Ⓐ Az elektromágneses tér forrásmennyiségei és a köztük lévő kapcsolat

Az EMT forrása: <u>töltés</u> és <u>áram</u> Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

<u>TÖLTÉS</u>

- $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$ $Q = 1\,pC$ $N \approx 10^{17}$

- töltésmegmaradás

- $|F| = \dfrac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{4\pi\varepsilon\, r_{12}^2}$ $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ $\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{4\pi 9} \dfrac{As}{Vm}$

permittivitás

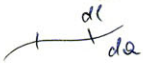
<u>töltésmodellek:</u>

pontszerű Q_k $Q(t) \Rightarrow [As]\ [C]$

térfogati  dV dQ $\lim\limits_{dV \to 0} \dfrac{dQ}{dV} = \rho(r,t)$ $\left[\dfrac{C}{m^3}\right]$

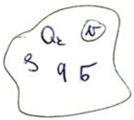
felületi  da dQ $\lim\limits_{da \to 0} \dfrac{dQ}{da} = \sigma(r,t)$ $\left[\dfrac{C}{m^2}\right]$

vonalmenti



$\lim\limits_{dl \to 0} \dfrac{dQ}{dl} = q(r,t)$ $\left[\dfrac{C}{m}\right]$

összegezve:



$$\underset{\sim}{Q^{(t)}} = \int_v \rho(r,t)\,dv + \int_a \sigma(r,t)\,da + \int_l q(r,t)\,dl + \sum_k Q_k$$

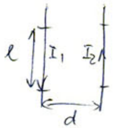
időtől függő modell

<u>ÁRAM</u> a töltés időbeli megváltozása

$I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$ $[A]$

μ: mágneses permeabilitás

$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \dfrac{Vs}{Am}$

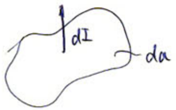


$|F| = \dfrac{I_1 I_2}{2\pi d} \mu l$

árammodellek.

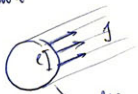
áramsűrűség

felületi



$$\vec{J}(\bar r,t) = \lim_{da\to 0} \frac{dI}{da}$$

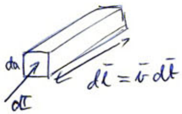
vonalmenti



vonalra merőleges

$$K = \lim_{dl\to 0} \frac{dI}{dl}$$

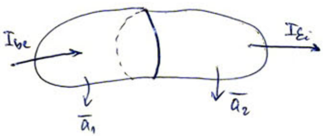
$$I = \int_a \bar J(r,t)\,da + \int_l \vec K \vec n\, dl$$



$$\bar J = \frac{d\bar I}{da} = \frac{dQ}{dt}\cdot\frac{1}{da} = \frac{\rho\, dv}{dt\, da} = \frac{\rho\, d\bar l}{dt} = \rho \cdot v$$

$$\bar J(\bar r,t) = \rho^+ \cdot \bar v^+ + \rho^- \cdot \bar v^-$$

Kapcsolat: $(\bar J(\bar r,t)$ és $\rho(\bar r,t))$



$$I_{be} - I_{ki} = \frac{dQ}{dt}$$

$$-\int_{a_1} \bar J\, da - \int_{a_2} \bar J\, da = \frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv =$$

$$= \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = -\oint_a \bar J\, d\bar a \overset{G.O.}{=} -\int_v \operatorname{div} \bar J\, dv$$

$$\int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar J\right) dv \equiv 0$$ töltésmegmaradás

$$\operatorname{div} \bar J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ folytonossági egyenlet

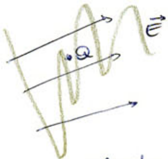
2. Az elektromágneses tér intenzitásvektorai és kapcsolatuk

Térjellemzők: E D H B

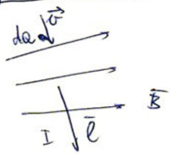
Intenzitás: elektromos térerősség ($\vec{E}$), mágneses indukció ($\vec{B}$)

Elektromos térerősség: $\vec{E}(\vec{r},t)$

$$\frac{\vec{F}}{Q}=\vec{E} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$ egységnyi töltetre ható erő

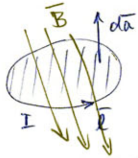


Mágneses indukció:



$$d\vec{F}=dQ(\vec{v}\times\vec{B}) = dQ\left(\frac{d\vec{l}}{dt}\times\vec{B}\right)=\frac{dQ}{dt}(d\vec{l}\times\vec{B})=I(d\vec{l}\times\vec{B})$$

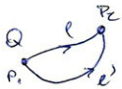
vezetőre: $\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{B=\frac{F}{I\cdot l}}$ $\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$



mágneses dipólus: $m=\vec{I}d\vec{a}$

$\vec{T}=\vec{m}\times\vec{B}$ forgatónyomaték

Elektromos feszültség, potenciál



$P_1 - P_2$ fesz: $$U_{12}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}d\vec{l}$$

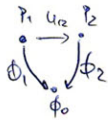
$$W_{12}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}d\vec{l}=Q\underbrace{\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}dl}_{l}=QU_{12}=Q\underbrace{\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}d\vec{l}}_{l'}=Q\cdot U$$

$$\int_{P_1(l)}^{P_2}\vec{E}dl-\int_{P_1(l')}^{P_2}\vec{E}dl=0$$

$$\boxed{\oint_l \vec{E}dl=0}$$ → időben állandó EMT esetén — konzervatív vektortér

potenciál: $W(P_0)=0$ $\quad W_{PP_0}=Q\int_{P_0}^{P}\vec{E}d\vec{l}=Q\cdot\phi(P)$

$$\phi(P)=\int_{P}^{P_0}\vec{E}d\vec{l}$$

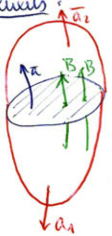


$U_{12}=\phi_1-\phi_2$

skalárpotenciál: $\varphi(r)=\int_{r}^{r_0}\vec{E}d\vec{l}$

$d\varphi=-\vec{E}d\vec{l}$ $\quad E=-\mathrm{grad}\,\varphi$

mágneses fluxus:



$$\boxed{\Psi = \int_a \bar B \, d\bar a}$$

$$\int_{a_1} \bar B \, d\bar a_1 = \int_{a_2} \bar B \, d\bar a_2$$

$$\boxed{\oint_a \bar B \, d\bar a = 0}$$

G-O.

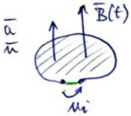
$$\int_v \mathrm{div}\, \bar B \, dv = 0$$

forrásmentes.

