31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!

Az $F_X(x) = Q_X\big((-\infty, x)\big) = \mathbf{P}(A = \{\omega\colon\ X(\omega) < x\}),\ x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. F_X értéke x-ben az x-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1) F_X monoton nő, azaz $F_X(x) \le F_X(y)$, ha $x < y$.
2) F_X balról folytonos, azaz $\lim_{x \to y-} F_X(x) = F_X(y), \forall y \in \mathbb{R}$-re,
3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

33. Mi a binomiális eloszlás képlete?

$X \in B(n, p)$

$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?

Ha $n \to \infty$, $p \to 0$ és np állandó, akkor $B(n, p) \to Po(np)$, vagyis a binomiális eloszlás k-adik tagja tart a Poisson-eloszlás k-adik tagjához.

35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?

A geometriai eloszlás ($X \in G(p)$), mert $\mathbf{P}(X = m + k\ \mid X > m) = \mathbf{P}(X = k)\ \forall k, m$-re.

36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?

Az exponenciális eloszlás ($X \in E(\lambda)$), mert $\mathbf{P}(X < x + t\ \mid X \ge x) = \mathbf{P}(X < x)\ \forall 0 < x, t$-re.

37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?

A binomiális eloszlással ($X \in B(n, p)$).

38. Ha $\boldsymbol{X \in N(m, D)}$, akkor milyen eloszlást követ $\boldsymbol{\frac{X-m}{D}}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

39. Ha $\boldsymbol{Y \in U(0, 1)}$, $\boldsymbol{F}$ invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz $\boldsymbol{F^{-1}(Y)}$ eloszlásfüggvénye?

$F(y)$, hiszen $\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}\Big(F\big(F^{-1}(U)\big) < F(y)\Big) = \mathbf{P}\big(U < F(y)\big) = F(y)$.

40. Ha $\boldsymbol{X}$ folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor $\boldsymbol{F_X(X)}$ milyen eloszlású lesz?

Egyenletes eloszlású ($X \in E(\lambda)$).

41. Fejezze ki $\boldsymbol{F_X}$ eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(\boldsymbol{a < X \le b}) = ?$

$\mathbf{P}(a < X \le b) = F_X(b + 0) - F_X(a + 0)$

42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, másrészt $p_i = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i)$.

Azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan <u>lépcsős</u> függvény, melynek az ugróhelyei az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ helyeken vannak és az ugrás nagysága rendre $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.

43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett valószínűségi változó. Az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az X sűrűségfüggvényének nevezzük, ha X-nek az F_X eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

1) $f_X(x) \geq 0$,
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.

46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in U([a, b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!

$X \in U([a, b])$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

48. Mi a binomiális eloszlás módusza?

Eloszlás móduszának nevezzük azt a k. tagot, amire p_k a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz $[(n+1)p]$. (Ha egész, akkor a módusz egyenlő $k = (n+1)p - 1$ értékével, így két módusz van.)

49. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a < X < b) = ?$

$\mathbf{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a + 0)$

50. Mi a geometriai eloszlás képlete?

$X \in G(p)$

$p_k = \mathbf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1} p$

51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?

Az X valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis $\forall \omega \in \Omega$-ra $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?

$X \in E(\lambda)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?

$X \in E(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?

A tétel szerint $\mathbf{P}(X < x + t \mid X \geq x) = \mathbf{P}(X < x)\ \forall 0 < x, t$-re.

X azért „örökifjú”, mert annak feltételes valószínűsége, hogy X legfeljebb $x + t$-ig él(, ha már x-et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy X legfeljebb t ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és t között ugyanaz a túlélési esély, mint x és $x + t$ között.

55. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = ?$

$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a)$

56. Mi a Poisson eloszlás képlete?

$X \in Po(\lambda)$

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0$$

57. $\mathbf{P}(X = a) = ?$

Folytonos esetben $\forall \mathbf{P}(X = a) = 0$.

58. Ha $X \in N(0, 1)$, akkor milyen eloszlást követ $aX + b$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y - b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y - b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

59. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlás-függvénnyel!

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{D}\right)$$

60. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűség-függvénnyel!

$$f_X(X) = \varphi_{m,D}(x) = \frac{1}{m} \varphi\left(\frac{x - m}{D}\right)$$