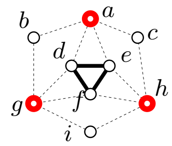
A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2011.11.29.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e az ábrán látható gráfnak Euler ill. Hamilton köre? Ha van, mi abban a csúcsok sorrendje?

   Létezik Euler kör, pl $bgihcadfedgfheab$. (4 pont)
   Ha a gráfon az ábrán látható a, g, h csúcsokat töröljük, akkor 4 komponensű gráfot kapunk. (3 pont)

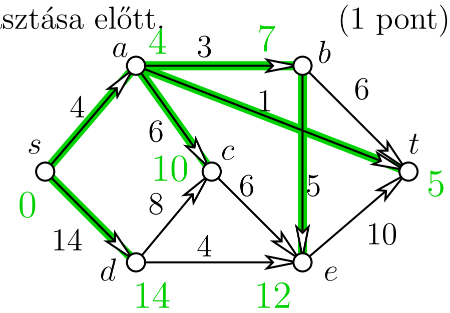
   Márpedig ha létezne Hamilton kör, akkor 3 csúcs törlés után legfeljeb 3 komponens keletkezhetne a Hamilton kör létezésére tanult szükséges feltétel miatt. (2 pont)
   Az ábrán látható gráfnak tehát nincs Hamilton köre. (1 pont)

2. Az ábrán látható gráfon a Dijkstra algoritmus segítségével állapítsuk meg a legrövidebb st-út hosszát, valamint határozzuk meg, milyen sorrendben határozza meg az algoritmus a $dist(s, v)$ távolságokat (azaz milyen sorrendben kerülnek véglegesítésre a csúcsok s-től mért távolságai).

   Azt kell meghatároznunk, hogy milyen sorrendben kerülnek a be a gráf csúcsai abba az U halmazba, ami azokat a csúcsokat tartalmazza, ahova a legrövidebb utakat már ismerjük. Természeten az első csúcs maga s lesz. (1 pont)
   Az algoritmus kezdetén felírjuk minden egyes csúcsra az s-ből oda vezető él hossza alapján adódó felső becslést az adott csúcs távolságára, így a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	∞	∞	14	∞	∞

   táblázatot kapjuk. (1 pont)
   A második csúcs tehát a lesz, innen javítunk a következő csúcs választása előtt. (1 pont)

   Ezután az ab, ac és at éleken javítva adódik a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	7	10	14	∞	5

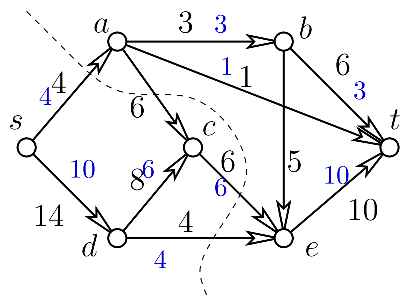
   táblázat, így a harmadik csúcs a t lesz. (2 pont)
   t-ből nem javítunk, a negyedik csúcs tehát b. (1 pont)
   A be élen javítva a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	7	10	14	12	5

   táblázatot kapjuk, így az ötödik csúcs c lesz. (1 pont)
   A ce élen nincs javulás, a hatodik csúcs tehát e lesz, (1 pont)
   e-ből nem kell javítani, így a utolsónak bevett csúcs a d. (1 pont)
   A végső sorrend tehát s, a, t, b, c, e, d, az s és t távolsága pedig 5. (1 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy a fenti ábrán látható hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 14. Elérhető-e két él kapacitásának alkalmas megnövelésével, hogy a maximális folyamnagyság pontosan 16 legyen?