- sehol nem eredődik
- sehol nem végződik

$$\boxed{\mathrm{div}\, \bar B = 0}$$

Intenzitások kapcsolata: $\left(\bar E(\bar r, t),\ B(\bar r, t)\right)$



Faraday

$$u_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \boxed{\oint_l \bar E \, d\bar l} = -\frac{d}{dt}\int_a \bar B \, d\bar a = \boxed{-\int_a \frac{\partial \bar B}{\partial t} \, d\bar a}$$

$$\oint_l \bar E \, d\bar l = \int_a \mathrm{rot}\, \bar E \, d\bar a = -\int_a \frac{\partial \bar B}{\partial t} \, d\bar a$$

STOKES

$$\int_a \left(\mathrm{rot}\, \bar E + \frac{\partial B}{\partial t}\right) d\bar a \equiv 0$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \bar E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \bar E) \equiv 0 \Rightarrow -\mathrm{div}\frac{\partial \bar B}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\, \bar B)}_{\text{mágn. indukció időbeni megváltozása is nulla.}} = 0$$

3.) Az elektromágneses tér gerjesztettség vektorai és kapcsolatuk

$\bar D$ eltolási vektor (villamos fluxussűrűség) $\boxed{\bar D = \varepsilon_0 \bar E}$ $\frac{As}{m^2}$ $\bar D(\bar r, t)$

$\bar H$ mágneses térerősség $\boxed{\bar H = \frac{1}{\mu_0} \bar B}$ $\frac{A}{m}$

$$\underbrace{\boxed{\oint_a \bar E d\bar a = \frac{1}{\varepsilon_0} Q}}_{\text{elektromos Gauss}}$$

$$\oint_l E dl = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_l D dl = Q$$

$$\rightarrow \oint_a \bar D d\bar a = \int_v \rho dv$$

$\downarrow$ G.O.

$$\int_v \mathrm{div}\,\bar D dv = \int_v \rho dv \rightarrow \int_v (\mathrm{div}\,\bar D - \rho) dv = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar D = \rho}$$

nem forrásmentes.

gerjesztettség törvénye

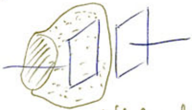
$$\boxed{\oint_l \bar B d\bar l = \mu \int_a \bar J d\bar a}$$

$$\frac{\bar B(r,t)}{\mu} = \bar H(r,t)$$

$$\boxed{\oint_l B dl = \mu_0 I}$$

$$\boxed{\oint_l \bar H dl = \int_a \bar J d\bar a}$$

$\oint \bar J d\bar a = 0$ időfüggetlen áramvezető esetén



$\rightarrow$ a két burkolón nem ugyanaz.

töltésfelhalmozódás

$$\oint_a \bar J d\bar a + \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0$$

$\downarrow$ G.O.

$$\int_v \left(\mathrm{div}\,\bar J + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\bar J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

folytonossági egyenlet

$$\mathrm{div}\,\bar J + \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\,\bar D = 0$$

$$\mathrm{div}\,\bar J = -\mathrm{div}\frac{\partial \bar D}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\left(\vec J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = 0.$$

vezetési áram, eltolási áram

$$J_{total} = J + \frac{\partial \bar D}{\partial t}$$

$$\boxed{\oint_l \bar H d\bar l = \int_a \left(\bar J + \frac{\partial \bar D}{\partial t}\right) da}$$

$\int$ Stokes

$$\int_a \mathrm{rot}\,\bar H d\bar a \quad \boxed{\mathrm{rot}\,\bar H = \bar J + \frac{\partial \bar D}{\partial t}}$$

differenciális gerj. tv.

4. Az elektromágneses tér térjellemzőire vonatkozó folytonossági és peremfelt.

polarizációs vektor: $\bar{P} = \lim_{dv \to 0} \frac{1}{dv} \sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i$ $\quad \vec{p}_i = Q_i \vec{l}_i$

$$\bar{P} = \varepsilon_0 K \cdot \bar{E} \qquad \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+K)}_{\varepsilon_r} \bar{E}$$

mágnesezettség $\bar{M} = \lim_{dv \to 0} \frac{1}{dv} \sum_{i=1}^{N_1} \bar{m}_i = \bar{M}$ $\quad \bar{m} = I d\bar{a}$ keringő elektron köráramа

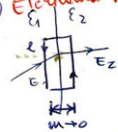
$$\bar{M} \sim K \bar{H} \qquad \bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 \underbrace{(1+K)}_{\mu_r} \bar{H}$$

beiktatott térerősség: a töltéseket szétválasztó erő

$$\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_b)$$

Határfeltételek

1. Elektromos térerősség



$$\oint_l E dl = - \int_a \frac{\partial B}{\partial t} d\bar{a}$$

$$-E_{1t} \cdot l + E_{2t} \cdot l = 0$$

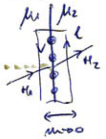
$$\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \bar{e} d\bar{l} = 0, \text{ ha } dl \to 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

ha az egyik közeg ideális vezető $\Rightarrow \sigma \to \infty$, $\frac{1}{\sigma} \to 0$

$\underline{E_t = 0}$.

2. Mágneses térerősség



$$\oint_l H dl = \iint_a \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{a}$$

$$-H_{1t} \cdot l + H_{2t} \cdot l = K_n \cdot l$$

ha $J = 0 \Rightarrow H_t$ folytonos

ha ferromágneses $\mu \to \infty$

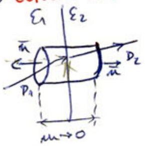
$H = \frac{B}{\mu} \to 0 \Rightarrow \underline{H_t = 0}$.

$$\boxed{H_{2t} - H_{1t} = K_{\vec{n}}}$$

a felület síkjában folyó áram esetén

a felületi áramsűrűségnek megfelelően ugrik a tangenciális összetevő

3. Eltolási vektor



$$\oint_a D d\bar{a} = \int_v \varrho dv = \frac{\varrho dl \Delta A}{\sigma}$$

$$-D_{1n} a + D_{2n} a = \sigma A$$

$m \to 0 \Rightarrow \Psi \to 0$

$\lim_{m \to 0} \varrho dl = \sigma$

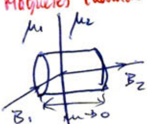
$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma A}$$

felületi töltés

ugrik, ha a közeghatáron felületi töltés helyezkedik el

$$\boxed{D_{2n} = D_{1n}}$$

4. Mágneses indukció

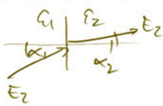


$$\oint_a B d\bar{a} = 0$$

$$-B_{1n} a + B_{2n} a = 0$$

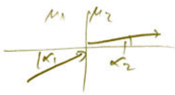
$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$

Törési törvény:



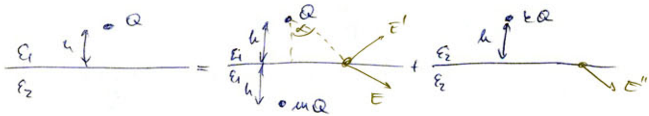
$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \cdot \frac{E_{2n}}{E_{2t}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{D_{2n}}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{D_{1n}} = \underline{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \qquad \text{ha } \sigma = 0$$

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \cdot \frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}} = \underline{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$



ha $K = 0$

Folytonossági feltételek ~ dielektromos tükrözés



$E_{1t}=E_{2t}$: $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{1}{R^2}\sin\alpha+\frac{mQ}{4\pi\varepsilon_1}\frac{1}{R^2}\sin\alpha=\frac{kQ}{4\pi\varepsilon_2}\frac{1}{R^2}\sin\alpha$

$$\frac{(1+m)}{\varepsilon_1}=\frac{k}{\varepsilon_2}$$

$D_{1n}=D_{2n}$: $\frac{Q}{4\pi R^2}\cos\alpha-\frac{mQ}{4\pi R^2}\cos\alpha=\frac{kQ}{4\pi R^2}\cos\alpha$

