

II. HÁZI FELADAT : DISZKRÉT IDEJŰ HÁLÓZATOK VIZSGÁLATA

Név	Szabó Norbert
Neptun kód	AJD5YL
Adatsor száma	1
Beadási határidő:	12. oktatási hét

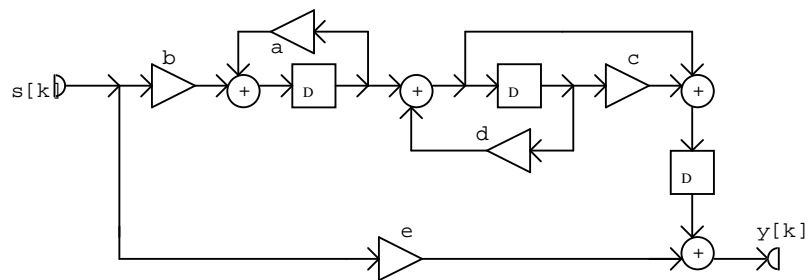
Megjegyzések: Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is **és a feladatlapot is be kell adni**. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását előlről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni, **nem elegendő a végeredményeket közölni!** A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de **a megoldás elvi lépéseit ekkor is részletesen** ismertetni kell.

Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A hálózat paramétereit az ábra alatti táblázatból határozandók meg. A fejlécben található „Adatsor száma” mező jelöli ki a táblázat megfelelő sorát.

29.



Erősítések

a	b	c	d	e
0,2	-3	0,7	0,3	2
0,3	-0,9	-0,5	0,4	0,5
-0,3	0,5	0,4	0,4	-0,5
-0,4	-0,6	0,6	-0,6	0,9
-0,6	0,9	0,8	0,5	-0,9
0,6	0,6	-0,8	-0,7	-1
0,7	0,4	2	0,4	-1
0,3	-0,4	0,9	0,4	0,5
-0,3	-0,6	0,5	0,5	0,5
0,6	0,6	0,5	0,6	0,9

1.4.

F	G	p
-1,5	2	3/4
-2,5	1,5	-3/4
-1	3	12/13
2,5	2	-12/13
1,2	-2,4	12/11
-1,5	-3	-12/11
2	-1,5	4/7
-2	1,8	-4/7
3	-2,5	5/7
2	-1,6	-5/7

2.2.

S	ϑ_0	ρ
7	$3\pi/29$	$\pi/7$
3	$3\pi/31$	$\pi/8$
4,2	$3\pi/32$	$0,2\pi$
5,5	$3\pi/34$	$\pi/13$
1,4	$3\pi/35$	$-\pi/5$
6	$3\pi/37$	$-\pi/3$
5	$3\pi/38$	$\pi/7$
4	$3\pi/40$	$-\pi/7$
3	$3\pi/41$	$\pi/9$
2	$3\pi/28$	$-\pi/9$

2.3. s[k] értékei

k	0	1	2	3	4	5
0	-3	2	-4	1	5	2
1	1	1	4	-2	-1	1
2	2	-3	3	8	0	3
3	-3	4	1	-1	1	-3
4	-1	1	-2	-2	7	2
5	2	2	-2	5	5	2
6	-1	3	-5	2	-5	-4
7	7	2	-2	3	5	7
8	1	5	-3	-5	4	2
9	1	4	-2	1	-6	7

1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

- 1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!
- 1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!
- 1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!
- 1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \dots, 5$ értékekre!
- 1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

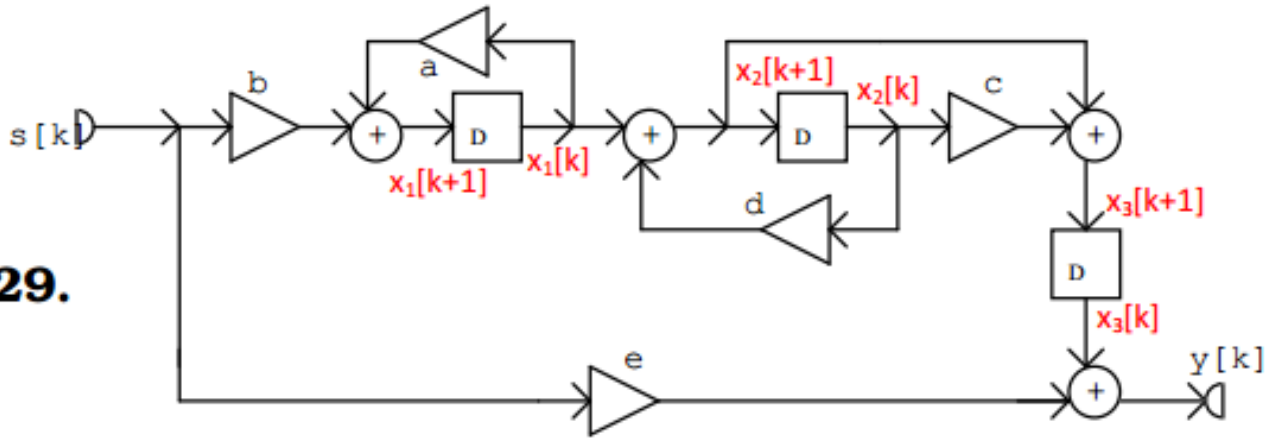
2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

- 2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!
- 2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?
- 2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adóttak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!
- 2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!
- 2.5 Az 1.3-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!
- 2.6 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!
- 2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1 és a 2.2 pont eredményeit az ANDI programmal!

3. feladat: Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

- 3.1 Határozza meg a hálózat átviteli függvényét normálalakban a z tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!
- 3.2 Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés-válasz stabilitását!
- 3.3 Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \dots, 5$ -re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!
- 3.4 Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$!
- 3.5 Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!
- 3.6 A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4 feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ ütemre!
- 3.7 (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!
- 3.8 (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!

29.



Erősítések

a	b	c	d	e
0,2	-3	0,7	0,3	2

Adatsor száma: 1

1.4.

