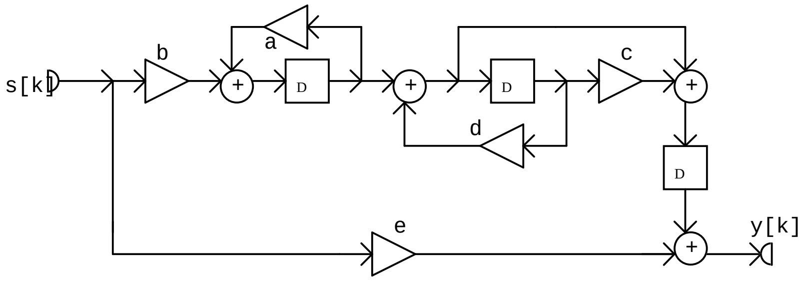
A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A hálózat paraméterei az ábra alatti táblázatból határozandók meg. A fejlécben található „*Adatsor száma*” mező jelöli ki a táblázat megfelelő sorát.

29.



Erõsítések

a	b	c	d	e
0,2	-3	0,7	0,3	2
0,3	-0,9	-0,5	0,4	0,5
-0,3	0,5	0,4	0,4	-0,5
-0,4	-0,6	0,6	-0,6	0,9
-0,6	0,9	0,8	0,5	-0,9
0,6	0,6	-0,8	-0,7	-1
0,7	0,4	2	0,4	-1
0,3	-0,4	0,9	0,4	0,5
-0,3	-0,6	0,5	0,5	0,5
0,6	0,6	0,5	0,6	0,9

1.4.

F	G	p
-1,5	2	3/4
-2,5	1,5	-3/4
-1	3	12/13
2,5	2	-12/13
1,2	-2,4	12/11
-1,5	-3	-12/11
2	-1,5	4/7
-2	1,8	-4/7
3	-2,5	5/7
2	-1,6	-5/7

2.2.

S	ϑ_0	ρ
7	3π/29	π/7
3	3π/31	π/8
4,2	3π/32	0,2π
5,5	3π/34	π/13
1,4	3π/35	-π/5
6	3π/37	-π/3
5	3π/38	π/7
4	3π/40	-π/7
3	3π/41	π/9
2	3π/28	-π/9

2.3. s[k] értékei

k	0	1	2	3	4	5	
		-3	2	-4	1	5	2
		1	1	4	-2	-1	1
		2	-3	3	8	0	3
		-3	4	1	-1	1	-3
		-1	1	-2	-2	7	2
		2	2	-2	5	5	2
		-1	3	-5	2	-5	-4
		7	2	-2	3	5	7
		1	5	-3	-5	4	2
		1	4	-2	1	-6	7

1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!

1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!

1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!

1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \ldots, 5$ értékekre!

1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!

2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?

2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!

2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!

2.5 Az 1.3-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!

2.6 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!

2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1 és a 2.2 pont eredményeit az ANDI programmal!

3. feladat: Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

3.1 Határozza meg a hálózat átviteli függvényét normálalakban a z tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!

3.2 Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés-válasz stabilitását!

3.3 Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \ldots, 5$-re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!

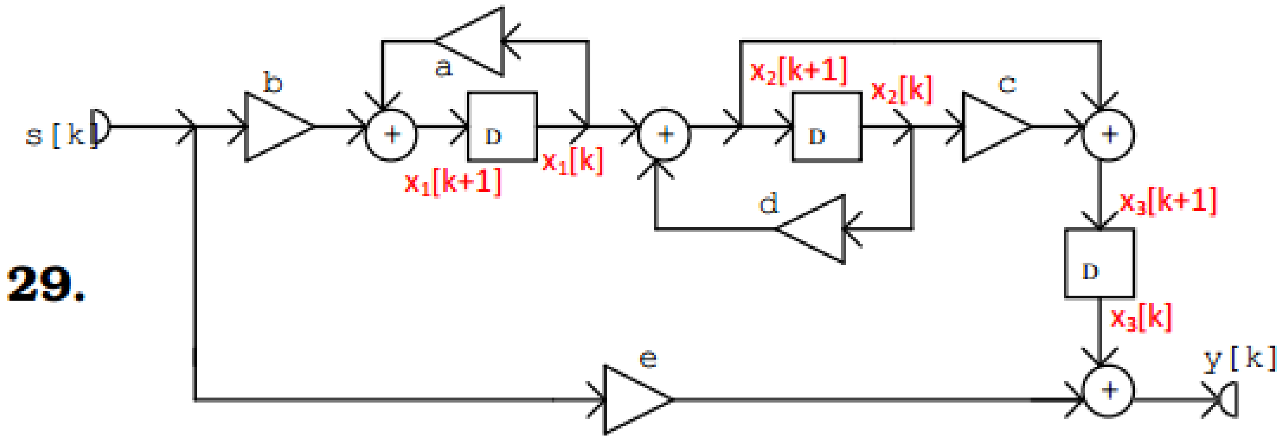
3.4 Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$!

3.5 Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!

3.6 A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4 feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$ ütemre!

3.7 (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!

3.8 (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!



Erősítések				
a	b	c	d	e
0,2	-3	0,7	0,3	2

Adatsor száma: 1

1.4.		
F	G	p
-1,5	2	3/4

1.1

Annyi állapotváltozót veszünk fel, ahány késleltető van a hálózatban.