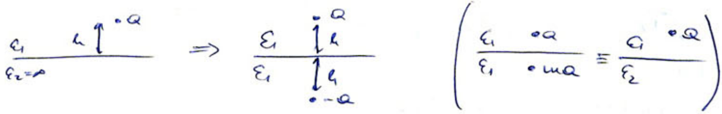
$$1-m=k$$

$$\varepsilon_2(1+m)=\varepsilon_1(1-m)$$

$$\boxed{m=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

$$\boxed{k=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

ha $\varepsilon_2=\infty$: $m=-1$, $k=0$



Dirichlet – elektród $E_t=0$

Neumann – erővonal $E_n=0$ $\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\varepsilon=0$

inhom N: $D_n=-\text{grad}\,\varphi\cdot\vec{n}$

$E=-\text{grad}\,\varphi=E_t+E_n$

① A Maxwell-egyenletek integrális és differenciális alakjai

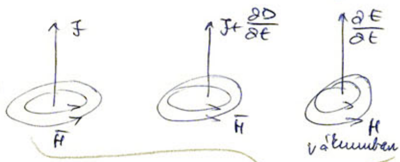
I. Általánosított gerjesztési törvény

$$\oint_l \bar{H}\,d\bar{l} = \int_a \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{a}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial D}{\partial t}}$$

folytonossági egyenlet!

örvényfenntartó!

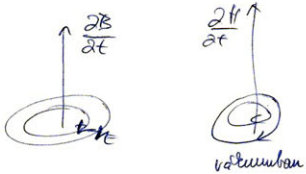


a vezetési és az eltolási áram együtt divergenciamentes

II. Faraday indukciós törvény

$$\oint_l \bar{E}\,d\bar{l} = -\int_a \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{a}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$



III. Nincs mágneses töltés — Mágneses Gauss

$$\oint_a \bar{B}\,d\bar{a} = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{B} = 0}$$

IV. Elektromos Gauss

$$\oint_a \bar{D}\,d\bar{a} = \underbrace{\int_V \rho\, dv}_{\text{összes töltés}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho}$$

V. Az anyag jelenléte

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} = \mu_0 (H + \bar{M})$$

$$\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_b)$$ differenciális Ohm-tv.

VI. $w = \frac{1}{2} \bar{E}\bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H}\bar{B}$ $\qquad w = \frac{1}{2} \bar{E}\bar{D}^* + \frac{1}{2} \bar{H}^*\bar{B}$

—o—

I: $\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{H} \equiv 0 = \mathrm{div}\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right)}_{\text{folytonossági egyenlet}}$

II. $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{E} \equiv 0 = \mathrm{div}\left(-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\bar{B}}_{\mathrm{div}\,\bar{B} = \text{áll.} = 0.}$

Mondanivaló:

- diffegyenletek: egy pont kicsiny környezetét írják le ("közelhatás")
- evolúciós egyenletek: a tér pillanatnyi értékeinek ismeretében leírják a tér jövőbeni alakulását
- a megoldást az adott időpillanattól kezdve keressük
  → a jelenség előzetes kezdeti feltételekkel adjuk meg
-

Külvilág: zárt térrészre peremfeltételek.

nyitott végtelenbe tartanak és határérték

⑥ Az elektrodinamika felosztása
Maxwell-egyenletek: tér- és időfüggő egyenletek.

1. Időben állandó EMT $\frac{\partial}{\partial t}(.)=0$
(időtől független)

elektromos és mágneses egyenletek függetlenek

ELEKTROSZTATIKA

$\mathrm{rot}\,\bar{E}=0 = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\bar{D}=\varrho$

$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}+\cancel{\bar{P}}$

MAGNETOSZTATIKA

$\mathrm{rot}\,\bar{H}=0 = \bar{J}+\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $(\bar{J}=0)$

$\mathrm{div}\,\bar{B}=0$

$B=\mu_0(H+\cancel{M})$

STACIONÁRIUS ÁRAMLÁS

$\mathrm{rot}\,\bar{E}=0$

$\mathrm{div}\,\bar{J}=0$

$\bar{J}=\sigma(\bar{E}+\bar{E}_b)$

$\bar{J}\neq 0$, de a többi mennyiség az időben nem vált.

STACIONÁRIUS MÁGNESES

$\mathrm{rot}\,\bar{H}=\bar{J}$

$\mathrm{div}\,\bar{B}=0$

$B=\mu_0(\bar{H}+\cancel{M})$

$\bar{J}$ adott

2. Időben változó EMT ⇝ elektromágneses hullámok

a) lassan változó: ⇝ eltekintünk az eltolási áramtól

$\left|\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right| \ll |\bar{J}|$ → kvázistacionárius

az elektromos tér által keltett mágneses tértől eltekintünk

$\mathrm{rot}\,\bar{H}=\bar{J}$

$\mathrm{rot}\,\bar{E}=-\frac{\partial B}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\bar{J}=0$

$\mathrm{div}\,\bar{B}=0$

$\bar{J}=\sigma\bar{E}$

$\bar{B}=\mu\bar{H}$

b) elektromágneses hullámok
a Maxwell-egyenletek teljes rendszere

① ②

$|\sigma\bar{E}| \gg |j\omega\bar{E}\varepsilon|$

$\sigma \gg \omega\varepsilon = 2\pi f\varepsilon$

$f<\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}$

pl. talaj: 20 MHz
→ már összemérhető a vezetési és az eltolási.

$\mathrm{rot}\,H=(\sigma+j\omega\varepsilon)E$

⑦ Az elektromágneses tér energiasűrűségre és energiaáramlására vonatkozó összefüggései
(energiamérleg)
mondott csak az elektromos térerősség végez.

$$F = Q \cdot E \sim F = \rho \cdot E \rightsquigarrow \underline{P} = F \cdot v = \rho E v = E \rho v = \underline{E J}$$

$$-\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\text{energia-sűrűség}} = \underbrace{\operatorname{div} \bar{S}}_{\text{energiaáram vektor}} + \bar{E}\bar{J}$$

$$\text{I.} \quad \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad / \cdot \bar{E} \quad \Rightarrow \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{E}\bar{J} + E \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\text{II.} \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad / \cdot \bar{H} \quad \Rightarrow \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} = -\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\text{II.} - \text{I.} \quad \underbrace{\bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H}}_{\operatorname{div}(\bar{E} \times \bar{H})} = -\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \bar{E}\bar{J}$$

Poynting-tétel: $\boxed{-\left(E \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + H \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\bar{E} \times \bar{H}) + \bar{E}\bar{J}}$

$$dw = \bar{E} d\bar{D} + \bar{H} d\bar{B} \quad \text{ell} \Rightarrow \boxed{w = \frac{1}{2} \bar{E}\bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H}\bar{B} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2}$$

Poynting-vektor: az energiaáramlást leíró vektor

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \bar{E}\bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H}\bar{B}\right) dV = \underbrace{\oint_A (E \times H) d\bar{A}}_{\text{a felületen}} + \underbrace{\int_V \bar{E}\bar{J}\, dV}_{\text{térfogatban}}}$$

$$\bar{J} \cdot \bar{E} = \frac{(|\bar{J}|)^2}{\sigma} - \bar{J}\bar{E}_b$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V (\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B}) dv}_{\text{az EMT munkája}} + \underbrace{\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV}_{\text{Joule-hő}} - \underbrace{\int_V \bar{J}\bar{E}_b\, dv}_{\text{generátor}} + \underbrace{\oint_a (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{a}}_{\text{kisug.}} = 0$$