F	G	p
-1,5	2	3/4

1.1

Annyi állapotváltozót veszünk fel, ahány késleltető van a hálózatban.

$$x_1[k + 1] = a \cdot x_1[k] + b \cdot s[k]$$

$$x_2[k + 1] = x_1[k] + d \cdot x_2[k]$$

$$x_3[k + 1] = x_2[k + 1] + c \cdot x_2[k]$$

$$y[k] = x_3[k] + e \cdot s[k]$$

$$x_1[k + 1] = 0,2 \cdot x_1[k] - 3 \cdot s[k]$$

$$x_2[k + 1] = x_1[k] + 0,3 \cdot x_2[k]$$

$$x_3[k + 1] = x_1[k] + x_2[k]$$

$$y[k] = x_3[k] + 2 \cdot s[k]$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 1 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = 2$$

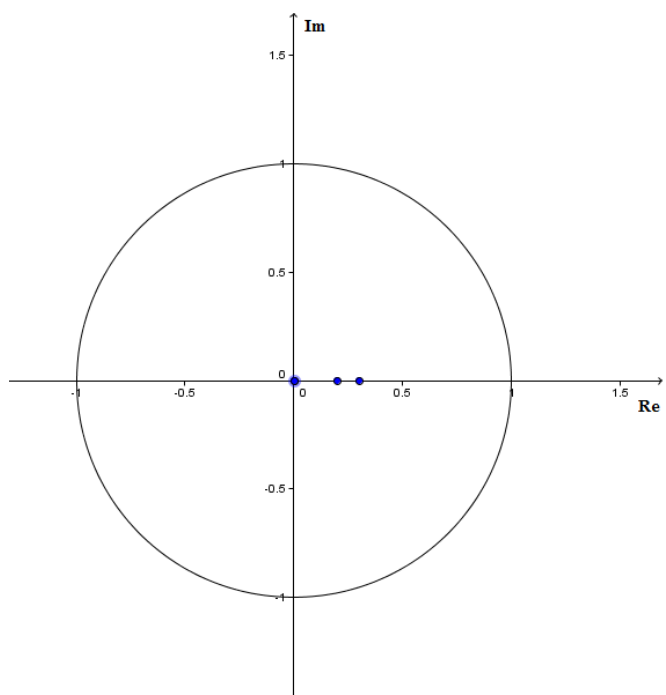
1.2

Matlab: >>la=eig(A)

Sajátértékek:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0,3 \quad \lambda_3 = 0,2$$

A sajátértékek az egységkörön belül helyezkednek el, ezért a rendszer aszimptotikusan stabilis. $|\lambda_i| < 1$



1.3

Impulzusválasz:

Számolás Excel segítségével lépésről lépésre:

Az állapotváltozós leírásból:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 1 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

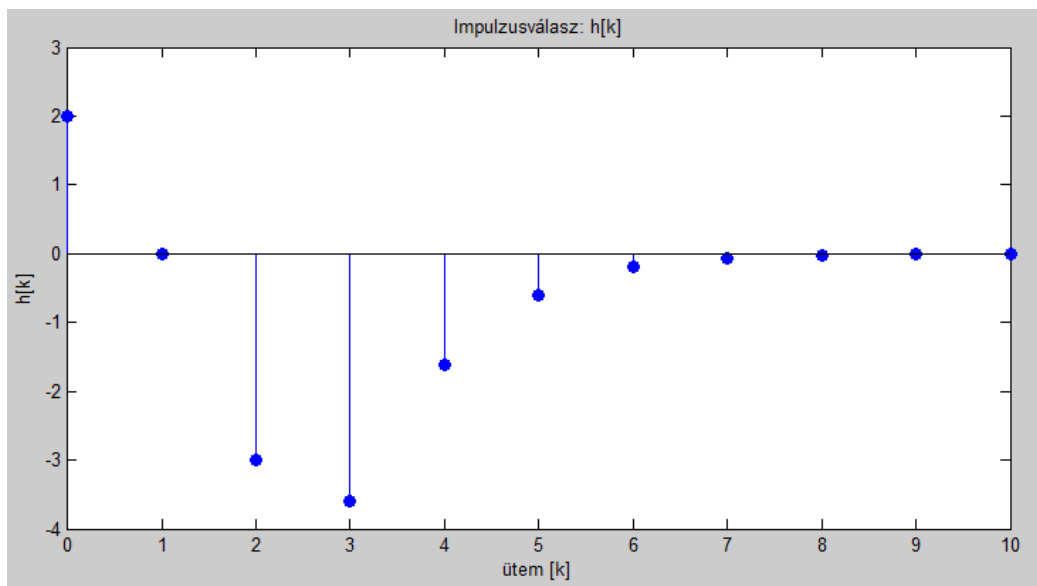
$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = 2$$

k	s[k]	x1[k]	x2[k]	x3[k]	y[k]
-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	2
1	0	-3	0	0	0
2	0	-0,6	-3	-3	-3
3	0	-0,12	-1,5	-3,6	-3,6
4	0	-0,024	-0,57	-1,62	-1,62
5	0	-0,0048	-0,195	-0,594	-0,594
6	0	-0,0010	-0,0633	-0,1998	-0,1998
7	0	-0,0002	-0,0200	-0,0643	-0,0643
8	0	0,0000	-0,0062	-0,0201	-0,0201
9	0	0,0000	-0,0019	-0,0062	-0,0062
10	0	0,0000	-0,0006	-0,0019	-0,0019

$$h[k] = \begin{cases} d, & k = 0 \\ \underline{c}^T \cdot \underline{A}^{k-1} \cdot \underline{b}, & k \geq 1 \end{cases}$$

Ábrázolás Matlabbal: >>stem(h,'fill')



Analitikus alak:

$$\underline{A}^k = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^k \cdot \underline{L}_i, \text{ ahol } \underline{L}_i = \prod_{p=1, p \neq i}^3 \left(\frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_i - \lambda_p} \right)$$

