3. Vizsgazárthelyi

A1 2011/12 tél Munkaidő 90'

1. Legyen E tetszőleges nem üres halmaz és $\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$ tetszőleges $A \subseteq E$ esetén. Mit mondhatunk az $A \subseteq E$ és $B \subseteq E$ halmazok viszonyáról, ha

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \emptyset \, .$$

2. (a) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{16n^2 + 2n} - \sqrt{16n^2 - 2n} = ?$ (b) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\dfrac{16n^2 + 2n}{16n^2 - 2n}} = ?$

3. Legyen $f(x) = xe^{-x}$. Döntse el, hogy invertálható-e f a $(0, \infty)$ intervallumon és ha nem, akkor adja meg azt a legbővebb nyílt intervallumot (ha van ilyen), melynek kezdőpontja az origó és melyen f invertálható!

4. Legyen $f(x) = x^x$ minden $x > 0$-ra. $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = ?$

5. (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, dx = ?$

(b) Konvergens-e az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + \cos^2 x} \, dx$ improprius integrál?

6.

Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?

(1) Legyenek (a_n) és (b_n) tetszőleges valós elemű végtelen számsorozatok.

(a) Ha (a_n) és (b_n) konvergens, akkor $(a_n + b_n)$ is konvergens.

(b) Ha (a_n) és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ is divergens.

(c) Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ konvergens.

(d) Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ divergens.

(2) Legyen $a < b$ tetszőleges valós, $I = [a, b]$ és f egy I-n értelmezett valós függvény.

(a) Ha f folytonos I-n , akkor f egyenletesen folytonos I-n.

(b) Ha f egyenletesen folytonos I-n, akkor f folytonos I-n.

(c) Ha f egyenletesen folytonos I-n és deriválható is itt, akkor a deriváltja korlátos I-n.

(d) Ha f deriválható I-n és a derivált korlátos itt, akkor f egyenletesen folytonos I-n.