EMT- impulzus:

$$\bar{g}(\bar{r},t) = \varepsilon_0\mu_0\,\bar{S}(\bar{r},t) = \varepsilon_0\mu_0(\bar{E}\times\bar{H}) = \frac{1}{c^2}\cdot S$$

$$\dot{\bar{g}} = \frac{df}{dt} = \underset{\text{erősűrűség}}{F}$$

Lorentz: $F = Q(\qquad) = \int_V \underbrace{f(\bar{r},t)}_{\substack{\text{térfogati}\\ \text{erősűrűség}}} dv$

Komplex-Poynting: $\bar{S} = \frac{1}{2}(E\times H^*)$

$$P + jQ = \oint_A \bar{S}\,dA$$

$W(t) = \int_V \underbrace{w(\bar{r},t)}_{\text{energiasűrűség}} dv$ $\quad [w] = \frac{Ws}{m^3}$

$P(t) = \int_V \underbrace{p(r,t)}_{\text{telj. sűrűség}} dv$ $\quad [p] = \frac{W}{m^3}$

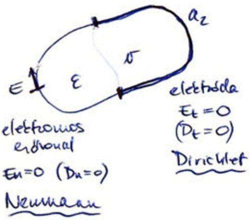
$P_S(t) = \oint_A \underbrace{\bar{S}(\bar{r},t)}_{\text{Poynting}} d\bar{a}$ $\quad [S] = \frac{W}{m^2}$

$$\int_V \left(\frac{dw}{dt} + p + \operatorname{div}S\right)dv = 0$$

$$\frac{dw}{dt} + p + \operatorname{div}S = 0$$

8. Az elektrosztatika Poisson-egyenlete és megoldása

a Maxwell egyenletek megoldása a V_1 és V_2 térfogatban
az a_1, a_2 <u>peremfeltételek</u> és az a_{12} <u>folytonossági feltétel</u> kielégítésével



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\bar{E}=0 \\ \mathrm{div}\,\bar{D}=\rho \\ \bar{D}=\varepsilon\bar{E} \\ w=\frac{1}{2}\bar{E}\bar{D} \end{array}\right\}$$

+ határfeltételek
elektródon $E_t=0$
erővonal $E_n=0$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E}=0 \Rightarrow E=-\mathrm{grad}\,\phi \qquad (\mathrm{rot}(-\mathrm{grad}\,\phi)=0)$$

ϕ: elektromos skalárpotenciál

$$\mathrm{div}\,\bar{D}=\mathrm{div}(\varepsilon\bar{E})=\underbrace{-\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\phi)}=\rho$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]=\rho$$

ha ε=áll., homogén izotrop közeg

$$-\varepsilon\,\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}}_{\text{Laplace-operáció}}\,\phi=\rho$$

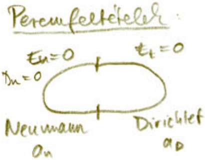
$$\boxed{-\Delta\phi=\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Laplace - Poisson egyenlet
(hom.) (inhom.)

<u>Descartes-rendszerben:</u>

$$-\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right]=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

<u>Peremfeltételek:</u>



$$\bar{E}=-\mathrm{grad}\,\phi=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\bar{e}_\tau+\frac{\partial\phi}{\partial n}\bar{e}_n\right)=\bar{E}_t+\bar{E}_n$$

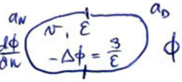
$E_t=0=\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=0$
a skalárpotenciál változatlan
$\phi|_\tau$= áll. → ekvipotenciális!
Dirichlet peremfeltétel
<u>ELEKTRÓDA</u>

$D_n=0=-\frac{\partial\phi}{\partial n}\varepsilon=0$
homogén
Neumann-feltétel
<u>ERŐVONAL</u>

inhomogén Neumann-feltétel:
$D_n\neq0 \rightarrow D_n=\sigma_N$ ~ a felületen elhelyezkedő töltések

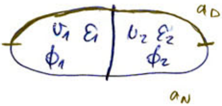
$$\sigma_N=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n}=-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\phi\,\bar{n}$$

Általfogalmazás:



$\sigma_N = \varepsilon \frac{d\phi}{dn}$ $\quad \phi = \phi_D$

több réteg esetén:



$v_1: \quad -\Delta\phi_1 = \frac{\rho_1}{\varepsilon_1}$

$v_2: \quad -\Delta\phi_2 = \frac{\rho_2}{\varepsilon_2}$

$a_D: \quad \phi_1 = \phi_{Di1}$
$\qquad \phi_2 = \phi_{Di2}$

$a_n: \quad \sigma_{1N} = -\varepsilon_1 \frac{d\phi_1}{dn}$
$\qquad \sigma_{2N} = -\varepsilon_2 \frac{d\phi_2}{dN}$

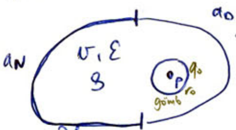
folytonossági feltétel a közös felületen:

$a_{12} \qquad E_{1t} = E_{2t} \;\rightarrow\; \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau}$

$\Longrightarrow \phi_1 = \phi_2$

$D_{1n} = D_{2n} \;\rightarrow\; -\varepsilon_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial n_1} = -\varepsilon_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}$

Megoldás



$\phi = \phi_D$

$\sigma_N = -\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial n}$

$$\underbrace{-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\phi(P) = ?}$$

bevezetjük $\underline{u(\bar r)}$ és $\underline{\phi(\bar r)}$ skalár-vektor függvényeket.
$\bar r \in v$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad}\phi) &= \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}\phi + u \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi \\ \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} u) &= \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad} u + \phi \operatorname{div}\operatorname{grad} u \end{aligned}\right\} \pm \int_v$$

$$\boxed{\int_v (u\Delta\phi - \phi\Delta u)\, dv = \oint_a (u \operatorname{grad}\phi - \phi \operatorname{grad} u)\, d\bar a}$$ Green III.

legyen $u = \frac{1}{r}$, ϕ elektromos skalárpotenciál.

$$\int_v \left[\frac{1}{r}(\Delta\phi) - \phi\left(\Delta\frac{1}{r}\right)\right] dv = \oint_a \left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}\phi - \phi \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right] d\bar a$$

$$\int_v \left[\frac{1}{r}(\Delta\phi) - \phi\left(\Delta\frac{1}{r}\right)\right] dv = \oint_a \left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}\phi - \phi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right] d\bar a$$

$$\Delta\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}}_{-\frac{1}{r^2}}\right) = 0 \Rightarrow \text{kiesik.}$$

$$\int_v \frac{1}{r}(\Delta\phi)\,dv = \int_a\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\phi - \phi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)d\bar a + \int_{a_0}\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\phi - \phi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)d\bar a$$

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{a_0}\frac{1}{r}\operatorname{grad}\phi\, d\bar a = \lim_{r_0\to 0}\frac{1}{r_0}\cdot|\operatorname{grad}\phi|\,4r_0^2\pi = 0$$

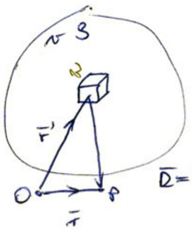
$\Downarrow$ kiesik.

