II. HÁZI FELADAT : DISZKRÉT IDEJŰ HÁLÓZATOK VIZSGÁLATA

Név	Ihász Dávid Sándor
Neptun kód	******
Adatsor száma	4
Beadási határidő:	12. oktatási hét

Megjegyzések: *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* ***és a feladatlapot is be kell adni****. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását elölről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* ***nem elegendő a végeredményeket közölni****! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* ***a megoldás elvi lépéseit*** *ekkor is* ***részletesen*** *ismertetni kell.*

Gyakorlatvezető neve: HORVATH ZOLTA'N GYÖRGY

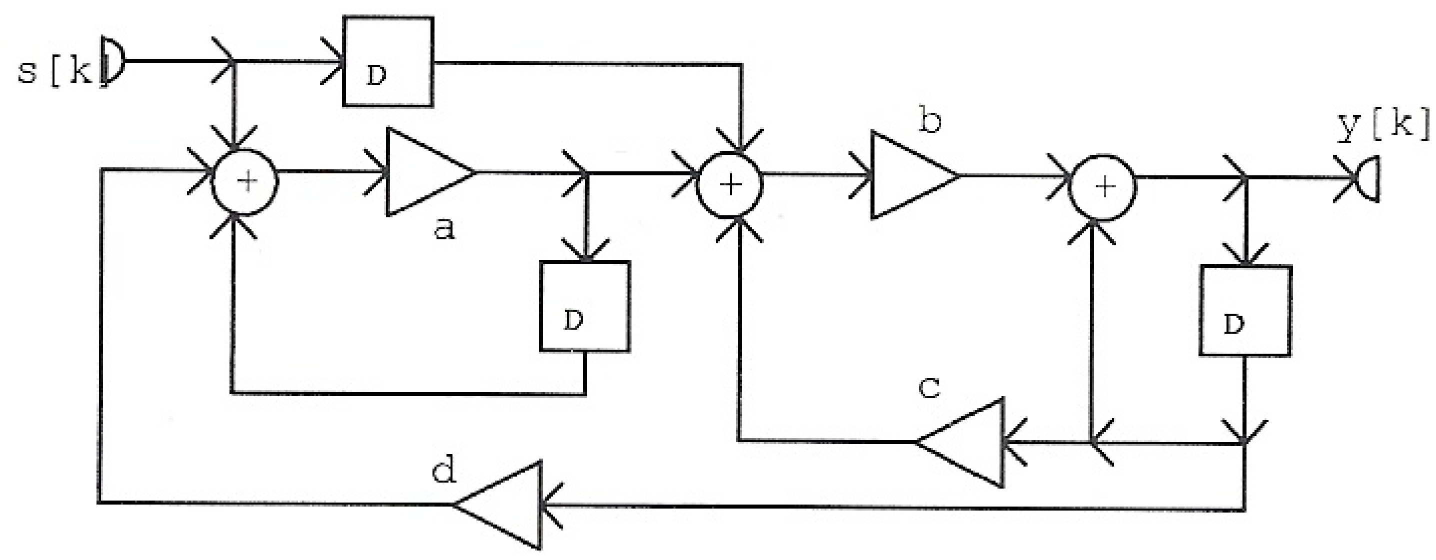
Javító véleménye (elfogadás, javítások):

OK

HZ

A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A hálózat paraméterei az ábra alatti táblázatból határozandók meg. A fejlécben található „*Adatsor száma*" mező jelöli ki a táblázat megfelelő sorát.

14.



Erősítések

a	b	c	d
0,6	0,6	0,5	0,9
-1	1,5	0,6	-2
0,4	-2	0,9	0,8
-0,6	0,5	0,5	-0,8
-0,8	-1	-0,6	0,9
-1	0,5	0,6	-0,8
1,5	0,4	0,9	0,4
-0,4	0,9	0,5	-2
0,5	0,5	0,6	2
0,6	0,5	0,6	-2,4

1.4.

F	G	p
1,5	3	6/7
-2,5	2,5	-6/7
-1	3	-5/8
2	2,5	5/8
1,4	1,2	-7/8
-1,5	3	7/8
-1	2	-5/9
-2	2,5	5/9
3	2	7/9
2	-3	-7/9

2.2.			2.3. s[k] értékei					
S	ϑ_0	ρ	k: 0	1	2	3	4	5
15	$3\pi/28$	$\pi/7$	-3	2	0	7	5	9
3	$3\pi/29$	$\pi/8$	1	1	8	-2	-1	1
4,5	$3\pi/31$	$0,2\pi$	2	-3	8	8	0	3
5,6	$3\pi/32$	0.34π	-3	4	5	-1	1	-3
1,5	$3\pi/34$	$0,33\pi$	-1	1	-5	-2	7	2
12	$3\pi/35$	$-\pi/3$	2	2	-7	5	5	2
10	$3\pi/37$	$0,32\pi$	-1	3	-2	2	-5	-4
15	$3\pi/38$	$-2\pi/3$	7	2	-9	3	5	7
9	$3\pi/40$	$0,31\pi$	1	5	-8	-5	4	2
6	$3\pi/41$	$-0,3\pi$	1	4	-5	1	-6	7

1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!

1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!

1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!

1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \ldots, 5$ értékekre!

1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!

2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?

2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!

2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!

2.5 Az 1.3-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!

2.6 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!

2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1 és a 2.2 pont eredményeit az ANDI programmal!

3. feladat: Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

3.1 Határozza meg a hálózat átviteli függvényét normálalakban a z tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!

3.2 Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés-válasz stabilitását!

3.3 Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \ldots, 5$-re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!

3.4 Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$!

3.5 Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!

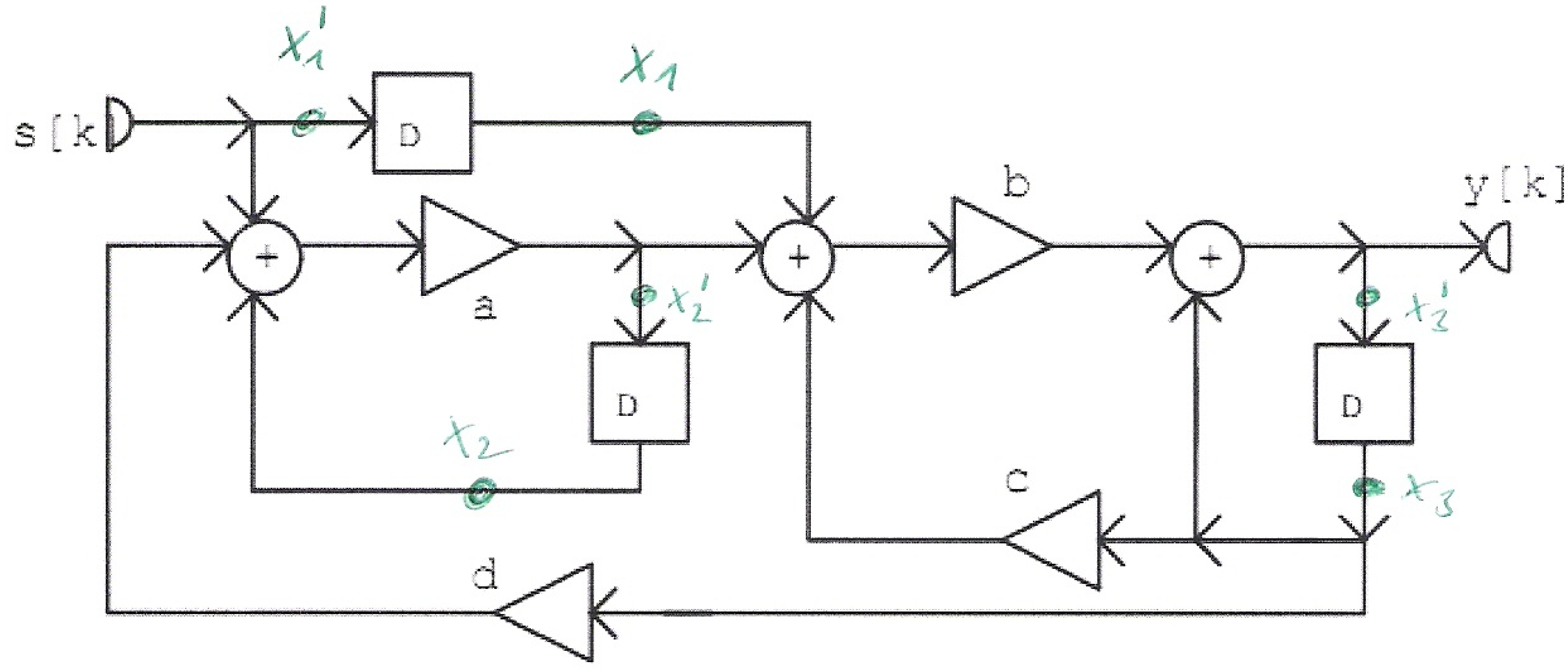
3.6 A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4 feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$ ütemre!

3.7 (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!

3.8 (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!

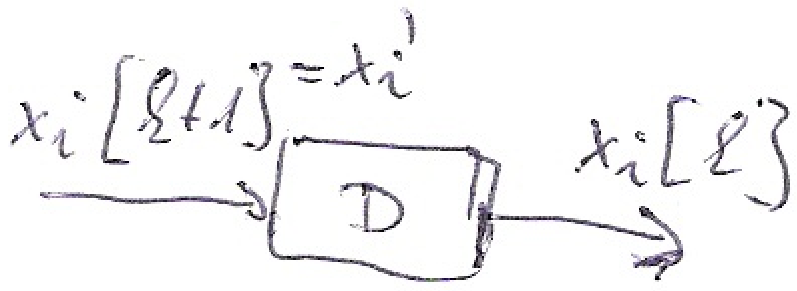
Jelek és rendszerek 2 – II. házi feladat

Név: Ihász Dávid Sándor
Neptun: ******



$\boxed{1.1}$

Az állapotváltozókat a késleltetők végén vesszük fel, az ábrán jelölt módon.



Az egyenletek:

$$x_1' = s[k]$$

$$x_2' = a\cdot\left[x_2[k] + s[k] + d\cdot x_3[k]\right]$$

$$x_3' = x_3 + \left[\cancel{x_1[k]+}\, x_2' + c\cdot x_3[k]\right]\cdot b + x_1\cdot b$$

$$y = x_3'$$

Maple-el rendezve kapjuk az állapotváltozós leírás normál alakját:

$$x_1' = 0\cdot x_1[k] + 0\cdot x_2[k] + 0\cdot x_3[k] + 1\cdot s[k]$$

$$x_2' = 0\cdot x_1[k] + a\cdot x_2[k] + (a\cdot d)\cdot x_3[k] + a\cdot s[k]$$

$$x_3' = b\cdot x_1[k] + (ab)\cdot x_2[k] + (abd + bc + 1)\, x_3[k] + (ab)\cdot s[k]$$

$$y = b\cdot x_1[k] + (ab)\cdot x_2[k] + (abd + bc + 1)\cdot x_3[k] + (ab)\cdot s[k]$$

A rendszer mátrixai tehát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a\cdot d \\ b & ab & abd + bc + 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ ab \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} b & ab & abd + bc + 1 \end{bmatrix} \qquad D = a \cdot b$$

$\boxed{1.2}$

Sajátértékek meghatározása: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & a\cdot d \\ b & a\cdot b & abd+bc+1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} a &= -0{,}6 \\ b &= 0{,}5 \\ c &= 0{,}5 \\ d &= -0{,}8 \end{aligned}$$

A determináns kifejtve: $(0-\lambda)(a-\lambda)(abd+bc+1-\lambda) - \left[(0-\lambda)(a\cdot d)(a\cdot b)\right] =$

$= -\lambda^3 + (a + abd + bc + 1)\lambda^2 - (a^2bd + abc + a)\lambda + (a^2bd)\cdot\lambda =$

$= -\lambda^3 + (a + abd + bc + 1)\lambda^2 - (abc + a)\lambda =$ → karakterisztikus polinom

$= -\lambda\left(\lambda^2 - \underbrace{(a + abd + bc + 1)}_{0{,}89}\lambda + \underbrace{(abc + a)}_{-0{,}75}\right)$

A karakterisztikus polinom tehát: $-\lambda(\lambda^2 - 0{,}89\lambda - 0{,}75)$, ezt kaptuk meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrixból Maple-ből is.

