = 0$.

A KIRCHHOFF TÖRVÉNYEK:

1. A huroktörvény: $\Sigma V = 0$. Bármely zárt hurok mentén a feszültségek összege zérus.

2. A csomóponti törvény: $\Sigma I = 0$. Bármely csomópontba befolyó összes áram előjeles összege zérus. (Megállapodás szerint a befolyó áramok pozitív, a kifolyó áramok negatív előjelűek.)

Ezeket a szabályokat legkönnyebben az alábbi, meglehetősen formális eljárással alkalmazhatjuk a hálózatanalízisben. Tekintsük a 29-5 ábrán látható hálózatot, melyet az alábbiak szerint elemezhetünk:

1. *Jelöljük meg a feszültségforrások pólusait + és – előjelekkel.* Figyeljük meg, hogy az adott áramkörben a feszültségforrások úgy vannak kapcsolva, hogy az egyik feszültségforrás a másikon keresztül áramot tud áthajtani.
2. *Nyíllal jelöljük meg az áramirányt minden egyes ágban.* A helyes áramirányt gyakran megsejthetjük, de nem követünk el hibát, ha nem találjuk el előre, mert a megoldásban adódó negatív érték figyelmeztet arra, hogy a valódi áramirány a megjelölttel ellentétes.
3. *A feltételezett áramirányoknak megfelelően jelöljük meg minden egyes ellenállás végeit + és – előjellel úgy, hogy a nagyobb potenciálú végpont kapja a + jelölést.* Megjegyzendő, hogy az ellenálláson keresztül az áram a nagyobb potenciálú pont felől a kisebb potenciálú hely felé folyik, így az áram az ellenállás + jelű végén lép be.
4. *Jelöljünk ki minden egyes hurok mentén egy irányt, amelynek megfelelően a hurkot körüljárjuk.* Példánkban minden egyes hurkot az óramutató járása szerinti irányban járjuk körül, amint azt a szaggatott köralakú nyilak mutatják. (Az irányválasztás tetszés szerinti: választhatnánk ellentétes irányt is az egyik vagy akár mindkét hurokra. Tulajdonképpen van egy harmadik hurok is, amelyik a „külső" ágakból áll. Mint később látni fogjuk, a harmadik hurkot nem kell figyelembe venni, mert nem ad többlet információt, azaz redundáns. Minden ágat legalább egy hurok körüljárása során érinteni kell.)
5. *Tetszés szerinti pontból kiindulva járjunk körül minden egyes kiválasztott hurkot és jegyezzük fel a potenciálnövekedéseket (+ előjellel) és a csökkenéseket (– előjellel); az összegük zérus.* Ha az adott példában a bal oldali hurok *a* pontjából illetve a jobb oldali hurok *f* pontjából indulunk, a következő egyenletekhez jutunk:

$$\Sigma V = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0 \qquad (29\text{-}5)$$

$$I_3R_3 + I_2R_2 - \mathcal{E}_2 = 0 \qquad (29\text{-}6)$$

Figyeljük meg, hogy ha összeadjuk ezeket az egyenleteket, olyan egyenlethez jutunk, amelyet akkor kapnánk, ha az óramutató járásával megegyező irányban jártuk volna körül a külső ágakból álló hurkot. Ez az, ami miatt a külső hurokra felírt egyenlet nem független a többitől, vagyis redundáns.

6. *Minden egyes csomópontban összegezzük, (pozitív előjellel) a befolyó, és (negatív előjellel) a kifolyó áramerősségeket.* Az összeg zérussal egyenlő. A 29-5 ábra áramkörének felső csomópontján tehát

$$\Sigma I = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (29\text{-}7)$$

Az alsó csomópontra felírt egyenlet ugyanilyen alakú, ám az előjelek ellentétesek; vagyis a két csomópont *nem független* egymástól.

A viszonyokat tehát a *három* ismeretlent (I_1, I_2 és I_3) tartalmazó három egyenlet (29-5) (29-6) (29-7) írja le. Az ismeretlenek kifejezésére célszerű az egyenleteket olyan formában megadni, ahol az azonos ismeretlen mennyiségeket tartalmazó tagok (esetleg zérus együtthatóval) azonos oszlopba kerülnek:

$$-R_1I_1 + \quad 0 - R_3I_3 = -\mathcal{E}_1 \tag{29-8}$$

$$0 + R_2I_2 + R_3I_3 = \mathcal{E}_2 \tag{29-9}$$

$$I_1 + \quad I_2 - \quad I_3 = \quad 0 \tag{29-10}$$

Az egyenletrendszer megoldására sokféle módszer ismeretes[1]. A megoldás a következő:

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \tag{29-11}$$

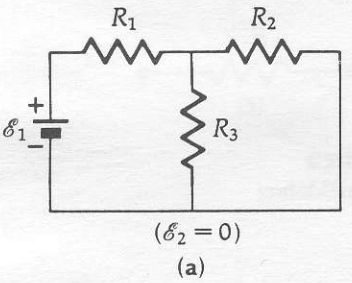
$$I_2 = \frac{(R_1 + R_3)\mathcal{E}_2 - R_3\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \tag{29-12}$$

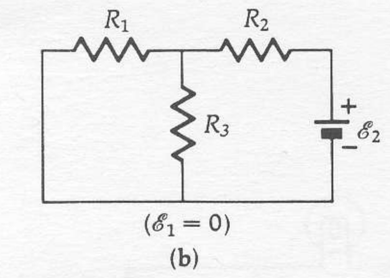
$$I_3 = \frac{R_1\mathcal{E}_2 + R_2\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \tag{29-13}$$

Ha valamelyik I áram éppen ellenkező irányú, mint ahogy azt feltételeztük, akkor a megfelelő egyenletekbe a konkrét R és $\mathcal{E}$ értékeket behelyettesítve, negatív értéket kapunk eredményül.

29.4 A szuperpozíció elve

Feltéve, hogy az áramköri elemek *lineárisak*, azaz az ellenállások nagysága és a feszültségforrások elektromotoros ereje független a rajtuk átfolyó áram erősségétől, a 29-5 ábrán látható áramkörben folyó áramokat a szuperpozíció elvének felhasználásával is kiszámíthatjuk. Ennek alapja az, hogy bármelyik feszültségforrás hatása független a többiétől, tehát úgy tehetünk, mintha a többi feszültségforrás jelen sem volna. Az eljárás a következő: válasszuk ki valamelyik feszültségforrást, a többit pedig helyettesítsük rövidzárral (vagy ha a feszültségforrásnak nem zérus a belső ellenállása, akkor ellenállással) és számítsuk ki az áramerősségeket. Ismételjük meg ezt minden egyes feszültségforrással. Az eredeti, több feszültségforrást tartalmazó áramkörben folyó áramokat a részáramok szuperpozíciójaként, összegeként kaphatjuk meg. A 29-5 ábra áramkörének esetén elvégzendő eljárást a 29-6 ábra mutatja be: először, az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrást rövidzárral helyettesítve, a 29-6a ábra áramkörében folyó (rész)áramokat úgy kaphatjuk meg, hogy a sorba, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőit kiszámítva a teljes áramot „szétosztjuk". Hasonlóan, az $\mathcal{E}_1$ feszültségforrást helyettesítve rövidzárral, a 29-6b ábra áramkörében folyó (rész)áramok áramerőssége számítható ki. Az eredeti áramkörben folyó áramok áramerőssége pedig az egyszerűsített hálózatban folyó részáramok áramerősségének az összege. Ez az eljárás gyakorta sokkal egyszerűbb, mint az egyenletrendszer megoldása.





29-6 ábra
A 29-5 ábra áramkörében az áramokat az *a* és *b* áramkörök áramainak szuperpozíciójával kaphatjuk meg.

[1] Az egyenletrendszer megoldása időigényes feladat lehet. A lineáris egyenletrendszerek megoldásának valószínűleg a legkényelmesebb módszere a Cramer-szabály alkalmazása. (Ez a megállapítás csak a két- és háromismeretlenes egyenletrendszerekre érvényes. Fordító megjegyzése).

29-3 PÉLDA

Számítsuk ki a 29-7a ábrán látható áramkör egyes ágainak áramerősségét.

MEGOLDÁS

1. módszer: A Kirchhoff törvények alkalmazása

Válasszuk meg az egyes ágakban folyó áramok irányát a 29-7a ábrán feltüntetett módon; az egyes ellenállásokon eső feszültségeket jelöljük meg + ill. – jellel, annak megfelelően, hogy az áram az ellenállás pozitív jelű végén lép be. Az (a) jelű csomópontnál belépve haladjunk végig a hurkokon, és az első Kirchhoff törvénynek megfelelően a potenciáleséseket adjuk össze; ez az összeg zérus. Az egyszerűség kedvéért a feszültségegységeket nem jelölve, azt kapjuk, hogy

$$\Sigma V = 0$$

Bal hurok (óramutató járásával azonos irányban) $10 - 2I_1 - 4I_3 = 0$

Jobb hurok (óramutató járásával ellenkező irányban) $4 - 4I_3 = 0$

A következő lépésben a második Kirchhoff törvényt alkalmazva, a felső csomópontba belépő áramok összegét számítjuk ki, melynek zérusnak kell lennie. A belépő áramok áramerőssége pozitív, a kilépőké negatív, tehát

$$\Sigma I = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

A fenti egyenleteket átrendezve

$$-2I_1 + 0 - 4I_3 = -10$$

$$0 + 0 + 4I_3 = -4$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Behelyettesítésekkel ezt az egyenletrendszert egyszerű megoldani: I_3-at a második egyenletből kifejezve és a másik kettőbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

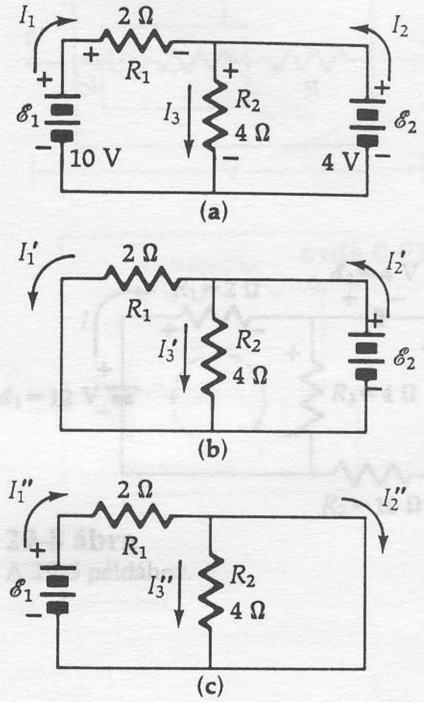
$\boxed{I_1 = 3{,}00\ \mathrm{A}}$ $\boxed{I_2 = -2{,}00\ \mathrm{A}}$ $\boxed{I_3 = 1{,}00\ \mathrm{A}}$

I_2 negatív előjele azt jelzi, hogy ebben az ágban az áramirány a feltételezettel éppen ellentétes.

2. módszer: a szuperpozíció elvének alkalmazása

E módszer szerint, minden egyes lépésben az egyik feszültségforrást rövidzárral (zérus ellenállású vezetővel) helyettesítjük, és a másik feszültségforrás által létrehozott áramerősségeket számítjuk ki. Az adott esetben két egyszerű, a 29-7b és 29-7c ábrákon látható áramkörben folyó áramerősséget kell kiszámítani. Mivel ez utóbbi áramkörökben folyó áramok részáramok, az I' és I'' jelöléseket használjuk; vagyis a bal oldali ágban I_1' lenne az áramerősség, ha csak az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrás lenne jelen, illetve ugyanott, hasonlóképpen, az áramerősség I_1'' lenne pusztán az $\mathcal{E}_1$ feszültségforrás jelenlétében. A tényleges áramirány az R_1 ellenálláson attól függ, hogy I_1' és I_1'' közül melyik a nagyobb.

A *(b)* áramkör nem más, mint az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrással párhuzamosan kapcsolt két ellenállás. Az Ohm törvény szerint ($I = V/R$) ezen ellenállásokon átfolyó áramerősség



$$I_1' = \frac{4\ \text{V}}{2\ \Omega} = 2\ \text{A} \quad \text{és} \quad I_3' = \frac{4\ \text{V}}{4\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

Kirchhoff csomóponti törvénye szerint

$$\Sigma I = 0$$

vagy
$$I_2' = I_1' + I_3' = 2\ \text{A} + 1\ \text{A} = 3\ \text{A}$$

A *c* áramkörben a jobb oldali hurokban lévő rövidzár miatt a teljes áram itt folyik, az R_2 ellenálláson semmi (úgy szoktuk ezt mondani, hogy R_2-t „kisöntöltük"). Így

$$I_3'' = 0 \quad \text{és} \quad I_1'' = I_2'' = \frac{10\ \text{V}}{2\ \Omega} = 5\ \text{A}$$

Az eredeti áramkörben folyó áramerősségét úgy kapjuk meg, hogy a két egyszerűsített áramkörben kiszámított áramerősségeket összeadjuk. Az R_1 ellenálláson $I_1' = 2$ A bal felé, míg $I_1'' = 5$ A jobb felé folyik. Ebben a hurokban tehát az áramerősség

$$I_1'' - I_1' = 5\ \text{A} - 2\ \text{A} = 3{,}0\ \text{A} \quad \text{(jobb felé)}$$

Az R_2 ellenálláson keresztül folyó I_3'' és I_3' áramerősségek azonos irányúak, tehát

$$I_3' + I_3'' = 1\ \text{A} + 0 = 1{,}0\ \text{A} \quad \text{(lefelé)}$$

A jobb oldali hurokban I_2' és I_2'' egymással ellenkező irányúak, így

$$I_2'' - I_2' = 5\ \text{A} - 3\ \text{A} = 2{,}0\ \text{A} \quad \text{(lefelé)}$$

29-4 PÉLDA

Mutassuk meg, hogy az előző példában a feszültségforrások és az áramkör többi tagjai közötti energiacsere megfelel az energiamegmaradás törvényének.

