2009. december 2. Bev. Mat. 2. zárthelyi Megoldások A. csoport 90 perc.

1. Számológép használata nélkül számoja ki : $A := -\cos^2 20^\circ \cdot \mathrm{tg}^2 20^\circ + \mathrm{ctg}\, 50^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 50^\circ + \cos^2 110^\circ \;=\; ?$

$$A = \; -\cos^2 20^\circ \cdot \frac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ} + \frac{1}{\mathrm{tg}\, 50^\circ} \cdot \mathrm{tg}\, 50^\circ + \cos^2(90^\circ + 20^\circ) \;=\; -\sin^2 20^\circ + 1 + (-\sin 20^\circ)^2 \;=\; 1 \;.$$

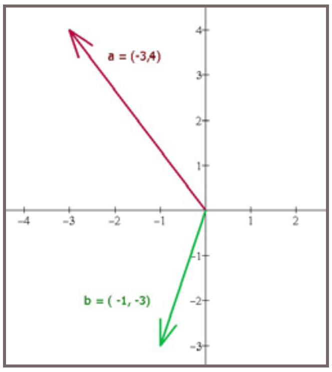
2. $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x \cdot y} \;=\; 2\sqrt{6} \\ x^2 + y^2 = 52 \end{array}\right\}$ Oldja meg ! $\;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x\,y = 24 \\ x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 48 + 52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\,y = 24 \\ x + y = \pm 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$ x és y az

A.) $z^2 - 10\,z + 24 = 0$ vagy a B.) $z^2 + 10\,z + 24 = 0$ egyenlet gyökei $\Rightarrow$ A.) $\frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = 5 \pm 1$, B.) $\frac{-10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = -5 \pm 1$ gyökök.

Megoldások : $x_1 = 6,\; y_1 = 4$, $x_2 = 4,\; y_2 = 6$, $x_3 = -4,\; y_3 = -6$, $x_4 = -6,\; y_4 = -4$.

3. Legyenek $\mathbf{a} = (-3, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, -3)$ síkvektorok. A.) Rajzolja fel a két vektort ! B.) $-2\,\mathbf{a} + 4\,\mathbf{b} = \;?$ C.) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \;?$

A.)



B.) $-2\,\mathbf{a} + 4\,\mathbf{b} = \;(\,-2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1),\; -2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3)\;) = (\,2, -20\,)$

C.) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \;(-3) \cdot (-1) \;+\; 4 \cdot (-3) \;=\; -9$

4. Egy mértani sorozatban $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6$. Mennyi S_{10} ?

$a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 \;\Rightarrow\; 2\,a_2 + a_2 \cdot q = a_2 \cdot (2 + q) = 0 \;\Rightarrow\; q = -2$ (u.i. $a_2 \neq 0$).

$-6 = a_4 - a_2 = a_2 \cdot q^2 - a_2 = a_2 \cdot (q^2 - 1) \;=\; a_2 \cdot (4 - 1) \;\Rightarrow\; a_2 = -2$, $a_1 = 1$.

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = \frac{1024 - 1}{-3} = -\frac{1023}{3} \;=\; -341 \;.$$

5. Írja fel a a 3. feladatbeli $\mathbf{a} = (-3, 4)$ helyvektorú ponton áthaladó $\mathbf{b} = (-1, -3)$ irányvektorú egyenes egyenletét !

Az egyenes egy normálvektora $\mathbf{n} = (3, -1)$, egyenlete : $3\,x - y = 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4$, azaz $3\,x - y + 13 \;=\; 0$.

2009. december 2. Bev. Mat. 2. zárthelyi Megoldások B. csoport 90 perc.

1. Tudjuk, hogy $\sin\alpha \;=\; -\frac{4}{5}$ és $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Mennyi ekkor $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ és $\mathrm{ctg}\,\alpha$?

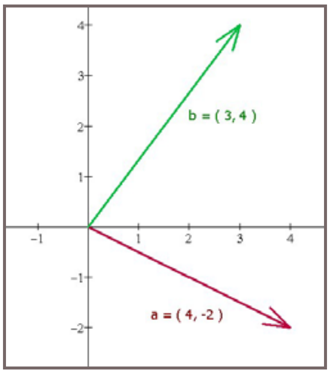
$\cos^2\alpha \;=\; 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ és $\cos\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \cos\alpha \;=\; \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -\frac{3}{4}$.

2. $\left.\begin{array}{l} x\,y + x + y \;=\; 29 \\ x\,y - 2\,x - 2\,y \;=\; 2 \end{array}\right\}$ Oldja meg ! $\left.\begin{array}{l} 2\,x\,y + 2\,x + 2\,y \;=\; 58 \\ x\,y - 2\,x - 2\,y \;=\; 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\,y = 20 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$ x és y a

$z^2 - 9\,z + 20 = 0$ egyenlet gyökei , $z_{1,2} \;=\; 4$ és 5 $\Rightarrow$ **Megoldások :** $x_1 = 4,\; y_1 = 5$, $x_2 = 5,\; y_2 = 4$.

3. Legyenek $\mathbf{a} = (4, -2)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$ síkvektorok. A.) Rajzolja fel a két vektort ! B.) $-3\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b} = \;?$ C.) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \;?$

A.)



B.) $-3\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b} = \;(\,(-3) \cdot 4 + 2 \cdot 3,\; (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 4\;) = (\,-6, 14\,)$

C.) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \;4 \cdot 3 \;+\; (-2) \cdot 4 \;=\; 4$

4. Egy mértani sorozat második tagja 3, hatodik tagja 12. Mennyi S_{10} ?

$a_6 = a_2 \cdot q^4 \;\Rightarrow\; 12 = 3 \cdot q^4 \;\Rightarrow\; q = \pm\sqrt{2}$, $S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \;\Rightarrow$

$$S_{10} = \frac{3}{\pm\sqrt{2}} \cdot \frac{(\pm\sqrt{2}\,)^{10} - 1}{\pm\sqrt{2} - 1} = 3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 \mp \sqrt{2}} = \frac{93 \cdot (2 \pm \sqrt{2})}{2} = 93 \pm \frac{93}{\sqrt{2}}$$ (Két sorozat van).

5. Írja fel a a 3. feladatbeli $\mathbf{a} = (4, -2)$ helyvektorú ponton áthaladó $\mathbf{b} = (3, 4)$ irányvektorú egyenes egyenletét !

Az egyenes egy normálvektora $\mathbf{n} = (4, -3)$, egyenlete : $4\,x - 3\,y = 4 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2)$, azaz $4\,x - 3\,y - 22 \;=\; 0$.