Maple-el számítottak:

$\lambda_1 = \emptyset$

$\lambda_2 = 1,4186$

$\lambda_3 = -0,5286$

Az aszimptotikus stabilitás $|\lambda_i| < 1$ feltétele nem teljesül. A válasz kifejezésében b értéke nagy súllyal szerepel – megváltoztatása azonban kihat ~~x~~ az $\underline{\underline{A}}$ mátrixra is, hiszen $x_3' = y$. Legyen tehát b értéke a megadott 0.5 helyett annak −1-szerese: −0.5.

$a = -0,6$

$b = -0,5$

$c = 0,5$

$d = -0,8$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -0,6 & 0,48 \\ -0,5 & 0,3 & 0,51 \end{bmatrix}$$

Maple-el: $\lambda(\lambda^2 + 0,09\lambda - 0,45) = \emptyset$

$\lambda_1 = \emptyset$

$\lambda_2 = 0,627$

$\lambda_3 = -0,717$

A választás jónak bizonyult, a $|\lambda_i| < 1$ teljesül – felírhatjuk tehát az új mátrixokat, most már a módosított értékekkel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -0,6 & 0,48 \\ -0,5 & 0,3 & 0,51 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,6 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,51 \end{bmatrix} \qquad D = 0,3$$

$\boxed{1.3}$

Az impulzusválasz step-by-step meghatározása $k = 0,1,2 .. 10$ ütemre.

$$x_1[k+1] = s[k]$$

$$x_2[k+1] = -0{,}6 \cdot x_2[k] + 0{,}48 \cdot x_3[k] - 0{,}6 \cdot s[k]$$

$$x_3[k+1] = -0{,}5 \cdot x_1[k] + 0{,}3 \cdot x_2[k] + 0{,}51 \cdot x_3[k] + 0{,}3 \cdot s[k]$$

$$y[k] = x_3[k+1] = -0{,}5 \cdot x_1[k] + 0{,}3 \cdot x_2[k] + 0{,}51 \cdot x_3[k] + 0{,}3 \cdot s[k]$$

k	$s[k] = \delta[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	$y[k] = h[k]$
∅	1	∅	∅	∅	0,3
1	∅	1	−0,6	0,3	−0,527
2	∅	∅	0,504	−0,527	−0,11757
3	∅	∅	−0,555	−0,11757	−0,2265
4	∅	∅	0,3765	−0,2265	−0,0326
5	∅	∅	−0,2746	−0,0326	−0,099
6	∅	∅	0,149	−0,099	$-5{,}79 \cdot 10^{-3}$
7	∅	∅	−0,1137	$-5{,}79 \cdot 10^{-3}$	−0,044
8	∅	∅	0,079	−0,044	$1{,}26 \cdot 10^{-3}$
9	∅	∅	−0,0685	0,00126	−0,0199
10	∅	∅	0,0417	−0,0199	$2{,}361 \cdot 10^{-3}$

$h[0] = D$ $\quad\quad$ $x[0] = \emptyset$

$h[1] = \underline{c}^T \cdot \underline{x}[1]$ $\quad\quad$ $\underline{x}[1] = B$

$h[2] = \underline{c}^T \cdot \underline{x}[2]$ $\quad\quad$ $\underline{x}[2] = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}[1]$

$h[3] = \underline{c}^T \cdot \underline{x}[3]$ $\quad\quad$ $\underline{x}[3] = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}[2]$

$\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$

Az impulzusválasz analitikus alakja $k \geq 2$-re:

$$h[k] = \Big[\underbrace{M_0 \cdot \lambda_1^{k-2}}_{\emptyset} + M_1 \cdot \lambda_2^{k-2} + M_2 \cdot \lambda_3^{k-3}\Big] \cdot \varepsilon[k-2]$$

$\lambda_1 = \emptyset \qquad \lambda_2 = 0{,}627 \qquad \lambda_3 = -0{,}717$

$\underline{k=2}$:

$$-0{,}11757 = M_1 \cdot \lambda_1^{\emptyset} + M_2 \cdot \lambda_2^{\emptyset}$$
$$-0{,}11757 = M_1 + M_2$$

$\underline{k=3}$:

$$-0{,}2265 = M_1 \cdot \lambda_1 + M_2 \cdot \lambda$$
$$-0{,}2265 = 0{,}627 \cdot M_1 + (-0{,}717) \cdot M_2$$

Maple:

```
> e1:  M1+M2 = -0,11757;
> e2:  0,627·M1 - 0,717·M2 = -0,2265;
> M1 := solve(e1;M1);
> M2 := solve(e2;M2);
> M1;  M2 = 0,1136
       M1 = -0,2312
```

Az impulzusválasz analitikus alakja $k \geq 2$-re tehát:

$$h[k] = \left[-0{,}2312 \cdot 0{,}627^{k-2} + 0{,}1136 \cdot (-0{,}717)^{k-2}\right] \cdot \varepsilon(k-2)$$

Tegyük ki: $k=\emptyset$-ra és $k=1$-re a fgv.-t egy-egy Dirac-deltával, így megkapjuk az analitikus alakot $k \geq \emptyset$-ra:

$$h[k] = \underbrace{0{,}3}_{h[\emptyset]} \cdot \delta[k] - \underbrace{0{,}527}_{h[1]} \cdot \delta[k-1] + \left[-0{,}2312 \cdot 0{,}627^{k-2} + 0{,}1136 \cdot (-0{,}717)^{k-2}\right] \cdot \varepsilon[k-2]$$

$\boxed{1.4.}$

$s[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k)$

$F = 2$

$G = 2{,}5$

$p = 0{,}625 = \frac{5}{8}$

$s[k] = \varepsilon[k] \cdot (2 + 2{,}5 \cdot 0{,}625^k)$ //k = 0.. 5-re a válasz

A kimenet válaszát a gerjesztés és az impulzusválasz konvolúciója adja.

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] \cdot h[k-i]$$

Belépő jel, kihasználhatjuk az összegzést: $y[k] = \varepsilon[k] \cdot \sum_{i=0}^{k} h[k-i] \cdot s[i]$

A gerjesztés értékei, ill. az impulzusválasz:

k	s[k]	h[k]	y[k]
0	4,5	0,3	1,35
1	3,5625	-0,527	-1,30275
2	2,9766	-0,11757	-1,513
3	2,6104	-0,2265	-2,2236
4	2,3815	-0,0326	-1,9648
5	2,2384	-0,099	-2,1263

$y[0] = s[0] \cdot h[0] = 1{,}35$

$y[1] = s[0] \cdot h[1] + s[1] \cdot h[0] = -1{,}30275$

$y[2] = s[0] \cdot h[2] + s[1] \cdot h[1] + s[2] \cdot h[0] = -1{,}513$

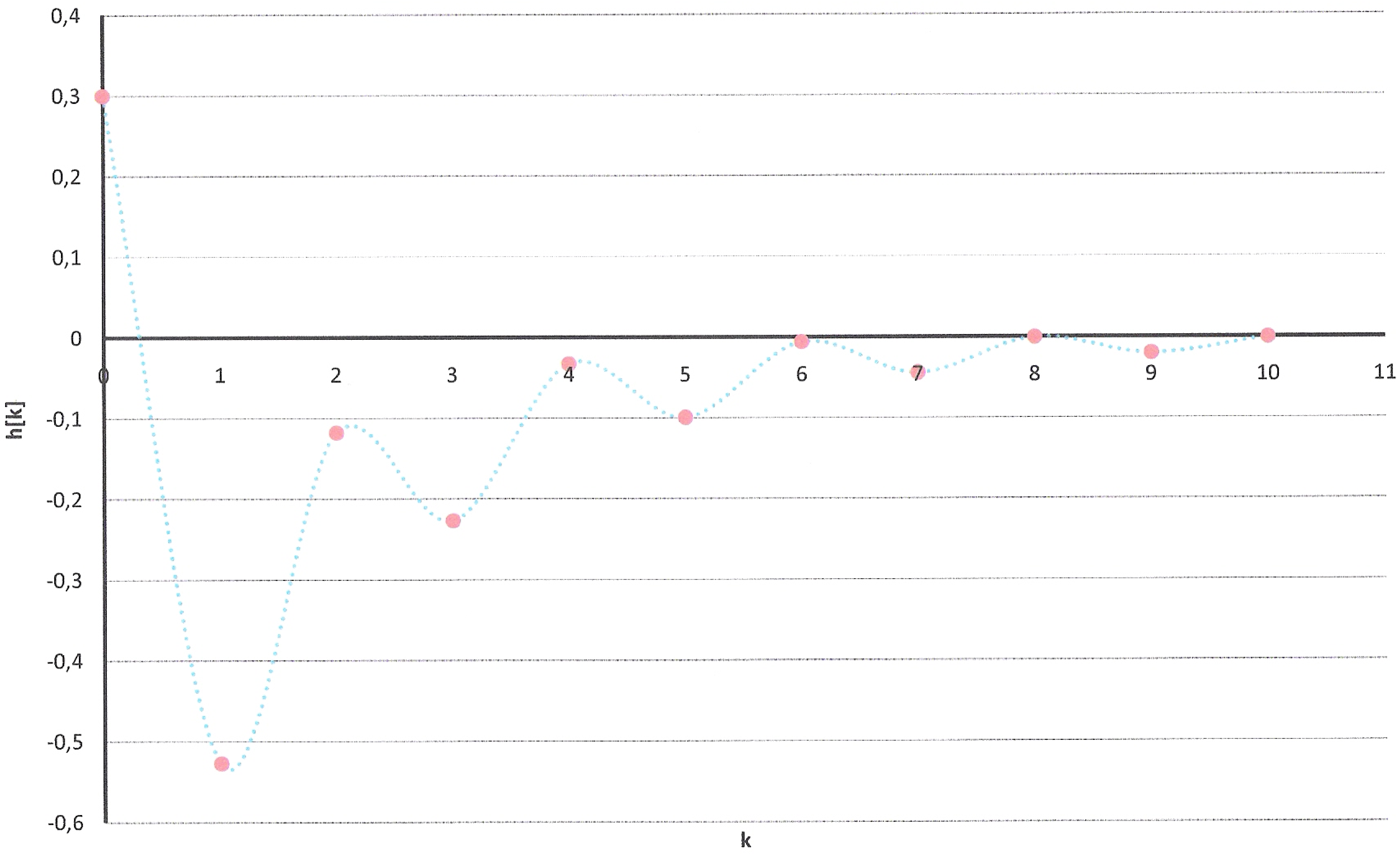
$y[3] = s[0] \cdot h[3] + s[1] \cdot h[2] + s[2] \cdot h[1] + s[3] \cdot h[0] = -2{,}2236$