MEGOLDÁS

Az $\mathcal{E}_1$ feszültségforráson az I_1 áram a növekvő potenciálok irányában halad át, vagyis a feszültségforrás az áramkör többi tagjának P_1 teljesítményt ad le:

$$P_1 = \mathcal{E}_1 I_1 = (10\ \text{V})(3{,}0\ \text{A}) = \underline{\underline{30{,}0\ \text{W}}}$$

Az I_1 és I_3 áramok az R_1 és R_3 ellenállásokon haladnak át. Az ellenállásokon folyamatosan, időegységenként I^2R mennyiségű hő fejlődik. Az ellenálláson a P_2 Joule-hő:

$$P_2 = I_1^2 R_1 + I_3^2 R_2 = (3{,}0\ \text{A})^2 (2\ \Omega) + (1{,}0\ \text{A})^2 (4\ \Omega) = \underline{\underline{22{,}0\ \text{W}}}$$

Az I_2 áram az $\mathcal{E}_2$ feszültségforráson át, annak eredeti polaritásával *ellentétes* irányban halad át. (Ilyenek a polaritások például az akkumulátorok töltésekor.) Az áram szállította töltések a feszültségforrásban átadják potenciális energiájukat, amely a feszültségforrás (akkumulátor) kémiai energiájává alakul át. A P_3 teljesítmény, amely az akkumulátorban tárolódik:

$$P_3 = \mathcal{E}_2 I_2 = (4\ \text{V})(2{,}0\ \text{A}) = \underline{\underline{8{,}0\ \text{W}}}$$

Tehát az $\mathcal{E}_1$ feszültségforrás az áramkör többi tagjának energiát szolgáltat, az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrás pedig energiát nyel el és tárol, míg az ellenállásokon hő fejlődik. Ha az energiamegmaradás elve igaz, akkor:

$$\begin{bmatrix}\text{az } \mathcal{E}_1 \text{ feszültség-} \\ \text{forrás által leadott} \\ \text{teljesítmény}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{időegység alatt} \\ \text{képződött hő}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{az } \mathcal{E}_2 \text{ feszültség-} \\ \text{forrás által tárolt} \\ \text{teljesítmény}\end{bmatrix}$$

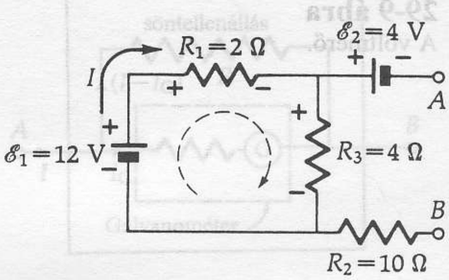
$$P_1 = P_2 + P_3$$

$$30{,}0\ \text{W} = 22{,}0\ \text{W} + 8{,}0\ \text{W}$$

Az energiamérleg tehát $\boxed{\text{megfelel az energiamegmaradás elvének.}}$

29-5 PÉLDA

Számítsuk ki a 29-8 ábrán látható áramkör A és B pontja közötti potenciálkülönbséget, és állapítsuk meg, melyik pont potenciálja nagyobb.



29-8 ábra
A 29-5 példához.

MEGOLDÁS

Az áramkör egyhurkú, ugyanis az A és B pont nincs vezetővel összekötve ($\mathcal{E}_2$-t és R_2-t tartalmazó ágakban áram nem folyik, következésképpen az R_2 ellenálláson feszültség nem esik). Áram csak a bal oldali hurokban folyik, az óramutató járásával megegyező irányban. Az A és B pont közötti potenciálkülönbség az $\mathcal{E}_2$, R_3 és R_2 áramköri elemek potenciálkülönbségeinek összege (a harmadik zérus). Először a hurokban folyó áramra alkalmazott Kirchhoff-törvényekkel meghatározzuk az R_3 ellenálláson eső feszültséget. Az óramutató járása szerinti áramirányt feltételezve, összegezzük a hurok mentén a potenciálváltozásokat:

$$\Sigma V = 0$$

$$E_1 - IR_1 - IR_3 = 0$$

I-t kifejezve, és a konkrét számértékeket behelyettesítve:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_3} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Az R_3 ellenálláson eső V_3 feszültség tehát

$$V_3 = IR_3 = (2\ \text{A})(4\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

és a 29-8 ábrán megjelölt polaritású.

A B pontból elindulva, és az A pont felé haladva, meghatározhatjuk V_{AB} értékét, az A pont potenciálját B-éhez képest:

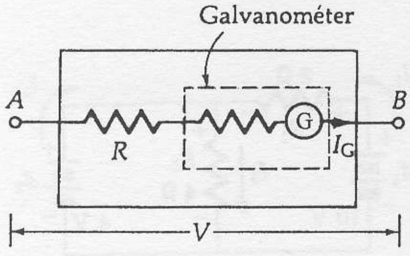
$$V_{AB} = VR_2 + IR_3 + \mathcal{E}_2 = 0 + 8\ \text{V} - 4\ \text{V} = 4{,}00\ \text{V}$$

Az A pont potenciálja tehát 4 V-tal nagyobb, mint a B ponté.

29.5 Alkalmazások

Az áramkörök egyes paramétereinek meghatározására számos különböző eszközt használunk[*]. Ezek közé tartozik a voltmérő, az ampermérő, a Wheatstone híd.

A voltmérő



29-9 ábra
A voltmérő.

Az áramkör elemein eső feszültség mérésére szolgál a voltmérő. A voltmérőben rendszerint érzékeny *galvanométer* méri a rajta áthaladó áram áramerősségét (29-9 ábra). A galvanométer érzékenysége azzal jellemezhető, hogy mekkora áramerősség idézi elő a mutató teljes kitérését. Ez rendszerint 10 μA és 1 mA közötti nagyságrendű. A galvanométer belső ellenállása R_G, ami a galvanométert mozgató mechanizmusnak az ellenállása. Szokás az áramköri rajzokon R_G-t külön ellenállásként feltüntetni, bár figyelembe kell venni, hogy ez az ellenállás magának a mérőműszernek az alkotó része. A mérendő feszültségek rendszerint sokkal nagyobbak annál, mint ami a galvanométer mutatójának teljes kitérését okozná, és ezért a galvanométerrel sorba kapcsolt R előtétellenállást alkalmaznak, hogy a galvanométeren eső feszültséget lecsökkentsék. Számítsuk ki, milyen R előtétellenállást kell ahhoz alkalmazni, hogy az AB bemenetekre adott V feszültség teljes kitérést okozzon. Ha I_G-vel jelöljük azt az áramerősséget, amely teljes kitérést okoz, és R_G a galvanométer belső ellenállása, akkor, Ohm törvényét alkalmazva

$$V = I_G(R + R_G) \qquad (29\text{-}14)$$

vagy

$$R = \frac{V}{I_G} - R_G. \qquad (29\text{-}15)$$

Ha a voltmérő méréshatárát meg kívánjuk változtatni, az előtétellenállást kell kicserélnünk. Olyan voltmérőben, amelyiknek több méréshatára van, az előtétellenállásokat kapcsolórendszerrel válthatjuk. (Lásd a 29B-30 és a 29B-31 számú feladatokat.)

29-6 PÉLDA

Egy galvanométer végkitéréséhez szükséges áramerősség 1 mA és ez egy 900 W-os előtétellenállással olyan voltmérővé alakítható, mely a végkitérését 1 V feszültség hatására éri el. Mekkora előtétellenállást használjunk, hogy 50 V feszültség esetén érje el a galvanométer a végkitérését?

MEGOLDÁS

A galvanométer belső ellenállását az 1 V végkitérésű voltmérő adataiból számítjuk ki. A (29-14) összefüggést felhasználva R_G értéke:

$$R_G = \frac{V}{I_G} - R = \frac{1\ \text{V}}{0{,}001\ \text{A}} - 900\ \Omega = 100\ \Omega$$

Az 50 V méréshatárú voltmérőhöz szükséges előtétellenállás nagyságának kiszámításához a (29-15) egyenletet alkalmazzuk:

$$R = \frac{V}{I_G} - R_G = \frac{50\ \text{V}}{0{,}001\ \text{A}} - 100\ \Omega = 49\ 900\ \Omega$$

---

[*] Az ebben a fejezetben leírt eszközök manapság már nem nagyon használatosak, szerepüket lényegesen jobb tulajdonságokkal bíró elektronikus eszközök vették át. A fejezetben leírtak fogalmi szempontból fontosak (a fordító megjegyzése).

Minthogy a voltmérő működtetéséhez I_G áram szükséges, ha egy áramkörhöz voltmérőt csatlakoztatunk, az szükségképpen megváltoztatja az áramkörben folyó áramokat, tehát a voltmérő nem pontosan azt a feszültséget mutatja, ami a voltmérő bekötése előtt a csatlakoztatási pontok között volt. Tehát arra van szükség, hogy a voltmérő minél nagyobb belső ellenállású legyen, és minél kevesebb áramot vonjon el a mérendő áramkörtől. A különböző voltmérőket a belső ellenállás és a teljes kitéréshez szükséges feszültség hányadosával jellemezhetjük: e mennyiség a voltmérő minőségére jellemző. A 29-4 feladatban leírt voltmérőre ez az érték 1000 Ω/V. (Ami azt jelenti, hogy ez nem különösebben jó voltmérő. Jó minőségű voltmérőnél ez az érték 20000 Ω/V.) Megmutatható, hogy a minőségre jellemző viszonyszám több méréshatárú voltmérőnél minden méréshatárban azonos, továbbá hogy ez a viszonyszám annak az áramerősségnek a reciproka, amely teljes kitérést okoz.

Az ampermérő

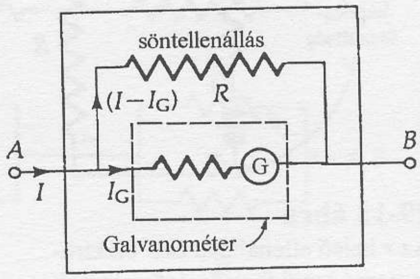
A galvanométer nagyon kis áramerősségeket mér. Az *ampermérővel* nagyobb áramerősségeket mérhetünk azáltal, hogy az áram egy része a galvanométerrel párhuzamos ellenálláson (*a söntön*) halad át (29-10 ábra). Az A pontnál belépő I áramnak csak kis része, I_G folyik át a galvanométeren. A söntellenálláson eső feszültség ugyanakkora, mint a galvanométeren, így

$$V_R = V_G$$

$$(I - I_G)R = I_G R_G$$

Az R_G söntellenállás értéke

$$R = \frac{I_G R_G}{I - I_G} \qquad \text{(29-16)}$$



29-10 ábra
Az ampermérő.

Olyan ampermérőben, amelyiknek több méréshatára van, a söntellenállásokat kapcsolórendszer váltja, hasonlóan ahhoz, ahogy a voltmérőben az előtétellenállásokat.

29-7 PÉLDA

Ampermérőt készítünk olyan galvanométer felhasználásával, amelynél 50 mV feszültség, és 1 mA áramerősség idéz elő végkitérést. Számítsuk ki, hogy mekkora söntellenállást alkalmazzunk, hogy 5 A áramerősség idézzen elő végkitérést.

MEGOLDÁS

A (29-16) képlet közvetlen alkalmazásához szükséges R_G ismerete. Ez azonban, a megadott mennyiségekből, az Ohm törvény alkalmazásával kiszámítható:

$$R_G = \frac{V_G}{I_G}$$

Ezt a (29-16) képletbe behelyettesítve:

$$R = \frac{I_G(V_G/I_G)}{I - I_G} = \frac{V_G}{I - I_G}$$

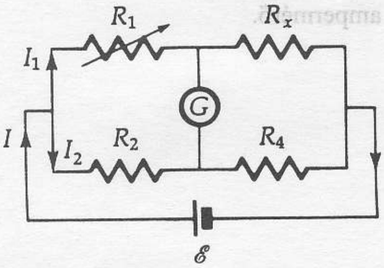
Figyeljük meg, hogy ez az egyenlet nem más, mint a söntellenállásra alkalmazott Ohm-törvény, ahol $I - I_G$ a söntön áthaladó áram áramerőssége. A megfelelő értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$R = \frac{50\times 10^{-3}\,\text{V}}{5\text{A} - 0{,}001\,\text{A}} = 0{,}010\ \Omega$$

A söntellenállás mindig nagyon kicsi, ha a mérendő áramok sokkal nagyobbak, mint a galvanométer „működéséhez” szükséges áramerősség. Hasonlóan a voltmérőhöz, olyan ampermérő előállításához, amely a vizsgált áramkört csak kis mértékben befolyásolja, alapműszerként nagy érzékenységű galvanométer szükséges.

Az áram- és feszültségmérők használatakor vigyázzunk a helyes bekötésre. Természetesen ezeket a műszereket nem szabad olyan áramerősség, illetve feszültség mérésére használni, amelyek a legnagyobb méréshatárnál is nagyobbak. Még egy veszélyt kell megemlíteni: minthogy az ampermérők igen kis bemenő ellenállásúak, ha az ampermérőt tévedésből feszültségforrás pólusaihoz kapcsoljuk, nem pedig sorba kapcsoljuk valamely áramköri elemmel, akkor a kialakuló nagyon nagy áram a műszert tönkreteheti. Másfelől, minthogy a voltmérők nagyon nagy bemenő ellenállásúak, annak, hogy voltmérőt tévedésből az áramkörben, ampermérőként sorba kapcsolunk, valószínűleg semmilyen káros következménye nincs. Jegyezzük meg: az *ampermérőt áramköri elemekkel sorba, a voltmérőt pedig párhuzamosan kell kapcsolni.*

A Wheatstone-híd



29-11 ábra
A Wheatstone-híd.

A Wheatstone-híd elsősorban ellenállásmérésre szolgál. Ezen kívül hídjellegű áramköröket kiterjedten alkalmaznak olyan elektronikus vezérlő áramkörökben is, amelyek a feszültség vagy áramerősség kicsiny egyenlőtlenséginek a detektálásán alapulnak.