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{a_0}\phi\underbrace{\left(-\frac{1}{r_0^2}\right)d\bar a}_{\frac{1}{r_0^2}4\pi r^2} = 4\pi\phi(r_0) = 4\pi\phi(P)$$

$$\bar r_0 = -\bar n$$

$$\phi(P) = \frac{\oint_a\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\phi - \phi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)d\bar a - \int_v\frac{1}{r}(\Delta\phi)\,dv}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int_v -\frac{\Delta\phi}{r}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a=a_0\cup a_N}\frac{1}{r}\varepsilon\operatorname{grad}\phi\, d\bar a - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a=a_D\cup a_N}\phi\,\varepsilon\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\bar a$$

$$\varepsilon\operatorname{grad}\phi = \varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n} = \sigma_N$$



$$\bar R = \bar r - \bar r'$$

$$\boxed{\phi(P) = \int_{v'}\frac{1}{4\pi}\frac{\rho(\bar r')}{\varepsilon|R|}dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_N}\frac{1}{|R|}\cdot\sigma_N(\bar r')\,d\bar a - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_D}\phi_D\,\varepsilon\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\bar a}$$

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho(\bar r)}{|R|}dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_N}\frac{\sigma_N}{|R|}da' - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_D}\phi_D\,\varepsilon\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\bar a$$

pl. 3D $\quad a_D \equiv 0$

$$\phi(\bar r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'} \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}\, dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{1}{|\bar r - \bar r'|}\,\sigma_N(\bar r')\, da'$$

2D

$$\phi(\bar r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_a \ln\frac{1}{R}\,\rho(\bar r')\, da' + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_l \ln\frac{1}{R}\,\sigma_N(\bar r')\, dl'$$

nyitott térrész: $\quad a_D \equiv 0 \qquad a_a \to \infty$

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\bar r')}{|\bar R|}\, dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{1}{R}\, Q$$

⑨ Az áramlási tér alapösszefüggései $\frac{\partial}{\partial t}=0$ $\underline{\text{stac.}}$ $\bar{J}\neq 0$ $\underline{\text{áramlási}}$

$\text{rot}\, E = 0$

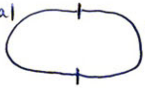
$\text{div}\, \bar{J} = 0$

$\bar{J} = \sigma(\bar{E}+\bar{E}_b)$

áramvonal

$J_t \neq 0$

$J_n = 0$



elektróda

$E_n \neq 0$

$E_t = 0$

$\text{rot}\,\bar{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = -\text{grad}\,\phi$

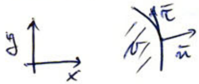
$\text{div}\,\bar{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}\,\sigma(E+\bar{E}_b) = -\text{div}\,\sigma\,\text{grad}\,\phi + \text{div}\,\bar{J}_b = 0$

$\sigma = \text{áll.}$

$$-\text{div}\,\text{grad}\,\phi = -\Delta\phi = -\frac{1}{\sigma}\,\text{div}\,\bar{J}_b = g$$

$$\boxed{-\Delta\phi = g} \qquad \text{ha } \bar{J}_b = 0 \Rightarrow \boxed{-\Delta\phi = 0}$$

Peremfeltételek: (2D)



$(x,y,z)\ \frac{\partial}{\partial z} = 0$

$(r,\varphi,z)\ \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\bar{E} = -\text{grad}\,\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\bar{e}_t + \frac{\partial\phi}{\partial n}\bar{e}_n\right) = \bar{E}_t + \bar{E}_n$$

elektróda: $E_t = 0 = \frac{\partial\phi}{\partial\tau}$

$\phi|_\tau = \text{áll.}$ ekvipotenciális felület

Dirichlet - peremfeltétel

áramszál: $J_n = 0 = \sigma E_n = -\sigma\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ Kell

ha $J_n \neq 0 \Rightarrow J_n = -\sigma\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\sigma\,\text{grad}\,\phi\cdot\bar{n}$

Neumann - peremfeltétel

az elektrosztatikára vezettük vissza az áramlási tér feladatát

$-\sigma\frac{\partial\phi}{\partial n} = J_n$ a_N $\boxed{-\Delta\phi = g}$ a_D $\phi|_{a_D} = \phi_0$ elektróda

$C = \frac{\oint \varepsilon E d\bar{a}}{\int E d\bar{l}}$ $\quad G = \frac{\oint \sigma E d\bar{a}}{\int E d\bar{l}}$

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

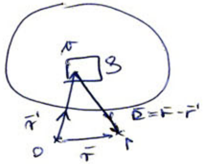
Analógia:

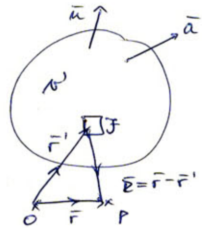
$\oint D d\bar{a} = Q$ $\quad \oint_a J d\bar{a} = I$

El.sztat.	$\bar{D}$	$\bar{E}$	ϕ	$D=\varepsilon E$	ε	$C = \frac{Q}{U}$	Q
Stac. áramlás	$\bar{J}$	$\bar{E}$	ϕ	$\bar{J}=\sigma E$ $(E_b=0)$	σ	$G = \frac{I}{U}$	I

Stac. áramlási feladatok megoldása:

(p1) elsztat. ⟹ Stacár.





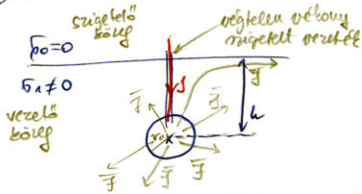
$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}\,dv'$$

$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi\sigma}\int_{v'} \frac{\bar J(\bar r')\,\bar n}{|\bar r-\bar r'|}\,dv'$$

gömb: $E=\frac{1}{4\pi\sigma r^2}$ $\quad \varphi(r)=\frac{1}{4\pi\sigma r}$ $\quad U_{12}=\varphi(r_1)-\varphi(r_2)=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

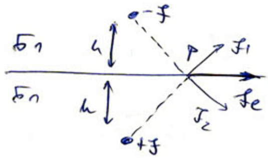
vonal: $E=\frac{1}{2\pi\sigma r}$ $\quad \varphi(r)=\frac{1}{2\pi\sigma}\ln\frac{r_0}{r}$ $\quad U_{12}=\frac{1}{2\pi\sigma}\ln\frac{r_2}{r_1}$

(p2) tükrözés



ideális gömb földelektróda

=



~ elsztat.

(p1.) Ellenállás:

$$\frac{1}{G}=R=\frac{U}{I}=\frac{\int_l \bar E\,d\bar l}{\int_a \sigma \bar E\,d\bar a}=\frac{1}{\sigma}K$$

geometriától függő konstans

$$\boxed{R=\frac{l}{\sigma a}}$$

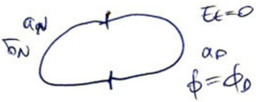
(10) Az elektrosztatika Laplace-egyenlete és a peremfeltételek.