$x_1[k+1] = a \cdot x_1[k] + b \cdot s[k]$ $\qquad\longrightarrow\qquad$ $\boldsymbol{x_1[k+1] = 0,2 \cdot x_1[k] - 3 \cdot s[k]}$

$x_2[k+1] = x_1[k] + d \cdot x_2[k]$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2[k+1] = x_1[k] + 0,3 \cdot x_2[k]}$

$x_3[k+1] = x_2[k+1] + c \cdot x_2[k]$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_3[k+1] = x_1[k] + x_2[k]}$

$y[k] = x_3[k] + e \cdot s[k]$ $\qquad$ $\boldsymbol{y[k] = x_3[k] + 2 \cdot s[k]}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{matrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 1 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \underline{b} = \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \underline{c}^T = 0 \quad 0 \quad 1 \qquad d = 2$$

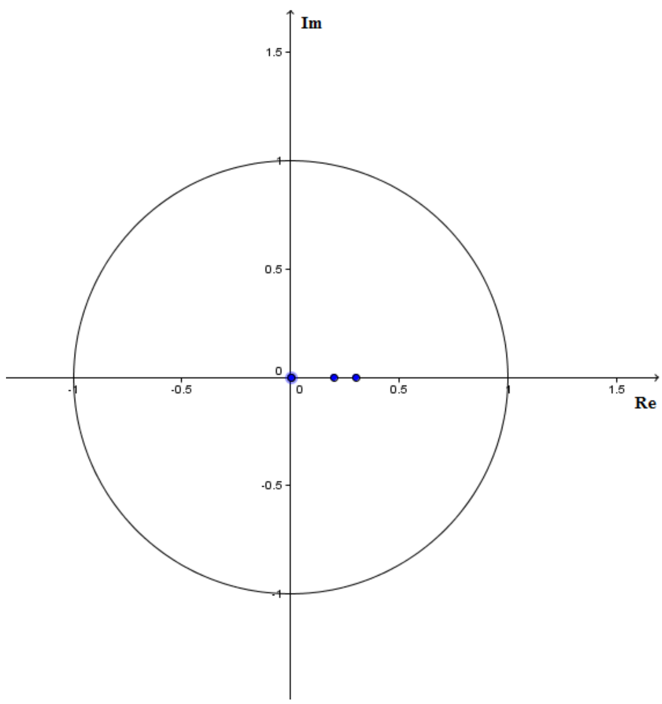
1.2

Matlab: >> la=eig(A)

<u>Sajátértékek</u>:

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 0{,}3 \qquad \lambda_3 = 0{,}2$

A sajátértékek az egységkörön belül helyezkednek el, ezért a rendszer <u>aszimptotikusan stabilis.</u> $|\lambda_i| < 1$



1.3

Impulzusválasz:

Számolás Excel segítségével lépésről lépésre:

k	s[k]	x1[k]	x2[k]	x3[k]	y[k]
-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	**2**
1	0	-3	0	0	**0**
2	0	-0,6	-3	-3	**-3**
3	0	-0,12	-1,5	-3,6	**-3,6**
4	0	-0,024	-0,57	-1,62	**-1,62**
5	0	-0,0048	-0,195	-0,594	**-0,594**
6	0	-0,0010	-0,0633	-0,1998	**-0,1998**
7	0	-0,0002	-0,0200	-0,0643	**-0,0643**
8	0	0,0000	-0,0062	-0,0201	**-0,0201**
9	0	0,0000	-0,0019	-0,0062	**-0,0062**
10	0	0,0000	-0,0006	-0,0019	**-0,0019**

Az állapotváltozós leírásból:

$$\underline{A} = \begin{matrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 1 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

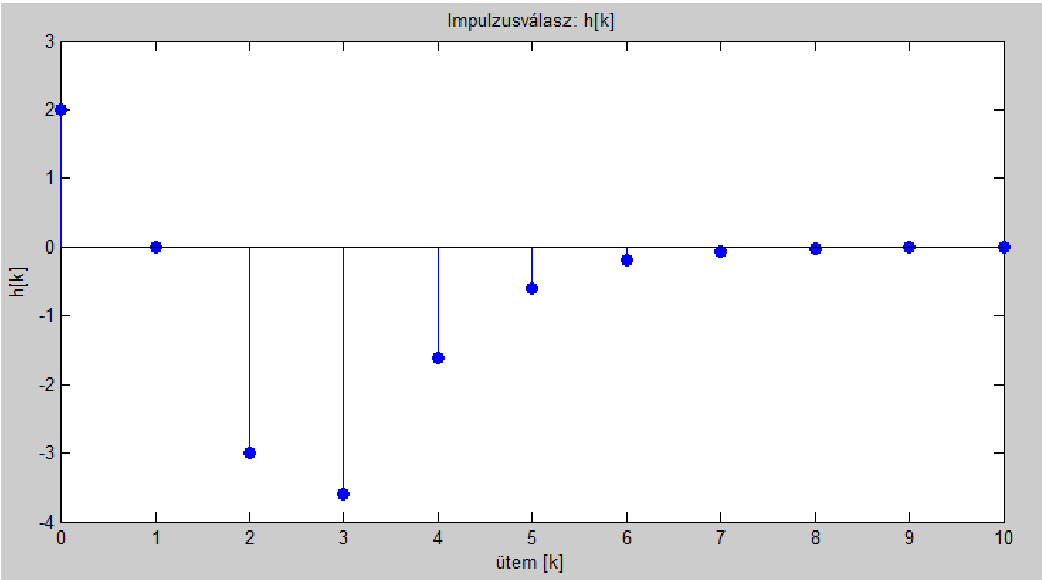
$$\underline{b} = \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$d = 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{h[k]} = \begin{cases} \boldsymbol{d}, & \boldsymbol{k = 0} \\ \underline{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{k-1}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}, & \boldsymbol{k \geq 1} \end{cases}}$$

Ábrázolás Matlabbal: >> stem(h,'fill')



Analitikus alak:

$$\underline{A}^k = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i{}^k \cdot \underline{L_i} \text{ , ahol } \quad \underline{L_i} = \prod_{p=1, p\neq i}^{3} \left(\frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_i - \lambda_p} \right)$$

A számolások Matlab segítségével…

```
>> syms k; E=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
>> L1 = ((A-la(2)*E)*(A-la(3)*E))/((la(1)-la(2))*(la(1)-la(3)));
>> L2 = ((A-la(1)*E)*(A-la(3)*E))/((la(2)-la(1))*(la(2)-la(3)));
>> L3 = ((A-la(1)*E)*(A-la(2)*E))/((la(3)-la(1))*(la(3)-la(2)));
>> h=C*L1*B*la(1)^(k-1)+C*L2*B*la(2)^(k-1)+C*L3*B*la(3)^(k-1)
```

$$h[k] = 2 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot \left(135 \cdot 0,2^{k-1} - 35 \cdot 0^{k-1} - 100 \cdot 0,3^{k-1} \right), \text{ ha } 0^0 = 1\text{-nek értelmezzük}$$