A Wheatstone-híd áramköri rajza a 29-11 ábrán látható. Az ismeretlen R_x ellenállást úgy határozhatjuk meg, hogy az R_1 ellenállást addig változtatjuk, amíg a galvanométeren éppen nem folyik át mérhető áram. (A szimbólummal a *változtatható ellenállást* jelöljük.) Ilyenkor a híd *kiegyenlített*, aminek a feltételeit a következőképpen érthetjük meg: Ha a galvanométeren nem halad át áram, az R_1 és R_2 ellenálláson eső feszültségnek egyenlőnek kell lennie:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \tag{29-17}$$

Továbbá, az R_1 és R_x ellenálláson azonos áram halad át, hasonlóan, az R_2 és az R_4 ellenálláson is ugyanakkora az áramerősség. Így az R_x és az R_4 ellenállásokon azonos a feszültségesés:

$$I_1 R_x = I_2 R_4 \tag{29-18}$$

A (29-17) és a (29-18) egyenletekből R_x -et kifejezve

$$R_x = \frac{R_4}{R_2} R_1 \tag{29-19}$$

Gyakorlati méréseknél R_4 és R_2 aránya ismert, továbbá tudjuk a változtatható ellenállás értékét is, tehát az ismeretlen R_x kiszámítható. Megjegyzendő, hogy a feszültség értékét nem kell ismernünk. (Mindazonáltal mind a feszültség nagysága, mind a galvanométer érzékenysége fontos az elérhető pontosság szempontjából: amikor a híd majdnem ki van egyenlítve, e két paraméter szabja meg a galvanométer mutatójának a kitérését.)

A kompenzációs módszer

A feszültségkompenzációs módszer lehetővé teszi a feszültségkülönbségek oly módon való mérését, hogy közben (legalábbis elvben) a mérőkörben ne folyjon áram. (Ellentétben a voltmérővel, amelyen keresztül működés közben valamennyi áram folyik.)

A 29-12 ábra áramkörében a külső feszültségforrás hatására áram folyik át a hosszú, egyenletes keresztmetszetű ellenálláshuzalon. Az ábrán feltüntetett polaritásokkal a feszültség az ellenálláshuzal mentén egyenletesen csökken a huzal jobb oldali vége felé. Itt $\mathcal{E}_s$ pontosan ismert elektromotoros erejű szabványos elemet jelöl. Kapcsoljuk be az S kapcsolóval ezt az elemet az áramkörbe, és a kicsiny nyíllal jelölt csúszókontaktust mozgatva keressük meg azt az ℓ_s helyzetet, ahol az IR feszültségesés éppen $\mathcal{E}_s$. Ezt úgy állapíthatjuk meg, hogy a G galvanométeren éppen nem folyik át áram, vagyis a két feszültség éppen kiegyenlíti egymást. Minthogy a feszültségesés az ellenálláshuzal mentén egyenletes, ezzel az eljárással a V feszültséget a bal oldali végponttól vett ℓ távolság függvényében kalibráljuk és azt találjuk, hogy a feszültség arányos az ℓ távolsággal:

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\ell_s} = \frac{V}{\ell} \tag{29-20}$$

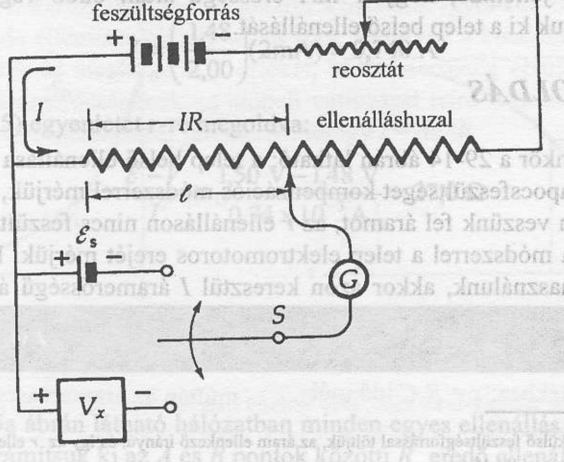
Miután ily módon kalibráltuk az ellenálláshuzalt, az S kapcsolót a megmérendő V_x feszültségforráshoz kapcsoljuk. A csúszókontaktust ismét úgy mozgatjuk, hogy a galvanométeren áram ne folyjék. A csúszókontaktus helyzete, ℓ_x lehetővé teszi, hogy V_x értékét meghatározhassuk.

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\ell_s} = \frac{V_x}{\ell_x} \tag{29-21}$$

ahonnan

$$V_x = \left(\frac{\mathcal{E}_s}{\ell_s}\right)\ell_x \tag{29-22}$$

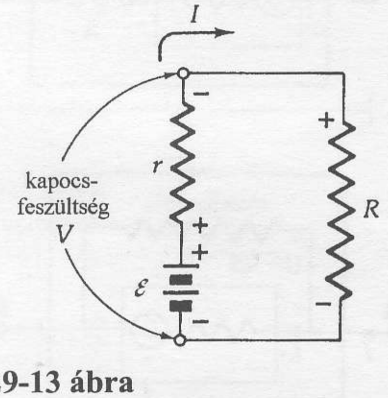
Jól reprodukálható és ismert elektromotoros erejű elemek könnyen előállíthatók, illetve hitelesített feszültségforrások a kereskedelemben is kaphatók. A mérés megkönnyíthető, ha az ellenálláshuzallal sorba kapcsolunk egy változtatható ellenállást, amivel az $\mathcal{E}_s / \ell_s$ arány a kívánt értékre beállítható.



29-12 ábra
Kompenzáló áramkör. A külső feszültségforrás, $\mathcal{E}_s$, a feszültség etalon, és a megmérendő V_x potenciálkülönbség azonos polaritásúak: mindegyiknek pozitív pólusa csatlakozik az ellenálláshuzal bal oldali végpontjához. A reosztát változtatható ellenállása szabja meg az I áramerősséget, amely az ellenálláshuzalon áthalad; ezzel lehet beállítani azt, hogy az ellenálláshuzalon a mérendő feszültséggel azonos nagyságrendű legyen a feszültség esés.

Ezzel ugyanis az ellenálláshuzalon átfolyó áramot, és így a huzal mentén az IR feszültségesés nagyságát szabályozhatjuk. Egyes esetekben annak megakadályozására, hogy a mérés kezdetén amikor a csúszókontaktus még messze van a kompenzált helyzettől, a galvanométeren nagy áram folyjon át, védőellenállást kötnek a körbe. A nagy árammal szembeni védelemre célszerű olyan védőellenállást alkalmazni, amit a kompenzált állapotot megközelítve rövidre lehet zárni, hogy a galvanométer érzékenységét megnöveljük.

A kompenzációs módszer nagy előnye, hogy *nem vesz fel áramot a mérendő áramkörből*, tehát olyankor célszerű használni, amikor úgy kell feszültséget mérnünk, hogy a mért áramkör viszonyait ne befolyásoljuk.



29-13 ábra
Az r belső ellenállású és $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű feszültségforrás pólusaihoz R ellenállást kapcsolunk. Az I áram az áramköri elemeken a feltüntetett polaritású potenciálkülönbségeket hozza létre. Az r belső ellenálláson keletkező feszültségesés miatt a V kapocsfeszültség az $\mathcal{E}$ elektromotoros erőnél kisebb.

Belső ellenállás és kapocsfeszültség

Minden telepnek van belső ellenállása. Jelöljük ezt r-rel. Az autóakkumulátorok belső ellenállása kicsi, akár 0,01 Ω nagyságrendű is lehet, míg elhasznált szárazelemek belső ellenállása elérheti az 50 Ω–t is. Noha a belső ellenállás a telepben (többé- kevésbé) egyenletesen oszlik el, az áramkörök elemzésénél az elem valamelyik pólusához kapcsolt külön ellenállásként szokás feltüntetni. Így a telepet zérus belső ellenállású, $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű feszültségforrással és a vele sorba kapcsolt r ellenállással reprezentáljuk (29-13 ábra). Természetesen az elem és az r ellenállás közötti pont feszültségét nem tudjuk megmérni, hiszen ez a pont csak az ábrán létezik. Mindazonáltal célszerű az áramkört így egyszerűsíteni.

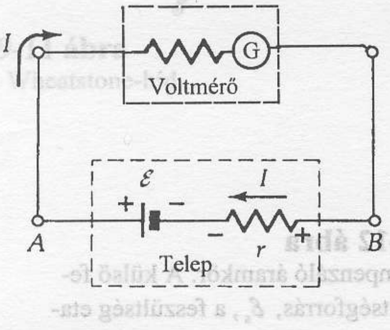
Ha a telepből áramot veszünk ki, akkor az r ellenálláson feszültség esik, amelynek a polaritása olyan, hogy a telep pólusai közötti feszültség, a kapocsfeszültség lecsökken[2]:

$$V = \mathcal{E} - Ir, \qquad (29\text{-}23)$$

ahol I az áramerősség. Egyhurkú áramkörök esetén

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad (29\text{-}24)$$

(E két, különben hasznos egyenletet nem érdemes megjegyezni, ugyanis az áramkört kicsit tanulmányozva egyszerűen felírhatók.)



29-14 ábra
A 29-8 példához.

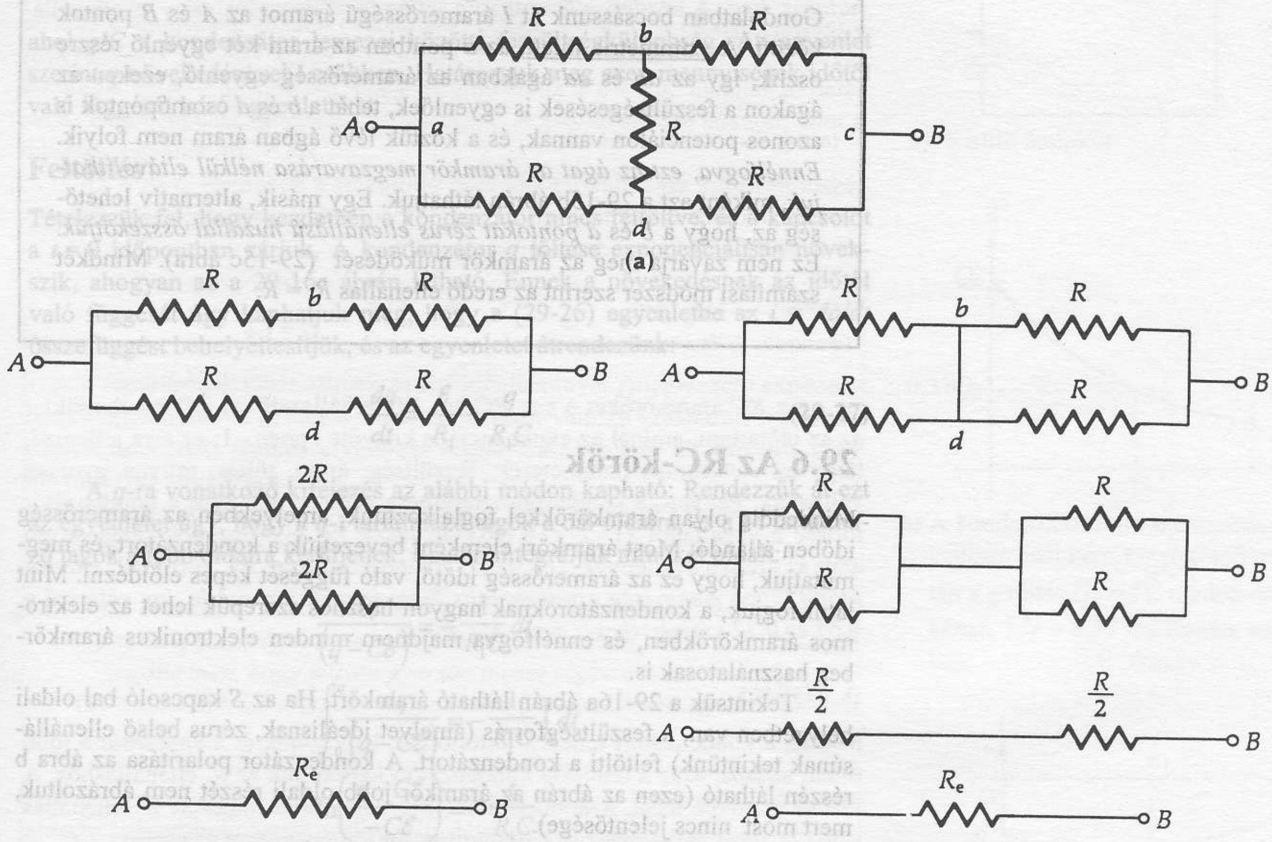
29-8 PÉLDA

Egy telep feszültségét két különböző módon mérjük meg: Kompenzációs módszerrel 1,50 V-ot kapunk; a rákapcsolt voltmérő pedig 2 V-os méréshatáron 1,48 V-ot mutat. A voltmérő érzékenységére az jellemző, hogy 1 mA erősségű áram okoz végkitérést. Számítsuk ki a telep belső ellenállását.

MEGOLDÁS

Az áramkör a 29-14 ábrán látható; a telep belső ellenállása r. Amikor a kapocsfeszültséget kompenzációs módszerrel mérjük, a telepből nem veszünk fel áramot, az r ellenálláson nincs feszültségesés, és így a módszerrel a telep elektromotoros erejét mérjük. Ha voltmérőt használunk, akkor azon keresztül I áramerősségű áram fo-

[2] Ha a telepet külső feszültségforrással töltjük, az áram ellenkező irányú, és így az r ellenálláson a feszültségesés ellentétes előjelű.



b) eltávolítva a *bd* ágat c) rövidrezárva a *bd* ágat

29-15 ábra
A 29-9 példához.

lyik, és az *r* belső ellenálláson létrejövő feszültség esés miatt a kapocsfeszültség lecsökken:

$$V = \mathcal{E} - Ir \qquad (29\text{-}25)$$

A voltmérőn 1 mA áram okoz végkitérést, tehát 2 V-os méréshatáron a végkitérést okozó 1 mA 1,48/2,00 része halad át, vagyis az áramerősség

$$I = \left(\frac{1{,}48}{2{,}00}\right)(2\text{mA}) = 0{,}740\ \text{A}$$

A (29-25) egyenletet *r*-re megoldva:

$$r = \frac{\mathcal{E} - V}{I} = \frac{1{,}50\ \text{V} - 1{,}48\ \text{V}}{0{,}74 \times 10^{-3}\ \text{A}} = 27{,}0\ \Omega$$

29-9 PÉLDA

A 29-15a ábrán látható hálózatban minden egyes ellenállás nagysága *R*. Számítsuk ki az *A* és *B* pontok közötti R_e eredő ellenállást.