$y[4] = s_0 \cdot h_4 + s_1 \cdot h_3 + s_2 \cdot h_2 + s_3 \cdot h_1 + s_4 \cdot h_0 = -1{,}9648$

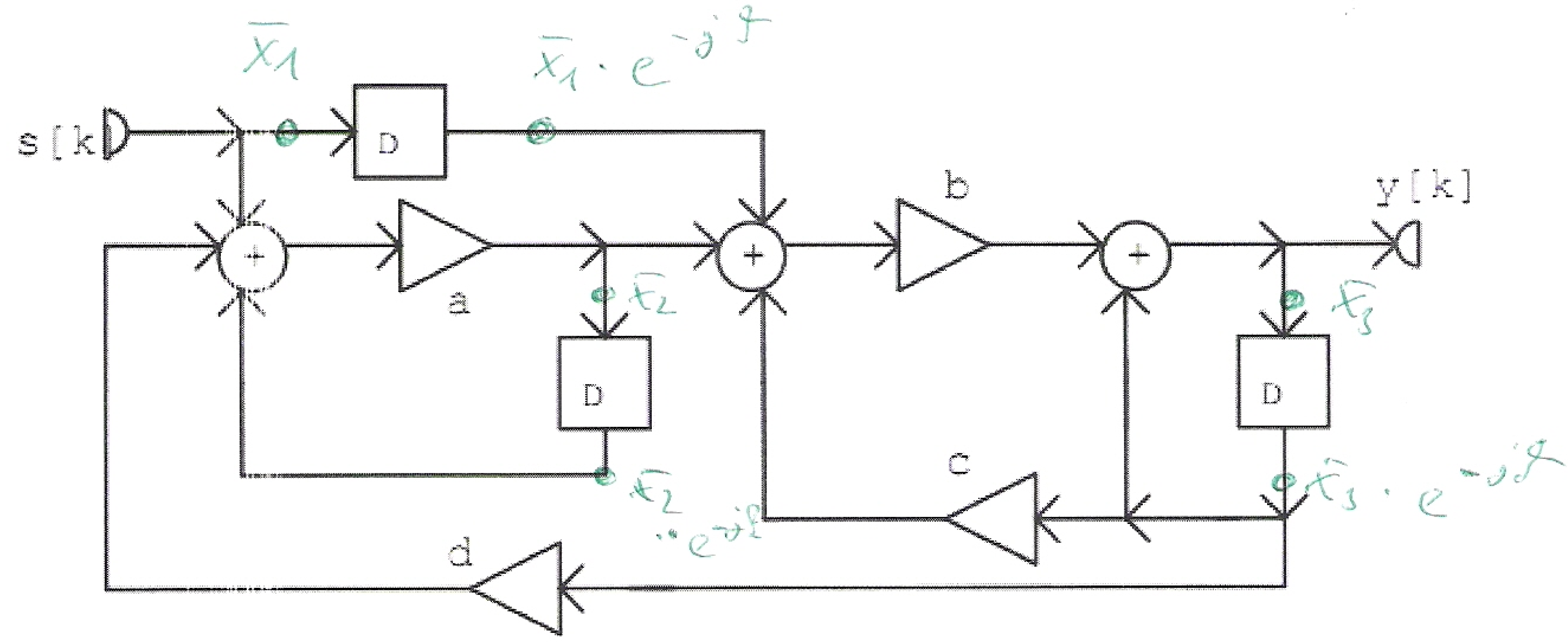
$y[5] = s_0 \cdot h_5 + s_1 \cdot h_4 + s_2 \cdot h_3 + s_3 \cdot h_2 + s_4 \cdot h_1 + s_5 \cdot h_0 = -2{,}1263$

Az értékeket beírtam a táblázatba.

Impulzusválasz a k=0..10 ütemre



2. feladat



2.1

Egyenletek:

$$\bar{x}_1 = \bar{s}$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot a + (\bar{x}_3 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot d) \cdot a + \bar{s} \cdot a$$

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot b + x_2 \cdot b + (c \cdot \bar{x}_3 \cdot e^{-j\vartheta}) \cdot b + \bar{x}_3 \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_3$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{y}}{\bar{s}} = \frac{\bar{x}_3}{\bar{s}}$$

Számoljuk Maple-el (csak $\bar{x}_2$-t és x_3-at kell):

$>>$ e1 := $x_2 = x_2 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot a + (\bar{x}_3 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot d) \cdot a + s \cdot a$;

$>>$ e2 := $x_3 = x_1 \cdot e^{-j\vartheta} \cdot b + x_2 \cdot b + (c \cdot x_3 \cdot e^{-j\vartheta}) \cdot b + \bar{x}_3 \cdot e^{-j\vartheta}$;

$>>$ x_2 := solve(e1, x2); → $>>$ a := −0,6; b := −0,5; c := 0,5; d := −0,8

$$x_2 = \frac{0{,}6\,(-5 \cdot s + 4 \cdot x_3 \cdot e^{-j\vartheta})}{5 + 3 \cdot e^{-j\vartheta}}$$

$>>$ x_3 := solve(e2, x3);

$$X_3 = \frac{10\cdot\left(-3s+5\cdot x_1\cdot e^{-j\vartheta}+3\cdot x_1\cdot e^{-2j\vartheta}\right)}{-900-9e^{-j\vartheta}+45e^{-2j\vartheta}}$$

```
>> ~~Hreg~~ := subs(x1 = s, x3);
>> He := y/s;
>> expand(He);
```

$$He = \frac{-30+50\cdot e^{-j\vartheta}+30e^{-2j\vartheta}}{-1000-9e^{-j\vartheta}+45e^{-2j\vartheta}}$$

Térjünk át ⊕ hatványokra egy $e^{-2j\vartheta}$-val leosztással ($=e^{-2j\vartheta}$-val osztás):

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{-30\cdot e^{2j\vartheta}+50\cdot e^{j\vartheta}+30}{-100e^{2j\vartheta}-9e^{j\vartheta}+45\cancel{e^{2j\vartheta}}}$$

Normalizáljuk:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0{,}3\,e^{2j\vartheta}-0{,}5\cdot e^{j\vartheta}-0{,}3}{e^{2j\vartheta}+0{,}09e^{j\vartheta}-0{,}45}$$

Számításainkat a Maple-el ellenőrizzük, ha leírjuk az $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}^T$ és $\underline{D}$ mátrixokat:

```
>> with(DynamicSystems);
>> sys1 := TransferFunction(A, B, C, D, discrete=true);
>> PrintSystem(sys1);
```

$$tf_{1,1} = \frac{0{,}3z^2-0{,}5z-0{,}3}{z^2+0{,}09z-0{,}45}$$

Mivel rendszerünk stabil, így az átviteli fgv.-ből $z=e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel kapjuk $H(e^{j\vartheta})$-t

Amplitúdó karakterisztika: $K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|$

Használjuk fel az Euler-relációt:

$$e^{j\cdot w\cdot x} = \cos(w\cdot x) + i\cdot\sin(w\cdot x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-j\cdot w\cdot x} = \cos(w\cdot x) - i\cdot\sin(w\cdot x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Az abszolútérték-képzéshez az Re{} és az Im{} részt mind a számlálóban, mind a nevezőben elegendő kiválasztanunk – a cos tagok és a konstans alkotják a valós részt, a sin tagok a képzetest.

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,3\cdot[\sin(2\vartheta)\cdot i + \cos(2\vartheta)] - 0,5\cdot[\cos(\vartheta) + i\cdot\sin(\vartheta)] - 0,3}{\cos(2\vartheta) + i\cdot\sin(2\vartheta) + 0,09\cdot[\cos(\vartheta) + i\cdot\sin(\vartheta)] - 0,45} =$$

$$= \frac{[0,3\cdot\cos(2\vartheta) - 0,5\cdot\cos(\vartheta) - 0,3] + i\cdot[0,3\cdot\sin(2\vartheta) - 0,5\cdot\sin(\vartheta)]}{[\cos(2\vartheta) + 0,09\cdot\cos(\vartheta) - 0,45] + i\cdot[\sin(2\vartheta) + 0,09\cdot\sin(\vartheta)]}$$

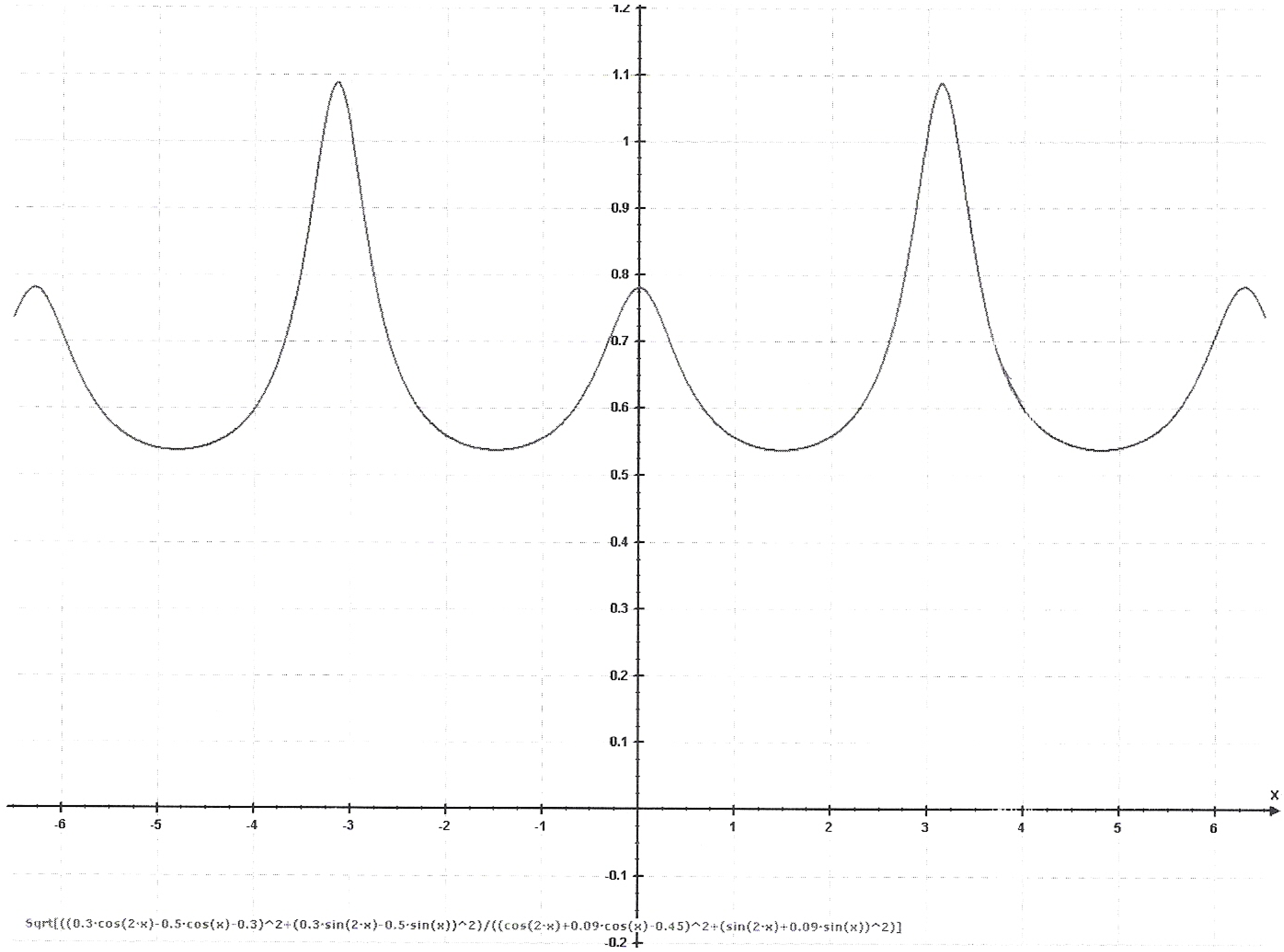
Ez már $H(e^{j\vartheta}) = \frac{Re_n + i\cdot Im_n}{Re_{sz} + i\cdot Im_{sz}}$ alakú. Abs. érték-képzés:

$$|H(e^{j\vartheta})| = \left|\frac{Re_n + i\cdot Im_n}{Re_{sz} + i\cdot Im_{sz}}\right| = \frac{|\ \ldots\ |}{|\ \ldots\ |} = \frac{\sqrt{Re_n^2 + Im_n^2}}{\sqrt{Re_{sz}^2 + Im_{sz}^2}} = \sqrt{\frac{Re_n^2 + Im_n^2}{Re_{sz}^2 + Im_{sz}^2}}$$