A számolások Matlab segítségével...

```
>>syms k; E=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
>> L1 = ((A-la(2)*E)*(A-la(3)*E))/((la(1)-la(2))*(la(1)-la(3)));
>> L2 = ((A-la(1)*E)*(A-la(3)*E))/((la(2)-la(1))*(la(2)-la(3)));
>> L3 = ((A-la(1)*E)*(A-la(2)*E))/((la(3)-la(1))*(la(3)-la(2)));
>>h=C*L1*B*la(1)^(k-1)+C*L2*B*la(2)^(k-1)+C*L3*B*la(3)^(k-1)
```

$$h[k] = 2 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k - 1] \cdot (135 \cdot 0,2^{k-1} - 35 \cdot 0^{k-1} - 100 \cdot 0,3^{k-1}), \text{ ha } 0^0 = 1\text{-nek értelmezzük}$$

Másképp:

$$h[k] = 2 \cdot \delta[k] - 35 \cdot \delta[k - 1] + \varepsilon[k - 1] \cdot (135 \cdot 0,2^{k-1} - 100 \cdot 0,3^{k-1})$$

1.4

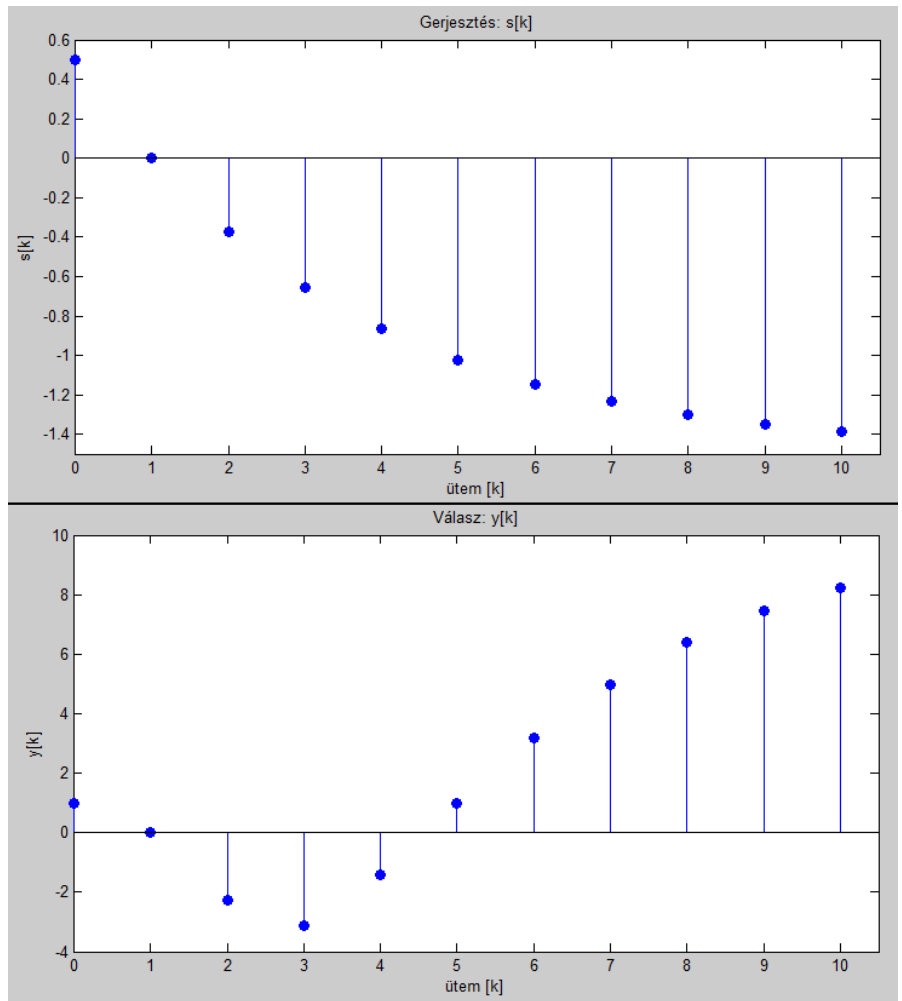
Gerjesztés: $s[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k) = \varepsilon[k] \cdot (-1,5 + 2 \cdot 0,75^k)$

Mivel $h[k]$ és $s[k]$ is belépő, a konvolúció véges számú szorzatok összege lesz:

$$y[k] = h[k] * s[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot s[k-i] = \sum_{i=0}^k h[i] \cdot s[k-i]$$

Számolás Matlabbal, például: $y[5] = h[0] \cdot s[5] + h[1] \cdot s[4] + h[2] \cdot s[3] + h[3] \cdot s[2] + h[4] \cdot s[1] + h[5] \cdot s[0]$

k	s[k]	h[k]	y[k]
0	0,5	2	1
1	0	0	0
2	-0,375	-3	-2,25
3	-0,6563	-3,6	-3,1125
4	-0,8672	-1,62	-1,4194
5	-1,0254	-0,594	0,9710
6	-1,1440	-0,1998	3,1836
7	-1,2330	-0,0643	4,9857
8	-1,2998	-0,0201	6,3835
9	-1,3498	-0,0062	7,4463
10	-1,3874	-0,0019	8,2480
...
∞	-1,5	0	$\approx 10,66$



1.5 ANDI

Az állapotváltozós leírás helyes, az impulzusválasz helyes.

A válaszok helyesek, ellenőrizve Excel segítségével.