MEGOLDÁS

A rendszer szimmetriája nagy mértékben egyszerűsíti a számítást. Gondolatban bocsássunk át I áramerősségű áramot az A és B pontok között. A szimmetria miatt, az a pontban az áram két egyenlő részre oszlik, így az ab és ad ágakban az áramerősség egyenlő, ezeken az ágakon a feszültségesések is egyenlőek, tehát a b és d csomópontok is azonos potenciálon vannak, és a köztük lévő ágban áram nem folyik. *Ennélfogva, ezt az ágat az áramkör megzavarása nélkül eltávolíthatjuk*, miként azt a 29-15b ábrán láthatjuk. Egy másik, alternatív lehetőség az, hogy a b és d *pontokat zérus ellenállású huzallal összekötjük*. Ez nem zavarja meg az áramkör működését (29-15c ábra). Mindkét számítási módszer szerint az eredő ellenállás $R_e = R$.

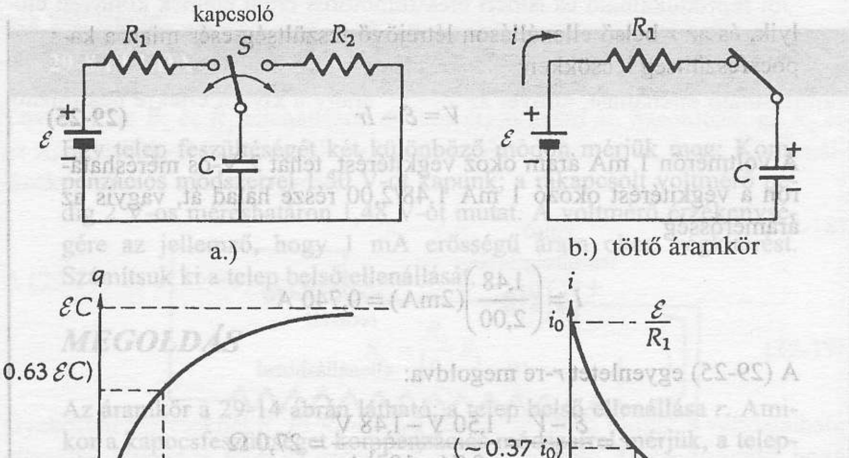
29.6 Az RC-körök

Mindeddig olyan áramkörökkel foglalkoztunk, amelyekben az áramerősség időben állandó. Most áramköri elemként bevezetjük a kondenzátort, és megmutatjuk, hogy ez az áramerősség időtől való függését képes előidézni. Mint látni fogjuk, a kondenzátoroknak nagyon hasznos szerepük lehet az elektromos áramkörökben, és ennélfogva majdnem minden elektronikus áramkörben használatosak is.

Tekintsük a 29-16a ábrán látható áramkört. Ha az S kapcsoló bal oldali helyzetben van, a feszültségforrás (amelyet ideálisnak, zérus belső ellenállásúnak tekintünk) feltölti a kondenzátort. A kondenzátor polaritása az ábra b részén látható (ezen az ábrán az áramkör jobb oldali részét nem ábrázoltuk, mert most nincs jelentősége).

A továbbiakban az időtől függő mennyiségeket kisbetűkkel, míg az időben állandókat nagybetűkkel jelöljük.

Jelölje i a töltőáramot. Alkalmazzuk Kirchhoff huroktörvényét az áramkörre. A feltöltődés alatt



c) Töltés folyamán, a kondenzátor töltése exponenciálisan közelít a végső értékhez; $\tau = R_1C$ idő múltán a q töltés $(1-1/e)q_0 \approx 0{,}63q_0$.

d) Kisütés során, az áram exponenciálisan csökken; $\tau = R_1C$ idő múltán az áramerősség $i_0/e \approx 0{,}37i_0$

29-16 ábra
Az a) ábrán a kapcsolót bal oldali helyzetbe állítjuk, hogy az R_1 ellenálláson keresztül a C kondenzátor feltöltődjék.

$$\Sigma V = 0$$

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0, \tag{29-26}$$

ahol q/C a kondenzátor lemezei közötti feszültségkülönbség. Az egyenlet szerint q növekedésével i csökken. Határozzuk meg ezen mennyiségek időtől való függését leíró egyenleteket.

Feltöltés

Tételezzük fel, hogy kezdetben a kondenzátor nincs feltöltve, és a kapcsolót a $t = 0$ időpontban zárjuk. A kondenzátor q töltése exponenciálisan növekszik, ahogyan az a 29-16c ábrán látható. Ennek a növekedésnek az időtől való függését úgy kaphatjuk meg, hogy a (29-26) egyenletbe az $i = dq/dt$ összefüggést behelyettesítjük, és az egyenletet átrendezünk:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} - \frac{q}{R_1 C} \tag{29-27}$$

A q-ra vonatkozó kifejezés az alábbi módon kapható: Rendezzük át ezt az egyenletet úgy, hogy a q-t tartalmazó tagok a bal oldalra, és a t-t tartalmazó tagok a jobb oldalra kerüljenek. Ezután integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{1}{R_1 C} dt$$

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{R_1 C}$$

A természetes logaritmus definíciójából következően ezt a kifejezést az alábbi alakba írhatjuk át:

KONDENZÁTOR FELTÖLTÉSE ELLENÁLLÁSON KERESZTÜL
$$q = C\mathcal{E}\left[1 - e^{-t/R_1 C}\right] \tag{29-28}$$

A q időbeli változását leíró exponenciális függvény a 28-16c ábrán látható: q zérustól növekedve a $C\mathcal{E}$ érték felé tart. Az idő növekedésével q aszimptotikusan közelíti meg a $C\mathcal{E}$ értéket[3]. A kondenzátor feltöltésének sebessége R_1 és C konkrét értékétől függ. Például, ha az $R_1 C$ szorzat kisebb, a kondenzátor gyorsabban töltődik.

A kondenzátor feltöltése során a töltések nem haladnak át a kondenzátoron, hanem az $\mathcal{E}$ feszültségforrás a külső körön át, az ellenálláson keresztül mozgatja a töltéseket az egyik lemezről a másikra: így a két lemezen egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű töltés lesz. Ahogyan a kondenzátor feszültsége növekszik és megközelíti $\mathcal{E}$ értékét, az áramerősség zérushoz közelít. A töltőáram áramerősségének az időbeli változását leíró formulához a (29-28) egyenlet differenciálásával jutunk: Minthogy $i = dq/dt$,

A TÖLTŐÁRAM
$$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1}\right) e^{-t/R_1 C} \tag{29-29}$$

[3] A $C\mathcal{E}\exp(-t/R_1 C)$ tag rövid idő alatt kisebbé válik, mint az elektronok termikus fluktuációjából származó zaj. Így az az állítás, hogy exponenciális jellegű változással a végállapot sohasem érhető el, *fizikai* szempontból értelmetlen.

Ez a csökkenő exponenciális változás látható a 29-16d ábrán. Közvetlenül a kapcsoló zárása után a $t = 0$ időpontban az i áramerősség maximális értéket vesz fel, *melyet kizárólag a kondenzátorral sorba kapcsolt ellenállás értéke határoz meg.* A kezdeti időpontban a teljes feszültségesés ezen az ellenálláson jön létre:

$t = 0$ időpontban
(maximális áram az áramkörben)
$$i = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

Amikor a kondenzátor teljesen fel van töltve, az áramerősség zérus, és a teljes feszültségesés a kondenzátoron jön létre:

$t = \infty$ időpontban
(maximális töltés a kondenzátoron)
$$Q = C\mathcal{E}$$

Az RC áramköröket a $\tau = RC$ ún. ***RC* időállandóval** jellemezhetjük: τ az az időtartam, aminél az exponenciális kitevője éppen -1; ez arra jellemző, hogy az elektromos paraméterek: feszültség, áram, töltés, milyen gyorsan változnak. Például, a kondenzátor feltöltése során, τ idő alatt a kondenzátor töltése a végállapot $(1 - 1/e) \approx 0{,}63$-ad részét éri el. Hasonlóképpen, τ idő alatt az áram a kezdetinek $1/e \approx 0{,}37$ részére csökken. RC köröknél, *minden időtől függő mennyiség exponenciális függvényekkel írható le, így célszerű a 0,63 és 0,37 számértékeket megjegyeznünk.*

A kisütés

Miután a kondenzátort teljesen feltöltöttük, kapcsoljuk át a kapcsolót a jobb oldali állásba, azaz a feltöltött kondenzátort kapcsoljuk az R_2 ellenálláshoz. A kisütő áramkör tehát, a kondenzátor és a vele sorba kapcsolt R_2 ellenállás (29-17a ábra). Alkalmazzuk Kirchhoff huroktörvényét erre az esetre:

$$\Sigma V = 0$$

$$\frac{q}{C} - iR_2 = 0, \qquad \textbf{(29-30)}$$

ahol q/C a kisülő kondenzátor feszültsége. Ebben az esetben $i = -dq/dt$ (a negatív előjel azt jelzi, hogy az idő növekedésével q csökken). Átrendezés után:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_2 C}$$

Integráljuk ezt az összefüggést figyelembe véve, hogy a $t = 0$ időpontban $q = Q_0$:

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{R_2 C} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{R_2 C}$$

KONDENZÁTOR KISÜTÉSE
ELLENÁLLÁSON KERESZTÜL
$$q = Q_0 e^{-t/R_2 C}, \qquad \textbf{(29-31)}$$

ahol $Q_0 = \mathcal{E}C$, a kondenzátor kezdeti töltése.

Ezt az idő szerint deriválva megkapjuk az áramerősség változását az idő függvényében:

KISÜTÉSI ÁRAM $$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_2}\right) e^{-t/R_2C} \qquad (29\text{-}32)$$

ahol az áramerősség kezdeti (maximális) értéke $I_0 = \mathcal{E}/R_2 = Q_0/R_2C$. Ezeket a függvényeket a 29-17 ábrán ábrázoltuk. Ebben a példában szándékosan választottuk az $R_2 > R_1$ feltételt, hogy megmutassuk a $\tau = R_2C$ időállandó hatását az exponenciális változások sebességére. A kisütés sokkal lassúbb, mint a feltöltés, ugyanis $R_2C > R_1C$.

Az R és C elemeken a feszültség esés időbeli változása könnyen kiszámítható az alábbi egyenletekből:

$$v_R = iR \quad \text{és} \quad v_C = \frac{q}{C} \qquad (29\text{-}33)$$

Ezek a feszültségek tehát szintén az RC időállandóval jellemezhető exponenciális függvények. A q, i és v exponenciálissan változó szakaszait **tranzienseknek** nevezzük; amikor a változás megszűnik, beáll az **állandósult** vagy **stacionárius** végállapot.

Az egyenáramú hálózatokba kapcsolt kondenzátorokkal kapcsolatosan két fontos következtetést vonhatunk le:

(1) *A kondenzátor lemezein lévő töltés (és következésképpen a kondenzátor feszültsége) nem változhat ugrásszerűen. Az RC időállandó szabja meg, hogy milyen gyorsan mehet végbe a változás.*

(2) *A stacionárius állapot elérése után a kondenzátoron egyenáram nem folyik.*

Ezek a megállapítások nagyban megkönnyítik, hogy a kondenzátorokat tartalmazó egyenáramú áramkörök viselkedését előre megállapíthassuk.

29-10 PÉLDA

Sorba kapcsolt RC áramkörben a kapacitás 4 μF. a) Mekkora az R ellenállás, ha az áramkör időállandója 2 ms ? b) A $t = 0$ időpontban az áramkört 9 V-os feszültségforráshoz csatlakoztatjuk. Mennyi idő múlva éri el C feszültsége a 8 V-ot?

MEGOLDÁS

a) A $\tau = RC$ egyenletből $R = \dfrac{\tau}{C} = \dfrac{2\times10^{-3}\,\text{s}}{4\times10^{-6}\,\text{F}} = 500\,\Omega$

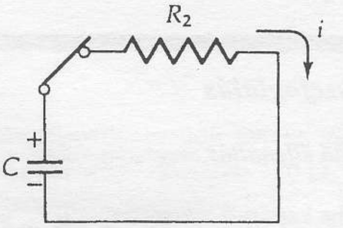
b) $$V = V_0(1 - e^{-t/RC})$$

$$e^{-t/RC} = \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$$

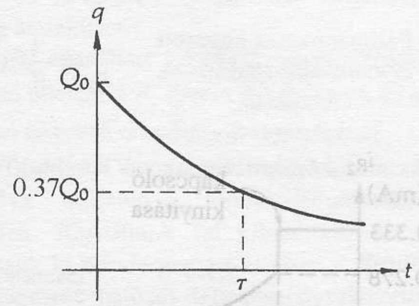
$$e^{t/RC} = \left(\frac{V_0}{V_0 - V}\right) = \frac{9\,\text{V}}{1\,\text{V}} = 9$$

$$\frac{t}{RC} = \ln 9$$

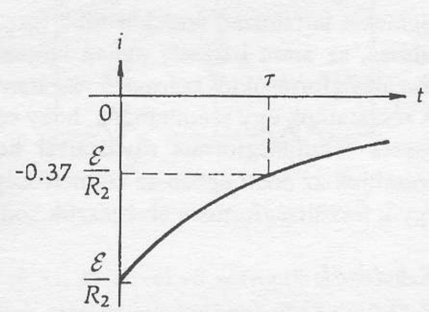
$$t = RC \ln 9 = (2\ \text{ms})(\ln 9) = 4{,}39\ \text{ms}$$



a) Kisütő áramkör

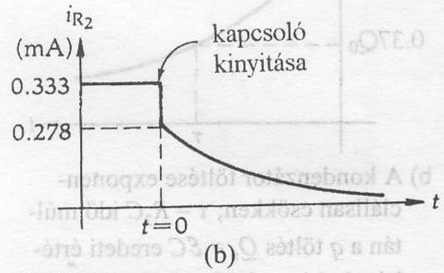


b) A kondenzátor töltése exponenciálisan csökken; $\tau = R_2C$ idő múltán a q töltés $Q_0 = \mathcal{E}C$ eredeti értékének $1/e \approx 0{,}37$ -ed részére csökken.



c) A kisütés során az áram negatív, minthogy ellenkező előjelű, mint a töltőáram; $\tau = R_2C$ idő múltán az áramerősség $I_0 = \mathcal{E}/R_0$ kezdeti értékének $1/e \approx 0{,}37$ -ed részére csökken.

