91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűségfüggvényből?

Az . $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$-től $+\infty$-ig kiintegráljuk.

$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$

92. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlásokat az együttes eloszlásból?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$

Vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne $\underline{Y}$-ban.

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

1) $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \geq 0, \forall \underline{t}$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{t})\, dt_1 \dots dt_n = 1$ $\left(\lim_{\forall t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1\right)$

94. Adja meg a konvolúciós képletet diszkrét esetben!

X, Y függetlenek, $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z}, Z = X + Y, R_z \subseteq \mathbb{Z}$ és tegyük fel, hogy $X, Y \geq 0$ $(\Rightarrow Z \geq 0)$.

$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l)$

95. Ha $\boldsymbol{X, Y \in Po(\lambda)}$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\boldsymbol{X + Y}$?

Legyen $X \in Po(\lambda)$, $Y \in Po(\mu), k = 0, 1, 2, \dots$, ekkor:

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l}{l!} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \mathrm{e}^{-\mu}$$
$$= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow X + Y \in Po(\lambda + \mu)$

Tehát jelen esetben $X + Y \in Po(2\lambda)$.

96. Ha $\boldsymbol{X, Y \in N(0, 1)}$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\boldsymbol{X + Y}$?

Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor $X + Y \in N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.

Jelen esetben $X + Y \in N(0, \sqrt{2})$.

97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?

Az $X_1, X_2, \dots, X_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall\, 2 \leq k \leq n$-re és $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{j_i} = x_{j_i})$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \varrho^2}} \cdot \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

100. Mik a polinomiális eloszlás peremeloszlásai?

A polinomiális eloszlás egydimenziós peremeloszlásai binomiális eloszlások.

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?

$X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$

102. Adja meg a konvolúciós képletet folytonos esetben!

X, Y folytonos, függetlenek, $f_{X,Y}(t, s) = f_X(t) \cdot f_Y(s)$ $\forall t, s$-re.

$Z = X + Y : f_Z(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u - s)\, ds$

103. Mikor független két valószínűségi változó?

X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall i, j$-re

$\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j)$

104. Egy n-dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?

$n - 1$

107. Mi a konvolúciós sűrűségfüggvény $\boldsymbol{X, Y \in U(0, 1)}$ esetben?

$X + Y = Z \in (0, 2)$, mert tetszőleges z esetén:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - x) f_Y(x)\, dx = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1 \cdot 1\, dx = \begin{cases} \int_0^z 1\, dx = z, & ha\ z \in (0,1) \\ \int_{z-1}^{1} 1\, dx = z, & ha\ z \in (1,2) \\ 0, & ha\ z \notin (0,2) \end{cases}$$

108. Ha $\boldsymbol{X, Y}$ függetlenek és létezik várható értékük, mi $\boldsymbol{X + Y}$ és $\boldsymbol{X \cdot Y}$ várható értéke?

Ha $Z_1 = X + Y$, akkor $\mathbf{E}Z_1 = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$.

Ha $Z_2 = XY$, akkor $\mathbf{E}Z_2 = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$.

109. Az egészértékű diszkrét változókra adja meg a konvolúciós képletet!

Ha $\{p_i\}$ az X és $\{q_j\}$ az Y független valószínűségi változók eloszlásai, akkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változó $\{r_k\}$ eloszlása:

$r_k = \sum_{i=0}^{k} p_i \cdot q_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} p_{k-j} \cdot q_j$

110. Ha $X, Y \in B(n,p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X+Y$-nak?

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X=l)\cdot\mathbf{P}(Y=k-l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n-l} \cdot \binom{n}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n-k+l}$$

110. Ha $X, Y \in G(p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X+Y$-nak?

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X=l)\cdot\mathbf{P}(Y=k-l) = \sum_{l=0}^{k} p \cdot (1-p)^{l-1} \cdot p \cdot (1-p)^{k-l-1} =$$

$$= (k+1) \cdot p^2 \cdot (1-p)^{k-2}$$

112. Ha $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

113. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$

114. Ha $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = 1$

115. Ha $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(\mathrm{x})$-el!

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) = \Phi(x)\cdot\Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du \cdot \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,dv$$

116. Ha $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) = xy$

117. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) = \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda y} + \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du$?

Az $f_Y(v)$ sűrűségfüggvénnyel.

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du\,dv$?

Az $F_{X,Y}$ eloszlásfüggvénnyel.

120. Mivel egyenlő $\lim_{v\to\infty} F_{X,Y}(u,v)$?

$F_X(u)$