2.1

Átviteli karakterisztika:

$$\bar{X}_1 = 0,2 \cdot \bar{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta} - 3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta} = \frac{-3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta}}$$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,3 \cdot \bar{X}_2 \cdot e^{-j\vartheta} = \frac{\bar{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0,3 \cdot e^{-j\vartheta}} = \frac{-3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0,3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta})}$$

$$\bar{X}_3 = \bar{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta} + \bar{X}_2 \cdot e^{-j\vartheta} = \frac{-3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{-3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0,3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta})}$$

$$\bar{Y} = \bar{X}_3 + 2 \cdot \bar{U} = \frac{-3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{-3 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0,3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta})} + 2 \cdot \bar{U}$$

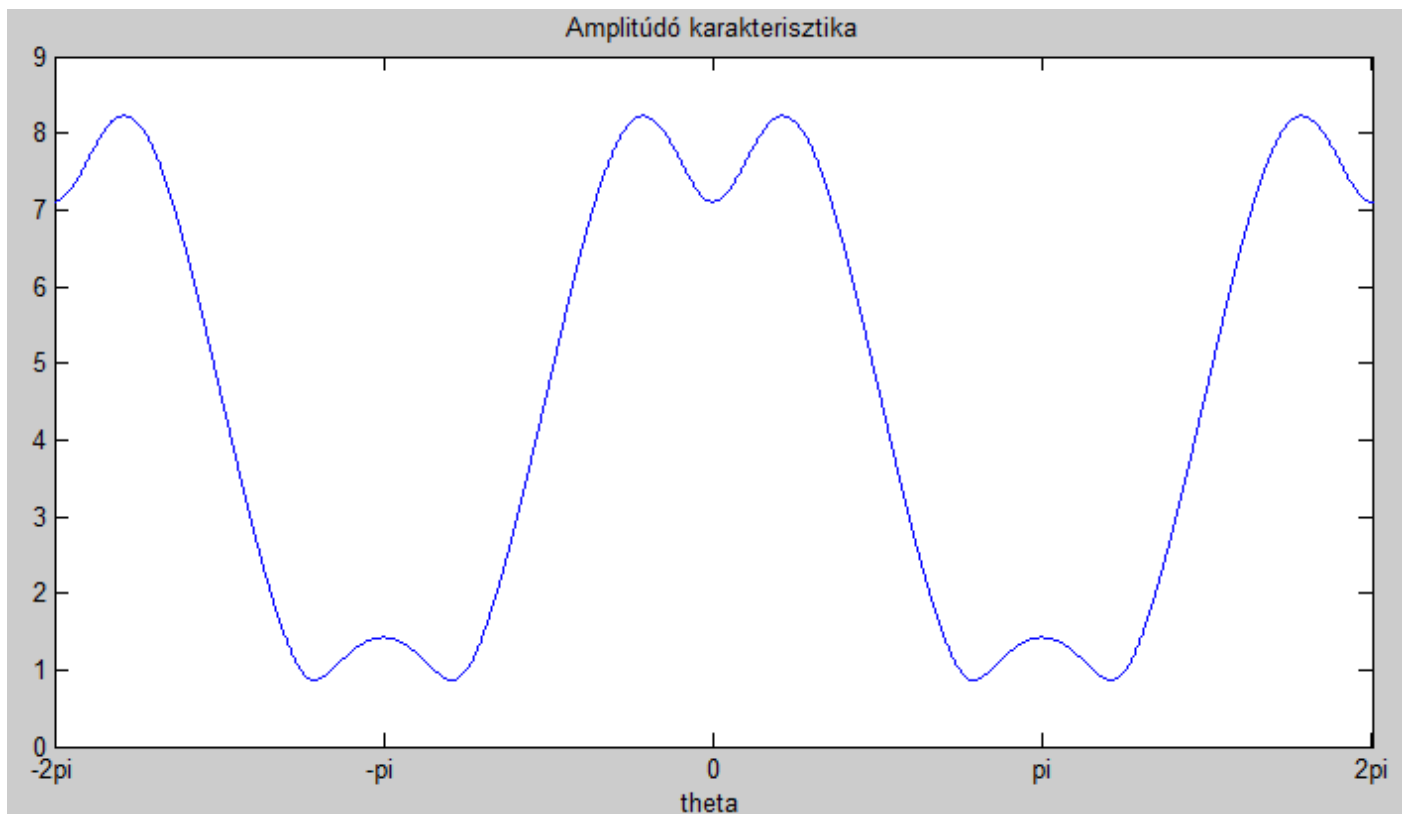
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{-3 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{-3 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0,3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta})} + 2 =$$

$$= \frac{-3e^{-j2\vartheta}(1 - 0,3e^{-j\vartheta}) - 3e^{-j3\vartheta} + 2(1 - 0,3e^{-j\vartheta})(1 - 0,2e^{-j\vartheta})}{(1 - 0,3e^{-j\vartheta})(1 - 0,2e^{-j\vartheta})} = \frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2,88 \cdot e^{-j2\vartheta} - 2,1 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,06 \cdot e^{-j2\vartheta}}$$

Amplitúdó karakterisztika:

$$K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|$$

Ábrázolás Matlabbal:



2.2.			2.3. s[k] értékei						
S	ϑ_0	ρ	k	0	1	2	3	4	5
7	$3\pi/29$	$\pi/7$	1. adatsor	-3	2	-4	1	5	2

2.2

$$s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 \cdot k + \rho) = 7 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{29}k + \frac{\pi}{7}\right) \rightarrow \bar{s} = 7 \cdot e^{j\frac{\pi}{7}}$$

Gerjesztett összetevőt keressük -> állandósult állapot

$$\bar{Y}_g = \bar{S} \cdot \bar{H}, \text{ ahol } \bar{H} = H\left(e^{j\frac{3\pi}{29}}\right) = \frac{2 - e^{-j\frac{3\pi}{29}} - 2,88 \cdot e^{-j2\frac{3\pi}{29}} - 2,1 \cdot e^{-j3\frac{3\pi}{29}}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{29}} + 0,06 \cdot e^{-j2\frac{3\pi}{29}}} = 7,6738 \cdot e^{j1,9259}$$

$$\bar{Y}_g = 7 \cdot e^{j\frac{\pi}{7}} \cdot 7,6738 \cdot e^{j1,9259} = 53,7166 \cdot e^{j2,3747} \rightarrow y_g[k] = 53,7166 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{29}k + 2,3747\right)$$