29-17 ábra
A 29-16a ábra kapcsolóját a jobb oldali helyzetbe állítjuk, hogy a töltött kondenzátort az R_2 ellenálláson keresztül kisüssük.



29-18 ábra
A 29-11 példához.

29-11 PÉLDA

Tételezzük fel, hogy a 29-18a ábrán látható áramkörben az S kapcsoló elegendően hosszú ideig zárva volt, és így a C kondenzátor teljesen fel van töltve. Számítsuk ki a) az egyes ellenállásokon átfolyó stacionárius áramot és b) a kondenzátor Q töltését. c) A kapcsolót a $t = 0$ időpontban kinyitjuk. Fejezzük ki az R_2 ellenálláson áthaladó áram i áramerősségét, mint az idő függvényét. d) Számítsuk ki, hogy mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a kondenzátor töltése az eredeti érték egyötödére csökkenjen.

MEGOLDÁS

a) A stacionárius állapot beállta után a kondenzátoron át egyenáram nem folyik. Ennélfogva

R_3 ellenálláson keresztül: $I_{R_3} = 0$ (stacionárius állapotban)

A másik két ellenálláson átfolyó stacionárius áramerősségét annak figyelembevételével számíthatjuk ki, hogy a feszültségforrás 9 V-os feszültségesése egymással sorba kapcsolt 12 kΩ-os és 15 kΩ-os ellenállásokon megy végbe:

R_1 és R_2 ellenálláson keresztül

$$I_{(R_1+R_2)} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{9\ \text{V}}{(12\ \text{k}\Omega + 15\text{k}\ \Omega)}$$
$$= 0{,}333\text{mA} \quad \text{(stacionárius állapotban)}$$

b) Miután a tranziens áramok lecsengtek, a kondenzátor feszültsége ugyanakkora, mint az R_2 ellenálláson az IR_2 feszültségesés, minthogy az R_3 ellenálláson nincs feszültségesés. Ennélfogva, a kondenzátor Q töltése:

$$Q = CV_{R_2} = C(IR_2) = (10\ \mu\text{F})(0{,}333\ \text{mA})(15\ \text{k}\Omega) = 5{,}00\ \mu\text{C}$$

c) A kapcsoló kinyitásával az R_1-et tartalmazó ág megszakad. A kondenzátor az $(R_2 + R_3)$ ellenállásokon keresztül sül ki: $(R_2 + R_3)C = (15\ \text{k}\Omega + 3\ \text{k}\Omega)(10\ \mu\text{F}) = 0{,}180\ \text{s}$ időállandóval.
A kisütés kezdetén az I_0 áramerősséget a kondenzátor eredeti feszültsége és az $(R_2 + R_3)$ ellenállás hányadosa határozza meg:

$$I_0 = \frac{V_C}{(R_2 + R_3)} = \frac{IR_2}{(R_2 + R_3)} = \frac{(0{,}333\ \text{mA})(15\ \text{k}\Omega)}{(15\ \text{k}\Omega + 3\ \text{k}\Omega)} = \underline{\underline{0{,}278\ \text{mA}}}$$

Így tehát, amikor a kapcsolót nyitjuk, az R_2 ellenálláson átfolyó áram ugrásszerűen 0,333 mA-ről 0,278 mA-re csökken (29-18b ábra). Ezután az áram a következő törvény szerint csökken:

$$i_{R_2} = I_0 e^{-t/(R_2+R_3)C} = (0{,}278\ \text{mA})e^{-t/(0{,}180\ \text{s})} \qquad (t > 0)$$

d) A kondenzátor q töltése Q_0-ról $Q_0/5$-re az alábbiak szerint csökken:

$$q = Q_0 e^{-t/(R_2+R_3)C}$$

$$\frac{Q_0}{5} = Q_0 e^{-t/(0{,}180\,\mathrm{s})}$$

$$5 = e^{t/(0{,}180\,\mathrm{s})}$$

$$\ln 5 = \frac{t}{0{,}180\ \mathrm{s}}$$

$$t = (0{,}180\ \mathrm{s})(\ln 5) = 0{,}290\ \mathrm{s}$$

29-12 PÉLDA

Egy kondenzátort úgy töltünk fel, hogy R ellenállású huzalokkal feszültségforráshoz csatlakoztatjuk. A kondenzátor feltöltése során a feszültségforrás W munkát végzett:

$$W = QV \qquad (29\text{-}34)$$

ahol Q a kondenzátor töltése, és V a feszültségforrás potenciálkülönbsége. A kondenzátorban tárolt elektromos energia

$$U_c = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \qquad (29\text{-}35)$$

ami csak a fele a feszültségforrás által végzett munkának. Hová lett a végzett munka másik fele?

MEGOLDÁS

A „hiányzó" energia a töltő áramkör ellenállásainak melegítésére fordítódott. A töltés során az i áramerősség

$$i = \left(\frac{V}{R}\right)e^{-t/RC}$$

Az ellenállásban keletkezett teljes Joule-hőt úgy kaphatjuk meg, ha a mindenkori disszipálódó i^2R teljesítményt integráljuk $t = 0$ és $t = \infty$ határok között. A képződő U_h hőt tehát az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$U_h = \int_0^\infty i^2 R\,dt = R\int_0^\infty \left(\frac{V}{R}\right)^2 e^{-2t/RC}\,dt$$

$$U_h = \left(\frac{V^2}{R}\right)\left(\frac{RC}{2}\right)e^{-2t/RC}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Tehát, a feszültségforrás által végzett munka másik fele a hozzávezető kábelek melegítésére fordítódik. *A képződött Joule-hő mindig ugyanakkora, mint a kondenzátorban tárolt elektromos energia, függetlenül R értékétől.*

Összefoglalás

Eredő ellenállás meghatározása:

Sorba kapcsolt ellenállások eredője: $R_e = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének reciproka: $\dfrac{1}{R_e} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \ldots$

Az áramkörökre vonatkozó Kirchhoff törvények a következők:

Hurok-törvény: $\Sigma V = 0$ (bármely zárt hurok mentén)

Csomóponti törvény: $\Sigma I = 0$ (a csomópontba belépő áramok pozitív, a kilépő áramok pedig negatív előjelűek)

A szuperpozíció elve: Ha egy, csak lineáris áramköri elemeket tartalmazó áramkör több feszültségforrást tartalmaz, az áram bármely ágban kiszámítható az egyes feszültségforrásoktól származó részáramok összegeként. A részáramok úgy számítandók, hogy egy kivételével az összes feszültségforrást rövidzárral helyettesítjük, kiszámítjuk az adott ágban az áramerősséget, és ezt mindegyik feszültségforrásra elvégezzük.

RC-kör: Sorba kapcsolt feszültségforrást, ellenállást és kondenzátort tartalmazó áramkör.

	Kondenzátor töltése	Kondenzátor árama
Töltés	$q = CV(1 - e^{-t/RC})$	$i = \left(\dfrac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/RC}$
Kisütés (nincs feszültségforrás az áramkörben)	$q = Q_0(1 - e^{-t/RC})$	$i = -\left(\dfrac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/RC}$

A $\tau = RC$ időállandó azt az időtartamot jelenti, amely alatt a kondenzátor töltése exponenciálisan nő a telítési (maximális) érték $1 - 1/e = 0{,}63$ részéig, az áramerőssége pedig exponenciálisan csökken a kezdeti érték $1/e = 0{,}37$ részére.

A kondenzátor a sorba kapcsolt RC-körben, állandó feszültségű feszültségforrás esetén az alábbi módon viselkedik:

1. *A kondenzátor lemezein lévő töltés (és következésképpen a kondenzátor feszültsége) nem változhat ugrásszerűen. A változás sebességét a feltöltő, illetve kisütő áramköri elemek RC időállandója határozza meg.*
2. *A stacionárius állapot elérése után a kondenzátoron egyenáram nem folyik.*

Kérdések

1. Egy 10 W teljesítményű, 220 V-os izzólámpa a nagyobb fényt bocsáthat ki, mint az ugyanahhoz a telephez kapcsolt 250 W teljesítményű, 220 V-os izzólámpa. Miért?
2. Tekintsünk egy ellenálláshuzalból készült körgyűrűt. A két kontaktust a gyűrű két különböző pontjához illesztjük. Hogyan függ az ellenállás a két kontaktus egymáshoz viszonyított helyzetétől?
3. Képzeljünk el egy bonyolult elektromos hálózatot és valahol a belsejében zárt felületet, amelyen belül áramköri elemek (ellenállások, kondenzátorok és feszültségforrások) vannak, és amelyen áramvezetők hatolnak keresztül. Vajon az ezen felületen áthaladó áramerősségek összege zérus? Érvényes-e Gauss törvénye erre a felületre?
4. A 29-4 fejezetben leírt kompenzációs módszerrel telepek elektromotoros erejét mérhetjük. Hogyan lehet ilyen módon áramerősséget és ellenállást mérni?
5. Hogyan befolyásolja a Wheatstone-híd működését az, ha a telep kissé lemerült?
6. Ha a Wheatstone-híd telepét és galvanométerét felcseréljük, az áramkör továbbra is Wheatstone-híd marad. Tételezzük fel, hogy a hidat kiegyenlítjük. Ha a telepet és a galvanométert felcseréljük, vajon a híd továbbra is kiegyenlített marad?
7. A volt-amper-ohm-mérő olyan mutatós műszer, amely olyan áramkörökkel és kapcsolókkal van ellátva, amelyek lehetővé teszik, hogy voltmérőként, ampermérőként vagy ohmmérőként működjön. Miért tanácsos az ilyen műszert használaton kívül nagy méréshatárú voltmérő állásba kapcsolni, miért nem ampermérőnek vagy ohmmérőnek?
8. Miért célszerűbb a galvanométer érzékenységét Ohm/V egységben megadni, mint amperben?
9. Hogyan mérhetünk voltmérővel kapacitást?
10. A 29-12 ábrán ábrázolt áramkörben gyakran alkalmaznak a külső feszültségforrással sorba kapcsolt változtatható ellenállást (amit reosztátnak is neveznek) azért, hogy az ellenálláshuzalon (változtatható ellenálláson) állandó áram folyjon keresztül. Tegyük fel, hogy ez a változtatható ellenállás párhuzamosan kapcsolt „nagy" és „kis" ellenállásból áll. Melyik ellenállás szolgál a durva és melyik a finom kompenzáláshoz?

Feladatok

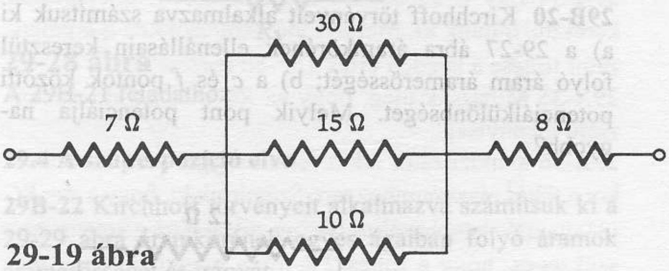
29.2 Sorosan és párhuzamosan kapcsolt ellenállások

29A-1 A párhuzamosan kapcsolt, R, $2R$ és $3R$ ellenállás eredő ellenállása 20 Ω. Mekkora az eredő ellenállás, ha sorba vannak kapcsolva?

29B-2 Ha n számú, egyenlő nagyságú ellenállást sorba kapcsolunk, az eredő ellenállás N-szer akkora, mintha párhuzamosan kapcsoltuk volna. Mi a kapcsolat n és N között?

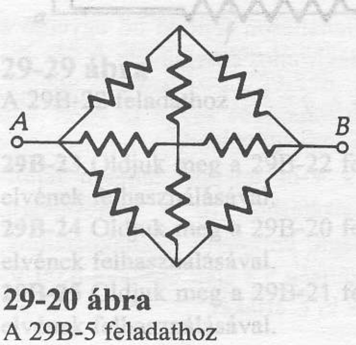
29B-3 Az A és B huzal anyaga és hosszúsága, azonos de A keresztmetszete kétszerese B-ének. a) Ha egymással párhuzamosan egy V potenciálkülönbségű feszültségforráshoz kapcsoljuk őket, melyik disszipál nagyobb teljesítményt? b) És ha sorosan kötjük őket? c) Számítsuk ki, hogy az *a)* esetben hányszor akkora hő fejlődik, mint a *b)* esetben.

29B-4 a) Számítsuk ki a 29-19 ábrán látható áramkör két végpontja közötti eredő ellenállást. b) A végpontokra 40 mV feszültséget kapcsolunk. Mekkora a feszültségesés esik a 8 Ω-os ellenálláson? c) Mekkor a 10 Ω-os ellenálláson áthaladó áram áramerőssége? d) Mekkora teljesítmény disszipálódik a 30 Ω-os ellenálláson? e) Mutassuk meg, hogyan kellene egy 20 Ω-os ellenállást az áramkörbe kapcsolni, hogy a feszültségforrást az áramkör éppen 4 A-rel terhelje.



29-19 ábra
A 29B-4 feladathoz

29B-5 A 29-20 ábra áramkörében minden egyes ellenállás értéke 1 Ω. Tételezzük fel, hogy az I áramerősségű áram az A pontnál lép be, és a B pontnál lép ki. Szimmetriameggondolásokkal mutassuk meg, hogy A és B pont között a hálózat eredő ellenállása 2/3 Ω. (Útmutatás: Mekkora lenne az eredő ellenállás, ha a függőlegesen rajzolt ellenállások nem lennének jelen?)



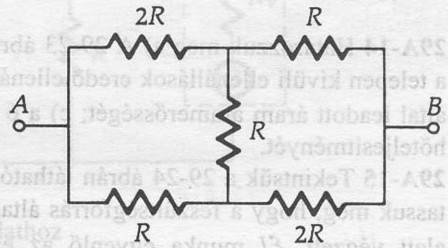
29-20 ábra
A 29B-5 feladathoz

29B-6 Két sorba kötött ellenállás eredője 690 Ω. Párhuzamosan kapcsolva őket az eredő ellenállás 150 Ω. Számítsuk ki az egyes ellenállások nagyságát.