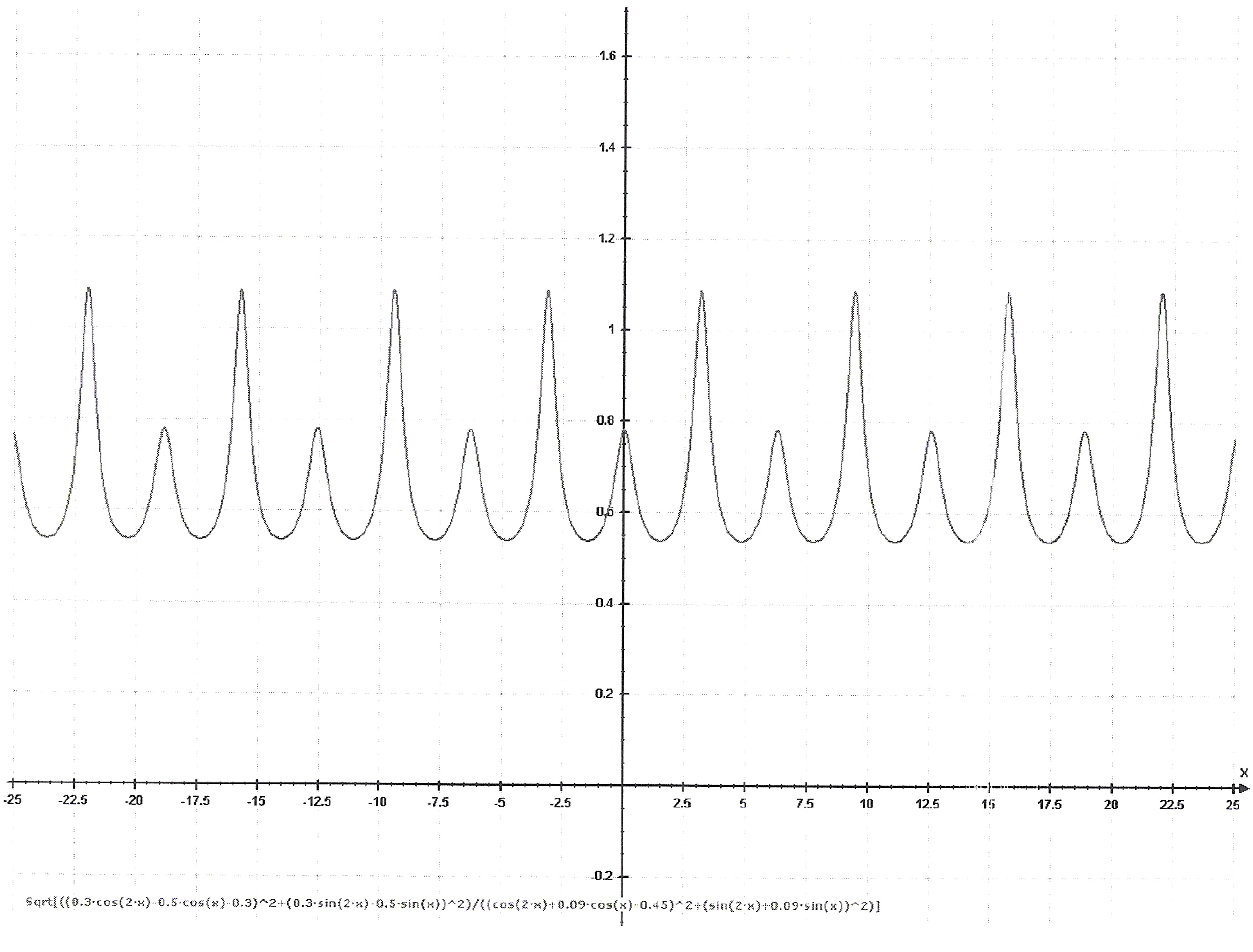
Tehát:

$$K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})| = \sqrt{\frac{[0,3\cdot\cos(2\vartheta) - 0,5\cdot\cos(\vartheta) - 0,3]^2 + [0,3\sin(2\vartheta) - 0,5\cdot\sin(\vartheta)]^2}{[\cos(2\vartheta) + 0,09\cdot\cos(\cancel{2}\vartheta) - 0,45]^2 + [\sin(2\vartheta) + 0,09\cdot\sin(\vartheta)]^2}}$$

A függvényt Wolfram Mathematicával ábrázoltam a $(-2\pi, 2\pi)$, illetve – a szemléltetés végett – a $(-8\pi, 8\pi)$ intervallumon. Tisztán látható ~~a π szerinti ismétlődés, illetve~~ az amplitúdó karakterisztika páros jellege.



x
Sqrt[((0.3·cos(2·x)-0.5·cos(x)-0.3)^2+(0.3·sin(2·x)-0.5·sin(x))^2)/((cos(2·x)+0.09·cos(x)-0.45)^2+(sin(2·x)+0.09·sin(x))^2)]



x
Sqrt[((0.3·cos(2·x)-0.5·cos(x)-0.3)^2+(0.3·sin(2·x)-0.5·sin(x))^2)/((cos(2·x)+0.09·cos(x)-0.45)^2+(sin(2·x)+0.09·sin(x))^2)]

$\boxed{2.2}$

$s[k] = 5{,}6 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{3\pi}{32} + 0{,}34\pi\right)$

$\bar{S} = 5{,}6 \cdot e^{j \cdot 0{,}34\pi}$

$\vartheta_0 = \frac{3\pi}{32}$

$$\bar{H}(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{0{,}5294 \cdot e^{j\cdot 177{,}67^\circ}}{0{,}7463 \cdot e^{j\cdot 51{,}206^\circ}} = 0{,}709 \cdot e^{j \cdot 126{,}464^\circ} =$$

$$= 0{,}709 \cdot e^{j\cdot 2{,}207}$$ (Azt szintén Wolfram Alpha-val végeztem!)

$$\bar{Y}_{\vartheta_0} = \bar{H}_{\vartheta_0} \cdot \bar{S}_{\vartheta_0} = 0{,}709 \cdot e^{j\cdot 2{,}207} \cdot 5{,}6 \cdot e^{j \cdot 0{,}34\pi} =$$

$$= 3{,}9704 \cdot e^{j\cdot 3{,}275}$$

Innen a gerjesztett összetevő: $y_g[k] = 3{,}9704 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{3\pi}{32} + 3{,}275\right) =$

$$= 3{,}9704 \cdot \cos\left(k \cdot 16{,}785^\circ + 187{,}644^\circ\right)$$

Az $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer GV-stabilis:

Periodikus jelnél $\vartheta = 2\pi \cdot \frac{M}{L}$ alakú, ahol $M, L \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ L a periódusidő.

$$\frac{3\pi}{32} = 2\pi \cdot \frac{M}{L}$$

$\frac{M}{L} = \frac{3}{64}$ $\rightsquigarrow$ A periódusidő $L = 64$.

Ez ellenőrizhető könnyen, pl.:

