rnök A3 (2013 ősz)

at 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni.
es a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a vá

ül hol deriválható az $f(x+iy) = (|x| + i|y|)^2$ függvény?

n $\frac{i\pi}{2} + \operatorname{ch} i\pi$ értékét!

$u(x,y) = 3x^2y - y^3 + x$ függvény azon harmonikus társát,
ny a 0-ban i-t vesz fel!

^{2} komplex vonalintegrálját az origó kezdőpontú, $1+i$ végpon

z tengelyű, origó csúcsú, R magasságú, $\pi/4$ félnyílásszög
molja ki a felszínét!

Villamosmérnök A3 (2013 ősz) — 2. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Az origón kívül hol deriválható az $f(x+iy) = (|x| + i|y|)^2$ függvény?

Megoldás. $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, ahol $u(x, y) = x^2 - y^2$ és $v(x, y) = 2|x||y|$. A tengelyeken (az origó kivételével) v nem deriválható parciálisan y szerint, tehát f itt biztosan nem deriválható. Amúgy $u_x(x, y) = 2x$, $v_y(x, y) = \begin{cases} 2|x| & \text{ha } y > 0 \\ -2|x| & \text{ha } y < 0 \end{cases}$, $u_y(x, y) = -2y$ és $-v_x(x, y) = \begin{cases} -2|y| & \text{ha } x > 0 \\ 2|y| & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, tehát a Cauchy-Riemann egyenletek az 1. és 3. síknegyedben teljesülnek, tehát csak ezeken lehet még deriválható, és az is, mert ezeken a tartományokon a parciálisok folytonosak.

2. Számítsa ki $\operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} + \operatorname{ch} i\pi$ értékét!

Megoldás. $\operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} + \operatorname{ch} i\pi = i \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi = i - 1$.

3. Adja meg az $u(x, y) = 3x^2y - y^3 + x$ függvény azon harmonikus társát, mellyel az $u + iv$ reguláris függvény a 0-ban i-t vesz fel!

Megoldás. $v_y(x, y) = u_x(x, y) = 6xy + 1 \rightsquigarrow v(x, y) = \int 6xy + 1 \, dy = 3xy^2 + y + c(x) \rightsquigarrow 3x^2 - 3y^2 = u_y = -v_x = -3y^2 - \frac{d}{dx}c(x) \rightsquigarrow c(x) = \int -3x^2 \, dx \rightsquigarrow c(x) = -x^3 + c$. $i = iv(0, 0) = ic$, tehát a keresett harmonikus társ $3xy^2 + y - x^3 + 1$.

4. Számítsa ki $\bar{z}^2$ komplex vonalintegrálját az origó kezdőpontú, $1+i$ végpontú $[0, 1] \cup [1, 1+i]$ töröttvonalon!

Megoldás. Legyen $z_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$ és $z_2(t) = 1 + ti$, $t \in [0, 1]$. Akkor $\dot{z}_1 = 1$ és $\dot{z}_2 = i$, így $\int_L \bar{z}^2 \, dz = \int_0^1 \bar{t}^2 \cdot 1 \, dt + \int_0^1 (1 - ti)^2 \cdot i \, dt = \int_0^1 t^2 + 2t \, dt + i \int_0^1 1 - t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^1 + i\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2 + i)$.

5. Adja meg a z tengelyű, origó csúcsú, R magasságú, $\pi/4$ félnyílásszögű kúppalást egyenletét és számolja ki a felszínét!

Megoldás. A kúppalást egy egyenlete: $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, R]$.
Felszíne:

$$
\begin{aligned}
r_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0), r_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 1) \\
\rightsquigarrow \mathrm{CROSS}(r_{uv}(u, v)) = r_u \times r_v = (v \cos u, v \sin u, -v) \\
\rightsquigarrow |F| = \int_F 1 \, |df| = \int_0^R \int_0^{2\pi} |\mathrm{CROSS}(r_{uv}(u, v))| \, du = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{2} v \, du dv = \sqrt{2} R^2 \pi
\end{aligned}
$$