29B-7 Számítsuk ki a 29-21 ábra hálózatának az A és B végpontok közötti eredő ellenállását. (Útmutatás: használjuk fel a 29C-43 és 29C-45 feladatoknál ismertetett csillagháromszög átalakítást.)

29B-8 Az R_A és R_B ellenállást sorba, ill. párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállás R_s illetve R_p. Fejezzük ki az R_A és R_B ellenállást az eredő ellenállások segítségével.

29B-9 Négy 220 V-os, 40 W-os izzólámpát különbözőképpen kapcsolva különböző teljesítményfelvételű áramkörhöz jutunk. Rajzoljunk fel kilenc kapcsolási módot, és számítsuk ki minden egyes esetben a 220 V-os hálózathoz kapcsolt hálózat teljesítményfelvételét. Durva közelítésként tételezzük fel, hogy az izzólámpa ellenállása független a rajta áthaladó áram áramerősségétől.



29-21 ábra
A 29B-7 feladathoz

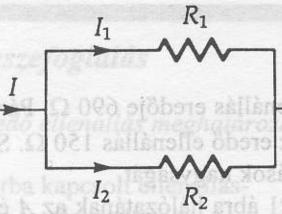
29B-10 Számítsuk ki, és növekvő sorrendben, táblázatos formában adjuk meg három különböző (2 Ω, 3 Ω és 4 Ω) ellenállás különböző kombinációjával előállítható összes kapcsolás) (17 db) eredő ellenállását.

29.3 Sokhurkú áramkörök és a Kirchhoff törvények

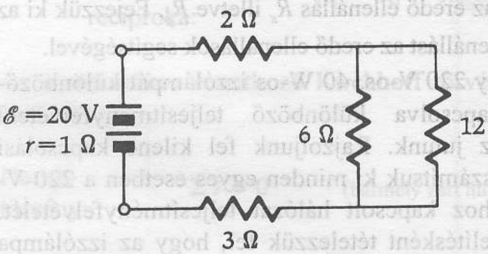
29A-11 Egy 12 V-os autóakkumulátor belső ellenállása 0,02 Ω. Számítsuk ki az akkumulátor kapocsfeszültségét az indítómotor használata közben. A motor 140 A áramerősségű áramot vesz fel. (A válasz ismeretében a következő tanács adható: ha az autó motorja leáll, indításkor célszerű a fényszórókat lekapcsolni.)

29A-12 Egy vadonatúj ceruzaelem elektromotoros ereje 1,5 V, belső ellenállása 0,311 Ω. a) Számítsuk ki a kapocsfeszültséget, ha az elem 58 mA áramerősségű áramot ad le egy külső áramkörnek; b) Mekkora a külső áramkör ellenállása?

29A-13 A 29-22 ábrán látható áramkörbe a bal oldali csomóponton át I áramerősségű áram lép be. Mutassuk meg, hogy az R_1-et tartalmazó ágon az I_1 áramerősség és a teljes I áramerősség aránya $I_1/I = R_2/(R_1+R_2)$.



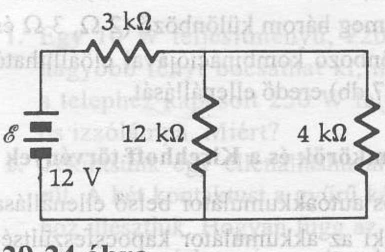
29-22 ábra
A 29B-13 feladathoz



29-23 ábra
A 29B-14 feladathoz

29A-14 Határozzuk meg a) A 29-23 ábra áramkörében, a telepen kívüli ellenállások eredő ellenállását b) a telep által leadott áram áramerősségét; c) a 6 Ω-os ellenállás hőteljesítményét.

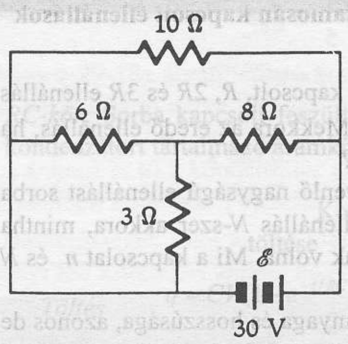
29A-15 Tekintsük a 29-24 ábrán látható áramkört. Mutassuk meg, hogy a feszültségforrás által egységnyi idő alatt végzett, $\mathcal{E}I$ munka egyenlő az ellenállások I^2R Joule-hőjének összegével.



29-24 ábra
A 29B-15 feladathoz

29A-16 Egy lakókocsi világításához n (párhuzamosan kapcsolt) R ellenállású izzólámpát és egy $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű, r belső ellenállású akkumulátort használunk. Fejezzük ki az akkumulátor által leadott áram áramerősségét a megadott mennyiségekkel.

29B-17 Számítsuk ki a) A 29-25 ábra áramkörében, a telepen kívüli ellenállások eredő ellenállását b) a telep által leadott áram áramerősségét; c) a 6 Ω-os ellenállás hőteljesítményét.

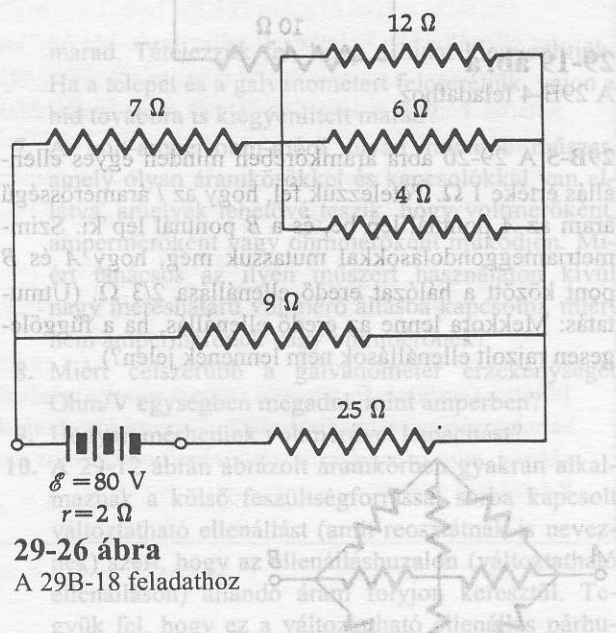


29-25 ábra
A 29B-17 feladathoz

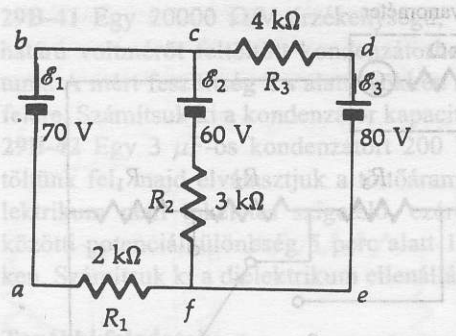
29B-18 Számítsuk ki a 29-26 ábra áramkörében, a) a telepen kívüli ellenállások eredő ellenállását b) a telep kapocsfeszültségét; c) a telep által leadott teljesítményt. d) Táblázatos formában, az ellenállások növekvő sorrendjében adjuk meg, hogy az egyes ellenállásokon mekkora teljesítmény disszipálódik. (Útmutatás: az adott áramkörben nem szükséges a Kirchhoff törvényeket alkalmazni az áramerősségek kiszámításához, ehhez az Ohm törvény is elegendő.)

29B-19 Lemerült akkumulátor elektromotoros ereje 7,22 V; 8,60 amperes árammal töltve kapocsfeszültsége 7,96 V. Mekkora az akkumulátor belső ellenállása?

29B-20 Kirchhoff törvényeit alkalmazva számítsuk ki a) a 29-27 ábra áramkörének ellenállásain keresztül folyó áram áramerősségét; b) a c és f pontok közötti potenciálkülönbséget. Melyik pont potenciálja nagyobb?

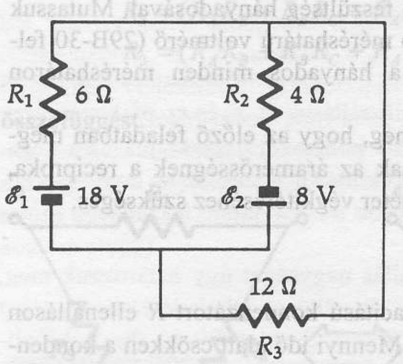


29-26 ábra
A 29B-18 feladathoz



29-27 ábra
A 29B-20 feladathoz

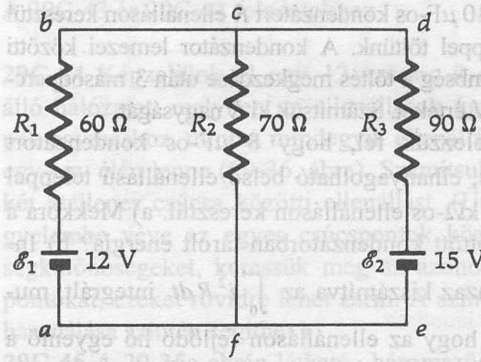
29B-21 Kirchhoff törvényeit alkalmazva számítsuk ki a 29-28 ábra áramkörének ellenállásain keresztül folyó áram áramerősségét.



29-28 ábra
A 29B-21 feladathoz

29.4 A szuperpozíció elve

29B-22 Kirchhoff törvényeit alkalmazva számítsuk ki a 29-29 ábra áramkörének egyes ágaiban folyó áramok áramerősségét és irányát.



29-29 ábra
A 29B-22 feladathoz

29B-23 Oldjuk meg a 29B-22 feladatot a szuperpozíció elvének felhasználásával.

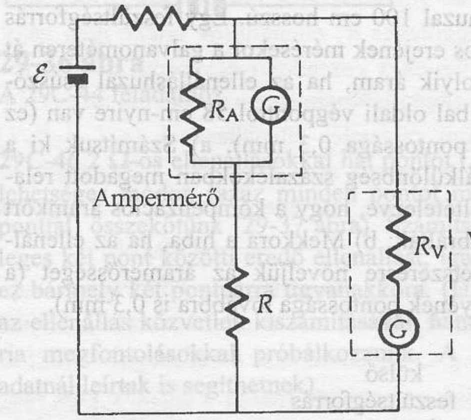
29B-24 Oldjuk meg a 29B-20 feladatot a szuperpozíció elvének felhasználásával.

29B-25 Oldjuk meg a 29B-21 feladatot a szuperpozíció elvének felhasználásával.

29.5 Alkalmazások

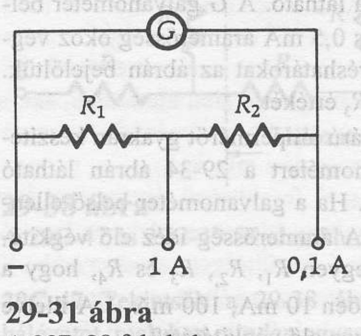
29A-26 Galvanométer tekercsének ellenállása 100 Ω és 200 μA hatására éri el a végkitérést. Számítsuk ki az ellenállások nagyságát, amelyekkel a galvanométert a) 10 V-os méréshatárú voltmérőként és b) 5 A-es méréshatárú ampermérőként alkalmazhatjuk. Készítsünk mindkét esetben kapcsolási rajzot az ellenállás csatlakoztatásának módjáról.

29B-27 Az R ellenállás nagyságát a 29-30 ábrán látható összeállítással mérhetjük meg. a) Mekkora R értéke, ha az 50 Ω eredő ellenállású ampermérő 5 mA-t, a voltmérő pedig 12,3 V-ot mutat? b) Mekkora lenne R értéke, ha az ampermérő ellenállása zérus lenne?

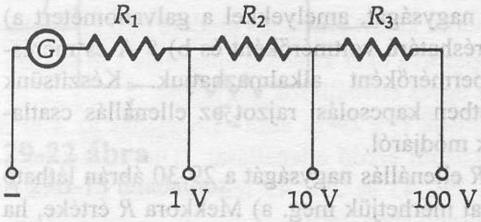


29-30 ábra
A 29B-27 feladathoz

29B-28 A 29-31 ábrán a G galvanométer ellenállása 50 Ω, és 400 μA hatására végkitérést mutat. a) Számítsuk ki az R_1 és R_2 ellenállásokat, amelyeket söntként az ábra szerint kapcsolva a galvanométert két (1 A és 0,1 A) méréshatárú ampermérőnek lehet használni. b) Hogyan lehet ugyanezt a galvanométert az R_3 és R_4 előtét-ellenállásokkal két (1 V és 10 V) méréshatárú voltmérőnek használni? Adjuk meg a voltmérő kapcsolási rajzát. Jelöljük meg a bemeneteket „–", „1 V", „10 V" feliratokkal ; és számítsuk ki R_3 és R_4 értékét.

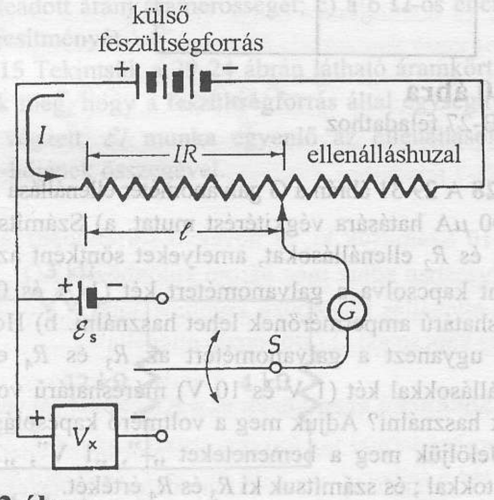


29-31 ábra
A 29B-28 feladathoz



29-33 ábra
A 29B-30 feladathoz

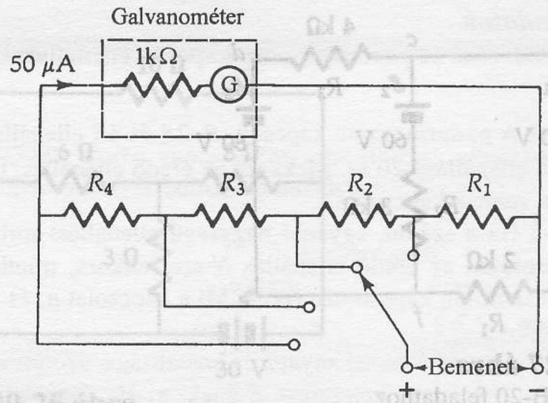
29B-29 A 29-32 ábrán látható kompenzáló áramkörben az ellenálláshuzal 100 cm hosszú. Egy feszültségforrás elektromotoros erejének mérésekor a galvanométeren át akkor nem folyik áram, ha az ellenálláshuzal csúszókontaktusa a bal oldali végponttól 58 cm-nyire van (ez utóbbi érték pontossága 0,3 mm). a) Számítsuk ki a mért potenciálkülönbség százalékokban megadott relatív hibáját, feltételezve, hogy a kompenzációs áramkört pontosan kalibrálták; b) Mekkora a hiba, ha az ellenálláshuzalon kétszeresre növeljük az áramerősséget (a kontaktus helyének pontossága továbbra is 0,3 mm).