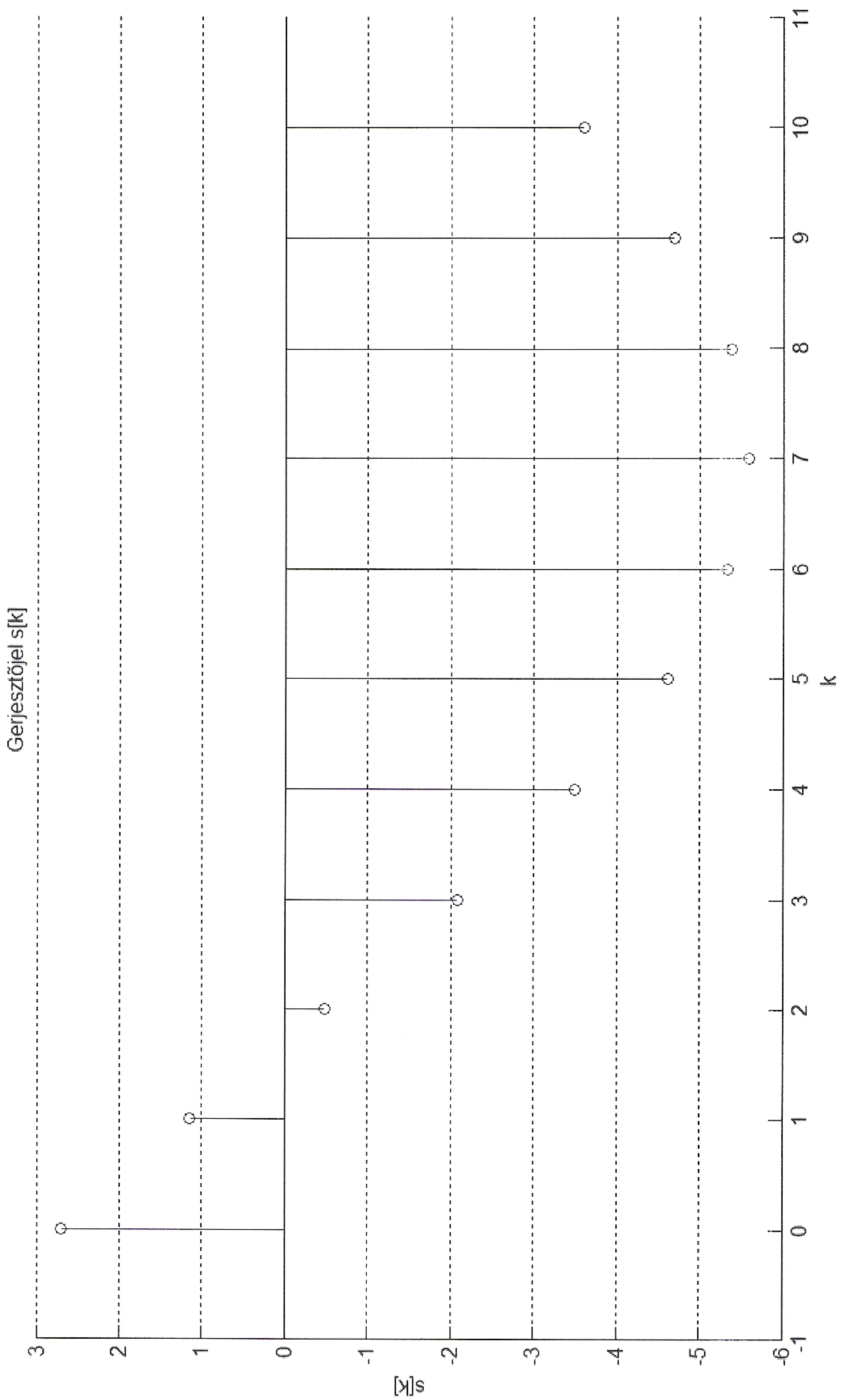
$y[0] = -3{,}935$

$y[64] = -3{,}935$

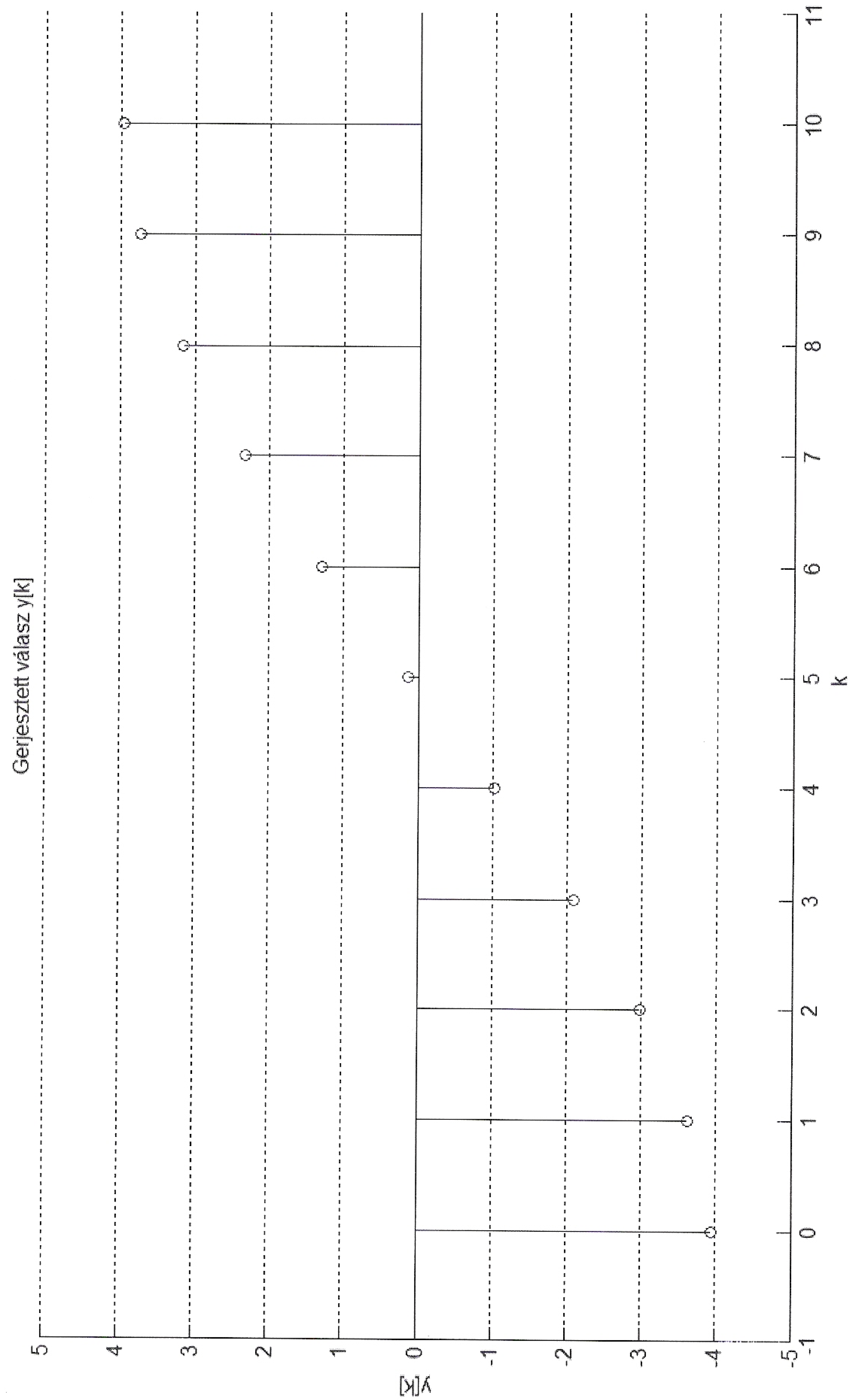
$y[64 \cdot 77] = -3{,}935, \ldots$

Ábrázolás MATLAB-bal:

```
>> k = 0:10;
>> s = 5,6 · cos(k · 3π/32 + 0,34π);
>> y = 3,9704 · cos(k · 3π/32 + 3,275);
>> stem(k,s);
>> stem(k,y);
```



Gerjesztőjel s[k]
s[k]
k


Gerjesztett válasz y[k]
y[k]
k
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

$\boxed{2.3}$

k	0	1	2	3	4	5
$s[k]$	-3	4	5	-1	1	-3

$L=6$

A diszkrét Fourier-sorfejtés során azt az L számú komplex Fourier-együtthatót kell meghatározni, melyekkel a jel az alábbi alakban áll elő:

$$s[k] = \sum_{p=0}^{L-1}\left[X_p^c \cdot e^{j\cdot p\cdot k\cdot \vartheta_0}\right], \text{ ahol } \vartheta_0 = \frac{2\pi}{L} \quad \text{az alap-körfrekvencia}$$

Az X_p^c együtthatók számítása: $X_p^c = \frac{1}{L}\cdot\sum_{k=0}^{L-1}\left[s[k]\cdot e^{-j\cdot p\cdot k\cdot \vartheta_0}\right]$

A példában $L=6 \Rightarrow \vartheta_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Helyettesítsünk be a képletekbe:

$$X_0^c = \frac{1}{6}\cdot\left[-3\cdot e^{-j\cdot 0\cdot 0\cdot \vartheta_0} + 4 + 5 - 1 + 1 - 3\right] = \frac{1}{6}\cdot 3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(itt minden tag 0. kitevőjű $p=0$ miatt)

$$X_1^c = \frac{1}{6}\cdot\left[-3\cdot e^{-j\cdot 0\cdot 1\cdot \vartheta_0} + 4\cdot e^{-j\cdot 1\cdot 1\cdot \vartheta_0} + 5\cdot e^{-j\cdot 1\cdot 2\cdot \vartheta_0} - 1\cdot e^{-j\cdot 1\cdot 3\cdot \vartheta_0} + 1\cdot e^{-j\cdot 1\cdot 4\cdot \vartheta_0} - 3\cdot e^{-j\cdot 1\cdot 5\cdot \vartheta_0}\right] = \cancel{-0{,}75 - 1{,}587j}$$

$\downarrow$

$\frac{\pi}{3} = p\cdot\vartheta_0$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[-3\cdot e^{0} + 4\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{3}} + 5\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{3}} - 1\cdot e^{-j\cdot\pi} + 1\cdot e^{-j\cdot\frac{4\pi}{3}} - 3\cdot e^{-j\cdot\frac{5\pi}{3}}\right] =$$

$$= \underline{\underline{-0{,}75 - 1{,}587j}}$$

$$X_2^c = \frac{1}{6}\left[-3\cdot e^{0} + 4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 5\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} - 1\cdot e^{-j\cdot 2\pi} + 1\cdot e^{-j\cdot\frac{8\pi}{3}} - 3\cdot e^{-j\cdot\frac{10\pi}{3}}\right] =$$

$\downarrow$

$\frac{2\pi}{3} = p\cdot\vartheta_0$

$$= \underline{\underline{-1{,}25 - 0{,}433j}}$$

$$X_3^c = \frac{1}{6}\left[-3\cdot e^{0} + 4\cdot e^{-j\cdot\pi} + 5\cdot e^{-j\cdot 2\pi} - 1\cdot e^{-j\cdot 3\pi} + 1\cdot e^{-j\cdot 4\pi} - 3\cdot e^{-j\cdot 5\pi}\right] = \underline{\underline{0{,}5}}$$

$\downarrow$

$\frac{3\pi}{3} = \pi$

Tudjuk továbbá, hogy:

$$X_4^c = (X_2^c)^* \rightarrow X_4^c = -1,25+0,433j$$

$$X_5^c = (X_1^c)^* \rightarrow X_5^c = -0,75+1,587j$$

A komplex Fourier-együtthatók tehát:

$X_0^c = 0,5$

$X_1^c = -0,75-1,587j \rightarrow$ exp. alak: $1,75 \cdot e^{-j \cdot 115,3^\circ}$

$X_2^c = -1,25-0,433j \rightarrow$ exp. alak: $1,32 \cdot e^{-j \cdot 160,9^\circ}$

$X_3^c = 0,5$

$X_4^c = (X_2^c)^* = -1,25+0,433j \rightarrow$ exp. alak: $1,32 \cdot e^{j \cdot 160,9^\circ}$

$X_5^c = -0,75+1,587j$ $(=(X_1^c)^*) \rightarrow$ exp. alak: $1,75 \cdot e^{j \cdot 115,3^\circ}$

MATLAB-bal gyors ellenőrzés:

```
>> s=[-3 4 5 -1 1 -3]
>> fft(s)/6
```

A válasz egyezik a fent kiszámoltakkal, így felírhatjuk a jel Fourier-sorának komplex alakját:

$$s[k] = \sum_{p=0}^{L-1} \left[X_p^c \cdot e^{j \cdot p \cdot k \cdot \vartheta_0} \right] \Longrightarrow$$

$$s[k] = 0,5 + (-0,75-1,587j) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}} + (-1,25-0,433j) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{3}} +$$

$$+ 0,5 \cdot e^{j \cdot k \cdot \pi} + (-1,25+0,433j) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{4\pi}{3}} + (-0,75+1,587j) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{5\pi}{3}}$$

Ellenőrzés számításokat MATLAB-bal:

```
>> k = 0:5;
>> sk = ... ;
>> sk

sk =
   -3.000          3.9987 - 0.0·i     4.9988 - 0.0·i    | k-3
   -1.00 - 0.0·i   1.0012 - 0.0·i    -2.9987 - 0.0·i    | k-6
```

Tehát a komplex alakkal számolt értékek: 0,13 – 0,14 % relatív eltéréssel visszakapjuk az eredeti értékeit $s[k]$-nak – ez a kerekített tagokat is tartalmazó komplex Fourier-együtthatóknál alkalmazott kerekítés miatt adódik.

A Fourier-sor valós alakja:

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{L}$$

$$s[k] = \left\{ \sum_{p=0}^{L/2} \left[X_p^A \cdot \cos(k \cdot p \cdot \vartheta_0) + X_p^B \cdot \sin(k \cdot p \cdot \vartheta_0) \right] \right\} \cancel{+ X_0}$$

$X_0^A = X_0^C = X_0$ – „konstans” tag

$X_p^A = 2 \cdot \mathrm{Re}\{X_p^C\}$

$X_p^B = -2 \cdot \mathrm{Im}\{X_p^C\}$

$X_{L/2}^A = X_{L/2}^C \quad ; \quad X_{L/2}^B = 0$

$$\Downarrow$$

$$s[k] = X_0^A + \sum_{p=1}^{(L/2)-1} \left(X_i^A \cdot \cos(p \cdot k \cdot \vartheta_0) + X_i^B \cdot \sin(p \cdot k \cdot \vartheta_0) \right) + X_{L/2}^A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{L}{2} \cdot \vartheta_0\right)$$

p	X_p^C	X_p^A	X_p^B
$\emptyset$	$0{,}5$	$0{,}5$	$\emptyset$
1	$-0{,}75-1{,}587j$	$2\cdot -0{,}75 = -1{,}5$	$-2\cdot -1{,}587 = 3{,}174$
2	$-1{,}25-0{,}433j$	$2\cdot -1{,}25 = -2{,}5$	$-2\cdot -0{,}433 = 0{,}866$
$L/2=3$	$0{,}5$	$0{,}5$	$\emptyset$

A gerjesztő Fourier-sorának valós alakja tehát:

$$s[k] = 0{,}5 + \left[-1{,}5\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right) + 3{,}174\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right] + \left[-2{,}5\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + 0{,}866\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$+\ 0{,}5\cdot\cos(k\cdot\pi)$$

Ellenőrizzük MATLAB-bal:

```
>> k = 0:5;
>> sk = ... ;
>> sk
      sk =
         -3.0     3.9987     4.9988     -1.0     1.0012     -2.9987
```

Az értékek egyeznek a korábban kiszámolttal; a kerekítés/számítás különbségéből adódó 0,13-0,14% eltéréstől eltekintve a véges DI-jel Fourier-sora nem csak közelíti, de elő is állítja a jelet.