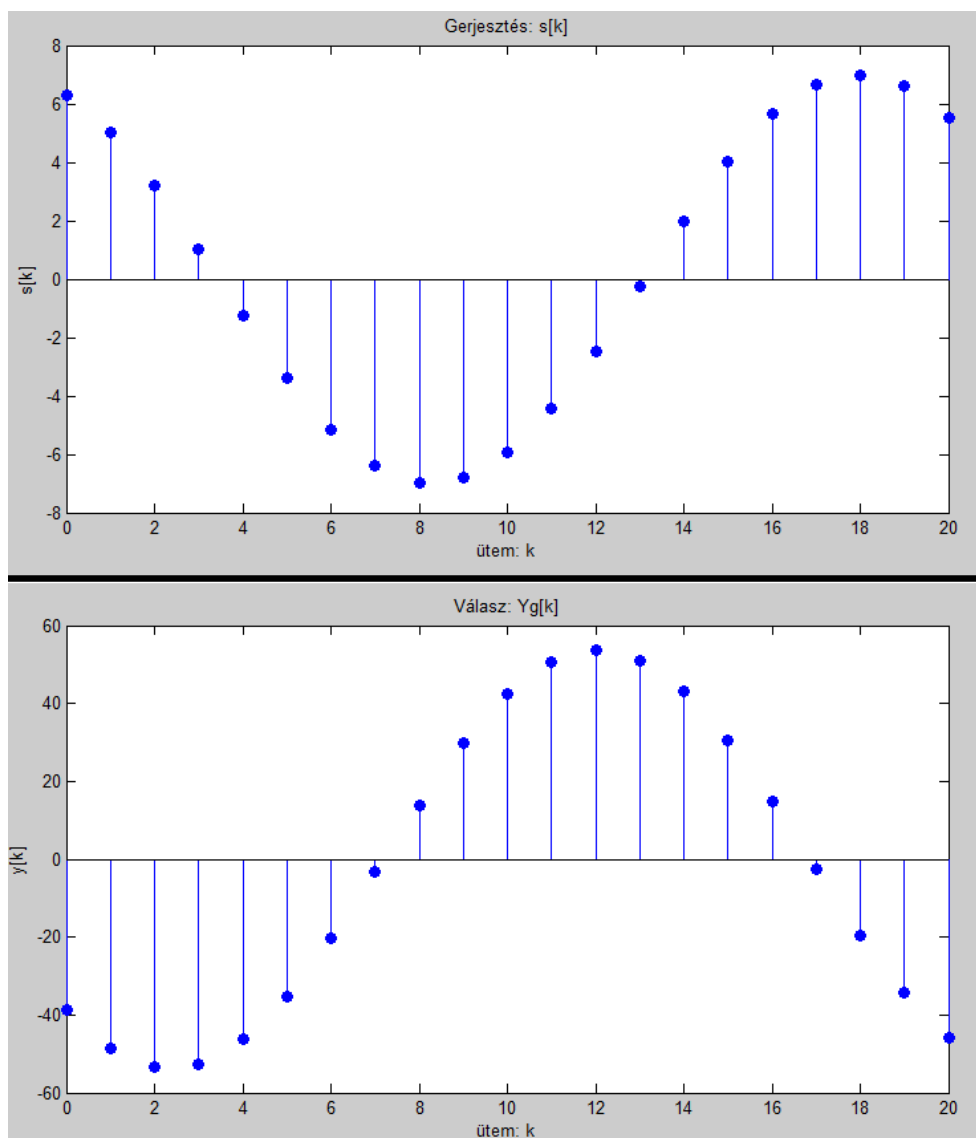
A jelek periodikusak, periódus: $\frac{\vartheta_0}{2\pi} = \frac{3}{58} \rightarrow L = 58$

Az $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer G-V stabilis.

Akkor jelenik meg a kimeneten, ha a rendszer sajátválasza lecsengett és beállt az állandósult állapot.

Ábrázolás Matlabbal:

```
k=0:1:20;
s=7*cos(3*pi*k/29+pi/7);
y=53.7166*cos(3*pi*k/29+2.3747);
stem(s,'fill')
stem(y,'fill')
```



2.3

Fourier sorfejtés:

$$X_p^c = \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} (x[k] \cdot e^{-jkp\vartheta_0}), \text{ ahol } \vartheta_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad L = 6$$

$$X_0^c = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 - 4 + 1 + 5 + 2) = \frac{1}{2}$$

$$X_1^c = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{3}}) = -\frac{5}{12} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$X_2^c = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j2\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}}) = -\frac{3}{4} - i \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$X_3^c = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 \cdot e^{-j\pi} - 4 \cdot e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi} + 5 \cdot e^{-j4\pi} + 2 \cdot e^{-j5\pi}) = -\frac{7}{6}$$

$$X_4^c = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{3}} + e^{-j4\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{16\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}}) = -\frac{3}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$X_5^c = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}} + e^{-j5\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{25\pi}{3}}) = -\frac{5}{12} - i \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Tehát a jel komplex alakja:

$$x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^c \cdot e^{jkp\vartheta_0} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{12} + j \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot e^{jk\frac{\pi}{3}} + \left(-\frac{3}{4} - j \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}} - \frac{7}{6} \cdot e^{jk\pi} + \left(-\frac{3}{4} + j \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot e^{jk\frac{4\pi}{3}} + \left(-\frac{5}{12} - j \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot e^{jk\frac{5\pi}{3}}$$

Valós alak:

$$X_0 = X_0^c \quad X_p^A = 2 \cdot \operatorname{Re}\{X_p^c\} \quad X_p^B = -2 \cdot \operatorname{Im}\{X_p^c\}, \text{ ahol } 0 < p < \frac{L}{2} = 3 \quad X_3^A = X_3^c \quad X_3^B = 0 \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^3 (X_p^A \cdot \cos(pk\vartheta_0) + X_p^B \cdot \sin(pk\vartheta_0)) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(2k\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(2k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{7}{6} \cdot \cos\left(3k\frac{\pi}{3}\right)$$

Ellenőrizve, a megfelelő k behelyettesítésével a helyes s[k] értéket szolgáltatja.