Másképp:

$$\boxed{\boldsymbol{h[k] = 2 \cdot \delta[k] - 35 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-1] \cdot (135 \cdot 0,2^{k-1} - 100 \cdot 0,3^{k-1})}}$$

1.4

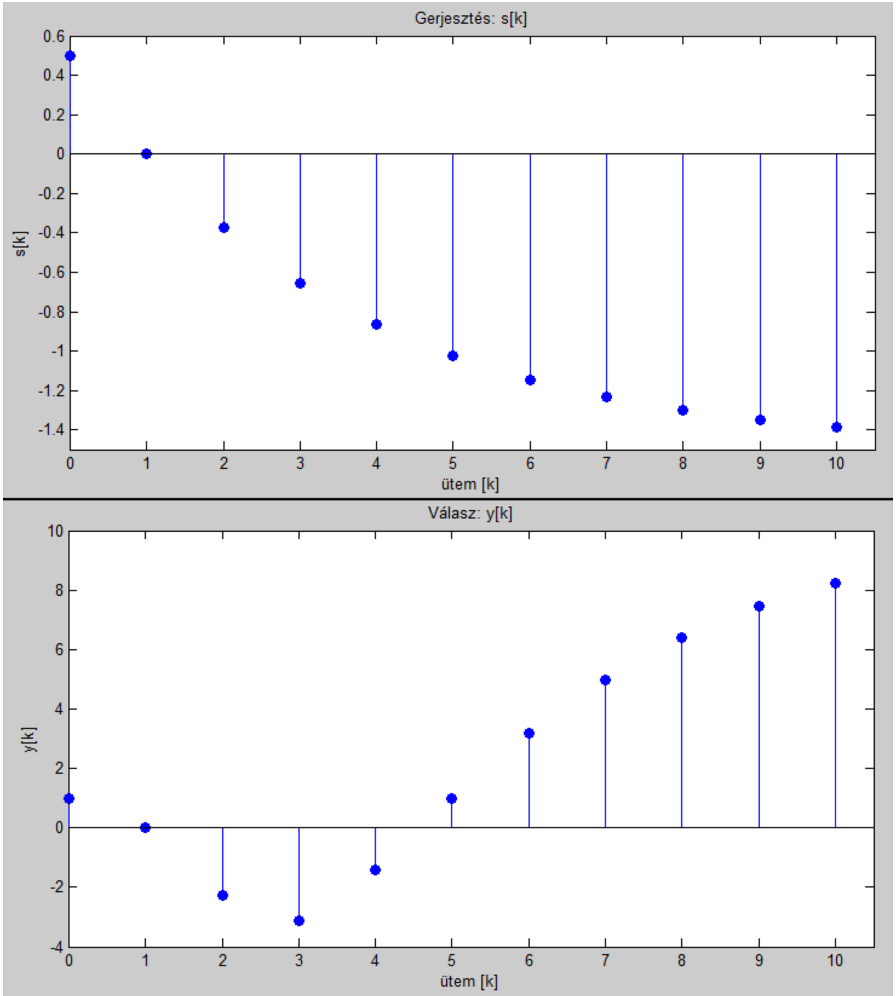
Gerjesztés: $s[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k) = \varepsilon[k] \cdot (-1{,}5 + 2 \cdot 0{,}75^k)$

Mivel h[k] és s[k] is belépő, a konvolúció véges számú szorzatok összege lesz:

$$\boldsymbol{y[k] = h[k] * s[k]} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot s[k-i] = \boldsymbol{\sum_{i=0}^{k} h[i] \cdot s[k-i]}$$

Számolás Matlabbal, például: $y[5] = h[0] \cdot s[5] + h[1] \cdot s[4] + h[2] \cdot s[3] + h[3] \cdot s[2] + h[4] \cdot s[1] + h[5] \cdot s[0]$

k	s[k]	h[k]	y[k]
0	0,5	2	**1**
1	0	0	**0**
2	-0,375	-3	**-2,25**
3	-0,6563	-3,6	**-3,1125**
4	-0,8672	-1,62	**-1,4194**
5	-1,0254	-0,594	**0,9710**
6	-1,1440	-0,1998	**3,1836**
7	-1,2330	-0,0643	**4,9857**
8	-1,2998	-0,0201	**6,3835**
9	-1,3498	-0,0062	**7,4463**
10	-1,3874	-0,0019	**8,2480**
…	…	…	…
∞	-1,5	0	≈10,66



1.5 ANDI

Az állapotváltozós leírás helyes, az impulzusválasz helyes.

A válaszok helyesek, ellenőrizve Excel segítségével.

2.1

Átviteli karakterisztika:

$$\boldsymbol{\overline{X}_1 = 0,2 \cdot \overline{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta} - 3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta}} = \frac{-3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta}}$$

$$\boldsymbol{\overline{X}_2 = \overline{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,3 \cdot \overline{X}_2 \cdot e^{-j\vartheta}} = \frac{\overline{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}3 \cdot e^{-j\vartheta}} = \frac{-3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0{,}3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta})}$$

$$\boldsymbol{\overline{X}_3 = \overline{X}_1 \cdot e^{-j\vartheta} + \overline{X}_2 \cdot e^{-j\vartheta}} = \frac{-3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{-3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0{,}3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta})}$$

$$\boldsymbol{\overline{Y} = \overline{X}_3 + 2 \cdot \overline{U}} = \frac{-3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{-3 \cdot \overline{U} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0{,}3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta})} + 2 \cdot \overline{U}$$

