

- (10p) 1. Legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ egy skaláriszorzatos vektortér tetszőleges elemei. Bizonyítsa be az $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$ paralellogrammaszabályt !
- (10p) 2. Legyen V a "közönséges" vektorok tere; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egy ortonormált bázisa; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ és $\mathbf{T} : V \rightarrow V$ a $\mathbf{T} \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ képlettel értelmezett operátor.
- (a) Határozza meg $\mathbf{T}$ nullterét, képterét,
(b) és ezeknek egy-egy bázisát !
- (10p) 3. Létezik-e olyan p harmadfokú polinom, amely kielégíti a $p(k) = k^4$ ($k = 1, 2, 3$) és $p''(2) = 48$ feltételeket ?
- (10p) 4. Számítsa ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix reciprokat !
- (10p) 5. Határozza meg a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és négy lineárisan független sajátvektorát !
- (10p) 6. (a) Hol konvergens az $f_n(x) = \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) függvénysorozat ? Mi a határfüggvénye ?
(b) Egyenletes-e a konvergencia ?
- (10p) 7. Bizonyítsa be a $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{k^2} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{x^2 + k^4}$ azonosságot ! Itt x tetszőleges valós szám.
- (10p) 8. Határozza meg $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ 0 körüli Taylor-sorát !

70-80 pont	=	jeles
60-69 pont	=	jó
50-59 pont	=	közepes
40-49 pont	=	elégséges