29-32 ábra
A 29B-29 feladathoz

29B-30 A 29-33 ábrán egy több méréshatárú voltmérő előtétellenállás-sorozata látható. A G galvanométer belső ellenállása 500 Ω, és 0,5 mA áramerősség okoz végkitérést. Az egyes méréshatárokat az ábrán bejelöltük. Számítsuk ki R_1, R_2 és R_3 értékét.

29B-31 Több méréshatárú ampermérőt gyakran készítenek úgy, hogy galvanométert a 29-34 ábrán látható *Ayrtonsönttel* látnak el. Ha a galvanométer belső ellenállása 1000 Ω és 50 μA áramerősség idéz elő végkitérést, akkor mekkora legyen R_1, R_2, R_3 és R_4, hogy a kapcsoló állásától függően 10 mA, 100 mA, 1 A illetve 10 A áramerősség idézzen elő végkitérést?



29-34 ábra
A 29B-31 feladathoz

29B-32 A voltmérők jellemezhetők ellenállásuk és a végkitérést előidéző feszültség hányadosával. Mutassuk meg, hogy egy több méréshatárú voltmérő (29B-30 feladat) esetében ez a hányados minden méréshatáron ugyanakkora.

29B-33 Mutassuk meg, hogy az előző feladatban megadott hányados annak az áramerősségnek a reciproka, amelyik a galvanométer végkitéréséhez szükséges.

29.6 RC-körök

29A-34 Egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül sütünk ki. Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor töltése a kezdeti érték $1/e^2$-ed részére?

29A-35 Mutassuk meg, hogy az RC szorzat idő dimenziójú mennyiség.

29B-36 Kondenzátor adott feszültséggel való feltöltésekor a töltés maximumhoz tart. Számítsuk ki, hogy a $\tau = RC$ időállandó hányszorosa az az időtartam, ami ahhoz szükséges, hogy a töltés 2%-nyira megközelítse a maximumot?

29B-37 Egy 10 μF-os kondenzátort R ellenálláson keresztül 10 V-os teleppel töltünk. A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a töltés megkezdése után 3 másodperccel éri el a 4 V értéket. Számítsuk ki R nagyságát.

29B-38 Tételezzük fel, hogy 8 μF-os kondenzátort $\mathcal{E}$ = 20 V-os, elhanyagolható belső ellenállású teleppel töltünk, 500 kΩ-os ellenálláson keresztül. a) Mekkora a teljesen feltöltött kondenzátorban tárolt energia? b) Integrálással, azaz kiszámítva az $\int_0^\infty i^2 R\,dt$ integrált, mutassuk meg, hogy az ellenálláson fejlődő hő egyenlő a kondenzátorban tárolt elektromos energiával.

29B-39 Igazoljuk, hogy a $q = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC})$ függvény kielégíti az $\mathcal{E} - iR - q/C = 0$ egyenletet.

29B-40 Kondenzátort 9 V-os teleppel teljesen feltöltünk. Ezután a kondenzátorhoz 10 V méréshatárú, 20000 Ω/V érzékenységű voltmérőt csatlakoztatunk, amelyen a mutatott feszültség 5 s alatt csökken 8,00 V-ról 5,60 V-ra. Számítsuk ki C értékét.

29B-41 Egy 20000 Ω/V érzékenységű, 100 V méréshatárú voltmérőt feltöltött kondenzátorhoz csatlakoztatunk. A mért feszültség 2 s alatt csökken a kezdeti érték felére. Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását.

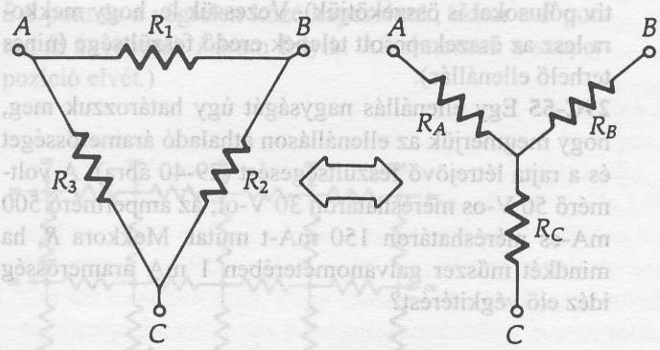
29B-42 Egy 3 μF-os kondenzátort 200 V feszültségre töltünk fel, majd elválasztjuk a töltőáramkörtől. A dielektrikum nem tökéletes szigetelő, ezért a két lemez közötti potenciálkülönbség 5 perc alatt 185 V-ra csökken. Számítsuk ki a dielektrikum ellenállását.

További feladatok

29C-43 Igazoljuk a 29-35b ábrán látható három ellenállásból álló „csillag"-kapcsolás és a 29-35a ábrán látható „háromszög"-kapcsolás közötti

$$R_1 = (R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C) / R_C$$
$$R_2 = (R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C) / R_A$$
$$R_3 = (R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C) / R_B$$

összefüggést.



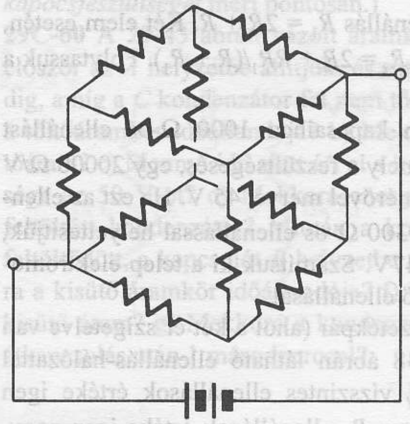
a) háromszög-kapcsolás b) csillag-kapcsolás

29-35 ábra
A 29C-43 és 29C-44 feladatokhoz

29C-44 Képzeljünk el egy 12 azonos R ellenállásból álló hálózatot, melyben az ellenállások úgy csatlakoznak egymáshoz, mintha mindegyik ellenállás egy kocka egy-egy élén lenne (29-36. ábra). Számítsuk ki a kocka két átellenes csúcsa közötti ellenállást. (Útmutatás: figyelembe véve az egyes csúcspontok közötti feszültségkülönbségeket, keressük meg az azonos potenciálú pontokat, ezeket rövidre lehet zárni. A szimmetriák felhasználása szintén segíthet.)

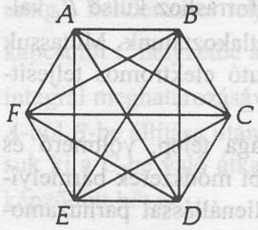
29C-45 A 29-35a ábrán látható „háromszög" kapcsolás „csillag"-kapcsolássá (29-35b ábra) transzformálható úgy, hogy az egyes végpontok közötti ellenállás változatlan marad. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

$$R_A = R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3)$$
$$R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3)$$
$$R_C = R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3)$$

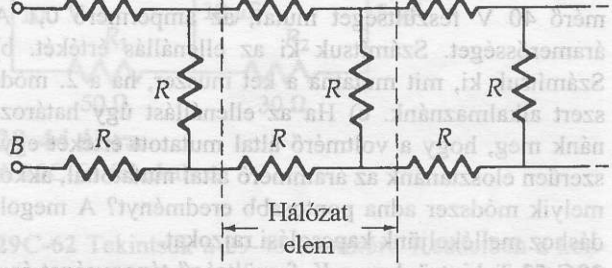


29-36 ábra
A 29C-44 feladathoz

29C-46 2 Ω-os ellenállásokkal hat pontot (A-F) minden lehetséges módon (azaz minden pontot minden másik ponttal) összekötünk (29-37 ábra). Számítsuk ki tetszőleges két pont közötti eredő ellenállást; igazoljuk, hogy ez bármely két pontpárra ugyanakkora. (Útmutatás: Ne az ellenállás közvetlen kiszámításával, hanem szimmetria megfontolásokkal próbálkozzunk. A 29C-57 feladatnál leírtak is segíthetnek).



29-37 ábra
A 29C-46 feladathoz



29-38 ábra
A 29C-47 és 29C-49 feladatokhoz.

29C-47 Tekintsük a 29-38 ábrán látható ellenálláshálózatot, melyben minden egyes ellenállás R nagyságú. Mutassuk meg, hogy ha a hálózat elemeinek száma nagyon nagy, az A és B végpontok között az eredő ellenállás $R(1+\sqrt{3})$. (Útmutatás: ha csak egy elem lenne jelen, az eredő ellenállás $R_1 = 2R + R$. Két elem esetén, az eredő ellenállás $R_2 = 2R + RR_1/(R + R_1)$. Folytassuk a sorozatot.)

29C-48 Egy telep kapcsaihoz 1000 Ω-os ellenállást csatlakoztatunk; amely a feszültségesés, egy 20000 Ω/V érzékenységű voltmérővel mérve, 45 V. Ha ezt az ellenállást egy másik, 3300 Ω-os ellenállással helyettesítjük, a mért feszültség 47V. Számítsuk ki a telep elektromotoros erejét és belső ellenállását.

29C-49 Hosszú vezetékpár (ahol a két ér szigetelve van egymástól) a 29-38 ábrán látható ellenállás-hálózattal közelíthető; az R_H vízszintes ellenállások értéke igen kicsiny, a függőleges R_V ellenállások értéke igen nagy, hiszen az előbbiek a vezetékpár egységnyi hosszra eső $r_1/L = 2R_H/L$ ellenállásának, míg az utóbbiak az egységnyi hosszúságú szigetelés ellenállásának ($r_2/L = R_V/L$) felelnek meg. Mutassuk meg, hogy ha $r_2 >> r_1$, akkor az egységnyi hosszúságra jutó ellenállás az A és B kapcsok között $\sqrt{r_1 / r_2} / L$.

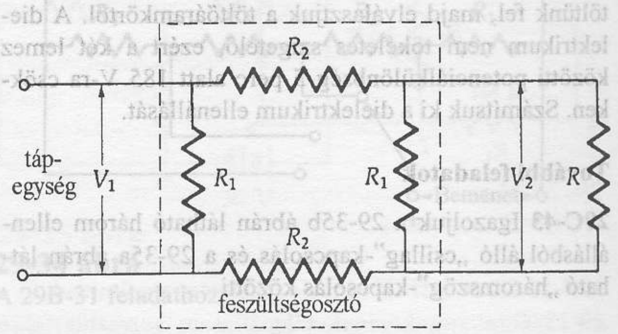
29C-50 Az R_A és R_B ellenállások sorba vannak kapcsolva. Ha az R_A ellenállást R ellenállással söntöljük, és egyidejűleg az R_B ellenállást R-rel megnöveljük, az eredő ellenállás változatlan marad. Fejezzük ki R értékét R_A függvényeként (R nem függ R_B értékétől).

29C-51 Feszültségforrás feszültsége terheletlenül $\mathcal{E}$, belső ellenállása r. A feszültségforráshoz külső R_L változtatható terhelő ellenállást csatlakoztatunk. Mutassuk meg, hogy az R_L ellenállásra jutó elektromos teljesítmény akkor a legnagyobb, ha $R_L = r$.

29C-52 Az ellenállások nagysága telep, voltmérő és ampermérő segítségével az alábbi módszerek bármelyikével meghatározható: 1. Az ellenállással párhuzamosan kapcsoljuk a voltmérőt és velük sorba kapcsoljuk az ampermérőt; 2. Az ellenállással sorba kapcsoljuk az ampermérőt, ezekkel párhuzamosan pedig a voltmérőt. Tételezzük fel, hogy a volt-mérő belső ellenállása 2000 Ω, az ampermérő belső ellenállása 20 Ω, és a telep belső ellenállása elhanyagolható. a) Az 1. módszerrel, a voltmérő 40 V feszültséget mutat, az ampermérő 0,1 A áramerősséget. Számítsuk ki az ellenállás értékét. b) Számítsuk ki, mit mutatna a két műszer, ha a 2. módszert alkalmaznánk. c) Ha az ellenállást úgy határoznánk meg, hogy a voltmérő által mutatott értéket egyszerűen elosztanánk az árammérő által mutatottal, akkor melyik módszer adna pontosabb eredményt? A megoldáshoz mellékeljünk kapcsolási rajzokat.

29C-53 Tekintsünk egy V_1 feszültségű tápegységet és a kimenetén egy R terhelést. Bizonyos elektronikus alkalmazásoknál a kimenő feszültséget alacsonyabb, V_2 értékre szükséges korlátozni, anélkül azonban, hogy megváltoztatnánk a feszültségforrás terhelését. Ezt a 29-39 ábrán látható feszültségosztóval érhetjük el. A megfelelően méretezett feszültségosztó esetén a feszültségforrás terhelése változatlan. Mutassuk meg, hogy ehhez az R_1 és R_2 ellenállásokat úgy kell megválasztani, hogy

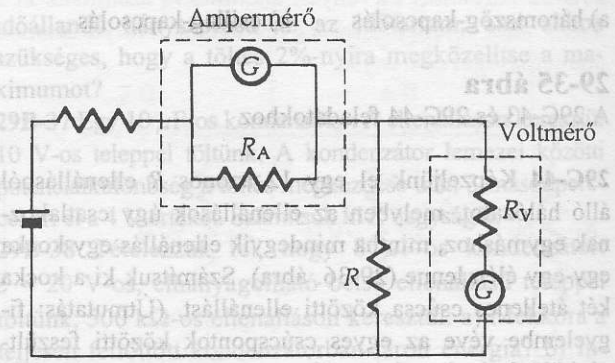
$R_1 = R(V_1 + V_2)/(V_1 - V_2)$ és $R_2 = R(V_1^2 - V_2^2)/4V_1V_2$.