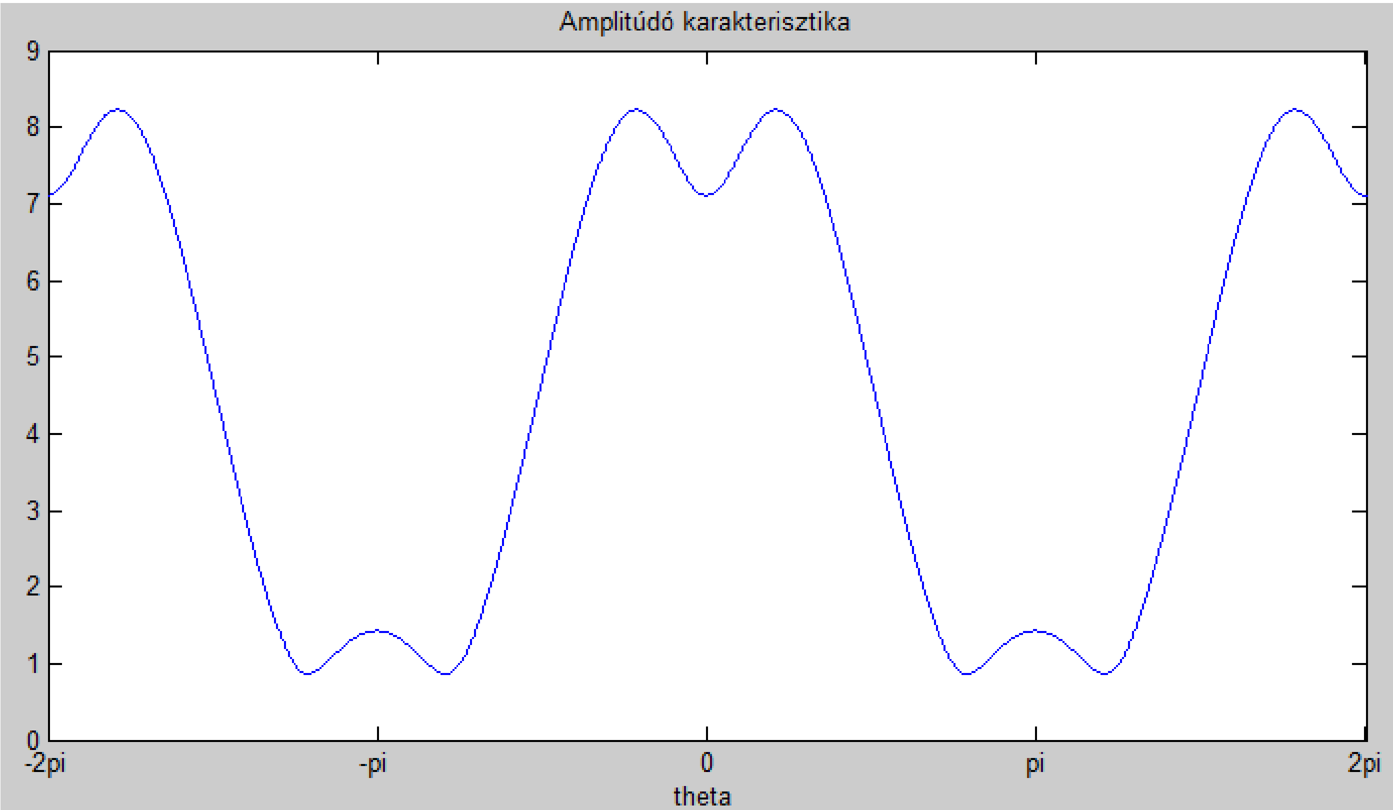
$$\boldsymbol{H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}}} = \frac{-3 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{-3 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta}}{(1 - 0{,}3 \cdot e^{-j\vartheta})(1 - 0{,}2 \cdot e^{-j\vartheta})} + 2 =$$

$$= \frac{-3e^{-j2\vartheta}(1 - 0{,}3e^{-j\vartheta}) - 3e^{-j3\vartheta} + 2(1 - 0{,}3e^{-j\vartheta})(1 - 0{,}2e^{-j\vartheta})}{(1 - 0{,}3e^{-j\vartheta})(1 - 0{,}2e^{-j\vartheta})} = \boldsymbol{\frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2,88 \cdot e^{-j2\vartheta} - 2,1 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\vartheta} + 0,06 \cdot e^{-j2\vartheta}}}$$

Amplitúdó karakterisztika:

$$\boldsymbol{K(\vartheta)} = \left|\boldsymbol{H(e^{j\vartheta})}\right|$$

Ábrázolás Matlabbal:



2.2.			2.3. s[k] értékei						
S	ϑ_0	ρ	k	0	1	2	3	4	5
7	3π/29	π/7	1. adatsor	-3	2	-4	1	5	2

2.2

$$\boldsymbol{s[k]} = S \cdot \cos(\vartheta_0 \cdot k + \rho) = \boldsymbol{7 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{29}k + \frac{\pi}{7}\right)} \quad \rightarrow \quad \overline{S} = 7 \cdot e^{j\frac{\pi}{7}}$$

Gerjesztett összetevőt keressük -> állandósult állapot

$$\overline{Y_g} = \overline{S} \cdot \overline{H}, \text{ ahol } \overline{H} = H\left(e^{j\frac{3\pi}{29}}\right) = \frac{2 - e^{-j\frac{3\pi}{29}} - 2{,}88 \cdot e^{-j2\frac{3\pi}{29}} - 2{,}1 \cdot e^{-j3\frac{3\pi}{29}}}{1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{29}} + 0{,}06 \cdot e^{-j2\frac{3\pi}{29}}} = 7{,}6738 \cdot e^{j1{,}9259}$$

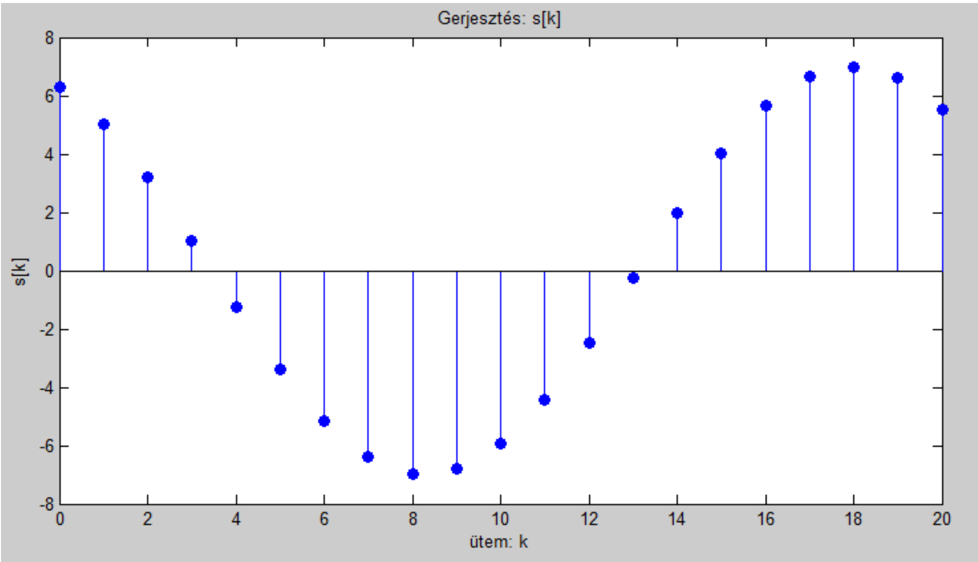
$$\overline{Y_g} = 7 \cdot e^{j\frac{\pi}{7}} \cdot 7{,}6738 \cdot e^{j1{,}9259} = 53{,}7166 \cdot e^{j2{,}3747} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_g[k] = 53{,}7166 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{29}k + 2{,}3747\right)}$$

