Elektromágneses terek alapjai (VIHVA201) 2016.06.02.

Név:		
NEPTUN:	Jó:	Javító:
Aláírás:	Rossz:	
	Σ	

Feladatonként +1, 0 vagy -1 pont szerezhető. Karikázza be a helyes válasz betűjelét! Legalább 5 kérdésre választ kell adni és legalább 4 pontot el kell érni.

1. Levegőben egy $a = 40\,\mathrm{cm}$ sugarú kör mentén állandó $3\,\mathrm{nC/m}$ vonalmenti töltéssűrűség helyezkedik el. Adja meg az elektromos térerősség nagyságát abban a pontban, amely a körvonal minden pontjától egyaránt $\sqrt{2}a$ távolságra van!

   a) $211{,}8\,\mathrm{V/m}$ b) $149{,}8\,\mathrm{V/m}$ c) $74{,}9\,\mathrm{V/m}$ d) $65{,}4\,\mathrm{V/m}$

2. Három egyforma, a sugarú fémgömb helyezkedik el levegőben egy egyenes mentén; a szomszédos gömbök távolsága d, ahol $d \gg a$. A gömbök töltése rendre $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$ és $Q_3 = 0$, ahol a „2" index a középső gömbre utal. Fejezze ki a 2-es és 3-as gömbök közötti feszültséget!

   a) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{a}\right)$ b) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{d} + \frac{1}{a}\right)$

   c) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2d} + \frac{1}{2a}\right)$ d) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2d} - \frac{1}{a}\right)$

3. Egy 15 cm sugarú gömb alakú földelőelektróda nagyon mélyen a földfelszín alatt helyezkedik el; a föld fajlagos vezetőképessége $0{,}5\,\mathrm{S/m}$. Mennyivel változik a földelési ellenállás azáltal, hogy az elektródát nem közvetlenül a földbe, hanem egy $8\,\mathrm{S/m}$ fajlagos vezetőképességű anyaggal kitöltött, 1 m sugarú gömb alakú tartományba ágyazzuk (amelyet föld vesz körül)?

   a) $-2{,}54\,\Omega$ b) $-0{,}846\,\Omega$ c) $-1{,}72\,\Omega$ d) $3{,}43\,\Omega$

4. Egy 2 cm sugarú, hosszú, homogén, egyenes vezetőben 10 A egyenáram folyik. A vezető anyagának relatív permeabilitása 550. Adja meg a mágneses indukció nagyságát a vezetőben, annak tengelyétől 1 cm távolságban!

   a) $55{,}0\,\mathrm{mT}$ b) $220\,\mathrm{mT}$ c) $110\,\mathrm{mT}$ d) $27{,}5\,\mathrm{mT}$

5. Egy $50\,\Omega$ hullámimpedanciájú, 200 m hosszú, ideális távvezetéken a hullámok fázissebessége $1{,}5\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. A távvezeték lezárása egy 22 nF kapacitású kondenzátor. Adja meg a bemeneti impedanciát a vezeték elején, 1 MHz frekvencián!

   a) $-j125{,}2\,\Omega$ b) $-j63{,}5\,\Omega$ c) $-j52{,}2\,\Omega$ d) $j84{,}8\,\Omega$

6. Egy ideális távvezetéket a hullámimpedanciájával megegyező értékű ellenállás zár le ($Z_0 = 50\,\Omega$), amelyen a feszültség időfüggvénye $u(t) = 100\cos(\omega t)\,\mathrm{V}$. A hullámhossz 80 cm. Adja meg az áramerősség időfüggvényét a vezetéken a lezárástól 10 cm távolságban!

   a) $2\sin(\omega t + \pi/4)\,\mathrm{A}$ b) $2\cos(\omega t + \pi/4)\,\mathrm{A}$

   c) $2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$ d) nem meghatározható

7. Levegőben terjedő, z irányban polarizált síkhullámban a Poynting-vektor időfüggvénye a P pontban $\mathbf{S}(t) = (5\hat{\mathbf{e}}_x + 12\hat{\mathbf{e}}_y)\cos^2(\omega t)\,\mathrm{W/m^2}$. Adja meg az elektromos térerősség amplitúdóját a P pontban!

   a) $70{,}0\,\mathrm{V/m}$ b) $85{,}3\,\mathrm{V/m}$ c) $99{,}0\,\mathrm{V/m}$ d) $140{,}0\,\mathrm{V/m}$

8. Mekkora az a frekvencia, amelyen a réz hullámimpedanciájának abszolútértéke $1\,\mathrm{m\Omega}$? ($\sigma_{Cu} = 57\,\mathrm{MS/m}$)

   a) 7,22 MHz b) 10,21 MHz c) 14,44 MHz d) 34,51 MHz

9. Egy levegőben álló, $0{,}4\,\Omega$ sugárzási ellenállású Hertz-dipólus áramának amplitúdója 2 A. Határozza meg az elektromos térerősség maximális amplitúdóját az antennától 5 km távolságban!