2.4

$$s[k] = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(2k \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(2k \frac{\pi}{3}\right) - \frac{7}{6} \cdot \cos\left(3k \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{67}}{3} \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{3} - 1,2605\right) - 3 \cdot \cos\left(2k \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{7}{6} \cdot \cos(k\pi)$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2,88 \cdot e^{-j2\vartheta} - 2,1 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,06 \cdot e^{-j2\vartheta}} \quad \overline{Y}_p = \overline{S}_p \cdot \overline{H}_p, \text{ ahol } \overline{H}_p = H(e^{j\vartheta_p})$$

A linearitás miatt használhatjuk a szuperpozíció elvét!

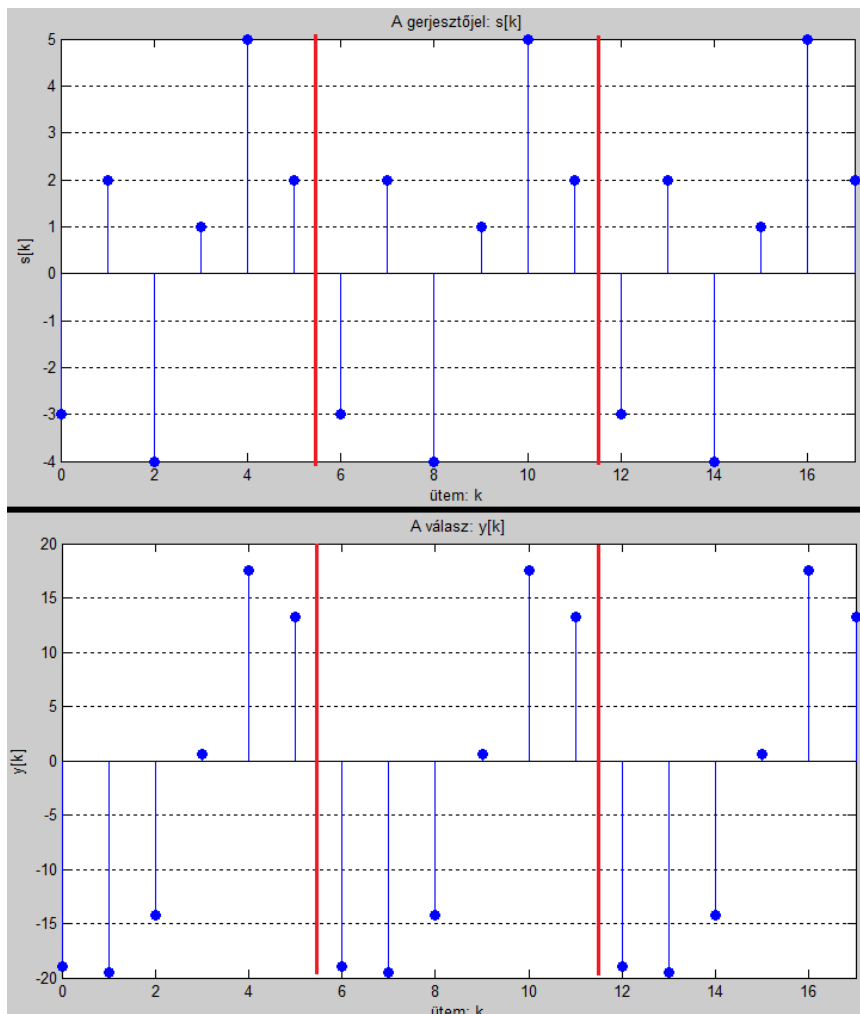
p	ϑ_p	S_p	H_p	Y_p
0	0	$\frac{1}{2}$	-7,1071	-3,5536
1	$\frac{\pi}{3}$	$-2,7285 \cdot e^{-j1,2605}$	$7,4359 \cdot e^{j0,1013}$	$-20,2886 \cdot e^{-j1,1591}$
2	$\frac{2\pi}{3}$	$-3 \cdot e^{j1,0472}$	$1,8714 \cdot e^{-j1,1027}$	$-5,6143 \cdot e^{-j0,0556}$
3	π	$-\frac{7}{6}$	1,4231	-1,6603

A válasz:

$$y[k] = -3,5536 - 20,2886 \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{3} - 1,1591\right) - 5,6143 \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{3} - 0,0556\right) - 1,6603 \cdot \cos(k\pi)$$

A közelítés helyes:

k	y[k] rendszer	y[k] analitikus
0	-18,9356	-18,9383
1	-19,5218	-19,5224
2	-14,1862	-14,1838
3	0,6173	0,6199
4	17,4804	17,4804
5	13,2246	13,2226



2.5

$$h[k] = 2 \cdot \delta[k] - 35 \cdot \delta[k - 1] + \varepsilon[k - 1] \cdot (135 \cdot 0,2^{k-1} - 100 \cdot 0,3^{k-1})$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\vartheta}) &= \mathcal{F}\{h[k]\} = 2 - 35 \cdot e^{-j\vartheta} + \frac{135}{1 - 0,2 \cdot e^{-j\vartheta}} \cdot e^{-j\vartheta} - \frac{100}{1 - 0,3 \cdot e^{-j\vartheta}} \cdot e^{-j\vartheta} = \\ &= \frac{2(1 - 0,2e^{-j\vartheta})(1 - 0,3e^{-j\vartheta}) + e^{-j\vartheta} \cdot [-35(1 - 0,2e^{-j\vartheta})(1 - 0,3e^{-j\vartheta}) + 135(1 - 0,3e^{-j\vartheta}) - 100(1 - 0,2e^{-j\vartheta})]}{(1 - 0,2e^{-j\vartheta})(1 - 0,3e^{-j\vartheta})} = \\ &= \frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2,88 \cdot e^{-j2\vartheta} - 2,1 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,06 \cdot e^{-j2\vartheta}} \end{aligned}$$

Az eredmény megegyezik a 2.1-ben kapottal!

