1. feladat (10 pont)

Definíció szerint igazolja, hogy

$$\lim \frac{2n^2+26-n}{n^2+3} = 2, \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

(D) $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$:

$|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ (2)

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n^2+26-n}{n^2+3} - 2\right| = \underset{(2)}{\left|\frac{20-n}{n^2+3}\right|} \underset{n \geq 20}{=} \underset{(2)}{\frac{n-20}{n^2+3}} <$$

(4) $\left\{ \begin{array}{l} < \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ N(\varepsilon) = \max\left\{20, \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\} \end{array} \right.$

2. feladat (14 pont) Keresse meg a következő sorozatok határértékét (ha létezik)!

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3-n} - \sqrt{n^3+n^2}}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{2^{4n+1}+7^n}{4^{2n-1}+4}.$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3-n} - \sqrt{n^3+n^2}}{\sqrt{n}} \underset{(2)}{\frac{\sqrt{n^3-n} + \sqrt{n^3+n^2}}{\sqrt{n^3-n} + \sqrt{n^3+n^2}}} = \underset{(2)}{\frac{\overbrace{n^3-n-(n^3+n^2)}^{-n-n^2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3-n}+\sqrt{n^3+n^2}\right)}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n}\sqrt{n^3}}}_{=1} \frac{-\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{-0-1}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}$$

(4)

$$b_n = \underset{(2)}{\frac{16^n \cdot 2 + 7^n}{16^n \cdot \frac{1}{4} + 4}} = \frac{2+\left(\frac{7}{16}\right)^n}{\frac{1}{4}+4\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^n} \longrightarrow \frac{2+0}{\frac{1}{4}+0} = 8$$

(4)

3. feladat (13 pont) Keresse meg a következő sorozat összes torlódási pontját, limesz szuperiorját, limesz inferiorját, és ha létezik limeszét is!

$$a_n = \frac{n^2 + n + (-1)^n(n^2 - n)}{n + \pi}$$

Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Ha n páros:

$$a_n = \frac{n^2+n+n^2-n}{n+\pi} = \frac{2n^2}{n+\pi} \underset{n>3}{>} \frac{2n^2}{n+n} = n \to \infty$$

$$\underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Longrightarrow} \quad a_n \to \infty$$

$$\left(\text{Vagy}: \quad a_n = \underbrace{\frac{n^2}{n}}_{=n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{1+\frac{\pi}{n}}}_{\to 2} \longrightarrow \infty \right)$$

Ha n páratlan:

$$a_n = \frac{n^2+n-(n^2-n)}{n+\pi} = \frac{2n}{n+\pi} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{2}{1+\frac{\pi}{n}}}_{\to 2} \longrightarrow 2$$

7

$\overline{\lim}\, a_n = \infty$; $\underline{\lim}\, a_n = 2$; $\lim_{n\to\infty} a_n \nexists$

1 1 1

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

3

4. feladat (16 pont) Legyen a_n a következő, rekurzív sorozat.

$$a_{n+1} = 3 + \frac{2}{6 - a_n}, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \qquad a_1 = 3$$

$$(a_n) \approx (3, 3.67, 3.86, \ldots)$$

a) Mutassa meg, hogy $a_n \leq 4$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

b) Konvergens-e a sorozat? Mi a határértéke?

a.) Teljes indukcióval mutatjuk meg:

$\boxed{5}$ 1.) $a_i \leq 4 \quad i = 1, 2, 3$

2.) Tegyük fel, hogy $a_n \leq 4$

3.) $a_{n+1} = 3 + \frac{2}{6-a_n} \overset{?}{\leq} 4$.

2.) miatt: $a_n \leq 4 \Rightarrow -a_n \geq -4 \Rightarrow 6-a_n \geq 2 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{6-a_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{6-a_n} \leq 1$

an1z1p111107/2.

$$\Rightarrow \quad 3+\frac{2}{6-a_n}=a_{n+1}\le 4.$$

b.) Teljes indukcióval belátjuk, hogy (a_n) monoton nő.

Bizonyítás teljes indukcióval.

1.) $a_1 \le a_2 \le a_3$ teljesül

2.) Tegyük fel, hogy $a_{n-1}\le a_n$

3.) Igaz-e: $a_n = 3+\frac{2}{6-a_{n-1}} \overset{?}{\le} 3+\frac{2}{6-a_n} = a_{n+1}$

5

2.) miatt: $a_{n-1}\le a_n$ teljesül

$$\Rightarrow -a_{n-1}\ge -a_n \Rightarrow 6-a_{n-1}\ge \underbrace{6-a_n \ge 2}_{\text{a.) miatt (mivel } a_n\le 4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6-a_{n-1}}\le\frac{1}{6-a_n} \Rightarrow \frac{2}{6-a_{n-1}}\le\frac{2}{6-a_n}$$

$$\Rightarrow \quad 3+\frac{2}{6-a_{n-1}} = a_n \le a_{n+1} = 3+\frac{2}{6-a_n}$$

Tehát valóban monoton nő.

