

**1. példa.** Egy merőlegesen metsződő földelt fémsíkok által alakított sarokban egy  $R = 3\text{ cm}$  sugarú,  $Q = 15\text{ nC}$  töltéssel ellátott fémgömb helyezkedik el az ábrán látható módon az egyes síkktól  $a = 1,5\text{ m}$  és  $b = 2\text{ m}$  távolságra. A közeg levegő.

a) Vegyen fel olyan ekvivalens töltéselrendezést, melynek elektromos tere megegyezik a fémlamezek és a töltés által létrehozott térrel! (1 pont)

Helyes ábra. (1 p)

b) Mekkora és milyen irányú erő hat a gömbre? Az irányt elegendő az a) feladat ábráján jelölni! (3 pont)

Lásd Bilicz példatár 2.16-os feladata.

Az eredő térerősség helyes formulája. (1 p)

Innen az erő:  $F = QE = 12,45\text{ N}$ . (1 p)

Az ábrán az erő helyes feltüntetése. (1 p)

c) Határozza meg a gömb potenciálját! (3 pont)

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \right) = 4,44\text{ kV} \quad (3\text{ p})$$

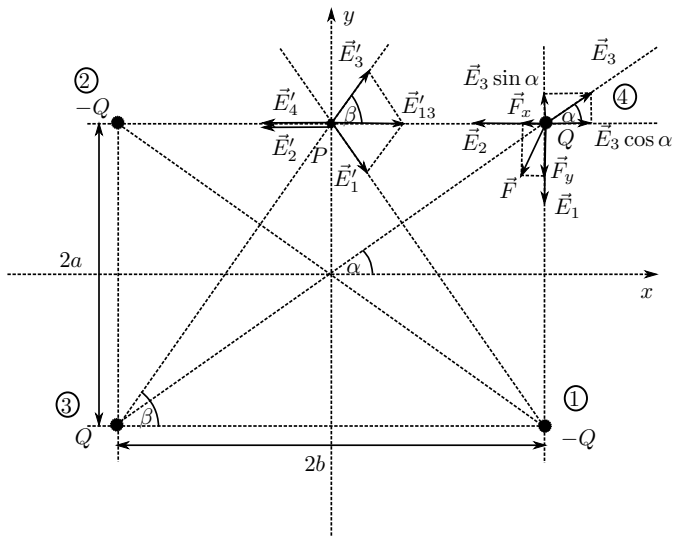
d) Határozza meg a felületi töltéssűrűséget az ábrán jelölt P pontban! (3 pont)

Térerősségkomponensek helyes kifejezése: (1 p)

$$E'_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + (2a)^2} = E'_3, \quad E'_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2} = E'_4.$$

Az eredő térerősség:  $E' = 2(E'_1 \cos \beta - E'_2)$ , ahol  $\beta = \arctan\left(\frac{2a}{b}\right)$ . (1 p)

Végül a felületi töltéssűrűség a P pontban:  $\sigma_P = \epsilon_0 E' = -494,98 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ . (1 p)



**2. példa.** Egy keresztirányban rétegzett hengerkondenzátor méretei:  $R_1 = 1,5\text{ mm}$ ,  $R_2 = 3,5\text{ mm}$ ,  $R_3 = 5,5\text{ mm}$  és  $l = 3,5\text{ cm}$ . Az egyes rétegek relatív dielektromos állandói és vezetőképességei rendre  $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1$  és  $\sigma_2$ .

Tekintsük a két réteget tökéletes szigetelőnek ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )!

a) Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2,25$ ? (2 pont)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 l}{\ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right)} = 3,37\text{ pF} \quad (2\text{ p})$$

b) Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha  $\epsilon_1 = 2,25, \epsilon_2 = 3,3$ ? (4 pont)

**I. megoldás:**  
 Az egyes rétegek kapacitásai:  $C_i = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_i l}{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)}$ , ahol  $i = \{1, 2\}$ . (2 p)  
 Az eredő kapacitás pedig soros kapcsolással kapható:  $C = C_1 \times C_2 = 3,79\text{ pF}$ . (2 p)  
**II. megoldás:**  $C = \frac{Q}{U}$ , ahol  $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr + \frac{1}{\epsilon_2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{r} dr \right)$ . (2 p)  
 A végeredmény:  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = 3,79\text{ pF}$ . (2 p)

Legyen a továbbiakban  $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{-12}\text{ S/m}$  és  $\sigma_2 = 1 \cdot 10^{-13}\text{ S/m}$ !

c) A fegyverzetek közé kapcsolt feszültség  $U = 1,5\text{ kV}$ . Határozza meg a kondenzátoron átfolyó szivárgási áramot! (4 pont)

**I. megoldás:** Elektrosztatikai analógia alapján az egyes rétegek konduktanciája:  $G_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0\epsilon_i} C_i$ , ahol  $i = \{1, 2\}$ . (2 p)  
 Az eredő vezetés pedig párhuzamos kapcsolással kapható:  $G = G_1 \times G_2$ . (1 p)  
 $G = \frac{I}{U} \Rightarrow I = \frac{2\pi l U}{\frac{1}{\sigma_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = 61,46\text{ pA}$  (1 p)  
**II. megoldás:** Az alábbi két összefüggés felhasználásával (1 p)  
 $I = J(r)2\pi r l$ ,  
 $J(r) = \sigma_i E(r)$ , ahol  $i = \{1, 2\}$ ,  
 majd a feszültség számítása a b) feladathoz hasonló módon. (2 p)  
 Végül az I áram kifejezése. (1 p)

Kispéldák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. Egy szigetelő közeg legnagyobb lineáris mérete 0,25 m. Alkalmazható-e tisztán elektrosztatikus modell 1 GHz-en az elektromos térerősség számítására a szigetelőben és annak közelében? Válaszát indokolja!

Nem, mert a  $c/f$  arány összemérhető a karakterisztikus mérettel.

2. A  $\sigma$  fajlagos vezetőképességű talajban  $h$  mélységben egy  $r \ll h$  sugarú fémgömb helyezkedik el. Határozza meg a földelési ellenállást!

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right)$$

3. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben  $\phi(x, y, z) = 2 \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ . Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét!

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\text{grad}\phi = -2\pi[\cos(\pi x) \cos(\pi y)\mathbf{e}_x - \sin(\pi x) \sin(\pi y)\mathbf{e}_y]$$

4. A levegőben két egyforma,  $R$  sugarú igen hosszú vezeték helyezkedik el egymástól  $d \gg R$  távolságban, melyek ellentétes irányú  $I$  áramot szállítanak (Lecher-vezeték). Adja meg a vezetékek síkjában, tőlük azonos távolságra lévő, párhuzamos egyenesen a térerősség nagyságát!

$$H = \frac{2I}{\pi d}$$

5. Egy toroid vasmagra két tekercset csévélünk, melynek menetszámai:  $N_1$  és  $N_2$ , a közepes erővonalhossz  $l$ , kör keresztmetszetének átmérője  $D$ . A vasmag relatív permeabilitása  $\mu_r$ . Számítsa ki a kölcsönös indukciós együtthatót, ha a két tekercs külön-külön ellentétes irányú mágneses teret hoz létre a vasmagban!

$$M = -\frac{\mu_0\mu_r N_1 N_2 D^2 \pi}{4l}$$

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés:  $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ ,  $E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$
- Végtelen egyenes vonaltöltés:  $\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$ ,  $E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$
- Végtelen egyenes vonaláram:  $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$

Konstansok:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$