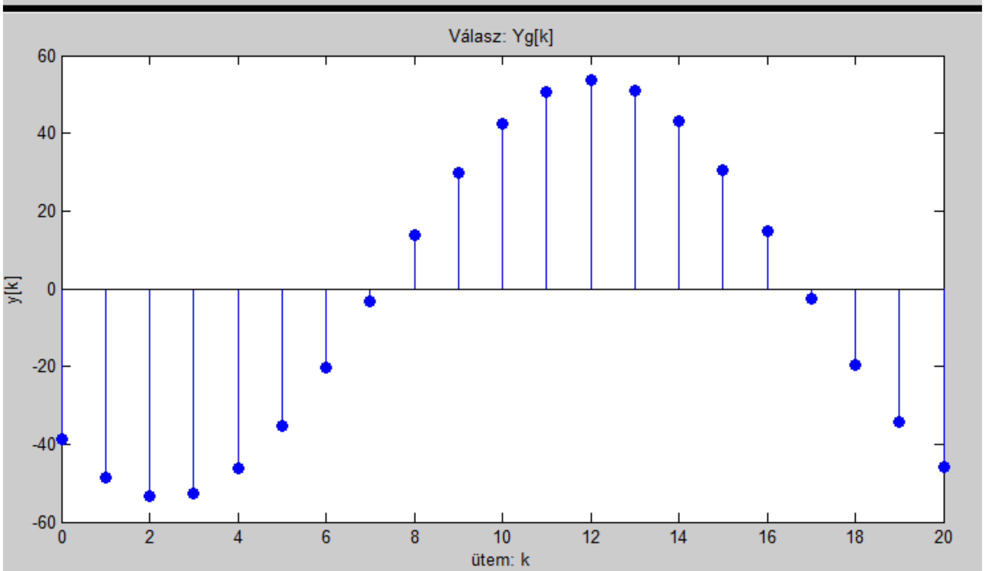
A jelek periodikusak, periódus: $\frac{\vartheta_0}{2\pi} = \frac{3}{58} \rightarrow \boldsymbol{L = 58}$

Az $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer G-V stabilis.
Akkor jelenik meg a kimeneten, ha a rendszer sajátválasza lecsengett és beállt az állandósult állapot.

Ábrázolás Matlabbal:

k=0:1:20;
*s=7*cos(3*pi*k/29+pi/7);*
*y=53.7166*cos(3*pi*k/29+2.3747);*
stem(s,'fill')
stem(y,'fill')





2.3

Fourier sorfejtés:

$$X_p^c = \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \left(x[k] \cdot e^{-jkp\vartheta_0} \right), ahol\ \vartheta_0 = \frac{2\pi}{L}, \qquad L = 6$$

$$\boldsymbol{X_0^c} = \frac{1}{6} \cdot (-3 + 2 - 4 + 1 + 5 + 2) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{X_1^c} = \frac{1}{6} \cdot \left(-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{3}} \right) = \boldsymbol{-\frac{5}{12} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boldsymbol{X_2^c} = \frac{1}{6} \cdot \left(-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j2\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}} \right) = \boldsymbol{-\frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boldsymbol{X_3^c} = \frac{1}{6} \cdot \left(-3 + 2 \cdot e^{-j\pi} - 4 \cdot e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi} + 5 \cdot e^{-j4\pi} + 2 \cdot e^{-j5\pi} \right) = \boldsymbol{-\frac{7}{6}}$$

$$\boldsymbol{X_4^c} = \frac{1}{6} \cdot \left(-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{3}} + e^{-j4\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{16\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}} \right) = \boldsymbol{-\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boldsymbol{X_5^c} = \frac{1}{6} \cdot \left(-3 + 2 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{3}} - 4 \cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}} + e^{-j5\pi} + 5 \cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j\frac{25\pi}{3}} \right) = \boldsymbol{-\frac{5}{12} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

Tehát a jel komplex alakja:

$$\boldsymbol{x[k]} = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^c \cdot e^{jkp\vartheta_0} =$$

$$\boxed{\boldsymbol{= \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{12} + j\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \cdot e^{jk\frac{\pi}{3}} + \left(-\frac{3}{4} - j\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}} - \frac{7}{6} \cdot e^{jk\pi} + \left(-\frac{3}{4} + j\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \cdot e^{jk\frac{4\pi}{3}} + \left(-\frac{5}{12} - j\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \cdot e^{jk\frac{5\pi}{3}}}}$$

Valós alak:

$$X_0 = X_0^C \qquad X_p^A = 2 \cdot Re\{X_p^c\} \qquad X_p^B = -2 \cdot Im\{X_p^c\}\ \ , ahol\ 0 < p < \frac{L}{2} = 3 \qquad X_3^A = X_3^C \quad X_3^B = 0 \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{x[k]} = X_0 + \sum_{p=1}^{3} \left(X_p^A \cdot \cos(pk\vartheta_0) + X_p^B \cdot \sin(pk\vartheta_0) \right) =$$

$$\boxed{\boldsymbol{= \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot sin\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot cos\left(2k\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot sin\left(2k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{7}{6} \cdot cos\left(3k\frac{\pi}{3}\right)}}$$

Ellenőrizve, a megfelelő k behelyettesítésével a helyes s[k] értéket szolgáltatja.