   Az ábrán kisebb számokkal egy 14 nagyságú folyamot (2 pont)
   és egy 14 kapacitású st-vágást meghatározó ponthalmazt jelöltünk. (2 pont)
   Ezért a megadott hálózatban a maximális folyamnagyság valóban 14. (1 pont)
   Ha azonban a de és et élek kapacitását legalább 2-vel növeljük, akkor az $sdet$ úton tudunk további 2 egységnyi folyamot küldeni, (3 pont)
   és a jelölt vágás kapacitása is 16-ra változik. (1 pont)

Ezért a feladat második kérdésére igen a válasz: két él kapacitásának növelésével elérhető, hogy a maximális folyamnagyság pontosan 16 legyen. (1 pont)

4. Egy G páros gráfot akkor nevezünk *kiegyensúlyozottnak*, ha G csúcsainak bármely 2 színnel történő kiszínezésekor a két színosztály mérete megegyezik. Igazoljuk, hogy $r \geq 1$ esetén ha egy G páros gráf r-reguláris (azaz G minden csúcsának foka r), akkor G kiegyensúlyozott.

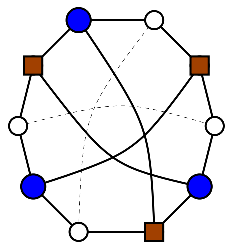
   Legyenek A és B a G színosztályai a G egy két színnel történő színezése esetén. Azt kell megmutatnunk, hogy $|A| = |B|$. (2 pont)
   Mivel G minden élének egyik végpontja A-ban, a másik pedig B-ben van, ezért G éleinek számát megkaphatjuk úgy is, mint az A-beli csúcsok fokszámösszegét, de úgy is, hogy a B-beli pontok fokszámait adjuk össze. (4 pont)
   Mivel minden fokszám r, ezért $r \cdot |A| = |E| = r \cdot |B|$ adódik, (3 pont)
   ahonnan $r \geq 1$ miatt ebből $|A| = |B|$ következik, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

   Ha a gyakorlaton szerepelt, hogy r-reguláris páros gráfnak van teljes párosítása ($r > 0$ esetén), akkor teljes megoldás az is, ha valaki innen vezeti le a kiegyensúlyozottságot.

5. Jelölje $n \geq 3$ esetén C_n' azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy C_n-hez hozzávesszük az egymással nem szomszédos x és y pontokat, amelyeket összekötünk C_n minden csúcsával. Határozzuk meg C_n' kromatikus számát, $\chi(C_n')$-et minden $n \geq 3$ esetén.

   Tekintsük C_n' egy színezését. Ebben az x csúcs színét nem kaphatja meg C_n egyetlen pontja sem, ezért C_n' színezéséhez legalább eggyel több színre van szükség, mint C_n színezéséhez. (3 pont)
   Másrészt ha C_n-t kiszíneztük néhány színnel, akkor x-t és y-t egy újabb színnel színezve a C_n' egy jó színezését kapjuk. (2 pont)
   Ezek szerint $\chi(C_n') = \chi(C_n) + 1$. (1 pont)
   Az órán olyat tanítottak, hogy $\chi(C_n)$ attól függően 2 ill. 3, hogy n páros avagy páratlan-e. (2 pont)
   Ezek szerint $\chi(C_n')$ páros n-re 3, páratlanra pedig 4. (2 pont)

6. Jelölje $n \geq 2$ esetén G_n az a gráfot, amit C_{2n}-ből úgy kapunk, hogy annak minden csúcsát éllel összekötjük a vele átellenes csúccsal (ami tehát tőle legtávolabb van a körön). Síkbarajzolható-e a G_n gráf?

   Ha $n = 2$, akkor $G_n = K_4$, ami síkbarajzolható. (2 pont)
   Ha azonban $n \geq 3$, akkor G_n már nem síkbarajzolható, mert tartalmaz $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, és ehhez elég, ha csupán három átellenes csúcspárt összekötő átló van behúzva. A részgráf az ábrán látható, kiskocka jelöli a házakat, petty a kutakat. (7 pont)
   A válasz tehát, hogy G_n kizárólag $n = 2$ esetén síkbarajzolható. (1 pont)

   Érdekes megfigyelni, hogy $G_3 = K_{3,3}$. Aki csak ennyit tesz, az kapjon 5 pontot.