$\boxed{2.4}$

Addíciós tétel:

$\sin t = \cos(t - \frac{\pi}{2})$

$$A\cdot\sin x + B\cdot\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(x+\varphi) = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(x+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)$$

$k\cdot\frac{\pi}{3}$ körfrekv. tagnál: $3{,}51\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3} - 25{,}3° - 90°\right) = 3{,}51\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{3} - 115{,}3°\right)$

$\frac{2\cdot k\pi}{3}$ -||- : $2{,}645\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3} - 70{,}9° - 90°\right) = 2{,}645\cdot\cos\left(\frac{2k\pi}{3} - 160{,}9°\right)$

//MATLAB-al gyors ellenőrzés//

Ezek alapján a gerjesztő jel Fourier-sorának egy másik alakja:

$$s[k] = X_0 + \left[\sum_{p=1}^{M} X_p\cdot\cos(p\cdot k\cdot\vartheta_0 + \nu_p)\right] + X_{L/2}\cdot(-1)^k \qquad \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$M = \begin{cases} L \text{ páros}: & M = \frac{L}{2} - 1 \\ L \text{ páratlan}: & M = \frac{L-1}{2} \text{ és } X_{K/2} = 0 \end{cases}$$

Az átviteli karakterisztika értékeit a $p = 0, 1 \ldots M, L/2$ értékekre kell kiszámolni, az alábbi módon:

$$\overline{H}_p = H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta = p\cdot\vartheta_0} = H(e^{jp\vartheta_0}) = K_p\cdot e^{j\varphi_p}$$

Ezen értékek ismeretében a válasz Fourier-sora:

$$y[k] = Y_0 + \left[\sum_{p=1}^{M} Y_p\cdot\cos(k\cdot p\cdot\vartheta_0 + \eta_p)\right] + Y_{L/2}\cdot(-1)^k,$$

ahol:

$$Y_p = K_p\cdot X_p$$

$$\eta_p = \nu_p + \varphi_p \qquad p = 0, 1 \ldots M, L/2$$

$$H(e^{j\nu}) = \frac{0{,}3\cdot(e^{j\nu})^2 - 0{,}5\, e^{j\nu} - 0{,}3}{(e^{j\nu})^2 + 0{,}09\, e^{j\nu} - 0{,}45}$$

$$p = \emptyset \to p\cdot\nu_c = \emptyset \quad \to H(e^{j0}) = -0{,}78125 \;\begin{cases} K_\emptyset = -0{,}78125 \\ \varphi_\emptyset = \emptyset^\circ \end{cases}$$

$$H(e^{j\nu_c}) = H(e^{j\frac{\pi}{3}}) = 0{,}2748 + 0{,}478i \;\begin{cases} K_1 = 0{,}551 \\ \varphi_1 = +60{,}1^\circ \end{cases}$$

$$H(e^{j2\nu_c}) = H(e^{2j\frac{\pi}{3}}) = 0{,}4624 + 0{,}33i \;\begin{cases} K_2 = 0{,}568 \\ \varphi_2 = +35{,}51^\circ \end{cases}$$

$$H(e^{j3\nu_c}) = H(e^{j\pi}) = 1{,}087 \;\begin{cases} K_3 = 1{,}087 \\ \varphi_3 = \emptyset \end{cases}$$

$X_0 = 0{,}5$	$X_1 = 3{,}51$	$X_2 = 2{,}645$	$X_3 = 0{,}5$
$\nu_0 = \emptyset^\circ$	$\nu_1 = -115{,}3^\circ$	$\nu_3 = -160{,}9^\circ$	$\nu_3 = \emptyset^\circ$

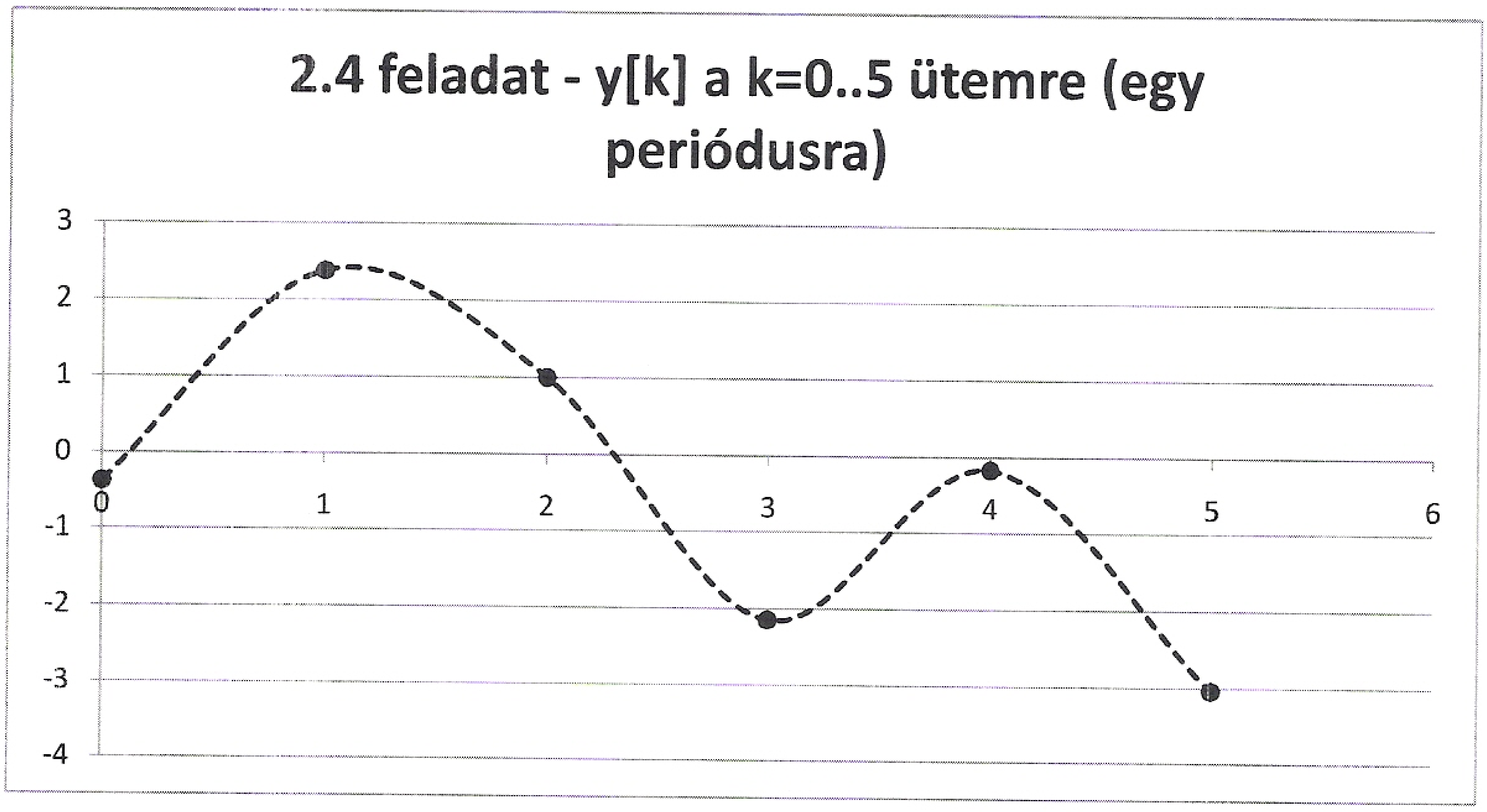
A teljes válasz a kettő alapján felírható:

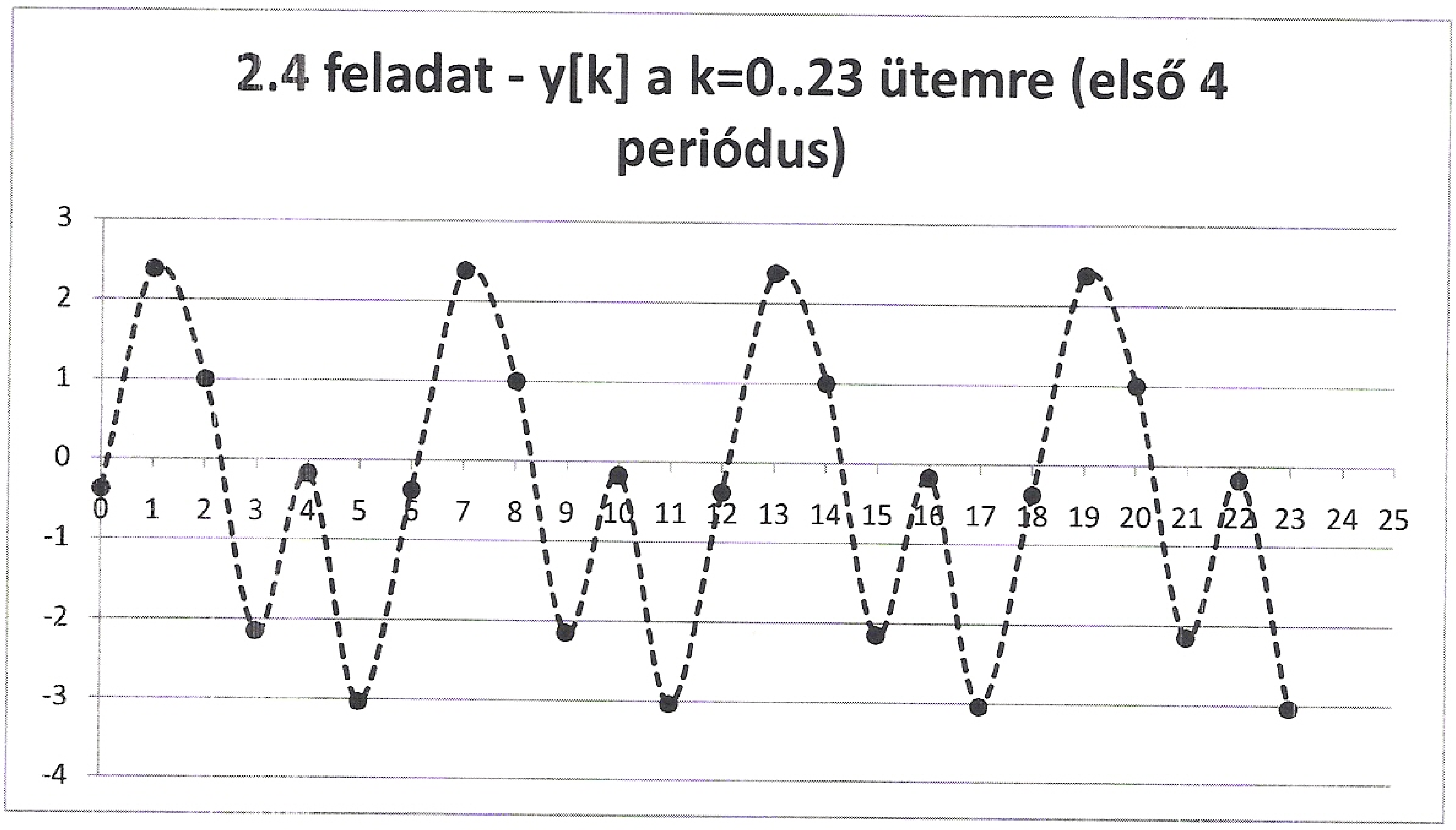
$$y[k] = -0{,}78125\cdot 0{,}5 + 3{,}51\cdot 0{,}551\cdot \cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3} - 115{,}3^\circ + 60{,}1^\circ\right) +$$
$$+ 0{,}568\cdot 2{,}645\cdot \cos\left(2k\frac{\pi}{3} - 160{,}9^\circ + 35{,}51^\circ\right) + 1{,}087\cdot 0{,}5\cdot \cancel{\cos(k\pi)}(-1)^k$$

$$y[k] = -0{,}390625 + 1{,}934\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3} - 79{,}79^\circ\right) + 1{,}502\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3} - 125{,}39^\circ\right)$$
$$+ 1{,}087\cdot 0{,}5\cdot \cancel{\cos(k\pi)}\cdot(-1)^k$$