2.5

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2{,}88 \cdot e^{-j2\vartheta} - 2{,}1 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}06 \cdot e^{-j2\vartheta}}$$

Rendszeregyenlet:

$$\boldsymbol{y[k] - 0{,}5 \cdot y[k-1] + 0{,}06 \cdot y[k-2] = 2 \cdot u[k] - u[k-1] - 2{,}88 \cdot u[k-2] - 2{,}1 \cdot u[k-3]}$$

Az átviteli karakterisztika nevezőjében a rendszeregyenlet bal oldalának,
a számlálóban a jobb oldalának együtthatói találhatók, a késleltetéseknek megfelelően.

2.4

$$s[k] = \frac{1}{2} - \frac{5}{6}\cdot cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot sin\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\cdot cos\left(2k\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot sin\left(2k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{7}{6}\cdot cos\left(3k\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{67}}{3}\cdot cos\left(k\frac{\pi}{3} - 1,2605\right) - 3\cdot cos\left(2k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{7}{6}\cdot cos(k\pi)}$$

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{2 - e^{-j\vartheta} - 2{,}88\cdot e^{-j2\vartheta} - 2{,}1\cdot e^{-j3\vartheta}}{1 - 0{,}5\cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}06\cdot e^{-j2\vartheta}} \qquad \overline{Y_p} = \overline{S_p}\cdot\overline{H_p}\ ,\ \text{ahol}\ \ \overline{H_p} = H\left(e^{j\vartheta_p}\right)$$

A linearitás miatt használhatjuk a szuperpozíció elvét!

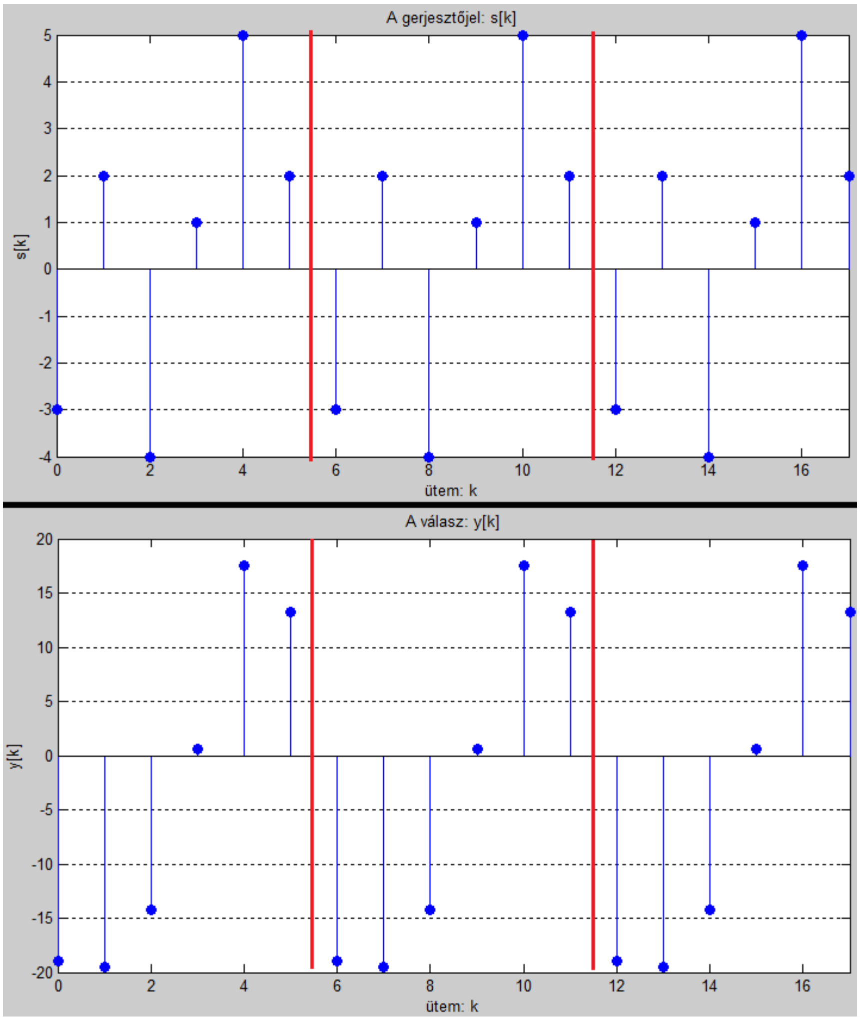
p	ϑ_p	S_p	H_p	Y_p
0	0	$\frac{1}{2}$	$-7{,}1071$	$-3{,}5536$
1	$\frac{\pi}{3}$	$-2{,}7285\cdot e^{-j1{,}2605}$	$7{,}4359\cdot e^{j0{,}1013}$	$-20{,}2886\cdot e^{-j1{,}1591}$
2	$\frac{2\pi}{3}$	$-3\cdot e^{j1{,}0472}$	$1{,}8714\cdot e^{-j\,1{,}1027}$	$-5{,}6143\cdot e^{-j0{,}0556}$
3	π	$-\frac{7}{6}$	$1{,}4231$	$-1{,}6603$

<u>A válasz:</u>

$$\mathbf{y[k] = -3{,}5536 - 20{,}2886\cdot cos\left(\frac{k\pi}{3} - 1{,}1591\right) - 5{,}6143\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{3} - 0{,}0556\right) - 1{,}6603\cdot cos(k\pi)}$$

A közelítés helyes:

k	y[k] rendszer	y[k] analitikus
0	-18,9356	-18,9383
1	-19,5218	-19,5224
2	-14,1862	-14,1838
3	0,6173	0,6199
4	17,4804	17,4804
5	13,2246	13,2226



3.1

Átviteli függvény az állapotváltozós leírásból:

```
>> A=[0.2 0 0;1 0.3 0;1 1 0];
>> C=[0 0 1];
>> B=[-3;0;0];
>> D=2;
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
```

$$\boldsymbol{H(z)} = \frac{\mathbf{2 - z^{-1} - 2,88 \cdot z^{-2} - 2,1 \cdot z^{-3}}}{\mathbf{1 - 0,5 \cdot z^{-1} + 0,06 \cdot z^{-2}}} = H\left(e^{j\vartheta}\right) \quad e^{j\vartheta} = z \text{ helyettesítéssel, mivel G-V stabilis a rendszer!}$$