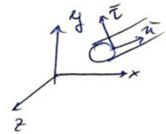
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\bar{E}=0 \\ \mathrm{div}\,\bar{D}=\rho \\ \bar{D}=\varepsilon_0\bar{E} \end{array}\right| \quad E=-\mathrm{grad}\,\varphi \Rightarrow \Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

A tér azon helyein, ahol nincs töltés, az egyenlet átmegy homogén-Laplace egyenletbe.

$$\boxed{\Delta\varphi=0} \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

<u>Peremfeltételek:</u>





$\boxed{2D}$: nincs z szerinti változás $\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$

$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}=0\right.$, ha henger $\rightsquigarrow \left.\phi(r,z)\right)$

$$\bar{E}=-\mathrm{grad}\,\phi=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\bar{e}_\tau+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\bar{e}_n\right)=\bar{E}_t+\bar{E}_n$$

<u>elektróda:</u> $E_t=0 \rightsquigarrow \frac{\partial\phi}{\partial\tau}=0 \Rightarrow \phi\big|_\tau=\text{áll.} \rightarrow$ ekvipotenciális

$\phi=\phi_0$ const. Dirichlet-felület

<u>erővonal:</u> $E_n=0 \rightsquigarrow -\frac{\partial\phi}{\partial n}\varepsilon=0 \rightarrow$ homogén Neumann-felület

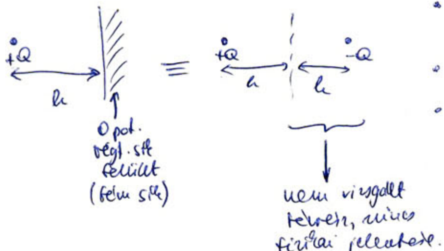
ha $D_n\neq0$ $\quad \underbrace{D_n=\sigma_N}_{\text{felületen elhelyezkedő töltés.}}=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n}=-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\phi\,\bar{n}$

11. Az elektrosztatikus feladatok megoldása helyettesítő töltések módszerével

Analitikus megoldási módszerek: hely. tölt., int. egy., PDE
↳ tükrözés!

<u>adott</u>: az el. sztat. feladatok megoldása adott töltéselrendezés és peremfeltételek esetén egyértelmű

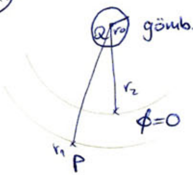
~> olyan elrendezést kell találnunk, amely ugyanazt a peremfeltételt biztosítja, mint az eredeti eset. → a kialakuló tér is ugyanaz.



- a vizsgált térrészben a töltéselrendezés az eredetinek megfelelő
- tükörtöltés a nem vizsgált térrészben
- a töltés és a tükörtöltés együtt előállítják a kívánt peremfeltételeket (sík 0 potenciálja)

Síkproblémák, kétdimenziós feladatok: ha végtelen hosszú vonaltöltések.

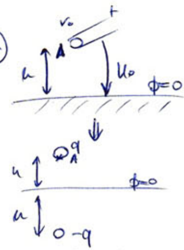
pl.



$$\phi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\phi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

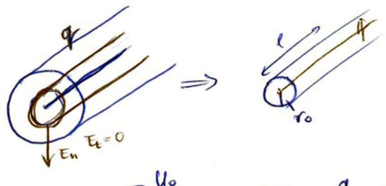
pl.



$$U_0 = \phi(A) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{h}{r_0} - \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{h}{2h-r_0} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h-r_0}{r_0} \approx \underline{\underline{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h}{r_0}}}$$

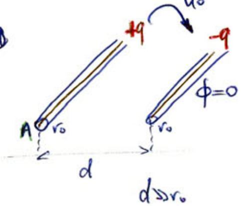
pl.



$l \gg r_0$

$$\frac{Q}{l} = q$$

pl.



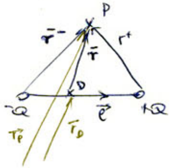
$d \gg r_0$

$$\phi(A) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d-r_0}{r_0} - \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_0}{d-r_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot 2\ln\frac{d-r_0}{r_0} \approx$$

$$\approx \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$$

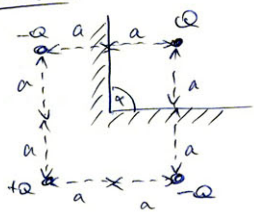
Elektromos dipólus:

$\bar p = Q\bar l$



$$\phi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{|\bar r|^+} - \frac{1}{|\bar r|^-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\underbrace{\frac{1}{|\bar r^+|} - \frac{1}{|\bar r^+ - \bar l|}}_{-\vec l\left[\mathrm{grad}_D \frac{1}{\bar r}\right] = \vec l\left[\mathrm{grad}_P \frac{1}{\bar r}\right]}\right)$$

Tükrözés:



$\alpha = \frac{\pi}{n} \Rightarrow n = 1,2,3,\dots$

→ véges számú tükrözéssel felírható ekvipotenciálisa

(12) Elektrosztatikus feladatok megoldása integrálegyenletek módszerével

Anal. módsz.: hely. tölt., int. egy., PDE,

→ az elektródafelületek előírt potenciálját biztosító töltéseloszlást keressük

„másodlagos töltések" → • fémelektródákon felület
• dielektrikum felszínén polarizációs
• inhomogén dielektrikumban

→ az ismert (elsődleges) és a keresett (másodlagos) töltések együtt olyan teret hoznak létre, mely eleget tesz a peremfeltételeknek.

Elektrosztatika: homogén üres térben lévő fémelektródák előírt potenciállal

pl. $$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}}\, dA_Q$$ → a keresett fgv.

mag

$\sigma(Q)$

$\sigma(Q)$-ból $\phi(\bar r)$ meghatározható. (egyértelmű)

$\sigma(Q)$-t keressük. (felületi töltés)

Elsőfajú lineáris integrálegyenlet általános alakja

$$\int_A \underbrace{K(P,Q)}_{\text{mag}}\cdot \underbrace{f(Q)}_{\text{keresett fgv.}}\cdot dA_Q = \underbrace{g(P)}_{\text{zavaró fgv.}}$$

A: P és Q közös tartománya

↓

N elektródára általánosítva integrálegyenlet-rendszerhez jutunk.

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\int_{A_i}\frac{\sigma_i(Q)}{r_{PQ}}\,dA_Q \qquad P\in A_i \quad i=1\dots N$$

K

$$\underline{\underline{K}}\cdot\underline{\sigma} = \underline{\varphi}$$

[adott töltésű elektróda: $\int_{A_i}\sigma(P)\,dA_P = Q_i$]

A mag:

3D-ben: $$K(P,Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\bar r_P - \bar r_Q|}$$ (Coulomb-potenciálból)

2D-ben: $$K(P,Q) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{|\bar r_P - \bar r_Q|}$$ (vonaltöltés potenciáljából)

↳ ha Φ_0 referencia kitöltött:

$$\phi(P) - \phi_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_e \sigma(Q)\ln\frac{1}{|\bar r_P - \bar r_Q|}\,dl$$

↓

síkbeli görbe, a végtelen henger alakú elektródák vezérgörbéjén.

