1. Algebrai azonosságok felhasználásával hozza a legegyszerűbb alakra : $A := \left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{a\,b} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \right)^2 = ?$

$$A := \left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a^2}+\sqrt{a\,b}+\sqrt{b^2})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{a\,b} \right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^2 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = 1 \; .$$

A következő feladatnál vagy az **A** vagy a **B** feladatot kell megoldania. Eldöntheti, hogy melyiket választja, de ha mindkettőt megoldja, természetesen plusz pontot kaphat.

2. A. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63.
Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk.
Adja meg a mértani sorozat és a számtani sorozat első négy tagját !

A módosítás után kapott számtani sorozat első három tagjának összege $3a_2 = 63 + (3-30)$. $\Rightarrow$ $a_2 = 12$. $\Rightarrow$ A mértani sorozatra :

$$\frac{12}{q} + 12 + 12\,q = 63 , \quad \Rightarrow \quad 4\,q^2 - 17\,q + 4 = 0 , \quad q_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{8} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2-8^2}}{8} = \frac{17 \pm \sqrt{25\cdot 9}}{8} = \frac{17 \pm 5\cdot 3}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} \; . \quad \Rightarrow$$

Megoldások : **I.** $q = 4$, $a_1 = 3$, A mértani sorozat : $3,\ 12,\ 48,\ 192,\ \ldots$ A számtani sorozat : $6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \ldots$

II. $q = \frac{1}{4}$, $a_1 = 48$, A mértani sorozat : $48,\ 12,\ 3,\ 0.75,\ \ldots$ A számtani sorozat : $51,\ 12,\ -27,\ -66,\ \ldots$

2. B. $B := \sum_{n=1}^{10} 25^{1-\frac{n}{2}} \cdot \left(3^{\frac{n}{2}} \cdot 3^{\frac{n}{2}} + (\sqrt[3]{27}\,)^{n+1} \right) = ?$ $\quad B = \sum_{n=1}^{10} 25 \cdot \frac{1}{5^n} \cdot (3^n + 3^{n+1}) = 25 \cdot \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{5^n} \cdot (3^n + 3\cdot 3^n) =$

$$= 25\cdot 4 \cdot \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 100 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{(\frac{3}{5})^{10} - 1}{\frac{3}{5} - 1} = 100 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(1 - (\tfrac{3}{5})^{10} \right) = 150 \cdot \left(1 - (\tfrac{3}{5})^{10} \right) = 150 \cdot \left(1 - 0.6^{\,10} \right) \approx 149.09 \; .$$

3.
$$\left.\begin{aligned} y + 2\lambda\, x &= 0 \\ x + 2\lambda\, y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \lambda \neq 0, \quad (x,y) = ? \qquad \left.\begin{aligned} y\,x + 2\lambda\, x^2 &= 0 \\ x\,y + 2\lambda\, y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\lambda\,(x^2 - y^2) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} |\,x\,| &= |\,y\,| \\ 2\,x^2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x = \pm 1$. **Megoldások :** $x_1 = 1,\ y_1 = 1$, $x_2 = 1,\ y_2 = -1$, $x_3 = -1,\ y_3 = 1$, $x_4 = -1,\ y_4 = -1$.

4. $\ln \sqrt{x^2 - 3x} - \ln \sqrt{3 - x} = \ln 5$, $x = ?$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \ln (x^2 - 3x) - \tfrac{1}{2} \cdot \ln (3 - x) = \ln 5 \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{x^2 - 3x}{3 - x} = \ln 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x\cdot(x-3)}{3-x} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = -25 \; .$$

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $\mathbf{a} = (3, 3)$ és $\mathbf{b} = (-2, 5)$ helyvektorú pontokon !

Az egyenes egy irányvektora $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (3, 3) - (-2, 5) = (5, -2)$, normálvektora $\mathbf{n} = (2, 5)$, így az egyenes egyenlete :

$2\,x + 5\,y = 2\cdot 3 + 5 \cdot 3$, azaz $2\,x + 5\,y - 21 = 0$.