Egyenletek z-tartományban:

$$z \cdot \overline{X}_1 = 0,2 \cdot \overline{X}_1 - 3 \cdot \overline{U} \quad \rightarrow \quad \overline{X}_1 = \frac{-3 \cdot \overline{U}}{z - 0,2}$$

$$z \cdot \overline{X}_2 = \overline{X}_1 + 0,3 \cdot \overline{X}_2 \quad \rightarrow \quad \overline{X}_2 = \frac{\overline{X}_1}{z - 0,3} = \frac{-3 \cdot \overline{U}}{(z - 0,3)(z - 0,2)}$$

$$z \cdot \overline{X}_3 = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 \quad \rightarrow \quad \overline{X}_3 = \frac{-3 \cdot \overline{U}}{z \cdot (z - 0,2)} + \frac{-3 \cdot \overline{U}}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)}$$

$$\overline{Y} = \overline{X}_3 + 2 \cdot \overline{U} = \frac{-3 \cdot \overline{U}}{z \cdot (z - 0,2)} + \frac{-3 \cdot \overline{U}}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)} + 2 \cdot \overline{U}$$

$$\boldsymbol{H(z)} = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{-3}{z \cdot (z - 0,2)} + \frac{-3}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)} + 2 =$$

$$= \frac{-3(z - 0,3) - 3 + 2z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)}{z \cdot (z - 0,3)(z - 0,2)} = \frac{\mathbf{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}}{\mathbf{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}} = \frac{\mathbf{2 - z^{-1} - 2,88 \cdot z^{-2} - 2,1 \cdot z^{-3}}}{\mathbf{1 - 0,5 \cdot z^{-1} + 0,06 \cdot z^{-2}}}$$

3.2

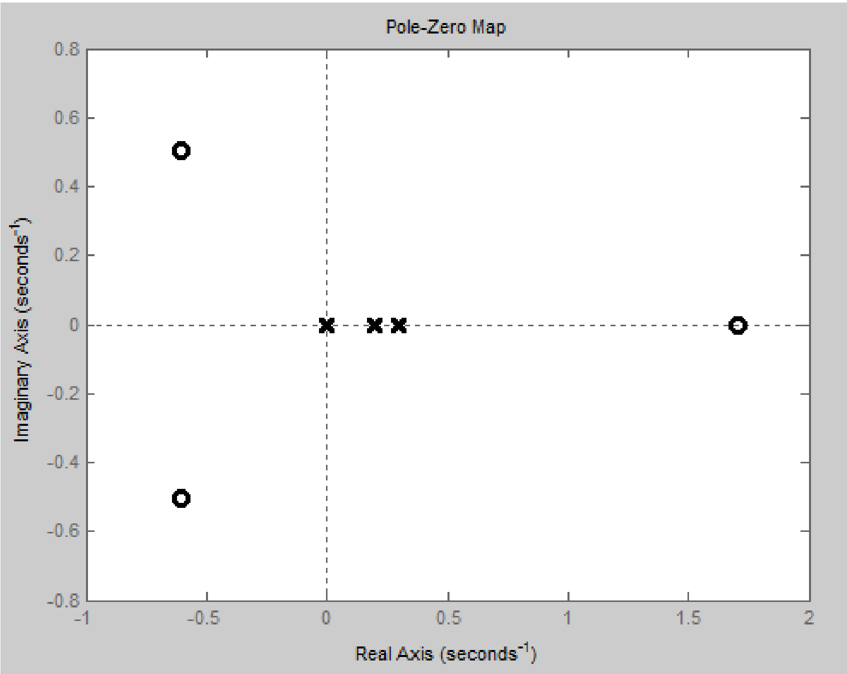
Pólusok: >> roots(den)

$\boldsymbol{p_1 = 0} \quad \boldsymbol{p_2 = 0,2} \quad \boldsymbol{p_3 = 0,3}$

Zérusok: >>roots(num)

$\boldsymbol{z_1 = 1,7054}$
$\boldsymbol{z_2 = -0,6027 + 0,5024i}$
$\boldsymbol{z_3 = -0,6027 - 0,5024i}$

Mivel a pólusok az egységkörön belül helyezkednek el, a hálózat G-V stabilis.



3.3

Matlab részlettörtekre bontás: >> [r,p,k]=residue([2 -1 -2.88 -2.1],[1 -0.5 0.06 0])

$$h[k] = \mathrm{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{2\cdot z^3 - z^2 - 2{,}88\cdot z - 2{,}1}{z^3 - 0{,}5\cdot z^2 + 0{,}06\cdot z}\right\} = \mathrm{Z}^{-1}\left\{2 + \frac{-3\cdot z - 2{,}1}{z\cdot(z-0{,}3)(z-0{,}2)}\right\} =$$

$$= Z^{-1}\left\{2 + z^{-1}\cdot\left(-35 + \frac{-100\cdot z}{(z-0{,}3)} + \frac{135\cdot z}{(z-0{,}2)}\right)\right\} =$$

$$= \mathbf{2}\cdot\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{k}] - \mathbf{35}\cdot\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{k}-\mathbf{1}] + \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{k}-\mathbf{1}]\cdot(\mathbf{135}\cdot\mathbf{0{,}2}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} - \mathbf{100}\cdot\mathbf{0{,}3}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}})$$

k	h[k]
0	2
1	0
2	-3
3	-3,6
4	-1,62
5	-0,594

Az eredmény megegyezik az 1.3-ban kapottal.