29-39 ábra
A 29C-53 feladathoz

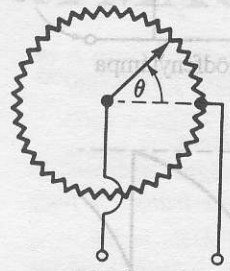
29C-54 Három telepet, melyeknek elektromotoros ereje $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ és $\mathcal{E}_3$; belső ellenállásuk r_1, r_2 és r_3, párhuzamosan kapcsolunk (a pozitív pólusokat összekötjük és a negatív pólusokat is összekötjük). Vezessük le, hogy mekkora lesz az összekapcsolt telepek eredő feszültsége (nincs terhelő ellenállás).

29C-55 Egy ellenállás nagyságát úgy határozzuk meg, hogy megmérjük az ellenálláson áthaladó áramerősséget és a rajta létrejövő feszültségesést (29-40 ábra). A voltmérő 50 V-os méréshatáron 30 V-ot; az ampermérő 500 mA-es méréshatáron 150 mA-t mutat. Mekkora R, ha mindkét műszer galvanométerében 1 mA áramerősség idéz elő végkitérést?



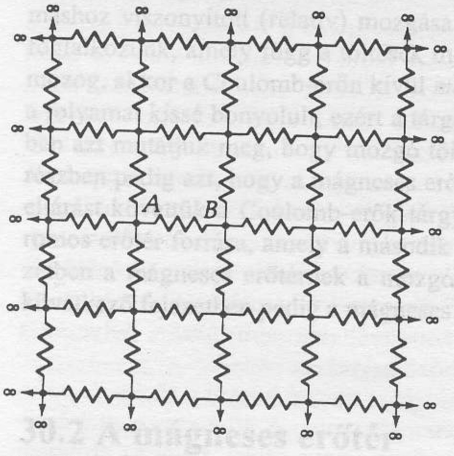
29-40 ábra
A 29C-55 feladathoz

29C-56 Változtatható ellenállás készíthető, ha ellenálláshuzalt úgy csévélnek szigetelő karikára, hogy a feltekercselt ellenálláshuzal a karikát majdnem körbeéri. Az ellenálláshuzal teljes ellenállását jelöljük R-rel. A változtatható ellenállás egyik csatlakozása a zárt karika egy rögzített pontja, a másik csatlakozási pont a karika mentén körbefordítható csúszókontaktus (29-41 ábra). a) Fejezzük ki a csatlakozási pontok közötti r ellenállást R, és a radiánokban megadott θ függvényében; b) Milyen gyakorlati probléma jelentkezik a csúszókontaktus $\theta = 0°$ pontja környezetében, ha adott a csatlakozási pontok közötti feszültségkülönbség.



29-41 ábra
A 29C-56 feladathoz

29C-57 Tekintsük, a 29-42 ábrán látható, ellenállásokból álló végtelen hálózatot; legyen minden ellenállás értéke azonos, R. Mekkora az A és B pontok között az ellenállás? (Útmutatás: gondolatban kapcsoljunk az A pont és a végtelen távoli pont közé telepet; folyjon ennek hatására A-n keresztül I áram. Ha egy másik telepet a B pont és a végtelen közé kapcsolunk, akkor a B ponton át ugyancsak I áram folyik. Alkalmazzuk a szuperpozíció elvét.)

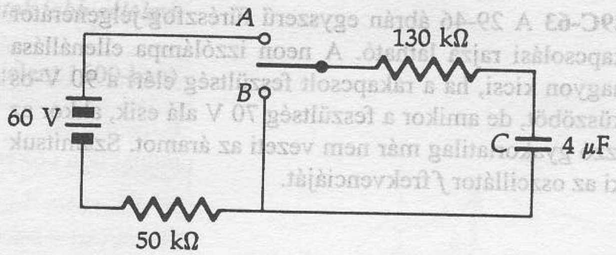


29-42 ábra
A 29C-57 feladathoz

29C-58 Egy 4 μF kapacitású és 100 V feszültségre töltött kondenzátor, 15000 Ω-os ellenállással van sorba kapcsolva. Ezt az RC kört a fel nem töltött 10 μF kapacitású kondenzátor két pólusához csatlakoztatjuk. Számítsuk ki az ellenálláson áthaladó áram erősségét, amidőn a 4 μF kapacitású kondenzátor feszültsége 50 V-ra csökken.

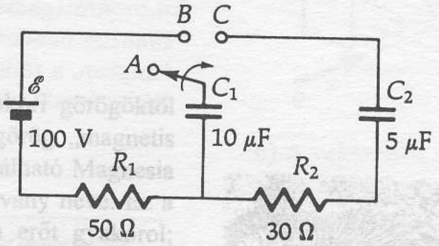
29C-59 Feszültségforrás elektromotoros ereje $\mathcal{E}$, belső ellenállása r. Ha a kapocsfeszültséget 20000 Ω/V érzékenységű, több méréshatárú voltmérővel mérjük, akkor 100 V-os méréshatáron 95 V-nak, 200 V-os méréshatáron pedig 120 V-nak adódik. Számítsuk ki $\mathcal{E}$ és r értékét. (Az, hogy a voltmérő két különböző méréshatárban más értéket mutat, nem a műszer hibája: a voltmérő a *kapocsfeszültséget* méri pontosan.)

29C-60 A 29-43 ábrán vázolt áramkörben a kapcsolót először az A helyzetbe állítjuk, és ott hagyjuk, mindaddig, amíg a C kondenzátor fel nem töltődik. a) Mekkora a töltőáramkör időállandója? b) Mekkora a kezdeti töltőáram? c) Mennyi idő alatt éri el a kondenzátor feszültsége az 50 V-ot? d) Mekkora energiát tárol a teljesen feltöltött kondenzátor? Miután a kondenzátor teljesen feltöltődött, a kapcsolót B helyzetbe állítjuk. e) Mekkora a kisütő áramkör időállandója? f) Mekkora a kezdeti kisütő áram? g) Mekkora a kondenzátor feszültsége az átkapcsolás után 1 másodperccel?



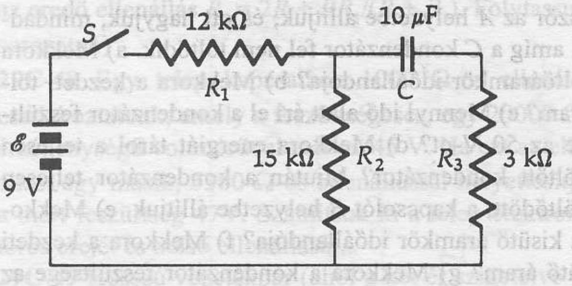
29-43 ábra
A 29C-60 feladathoz

29C-61 Tekintsük a 29-44 ábrán látható áramkört. Kezdetben a kondenzátor nincs feltöltve, a kapcsolót az A-ból a B helyzetbe állítjuk át, és mindaddig úgy hagyjuk, amíg a kondenzátor teljesen fel nem töltődött. Ezután a kapcsolót C helyzetbe állítjuk. Számítsuk ki az $\int i^2 R\,dt$ integrál meghatározásával az R_1 ellenálláson, a kapcsoló A-ból B-be állítása után fejlődő hőmennyiséget. Számítsuk ki a C-be való átkapcsolás után az R_2 ellenállásban képződött hőt is.



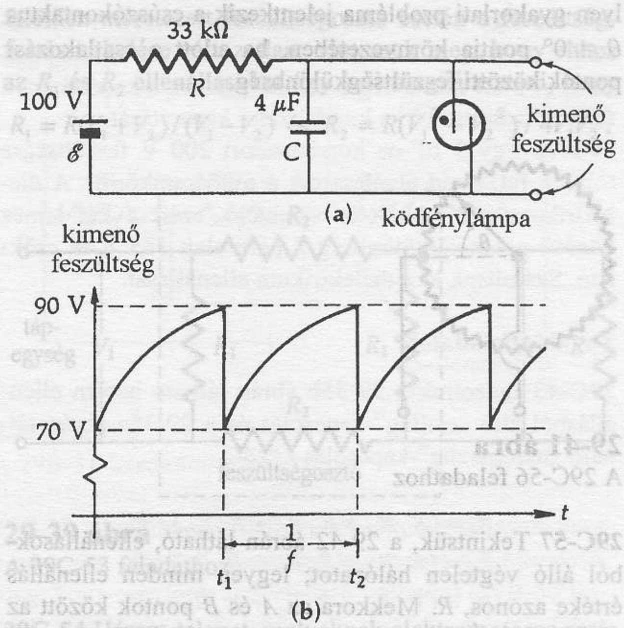
29-44 ábra
A 29C-61 feladathoz

29C-62 Tekintsük a 29-45 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron nincs töltés; a $t = 0$ időpontban az S kapcsolót zárjuk. a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12}, i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövő feszültségesések (v_{12}, v_{15} és v_c) kezdeti (közvetlenül $t = 0$ utáni) értékét foglalja össze. b) Készítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek sztacionárius értékeivel.



29-45 ábra
A 29C-62 feladathoz

29C-63 A 29-46 ábrán egyszerű fűrészfog-jelgenerátor kapcsolási rajza látható. A neon izzólámpa ellenállása nagyon kicsi, ha a rákapcsolt feszültség eléri a 90 V-os küszöböt, de amikor a feszültség 70 V alá esik, akkor az izzó gyakorlatilag már nem vezeti az áramot. Számítsuk ki az oszcillátor f frekvenciáját.



29-46 ábra
A 29C-63 feladathoz

XXVII. Fejezet

27A-1 0,885 pF
27A-3 a) $\frac{3}{5}C$ b) $3C$ c) C d) A kondenzátorok rövidre vannak zárva
27B-5 C
27B-7 $C = \varepsilon_o A(a + b)/[b(a - b)]$
27B-9 A válasz adott.
27B-11 A válasz adott.
27B-13 A válasz adott.
27B-15 a) 400 pC b) 80 V
27B-17 0,188 m^2
27B-19 $C = C_o/(1 - f)k$
27B-21 $2\pi\varepsilon_o L\kappa_1\kappa_2\left[\kappa_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \kappa_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$
27A-23 a) 1,60 mJ b) 0,800 mJ
27B-25 A válasz adott.
27B-27 a) 600 nC, csökken b) 30 μJ, csökken c) 30 μJ
27B-29 A válasz adott.
27C-31 A válasz adott.
27C-33 267 V
27C-35 $C/L = \kappa 2\pi\varepsilon_o/[\ln(b/a)]$
27C-37 $1/(1 + \kappa)$
27C-39 $CV^2/2d$
27C-41 A válasz adott.
27C-43 $1,41 \times 10^{-15}$ m

XXVIII. Fejezet

28A-1 $3,12 \times 10^{19}$ elektron/s
28B-3 a) $5,86 \times 10^{28}$ elektron/m^3 b) 51,9 mA c) $1,76 \times 10^{-6}$ m/s
28A-5 0,667 Ω
28A-7 418C°
28A-9 276C°
28B-11 1,56R
28B-13 1,66 V
28A-15 5,25 W
28A-17 a) 11,1 Ω b) 1,08 A
28A-19 a) 66,7%-kal nagyobb teljesítmény b) Nem
28A-21 $\rho L/\pi(b^2 - a^2)$
28B-25 a) 2,16 kW b) 1,34 hp c) 46,3%
28B-27 a) $9,36 \times 10^{11}$ részecske b) 6,00 W
28A-29 $6,00 \times 10^{-15}$ s
28B-31 $4,17 \times 10^6$ A/m^2
28B-33 A válasz adott.
28C-35 A válasz adott.
28C-37 A válasz adott.
28C-39 SI egységekben: a) $4000V^{2/3}$; $(2,50 \times 10^{-4})V^{5/2}$
28C-41 A válasz adott.
28C-43 8,32 h
28C-45 $(b - a)/4\pi ab\sigma$
28C-47 A válasz adott.
28C-49 A válasz adott.

XXIX. Fejezet

29A-1 220 Ω
29B-3 a) A b) B c) 4,50
29B-5 A válasz adott.
29B-7 $R_{AB} = \frac{7}{5}R$
29B-9 wattban: $10, 16, 24, 30, 40, 53\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}, 100, 160$
29A-11 9,20 V
29A-13 A válasz adott.
29A-15 A válasz adott.
29B-17 a) 5,00 Ω b) 6,00 A c) 2,00 A
29B-19 0,0860 Ω
29B-21 2,67 mA R_1-en;2,50 mA R_2-n;0,167 mA R_3-on
29B-23 A válasz adott.
29B-25 A válasz adott.
29B-27 a) 2,41 kΩ b) 2,46 kΩ
29B-29 a) 0,517% b) 0,103%
29B-31 $R_1 = 5,025 \times 10^{-3}$ Ω; $R_2 = 4,523 \times 10^{-2}$ Ω; $R_3 = 4,523 \times 10^{-1}$ Ω; $R_4 = 4,523$ Ω
29B-33 A válasz adott.
29A-35 A válasz adott.
29B-37 0,587 MΩ
29B-39 A válasz adott.
29B-41 1,44 μF
29C-43 $R_1 = (R_AR_B + R_BR_C + R_CR_A)/R_C$; $R_2 = (R_AR_B + R_BR_C + R_CR_A)/R_A$; $R_3 = (R_AR_B + R_BR_C + R_CR_A)/R_B$;
29C-45 $R_A = R_1R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$; $R_B = R_1R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$; $R_C = R_2R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;
29C-47 $R(1 + \sqrt{3})$
29C-49 A válasz adott.
29C-51 A válasz adott.
29C-53 A válasz adott.
29C-55 201 Ω
29C-57 $R/2$
29C-59 163 V; 1.43 MΩ
29C-61 0,050 J R_1-en; 0,0167 J R_2-n
29C-63 6,90 Hz

XXX. Fejezet

30A-1 $1,86 \times 10^{-6}$ m/s
30B-3 $F = 1,44 \times 10^{-13}\,\hat{y} - 3,36 \times 10^{-13}\,\hat{z}$ (newtonban)
30A-5 1,20 keV
30A-7 0,357 T
30B-9 $R_\alpha = R_p = 42,8R$
30B-11 $R = \sqrt{2mV/qB^2}$
30A-13 $7,78 \times 10^5$ m/s
30B-15 $2,44 \times 10^5$ V/m
30B-17 b) 0,708 T