2 Mivel a sorozat monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens.

A határérték kielégíti a rekurziós formulát:

$$A = 3+\frac{2}{6-A} \Rightarrow A^2-9A+20=0 \Rightarrow A=4 \text{ vagy } A=5.$$ 2

Mivel most $a_n\le 4$ $\forall$ n-re $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. 2

5. feladat (12 pont)

a) Mondja ki a sorokra vonatkozó minoráns kritériumot!

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}+7^n}{4^{3n-1}} = ?$

a) Ha $0\le d_n \le a_n$ $\forall$ n-re (elég $n\ge N_0$-ra is) és $\sum\limits^{\infty} d_n$ divergens, akkor $\sum\limits^{\infty} a_n$ divergens. 3

(Csak 2 pont, ha nem derül ki, hogy + tagú sorokra vonatkozik.)

b.) A sor két konvergens geometriai sor összege, így konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 16^n + 7^n}{\frac{1}{4}\cdot 64^n} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{64}\right)^n = \quad 3$$

$q_1 = \frac{1}{4}$; $|q_1|<1$ 1 $\qquad q_2 = \frac{7}{64}$; $|q_2|<1$ 1

$$= 8\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \; 2 \; + 4\,\frac{\frac{7}{64}}{1-\frac{7}{64}} \; 2$$

6. feladat (18 pont)

a) Adja meg a feltételesen konvergens, és az abszolút konvergens sor definícióját!

b) Döntse el az alábbi sorokról, hogy divergensek, feltételesen konvergensek vagy abszolút konvergensek!

b1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^5+3n^4-2}}$; $\qquad$ b2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+2}\right)^{2n^2+3}$.

a.) D $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens. 2

D $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens. 2

$\boxed{7}$ b1) $\sum^{\infty} a_n$

$$0 < a_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^5+\underbrace{3n^4-2}_{>0}}} \le \sqrt{\frac{n^2+n^2}{n^5+0}} = \sqrt{2}\,\frac{1}{n^{3/2}} \;;$$

$\sqrt{2}\sum^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens $(\alpha = \frac{3}{2} > 1) \xRightarrow[\text{maj. kr.}]{} \sum a_n$ konvergens, így absz. konv.

$\boxed{7}$ b2.) $\sum^{\infty} b_n$

$$|b_n| = \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+2}\right)^{2n^2}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+2}\right)^3 = \frac{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}\left(\frac{1+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{2}{2n^2}}\right)^3 \to \frac{e^1}{e^2}\cdot 1^3 = \frac{1}{e}$$

$|b_n| \not\to 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$, így $\sum^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

an1z1p111107/4.

7. feladat (17 pont) Konvergensek-e a következő sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{4^n+5^{2n-1}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}+3}{4^n+5}$;

Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

a.) $\boxed{12}$

7

$$0 < a_n := \frac{2^n \cdot \frac{1}{2} + 3^n \cdot 3}{4^n + 25^n \cdot \frac{1}{5}} < \frac{3^n + 3 \cdot 3^n}{25^n \cdot \frac{1}{5}} = 20 \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^n ;$$

$20 \sum^{\infty} \left(\frac{3}{25}\right)^n$ konvergens geometriai sor $\left(q = \frac{3}{25};\ |q| < 1\right)$

$\xRightarrow{\text{majo. kr.}} \sum^{\infty} a_n$ konv.

5

$s \approx s_{99}$: $\displaystyle 0 < H = \sum_{n=100}^{\infty} a_n < \sum_{n=100}^{\infty} 20 \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^n = \frac{20\left(\frac{3}{25}\right)^{100}}{1 - \frac{3}{25}}$

$q = \frac{3}{25}$

b.) $\sum^{\infty} b_n$

$\boxed{5}$

$$b_n = \frac{4^n \cdot \frac{1}{2} + 3}{4^n + 5} = \frac{\frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + 5\left(\frac{1}{4}\right)^n} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{2}$$

$b_n \not\to 0 \Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

an1z1p111107/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1} n^5}$

b) $b_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{3n^2}$

$\boxed{4}$ a.) $a_n = \sqrt[n]{9^n \cdot 3 \cdot n^5} = 9 \sqrt[n]{3} \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \to 9 \cdot 1 \cdot 1^5 = 9$

b.) $b_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^3 \to \left(\dfrac{e^3}{e^{-1}}\right)^3 = \left(e^4\right)^3 = e^{12}$

$\boxed{6}$

9. feladat (10 pont) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3+(\sqrt{3})^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}+4^{n+1}}$

a.) $\sum^{\infty} a_n$

$\boxed{5}$ $|a_n| < \dfrac{2}{(\sqrt{3})^n} = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$; $2\sum^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ konvergens geometriai sor

$\left(q = \frac{1}{\sqrt{3}},\ 0<q<1\right) \Rightarrow \sum^{\infty} |a_n|$ konv., tehát a sor abszolút konvergens $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

(Vagy: Leibniz sor, mert $|a_n| \searrow 0$. Így konv.)

b.) $\sum^{\infty} b_n$

$\boxed{5}$ $b_n = \dfrac{4^n}{\frac{1}{3} 3^n + 4 \cdot 4^n} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} \to \dfrac{1}{0+4} = \dfrac{1}{4} \neq 0$

$\Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.