Ábrázolás MATLAB-bal:

```
>> k=0:5;
>> yk=...;
>> stem(yk);
```


2.4 feladat - y[k] a k=0..5 ütemre (egy periódusra)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6


2.4 feladat - y[k] a k=0..23 ütemre (első 4 periódus)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

$\boxed{2.5}$

$$h[k] = 0{,}3\cdot\delta[k] - 0{,}527\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\cdot\left(-0{,}2312\cdot 0{,}627^{k-2} + 0{,}1136\cdot(-0{,}717)^{k-2}\right)$$

<u>Fourier-transzformált</u>

$0{,}3\,\delta[k] \rightarrow 0{,}3\cdot 1$

$-0{,}527\,\delta[k-1] \rightarrow -0{,}527\cdot e^{-j\vartheta}$

$-0{,}2312\cdot 0{,}627^{k-2}\cdot\varepsilon[k-2]$ transzformálható az eltolási tétellel:

$$\mathcal{F}\left(x[k-k_0]\right) = X(e^{j\vartheta})\cdot e^{-j\cdot k_0\cdot\vartheta}$$

de most $x := -0{,}2312\cdot 0{,}627^{k}\cdot\varepsilon[k]$

A transzformált: $-0{,}2312\cdot\dfrac{1}{1-0{,}627\cdot e^{-j\vartheta}}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}$

A másik tag: $0{,}11360\,\dfrac{1}{1-(-0{,}717)\cdot e^{-j\vartheta}}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}$

A Fourier-transzformált tehát:

$$H(e^{j\vartheta}) = 0{,}3 - 0{,}527\cdot e^{-j\vartheta} + \frac{-0{,}2312\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}}{1-0{,}627\cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{0{,}1136\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}}{1+0{,}717\cdot e^{-j\vartheta}}$$

Közös nevezőre hozva és a $z = e^{-j\vartheta}$ helyettesítéssel élve (kényelmi okokból):

$$= \frac{0{,}3\cdot(1-0{,}627z)(1+0{,}717z) - 0{,}527z(1-0{,}627z)(1+0{,}717z)}{(1-0{,}627z)(1+0{,}717z)} -$$

$$- \frac{0{,}2312\,z^2\cdot(1+0{,}717\cdot z) + 0{,}1136z^2\cdot(1-0{,}627z)}{(1-0{,}627z)(1+0{,}717z)} =$$

$$= \frac{(0,3+0,027z-0,1348z^2)+(-0,527z-0,04743z^2+0,2369z^3)+}{1+0,09z-0,45z^2}$$

$$\frac{+(-0,2312z^2-0,1657z^3)+(0,1136z^2-0,0712z^3)}{-"-} =$$

$$= \frac{0,3-0,5z-0,2998977z^2-0,000008007z^3}{1+0,09z-0,45z^2} =$$

A z^3-ös tag együtthatója gyakorlatilag 0, a kerekítést figyelembe véve:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,3-0,5z-0,3z^2}{1+0,09z-0,45z^2}$$

Beszorozva minden tagot $\frac{1}{z^2}$ (z^{-2})-el áttérünk negatív kitevőre:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,3z^{-2}-0,5z^{-1}-0,3}{z^{-2}+0,09z^{-1}-0,45} = \frac{0,3\cdot(e^{-j\vartheta})^{-2}-0,5(e^{-j\vartheta})^{-1}-0,3}{(e^{-j\vartheta})^{-2}+0,09(e^{-j\vartheta})^{-1}-0,45} =$$

$$= \frac{0,3e^{j2\vartheta}-0,5\cdot e^{j\vartheta}-0,3}{e^{j2\vartheta}+0,09e^{j\vartheta}-0,45}$$

Az impulzusválasz komplex spektruma egyezik a korábban felírt egyenletekből kapott átviteli karakterisztikával, a 2.1-beli számítástól eltekintve.

$\boxed{2.6}$

A rendszeregyenlet meghatározásához a 2.5-ben kiszámolt, negatív kitevős alakot használjuk:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0{,}3 - 0{,}5 \cdot e^{-j\vartheta} - 0{,}3 \cdot e^{-j2\vartheta}}{1 + 0{,}09 \cdot e^{-j\vartheta} - 0{,}45 \cdot e^{-j2\vartheta}} = \frac{Y}{S}$$

Átrendezve:

$$\left(1 + 0{,}09 \cdot e^{-j\vartheta} - 0{,}45 \cdot e^{-j2\vartheta}\right) Y = \left(0{,}3 - 0{,}5 \cdot e^{-j\vartheta} - 0{,}3 e^{-j2\vartheta}\right) \cdot S$$

$e^{-j \cdot k_0 \cdot \vartheta} \rightarrow k_0$-ütemnyi késleltetés; $[k - k_0]$

Így a rendszeregyenlet:

$$y[k] + 0{,}09\, y[k-1] - 0{,}45\, y[k-2] = 0{,}3 \cdot s[k] - 0{,}5\, s[k-1] - 0{,}3\, s[k-2]$$

3.1

A z tartományi egyenletek felírását a következő alapján végezzük:

$$\bar{x}_1 \longrightarrow \boxed{>} \longrightarrow \bar{x}_1 \cdot z^{-1}$$

A frekvenciatartományban ez:

$$\bar{x}_1 \longrightarrow \boxed{>} \longrightarrow \bar{x}_1 \cdot e^{-j\vartheta}$$

Azaz a $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítést alkalmazva megkapjuk a z-beli egyenleteket:

$$\bar{x}_1 = \bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \cdot z^{-1} \cdot a + (\bar{x}_3 \cdot z^{-1} \cdot d) \cdot a + \bar{u} \cdot a$$

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \cdot z^{-1} \cdot b + x_2 \cdot b + (c \cdot \bar{x}_3 \cdot z^{-1}) \cdot b + \bar{x}_3 \cdot z^{-1}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_3$$

Az egyenletrendszer megoldása analóg a 2.1-beli megoldási menettel, így az átviteli fgv. együtthatói is egyeznek:

$$H(z) = \frac{0{,}3 - 0{,}5 \cdot z^{-1} - 0{,}3\, z^{-2}}{1 + 0{,}09 \cdot z^{-1} - 0{,}45 \cdot z^{-2}} = \frac{0{,}3 \cdot z^2 - 0{,}5 z - 0{,}3}{z^2 + 0{,}09 z - 0{,}45}$$

Az eredmény a Maple-el ellenőrizhető a rendszeregyenletek alapján:

```
>> with(DynamicSystems);
>> TransferFunction(A,B,C,D, discrete=true);     // A,B,C,D a rendszermátrixok
```

Az eredmény egyezik mind a számított átviteli fgv.-el, a $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítés után pedig az átviteli karakterisztikával is!

3.2

MATLAB:

```
>> Hsz=[0.3   -0.5   -0.3];
>> Hn=[1   0.09   -0.45];

>> roots(Hsz)                % zérusok - számláló gyökei

      -0.4683
       2.1350

>> roots(Hn)                 % pólusok

      -0.717
       0.627
```

Minden pólus az egységkörön belül van, a rendszer G-V stabil.

```
>> zplane(Hsz,Hn);           % ábra: lásd előbb
```

3.3

$$H(z) \xrightarrow{z^{-1}} h[k]$$

$$H(z)=\frac{0,3z^2-0,5z-0,3}{z^2+0,09z-0,45}$$ → nem valódi tört, végezzük el az osztást:

$$H(z)=0,3+\frac{(0,3z^2-0,5z-0,3)-0,3\cdot(z^2+0,09z-0,45)}{z^2+0,09z-0,45}=$$

$$=0,3+\frac{-0,527z-0,165}{(z+0,717)\cdot(z-0,627)}=0,3+\frac{-0,1584}{z+0,717}+\frac{-0,3686}{z-0,627}$$

MATLAB ellenőrzés:

```
>> [r,p,k]=residue(Hsz,Hn);

    r= -0.1584        p= -0.717        k= 0.3
       -0.3686           0.627
```

$$Z\left[\varepsilon[k]\cdot a^{k}[2k]\right] = \frac{z}{z-a}$$

$$Z\left[\varepsilon[k-k_0]\,x[k-k_0]\right] = X_{(z)}\cdot z^{-k_0}$$

$$Z\left[\delta[k]\right] = 1$$

$\swarrow$

Kell a rendelle z:

$$H(z) = 0{,}3 + z^{-1}\cdot\left(\frac{-0{,}1584\,z}{z+0{,}717} + \frac{-0{,}3686\,z}{z-0{,}627}\right)$$

$$\Big\downarrow z^{-1}$$

$$h[k] = 0{,}3\cdot\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\left[-0{,}1584\cdot(-0{,}717)^{k-1} - 0{,}3686\cdot 0{,}627^{k-1}\right] =$$

$$= 0{,}3\,\delta[k] + (-0{,}1584 - 0{,}3686)\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\cdot\Big(-0{,}1584\cdot(-0{,}717)^{k-1} -$$
$$- 0{,}3686\cdot 0{,}627^{k-1}\Big)$$

Az 1.3-beli alak:

$$h[k] = 0{,}3\,\delta[k] - 0{,}527\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\cdot\Big(-0{,}2312\cdot 0{,}627^{k-2} +$$
$$+ 0{,}1136\cdot(-0{,}717)^{k-2}\Big]$$

Az első 2 tag egyezik, a sajátértékek is megjelennek, de a kerekítési hibák miatt a együtthatók mások!