Az integrálegyenlet egy megoldása:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{DD} & \underline{\underline{K}}_{DN} \\ \underline{\underline{K}}_{ND} & \underline{\underline{K}}_{NN} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma}_N \end{bmatrix}}_{\substack{\text{D és N} \\ \text{szerinti} \\ \text{felbontás}}} = \begin{bmatrix} \varphi_D \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{DD}\,\sigma + \underline{\underline{K}}_{DN}\,\sigma_N = \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\varphi_D}$$

$$\underline{\underline{K}}_{ND}\,\sigma + \underline{\underline{K}}_{NN}\,\sigma_N = \underline{\underline{1}}\,\varphi$$

$$\underset{\text{geom.}}{\underline{\underline{K}}} \cdot \underset{\text{töltés}}{\underline{\sigma}} = \underset{\text{pot.}}{\underline{\varphi}}$$

D – σ töltés
N – φ potenciál.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{DD} & 0 \\ \underline{\underline{K}}_{ND} & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\sigma} \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\text{ismeretlenek}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\underline{\underline{K}}_{DN} \\ 0 & -\underline{\underline{K}}_{NN} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \begin{bmatrix} \varphi_D \\ \sigma_N \end{bmatrix}$$

töltés.
potenciál

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma \\ \varphi \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{B}} \begin{bmatrix} \varphi_D \\ \sigma_N \end{bmatrix}}$$

(13) A véges differenciák módszere

→ numerikus közelítés

→ a leíró egyenleteket ill. a peremfeltételeket eleve közelítő módon írjuk le (diszkretizálás)

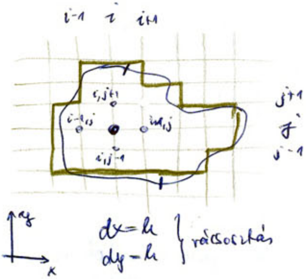
→ a megoldást diszkrét adatok sokaságával reprezentáljuk

$\boxed{2D}$ (általánosítható 3D-re)

$\Delta\varphi = 0$, $\vec{r} \in V$ feladat megoldása zárt tartományban,

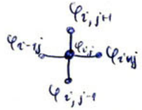
peremére: $\varphi = f(\vec{r})$ $\quad \vec{r} \in A_1$ $\quad$ Dirichlet $\quad A_1 \cup A_2 = A$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = g(\vec{r})$ $\quad \vec{r} \in A_2$ $\quad$ Neumann



$dx = h$, $dy = h$ } rácsosztás

$$-\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \phi\big|_{a_D} = \phi_D \qquad \frac{\partial \phi}{\partial n}\bigg|_{a_N} = \sigma_N$$



a szomszédos pontok potenciáljait másodfokú Taylor-polinommal köz.

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{ij} - h \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{ij} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\bigg|_{ij} \mp \dots$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{ij} + h \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{ij} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\bigg|_{ij} \pm \dots$$

$$\phi_{i,j+1} = \phi_{ij} + h \frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{ij} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\bigg|_{ij} \pm \dots$$

$$\phi_{i,j-1} = \phi_{ij} - h \frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{ij} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\bigg|_{ij} \pm \dots$$

$$\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} = 4\phi_{ij} + \overbrace{h^2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\bigg|_{ij} + \frac{2}{2}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\bigg|_{ij}\right)}^{\Delta\varphi = \emptyset}$$

$$\Longrightarrow \phi_{ij} = \frac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}}{4}$$

$\rightsquigarrow$ a térrész minden pontjára felírható egyenlet

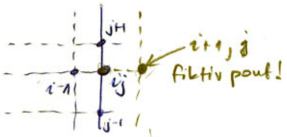
Dirichlet-feltétel:

⇝ a peremre eső rácspont potenciáljának megfeleltetése

$$4\phi_{ij} = \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \underbrace{\phi_0}_{i,j+1}$$

⇝ inhomogenitás a megoldásban

Neumann-peremfeltételnél: $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ homogén Neumann



$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{ij} = 0 = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i-1,j}$$

$$\Rightarrow \quad 4\phi_{ij} = \underbrace{\phi_{i-1,j}}_{\phi_{i+1,j}} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j}$$

→ minden rácspontra felírható az egyenlet.

⇒ algebrai egyenletrendszer az ismeretlen csomóponti potenciálokra.

→ kevés elemet tartalmazó sávmátrix (főátló és ∥ mellékátlók)

$$\begin{bmatrix} 4 & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \underline{0}$$

egyenletek száma = ismeretlen rácspont. száma

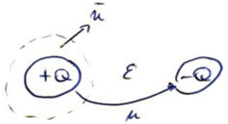
$$E_x\big|_{ij} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{ij} = -\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h}$$

$$E_y\big|_{ij} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{ij} = -\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2h}$$

(14) A részkapacitások fogalma és meghatározásuk módja

2 elektróda:

$\sum_i Q = 0$



Kapacitás: $C = \frac{Q}{U}$

$$Q = \int_a \bar{D} d\bar{a} = \oint_a \varepsilon \bar{E} d\bar{a}$$

$$U = \int_l \bar{E} d\bar{l}$$

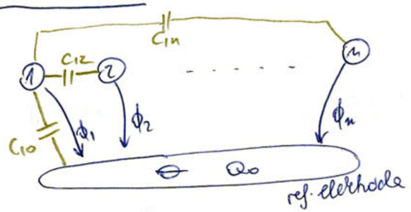
$$C = \frac{\oint_a \varepsilon \bar{E} d\bar{a}}{\int_l \bar{E} d\bar{l}} = \varepsilon K$$

geometria

pl.:
kondenzátor

$$W_e = \frac{1}{2}\varphi_1 Q + \frac{1}{2}\varphi_2(-Q) = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)Q = \frac{1}{2}QU$$

Több elektróda: RÉSZKAPACITÁSOK



$$\phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1n}Q_n$$
$$\phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots + p_{2n}Q_n$$
$$\vdots$$
$$\phi_n = p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \dots + p_{nn}Q_n$$

$$Q_0 = -\sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$\sum_i Q = 0$.

$$\underline{\phi} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{Q} \quad \leadsto \quad \underline{Q} = \underbrace{\underline{\underline{P}}^{-1}}_{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\phi}$$

p_{ik}: csak a geometriától és permittivitástól függenek.

az i. elektróda potenciálja, ha a k. elektróda töltése egységnyi, míg a többié nulla

→ töltésekre megoldva:

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \dots + C_{1n}\varphi_n$$
$$Q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2n}\varphi_n$$
$$\vdots$$
$$Q_n = C_{n1}\varphi_1 + C_{n2}\varphi_2 + \dots + C_{nn}\varphi_n$$

C_{ii} → saját kapacitás

C_{ik}, $i \neq k$ → kölcsönös k.

$C_{ik} = C_{ki}$ ⇝ reciprocitás.