2.6

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2,88 \cdot e^{-j2\vartheta} - 2,1 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,06 \cdot e^{-j2\vartheta}}$$

Rendszeregyenlet:

$$y[k] - 0,5 \cdot y[k - 1] + 0,06 \cdot y[k - 2] = 2 \cdot u[k] - u[k - 1] - 2,88 \cdot u[k - 2] - 2,1 \cdot u[k - 3]$$

Az átviteli karakterisztika nevezőjében a rendszeregyenlet bal oldalának, a számlálóban a jobb oldalának együtthatói találhatók, a késleltetéseknek megfelelően.

3.1

Átviteli függvény az állapotváltozós leírásból:

```
>> A=[0.2 0 0;1 0.3 0;1 1 0];
>> C=[0 0 1];
>> B=[-3;0;0];
>> D=2;
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
```

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1} - 2,88 \cdot z^{-2} - 2,1 \cdot z^{-3}}{1 - 0,5 \cdot z^{-1} + 0,06 \cdot z^{-2}} = H(e^{j\theta}) \quad e^{j\theta} = z \text{ helyettesítéssel, mivel G-V stabilis a rendszer!}$$

Egyenletek z-tartományban:

$$z \cdot \bar{X}_1 = 0,2 \cdot \bar{X}_1 - 3 \cdot \bar{U} \rightarrow \bar{X}_1 = \frac{-3 \cdot \bar{U}}{z - 0,2}$$

$$z \cdot \bar{X}_2 = \bar{X}_1 + 0,3 \cdot \bar{X}_2 \rightarrow \bar{X}_2 = \frac{\bar{X}_1}{z - 0,3} = \frac{-3 \cdot \bar{U}}{(z - 0,3)(z - 0,2)}$$

$$z \cdot \bar{X}_3 = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \rightarrow \bar{X}_3 = \frac{-3 \cdot \bar{U}}{z \cdot (z - 0,2)} + \frac{-3 \cdot \bar{U}}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)}$$

$$\bar{Y} = \bar{X}_3 + 2 \cdot \bar{U} = \frac{-3 \cdot \bar{U}}{z \cdot (z - 0,2)} + \frac{-3 \cdot \bar{U}}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)} + 2 \cdot \bar{U}$$

$$H(z) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{-3}{z \cdot (z - 0,2)} + \frac{-3}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)} + 2 =$$

$$= \frac{-3(z - 0,3) - 3 + 2z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)} = \frac{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z} = \frac{2 - z^{-1} - 2,88 \cdot z^{-2} - 2,1 \cdot z^{-3}}{1 - 0,5 \cdot z^{-1} + 0,06 \cdot z^{-2}}$$

3.2

Pólusok:>>roots(den)

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0,2 \quad p_3 = 0,3$$

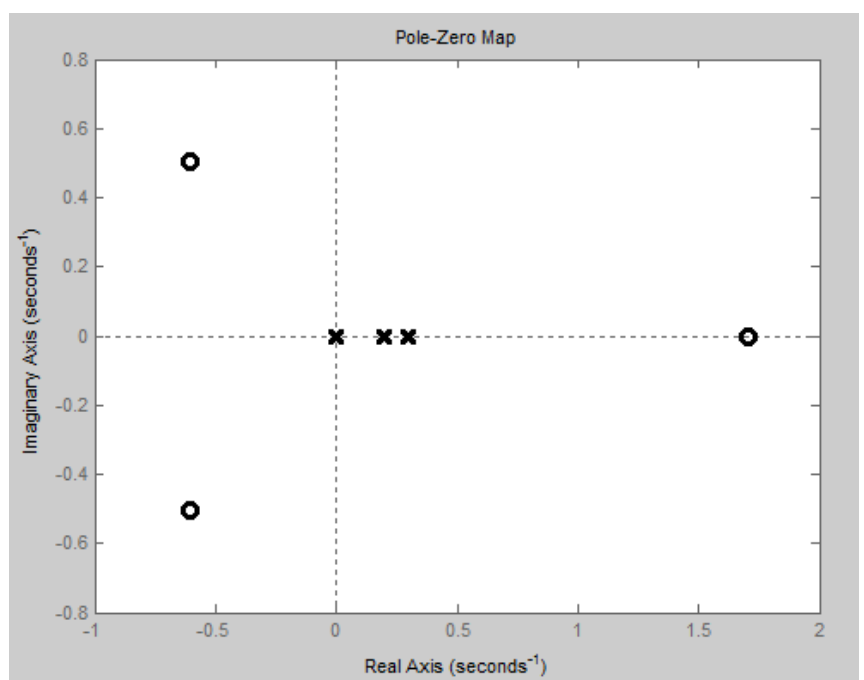
Zérusok:>>roots(num)

$$z_1 = 1,7054$$

$$z_2 = -0,6027 + 0,5024i$$

$$z_3 = -0,6027 - 0,5024i$$

Mivel a pólusok az egységkörön belül helyezkednek el, a hálózat G-V stabilis.



3.3

Matlab részlettörtekre bontás: `>> [r,p,k]=residue([2 -1 -2.88 -2.1],[1 -0.5 0.06 0])`

$$h[k] = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}\right\} = Z^{-1}\left\{2 + \frac{-3 \cdot z - 2,1}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)}\right\} =$$

$$= Z^{-1}\left\{2 + z^{-1} \cdot \left(-35 + \frac{-100 \cdot z}{(z - 0,3)} + \frac{135 \cdot z}{(z - 0,2)}\right)\right\} =$$

$$= 2 \cdot \delta[k] - 35 \cdot \delta[k - 1] + \varepsilon[k - 1] \cdot (135 \cdot 0,2^{k-1} - 100 \cdot 0,3^{k-1})$$

k	h[k]
0	2
1	0
2	-3
3	-3,6
4	-1,62
5	-0,594

Az eredmény megegyezik az 1.3-ban kapottal.