3.4

Gerjesztés: $s[k] = \varepsilon[k]\cdot(F + G\cdot p^k) = \varepsilon[k]\cdot(-1{,}5 + 2\cdot 0{,}75^k)$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}) = Z\{s[k]\} = -\frac{\mathbf{1{,}5}\cdot\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}-\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}-\mathbf{0{,}75}}$$

$$Y(z) = S(z)\cdot H(z) = \left(-\frac{1{,}5\cdot z}{z-1} + \frac{2\cdot z}{z-0{,}75}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot z^3 - z^2 - 2{,}88\cdot z - 2{,}1}{z^3 - 0{,}5\cdot z^2 + 0{,}06\cdot z}\right) =$$

$$= \frac{z^4 - 2{,}25\cdot z^3 - 0{,}565\cdot z^2 + 1{,}47\cdot z + 1{,}8375}{z^4 - 2{,}25\cdot z^3 + 1{,}685\cdot z^2 - 0{,}48\cdot z + 0{,}045} = 1 - z^{-1}\cdot\left(\frac{32{,}1515\cdot z}{z-0{,}75} + \frac{69{,}0476\cdot z}{z-0{,}3} - \frac{47{,}5568\cdot z}{z-0{,}2} + \frac{10{,}6607\cdot z}{z-1}\right)$$

Részlettörtekre bontás: >> [r,p,k]=residue(num,den)

$$\boxed{\boldsymbol{y}[\boldsymbol{k}] = \mathbf{Z}^{-1}\{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{z})\} = \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{k}] + \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{k}-\mathbf{1}]\cdot\left(-\mathbf{32{,}1515}\cdot\mathbf{0{,}75}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} + \mathbf{69{,}0476}\cdot\mathbf{0{,}3}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} - \mathbf{47{,}5568}\cdot\mathbf{0{,}2}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} + \mathbf{10{,}6607}\right)}$$

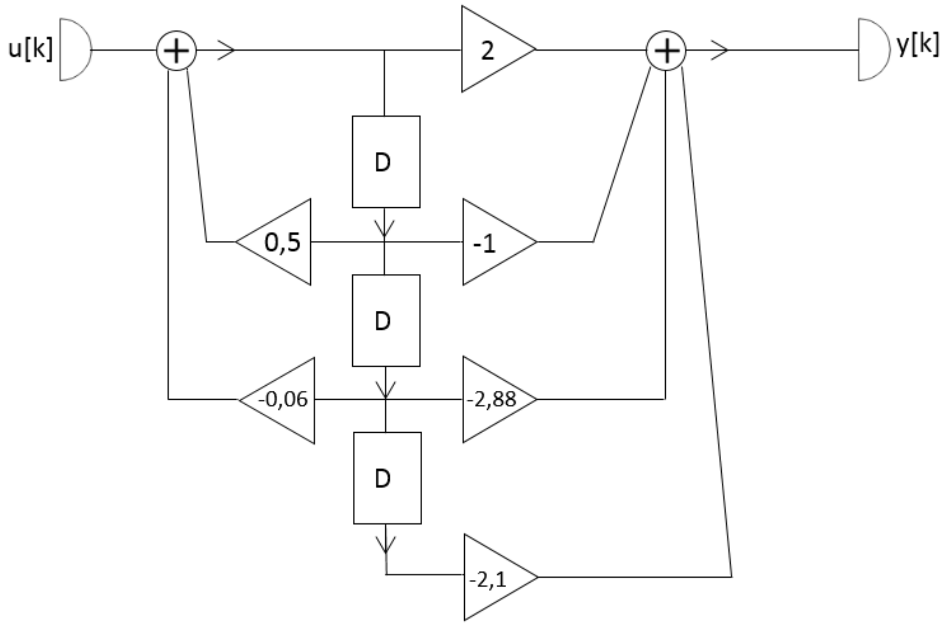
3.5

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1} - 2{,}88\cdot z^{-2} - 2{,}1\cdot z^{-3}}{1 - 0{,}5\cdot z^{-1} + 0{,}06\cdot z^{-2}}$$

Mivel az átviteli függvény megegyezik, a rendszeregyenlet is:

$$y[k] - 0{,}5\cdot y[k-1] + 0{,}06\cdot y[k-2] = 2\cdot u[k] - u[k-1] - 2{,}88\cdot u[k-2] - 2{,}1\cdot u[k-3]$$

A kanonikus hálózat:



3.6

Gerjesztés:

$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-1{,}5 + 2 \cdot 0{,}75^k)$

A válasz analitikus alakja:

$y[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot (-32{,}1515 \cdot 0{,}75^{k-1} + 69{,}0476 \cdot 0{,}3^{k-1} - 47{,}5568 \cdot 0{,}2^{k-1} + 10{,}6607)$

Rendszeregyenlet:

$y[k] - 0{,}5 \cdot y[k-1] + 0{,}06 \cdot y[k-2] = 2 \cdot u[k] - u[k-1] - 2{,}88 \cdot u[k-2] - 2{,}1 \cdot u[k-3]$

Ellenőrzés fokozatos behelyettesítés módszerével, Excel segítségével:

k	u[k]	y[k] analitikus	y[k] rendszer
-3	0	0	0
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	0,5	1	1
1	0	0	0
2	-0,375	-2,25	-2,25
3	-0,6563	-3,1125	-3,1125
4	-0,8672	-1,4194	-1,4194
5	-1,0254	0,9710	0,9710
6	-1,1440	3,1836	3,1836
7	-1,2330	4,9857	4,9857
8	-1,2998	6,3835	6,3835

A válasz értékei megegyeznek.

3.7 (nem kötelező)

Legyen a véges válasz: $\boldsymbol{y[k] = \delta[k]}$

$$H(z) = \frac{2 \cdot z^3 - z^2 - 2{,}88 \cdot z - 2{,}1}{z^3 - 0{,}5 \cdot z^2 + 0{,}06 \cdot z}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = 1 \qquad \rightarrow \qquad U(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^3 - 0{,}5 \cdot z^2 + 0{,}06 \cdot z}{2 \cdot z^3 - z^2 - 2{,}88 \cdot z - 2{,}1}$$

$$\boldsymbol{u[k] = Z^{-1}\left\{\frac{z^3 - 0,5 \cdot z^2 + 0,06 \cdot z}{2 \cdot z^3 - z^2 - 2,88 \cdot z - 2,1}\right\} = Z^{-1}\left\{0,5 + z^{-1} \cdot z \cdot \frac{0,75 \cdot z + 0,525}{z^3 - 0,5 \cdot z^2 - 1,44 \cdot z - 1,05}\right\}}$$

Számolás Matlabbal:

```
>> syms k;
>> [r,p,n]=residue([0.75 0.525],[1 -0.5 -1.44 -1.05]);
>> u1=r(1).*p(1).^k+r(2).*p(2).^k+r(3).*p(3).^k
```

u1 szép függvény…

$\boldsymbol{u[k] = 0,5 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot u1[k-1]}$