C_{ik}: az i. elektróda töltése, ha a k. elektróda potenciálja egységnyi, és a többi elektród potenciálja 0.

$$\underline{Q} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\phi}$$

Átalakítás: $Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\varphi_k - \varphi_i + \varphi_i) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{-c_{ik}}_{C_{ik}}(\varphi_i - \varphi_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{ik}}_{C_{i0}}(\varphi_i)$$

Bevezetjük: $C_{i0} = c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in}$

$C_{ik} = -c_{ik} \quad (i \neq k)$

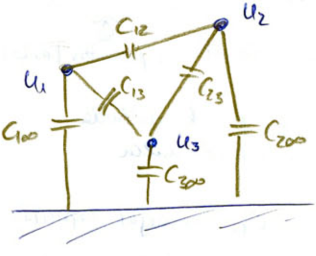
↓

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{C_{i0}\varphi_i}_{\text{föld}} + \underbrace{C_{ik}(\varphi_i - \varphi_k)}_{\text{többi}}$$, ahol $\varphi_i = U_{i0}$, $\varphi_i - \varphi_k = U_{ik}$

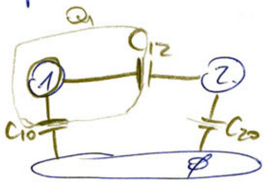
$$Q_i = \underbrace{C_{i1}}_{C_{i1}} U_{i1} + \underbrace{C_{i2}}_{C_{i2}} U_{i2} + \dots + \underbrace{C_{i0}U_{i0}}_{\text{föld fesz.}} + \dots + \underbrace{C_{in}}_{C_{in}} U_{in}$$

- az elektródák között C_{ik} részkapacitású kondenzátor, az k elektróda és a föld között C_{i0} földkapacitású kondenzátor
- a részkapacitások fegyverzetein fellépő töltések összege megegyezik az elektróda töltésével
  → a többelektródás elrendezés szemléletes áramköri modellje.

3 elektróda:



pl.



$Q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$

$Q_2 = C_{20}\Phi_2 + C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1)$

$C_{12} = C_{21}$

(15) A stacionárius áram mágneses terére vonatkozó összefüggések, a vektorpotenciál bevezetése.

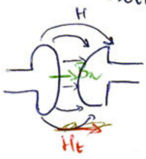
stacionárius áram: $\frac{\partial}{\partial t}=0$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec H &= \vec J \\ \mathrm{div}\,\vec B &= 0 \\ \bar B &= \mu \bar H \end{aligned}}$$

$J \neq 0$, de áll.

// { Magnetosztatika:

$\left[\Phi^m = \int_{P_1}^{P_2} \bar H d\bar l = \Phi^m(P_1) - \Phi^m(P_2) = U_m \right.$ (többször összefüggő áramnál) $\left. \right]$



$\mathrm{rot}\,\bar H = 0 \rightsquigarrow \bar H = -\mathrm{grad}\,\Phi^m$

$-\mathrm{div}\,\mu\,\mathrm{grad}\,\Phi^m = 0$

$\mu = \text{áll} \rightarrow -\Delta\Phi^m = 0$

$B_t = 0 \rightsquigarrow$ mágnesesen ekvipotenciális felület (Dirichlet)

$H_n = 0 \rightsquigarrow -\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ homogén Neumann }

$\cancel{H = \mu B}$

- $\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\bar H &= \bar J \\ \mathrm{div}\,\bar B &= 0 \\ \bar B &= \mu \bar H \\ w &= \tfrac{1}{2}\bar B \bar H \end{aligned}\right\}$ homogén közegben $\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\bar B &= \mu \bar J \\ \mathrm{div}\,\bar B &= 0 \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\bar B(\bar r) = \mathrm{rot}\,\bar A(\bar r)}$ segédváltozó.

vektorpotenciál felírható, mivel B divergenciamentes

$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec A}_{\equiv 0} = 0 \qquad \mathrm{rot}\left(\frac{\bar B}{\mu}\right) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\bar A\right) = \bar J \qquad (\mu = \text{áll.})$

$\underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar A}_{} = \mu \bar J$

$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar A - \Delta \bar A = \mu \bar J$

$\bar A = A_x \bar e_x + A_y \bar e_y + A_z \bar e_z$
$\bar J = J_x \bar e_x + J_y \bar e_y + J_z \bar e_z$

mértékválasztás:
választunk úgy, hogy $\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{A} = 0}_{\text{Coulomb-mérték}}$ legyen $\rightarrow -\Delta \bar A = \mu \bar J$

[2D: $\bar A = A_z(x,y)\bar e_z$, $\mathrm{div}\,\bar A = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$

3D: $\bar A = A_z(x,y,z)\,\bar e_z$ { kompenzálni kell
$\mathrm{div}\,\bar A = 0$]

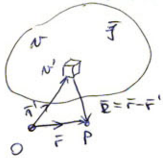
$\boxed{-\Delta \bar A = \mu \bar J}$ vektoriális Poisson-egyenlet

→ három komponensre vonatkozó skalár egyenlet:

$\left.\begin{aligned} -\Delta A_x &= \mu J_x \\ -\Delta A_y &= \mu J_y \\ -\Delta A_z &= \mu J_z \end{aligned}\right\}$ megoldás: $\boxed{\bar A = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\bar J}{r}\, dV}$

$\mathrm{div}\,\bar J = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\bar A = 0.$

a vektoriális Laplace-Poisson egyenlet megoldása



$$\bar A(\bar r) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\bar J(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}\, dv'$$

(3D)

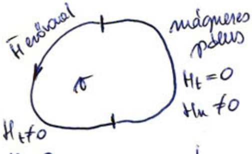
(2D) $dv = l\, d\bar a$

$$\bar A(\bar r) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{a'} \bar J(\bar r') \ln\frac{1}{R}\, d\bar a$$

vonalszerű vezető:

$\bar J\, dv = I\, d\bar l$ $\bar A(P) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{d\bar l}{R}$

Peremfeltételek:



2D

$\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$

$$\bar A = A_z(x,y)\,\bar e_z$$

$$\text{rot}\,\bar A = \bar B = \begin{vmatrix} \bar e_\tau & \bar e_n & \bar e_z \\ \frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{\partial}{\partial n} & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \underbrace{\bar e_\tau \frac{\partial A_z}{\partial n}}_{B_\tau} \underbrace{- \bar e_n \frac{\partial A_z}{\partial \tau}}_{B_n} = B_\tau + B_n$$

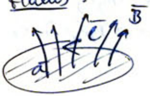
mágneses pólus: $H_\tau = \frac{B_\tau}{\mu} = 0 = \frac{\partial A_z}{\partial n}$ Neumann.

erővonal: $B_n = 0 = -\frac{\partial A_z}{\partial \tau} \longrightarrow A_z\big|_\tau = \text{áll.} \implies$ Dirichlet.

$A_z = \text{áll.} \approx$ erővonal! $\sim \Phi = \text{áll.}$

—o—

fluxus:



$$\Psi = \int_a \bar B\, d\bar a = \underbrace{\int_a \text{rot}\,\bar A\, d\bar a}_{\text{Stokes}} = \oint_l \bar A\, d\bar l.$$

$$\boxed{\text{div}(H \times A) = A\,\text{rot}\,H - H\,\text{rot}\,A}$$

energia:

$$W = \int_v w_m\, dv = \int_v \frac{1}{2}\bar B \bar H\, dv = \frac{1}{2}\int_v \bar H\, \text{rot}\,\bar A\, dv$$

$$W = \frac{1}{2}\int_v \bar A\, \text{rot}\,\bar H\, dv - \frac{1}{2}\int_v \text{div}(H \times A)\, dv$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_v \bar A \bar J\, dv + \frac{1}{2}\oint_{a = a_n \cup a_d} (\bar H \times \bar A)\, d\bar a$$