3.4

Gerjesztés: $s[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k) = \varepsilon[k] \cdot (-1,5 + 2 \cdot 0,75^k)$

$$S(z) = Z\{s[k]\} = -\frac{1,5 \cdot z}{z - 1} + \frac{2 \cdot z}{z - 0,75}$$

$$Y(z) = S(z) \cdot H(z) = \left(-\frac{1,5 \cdot z}{z - 1} + \frac{2 \cdot z}{z - 0,75}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}\right) =$$

$$= \frac{z^4 - 2,25 \cdot z^3 - 0,565 \cdot z^2 + 1,47 \cdot z + 1,8375}{z^4 - 2,25 \cdot z^3 + 1,685 \cdot z^2 - 0,48 \cdot z + 0,045} = 1 + z^{-1} \cdot \left(\frac{10,6607 \cdot z}{z - 1} - \frac{32,1515 \cdot z}{z - 0,75} + \frac{69,0476 \cdot z}{z - 0,3} - \frac{47,5568 \cdot z}{z - 0,2}\right)$$

Részlettörtekre bontás: `>> [r,p,k]=residue(num,den)`

$$y[k] = Z^{-1}\{Y(z)\} = \delta[k] + \varepsilon[k - 1] \cdot (-32,1515 \cdot 0,75^{k-1} + 69,0476 \cdot 0,3^{k-1} - 47,5568 \cdot 0,2^{k-1} + 10,6607)$$

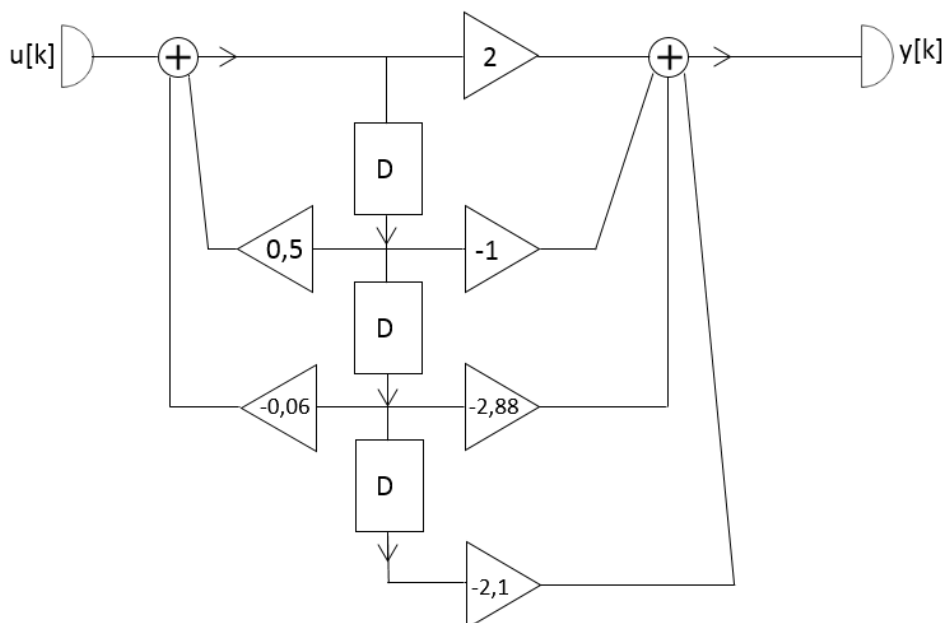
3.5

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1} - 2,88 \cdot z^{-2} - 2,1 \cdot z^{-3}}{1 - 0,5 \cdot z^{-1} + 0,06 \cdot z^{-2}}$$

Mivel az átviteli függvény megegyezik, a rendszer egyenlet is:

$$y[k] - 0,5 \cdot y[k - 1] + 0,06 \cdot y[k - 2] = 2 \cdot u[k] - u[k - 1] - 2,88 \cdot u[k - 2] - 2,1 \cdot u[k - 3]$$

A kanonikus hálózat:



3.6

Gerjesztés:

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-1,5 + 2 \cdot 0,75^k)$$

A válasz analitikus alakja:

$$y[k] = \delta[k] + \varepsilon[k - 1] \cdot (-32,1515 \cdot 0,75^{k-1} + 69,0476 \cdot 0,3^{k-1} - 47,5568 \cdot 0,2^{k-1} + 10,6607)$$

Rendszeregyenlet:

$$y[k] - 0,5 \cdot y[k - 1] + 0,06 \cdot y[k - 2] = 2 \cdot u[k] - u[k - 1] - 2,88 \cdot u[k - 2] - 2,1 \cdot u[k - 3]$$

Ellenőrzés fokozatos behelyettesítés módszerével, Excel segítségével:

k	u[k]	y[k] analitikus	y[k] rendszer
-3	0	0	0
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	0,5	1	1
1	0	0	0
2	-0,375	-2,25	-2,25
3	-0,6563	-3,1125	-3,1125
4	-0,8672	-1,4194	-1,4194
5	-1,0254	0,9710	0,9710
6	-1,1440	3,1836	3,1836
7	-1,2330	4,9857	4,9857
8	-1,2998	6,3835	6,3835

A válasz értékei megegyeznek.

3.7 (nem kötelező)

Legyen a véges válasz: $y[k] = \delta[k]$

$$H(z) = \frac{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = 1 \quad \rightarrow \quad U(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}$$

$$u[k] = Z^{-1} \left\{ \frac{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1} \right\} = Z^{-1} \left\{ 0,5 + z^{-1} \cdot z \cdot \frac{0,75 \cdot z + 0,525}{z^3 - 0,5 \cdot z^2 - 1,44 \cdot z - 1,05} \right\}$$

Számolás Matlabbal:

```
>>syms k;
>> [r,p,n]=residue([0.75 0.525],[1 -0.5 -1.44 -1.05]);
>> u1=r(1).*p(1).^k+r(2).*p(2).^k+r(3).*p(3).^k
```

u1 szép függvény...

$$u[k] = 0,5 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k - 1] \cdot u1[k - 1]$$