Polinom osztás:

$$H(z) = (0{,}3z^2 - 0{,}5z - 0{,}3) : (z^2 + 0{,}09z - 0{,}45) = 0{,}3 - 0{,}527z^{-1} - 0{,}11757\,z^{-2} -$$
$$- 0{,}22715z^{-3} \cancel{- 0{,}5289z^{-4}} \cancel{- 0{,}05621z^{-5}}$$
$$- 0{,}0329z^{-4} - 0{,}0991\,z^{-5}$$

$$\underline{-(0{,}3z^2 + 0{,}027 - 0{,}135)}$$
$$-0{,}527z - 0{,}165$$
$$\underline{-(-0{,}527z - 0{,}04743 + 0{,}23715z^{-1})}$$
$$-0{,}11757 - 0{,}23715z^{-1}$$
$$\underline{-(-0{,}11757\cancel{z^{2}} - 0{,}01z^{-1} + 0{,}0529z^{-2})}$$
$$-0{,}22715z^{-1} - \cancel{0{,}5129}\,z^{-2}$$
$$0{,}0529$$

$$-0{,}22715z^{-1}-0{,}0529z^{-2}$$
$$-(-0{,}22715z^{-1}-0{,}02z^{-2}+0{,}102z^{-3})$$
$$-0{,}0329z^{-2}-0{,}102z^{-3}$$
$$-(-0{,}0329z^{-2}-0{,}0029z^{-3}+0{,}0148z^{-4})$$
$$-0{,}0991z^{-3}-0{,}014z^{-4}$$
$$-(-0{,}0991z^{-3}+0{,}0089z^{-4}+0{,}0455z^{-5})$$
$$-0{,}0051\cdot\cancel{10}^{-4}+0{,}0455z^{-5}$$

Foglaljuk össze az eredményeket

1.3 – $h[k]=0{,}3\,\delta[k]+0{,}527\,\delta[k-1]+\varepsilon[k-2]\cdot\left(-0{,}2312\cdot 0{,}627^{k-2}+0{,}1136\cdot(-0{,}717)^{k-2}\right)$

részlettörtekre bontás:

$$h[k]=0{,}3\,\delta[k]-0{,}527\,\delta[k-1]+\varepsilon[k-2]\left(-0{,}1584\cdot(-0{,}717)^{k-1}-0{,}3686\cdot 0{,}627^{k-1}\right)$$

polinom osztás: $z^{-n}\Rightarrow\delta[k-n]$

$(k=0..5)$

$$\hookrightarrow h[k]=0{,}3\,\delta[k]-0{,}527\,\delta[k-1]-0{,}11757\,\delta[k-2]-0{,}22715\,\delta[k-3]-0{,}0329\,\delta[k-4]-0{,}0991\cdot\delta[k-5]$$

1.3 – Cél az értékek $k=0..5$-re $\Rightarrow$ látható, hogy az értékek eltérése minimális (nagyon)

– sokszor kerekítettünk, de ~~$k=0,1,2$-re~~ de a kerekítési különbségtől eltekintve mind a 2 $H(z)\to h(k)$ módszer jó / azonosan jó eredményt adnak.

k	1.3	törtekre bontás	polinom osztás
0	0,3	0,3	0,3
1	−0,527	−0,527	−0,527
2	−0,11757	−0,11754	−0,11757
3	−0,2265	−0,22633	−0,22715
4	−0,0326	−0,03247	−0,0329
5	−0,099	−0,0988	−0,0991

3.4

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z)$$

$$u[k] = 2 \cdot \varepsilon[k] + 2{,}5 \cdot 0{,}625^{k} \cdot \varepsilon[k] \rightsquigarrow U(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{2{,}5\,z}{z-0{,}625} =$$

$$= \frac{4{,}5z^2 - 3{,}75z}{z^2 - 1{,}625z + 0{,}625}$$

$$H(z) = \frac{0{,}3z^2 - 0{,}5z - 0{,}3}{z^2 + 0{,}09z - 0{,}45}$$

$\Downarrow$ Matlab:

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{1{,}35z^4 - 3{,}375z^3 + 0{,}525z^2 + 1{,}125z}{z^4 - 1{,}535z^3 + 0{,}02875z^2 + 0{,}7875z - 0{,}28125}$$

rozklad rozložitelné části:

```
>> Hcz=[1.35  -3.375  0.525  1.125  0];
>> Hn=[1  -1.535  0.02875  0.7875  -0.28125];
>> [r,p,k]=residue(Hcz,Hn);
```

$r = 10^2 \cdot$

-0,015625
-0,00344
-2,47052
2,4765625

$p =$

1
-0,717
0,627
0,625

$k =$

1,35

$\Rightarrow 1.35z^4 : z^4$

$\Downarrow$

$$Y(z) = 1{,}35 + \frac{-1{,}5625}{z-1} + \frac{-0{,}344}{z+0{,}717} + \frac{-247{,}052}{z-0{,}627} + \frac{247{,}656}{z+0{,}625}$$

Inverz Z-transzformáció után kapjuk $y[k]$-t:

$$y[k] = 1{,}35 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot \left(-1{,}5625 \cdot 1^{k-1} - 0{,}344 \cdot (-0{,}717)^{k-1} - 247{,}052 \cdot 0{,}627^{k-1} + 247{,}656 \cdot 0{,}625^{k-1}\right)$$

$\downarrow$

$$y[k] = 1{,}35\,\delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot \left(-1{,}5625 - 0{,}344 \cdot (-0{,}717)^{k-1} - 247{,}052 \cdot 0{,}627^{k-1} + 247{,}656 \cdot 0{,}625^{k-1}\right)$$

$\boxed{3.5}$

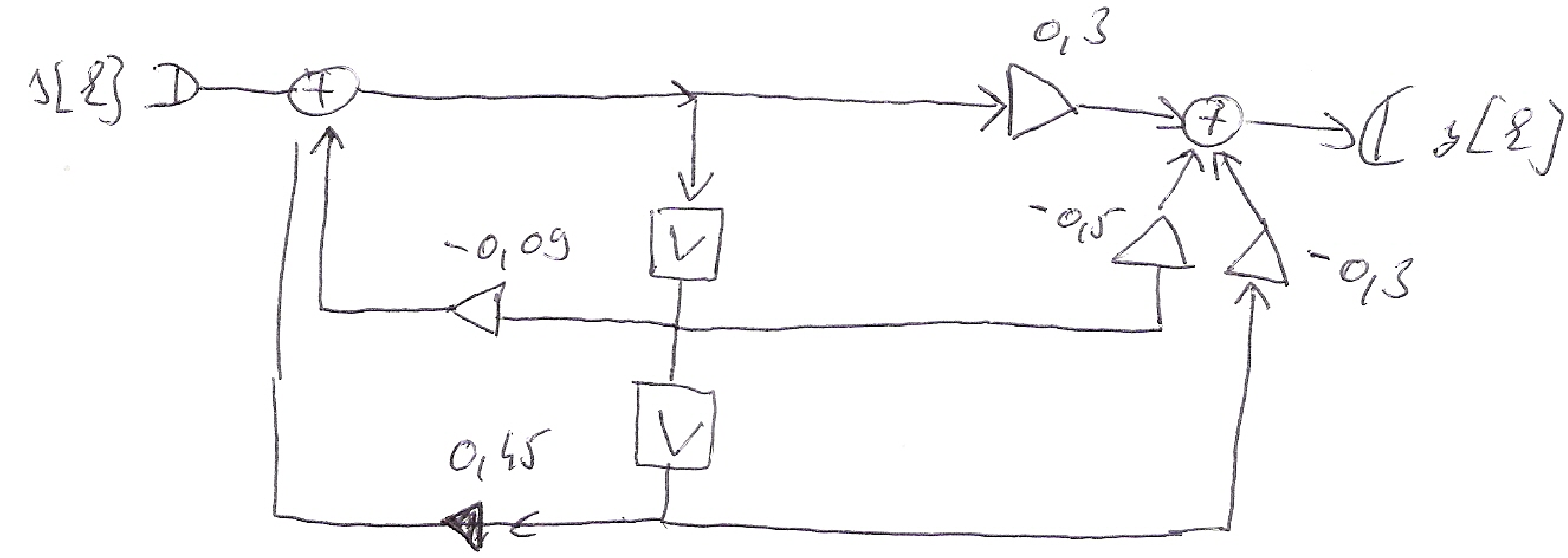
$$H(z) = \frac{0{,}3z^2 - 0{,}5z - 0{,}3}{z^2 + 0{,}09z - 0{,}45} = \frac{0{,}3 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}{1 + 0{,}09z^{-1} - 0{,}45z^{-2}}$$

előrecsatolt $\hookrightarrow U(z)$ oldal

visszacsatolt $\hookrightarrow Y(z)$ oldal

z^{-p} = p-szeres késleltetés

$\downarrow$



$$y[k] = -0{,}09\,y[k-1] + 0{,}45\,y[k-2] + 0{,}3\,s[k] - 0{,}5\,s[k-1] - 0{,}3\,s[k-2]$$

$\downarrow$

Rendszeregyenlet: $y[k] + 0{,}09\,y[k-1] - 0{,}45\,y[k-2] = 0{,}3\,s[k] - 0{,}5\,s[k-1] - 0{,}3\,s[k-2]$

3.6

A rendszeregyenlet alapján:

$$y[k] = 0{,}3\, s[k] - 0{,}5\, s[k-1] - 0{,}3\, s[k-2] - 0{,}09\, y[k-1] + 0{,}45\, y[k-2]$$

$$s[k] = 2 \cdot \varepsilon[k] + 2{,}5 \cdot 0{,}625^{k} \cdot \varepsilon[k]$$

$s[k]$ értékei $k = 0:8$-ra MATLAB-al:

$s[0] = 4{,}5$
$s[1] = 3{,}5625$
$s[2] = 2{,}9765$
$s[3] = 2{,}610$
$s[4] = 2{,}3814$
$s[5] = 2{,}238$
$s[6] = 2{,}149$
$s[7] = 2{,}0931$
$s[8] = 2{,}0582$

Lépésről lépésre számolva:

$y[0] = 0{,}3 \cdot s[0] = 1{,}35$
$y[1] = 0{,}3 \cdot s[1] - 0{,}5\, s[0] - 0{,}09\, y[0] = -1{,}30275,$
$y[2] = 0{,}3 \cdot s[2] - 0{,}5\, s[1] - 0{,}3\, s[0] - 0{,}09\, y[1] + 0{,}45\, y[0]$
$\vdots$

Az $y[2]$-től már minden tag megjelenik, így onnan tudjuk MATLAB-al számolni:

```
>> k = 0:8;
>> sk = ...;   yk = zeros(1, length(k));
>> yk(1) = 1,35;      % y[0]
>> yk(2) = -1,30275;  % y[1]
>> for i = 3 : length(k)
>>         yk(i) = 0,3 sk(i) - 0,5 sk(i-1) - 0,3 sk(i-2) - 0,09 yk(i-1) + 0,45 yk(i-2);
       end;
>>
```

Foglaljuk táblázatba:

k	y[k] - r.e.	y[k] - 3.4
0	1,35	1,35
1	-1,30275	-1,3025
2	-1,5135	-1,4324
3	-2,2239	-2,122
4	-1,9646	-1,8691
5	-2,126	-2,046
6	-1,882	-1,819
7	-1,906	-1,858
8	-1,75	-1,714

A 3.4-es y[k] értékei szintén MATLAB-al:

```
>> k=0:8;
>> yk = zeros(1, length(k));
>> yk(1) = 1,35;          % 1,35·δ[k]
>> for i = 2: length(k)
         yk(i) = -1.5625·(1)^(k-1) - 0.344·(-0.717).^(k-1) - ... ;
   end;
```

Az értékek között eltérés van, de azok az 5%-ot sehol sem haladják meg – a számításoknál sem ennél több tizedest is kerekítettem, a (k-1). hatványok alapja is kerekítve van, így ez a hiba a kerekítési hibák felhalmozódása.