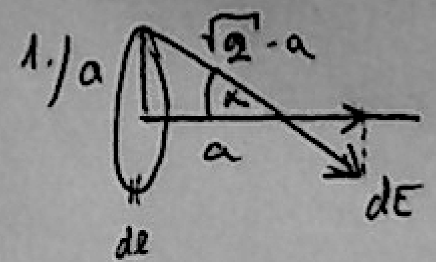
   a) $1{,}697\,\mathrm{mV/m}$ b) $1{,}200\,\mathrm{mV/m}$ c) $0{,}600\,\mathrm{mV/m}$ d) $0{,}453\,\mathrm{mV/m}$

10. Egy levegőben álló Hertz-dipólus λ hullámhosszon üzemel. Legyen az antenna z irányú, és helyezkedjen el a Descartes koordináta-rendszer origójában. Az elektromos térerősség z komponensének időfüggvénye az $(x;y;z) = (10\lambda;0;0)$ pontban (az antenna távolterében) $30\cos(\omega t)\,\mathrm{mV/m}$. Adja meg a mágneses térerősség x komponensének időfüggvényét az $(x;y;z) = (0;15{,}25\lambda;0)$ pontban!

    a) $52{,}2\cos(\omega t - \pi/2)\,\mathrm{\mu A/m}$ b) $79{,}6\cos(\omega t)\,\mathrm{\mu A/m}$

    c) $52{,}2\sin(\omega t - \pi/2)\,\mathrm{\mu A/m}$ d) nem meghatározható

1./a



$a = 0{,}4\,m$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{q\cdot dl}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{2\cdot a^2}$$

$dQ = q\cdot dl$

$$\int_0^{2a\pi} dE\,dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\pi}{2a^2} = \frac{q}{4\varepsilon_0 a}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{q}{4\varepsilon a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}4\cdot\sqrt{2}} = \underline{\underline{149{,}74\,\frac{V}{m}}}$$

2./ φ_3 $Q_3 = 0$

$\varphi_2 - \varphi_3 = ?$

φ_2 $Q_2 = -Q$

φ_1 $Q_1 = +Q$

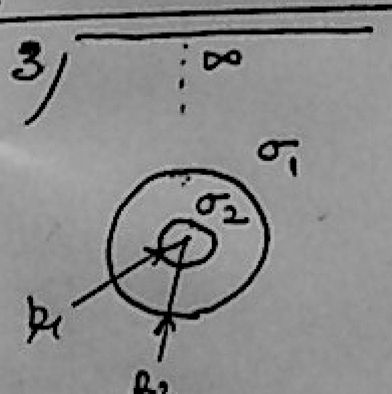
$$\varphi_2 = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{a} + \frac{1}{d} + 0\right]$$

$$\varphi_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left[\frac{1}{2d} - \frac{1}{d}\right]}_{-\frac{1}{2d}}$$

$$\ominus\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{d} + \frac{1}{2d}\right] =$$

$$\underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2d} - \frac{1}{a}\right)}} = \varphi_2 - \varphi_3 = U_{23}$$

3/



$\sigma_1 = 0{,}5\ S/m$

$\sigma_2 = 8\ S/m$

$$U = \int_l \bar{E}\,d\bar{l} \rightarrow U = \int_{R_1}^{R_2} \bar{E}_1\,d\bar{r} + \int_{R_2}^{\infty} \bar{E}_2\,d\bar{r}$$

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial\, \sigma_{\text{töltéssűr}}}{\partial t} = 0$$ stacionárius áramlási tér

$$\sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} = 0 \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}E_1\ ;\ E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_1$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{4\pi\sigma_2}\frac{1}{r^2}dr + \int_{R_2}^{\infty}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{I}{4\pi\sigma_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{I}{4\pi\sigma_2}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] + \frac{I}{4\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{R_2} - \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{0}\right]$$

$$\int\frac{1}{r^2} \rightarrow \left[-\frac{1}{r}\right]$$

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\sigma_1}\frac{1}{R_2} = \frac{1}{4\pi 8}\left(\frac{1}{0{,}5} - 1\right) + \frac{1}{4\pi 0{,}5\cdot 1} = 0{,}215$$

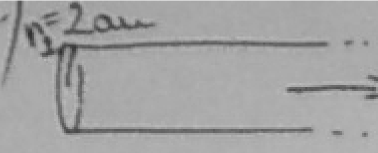
$R_1 = 0{,}5\,cm$

$R_2 = 1\,m$

$$R_2 - R_1 = 0{,}215 - 1{,}061 = \underline{\underline{-0{,}846\,\Omega}}$$

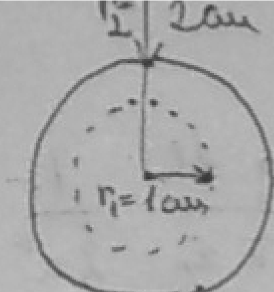
eredeti földelt gömb

$$R_1 = \frac{1}{4\pi\sigma_1 R_1} = \frac{1}{4\pi 0{,}5\cdot 0{,}5} = 1{,}061$$



$I = 10A$

$\mu_r = 550$



$$\oint H dl = \int J dA$$

$$H \, 2 r_1 \pi = I \cdot A = I \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = I \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2 \pi}{r_2^2 \pi}$$

$$H = \frac{I}{8 r_1 \pi} = \frac{10}{8 \cdot 0{,}01 \cdot \pi} = 39{,}79$$

$$B = \mu H = \mu_0 \cdot 550 \cdot 39{,}79 = 0{,}0275 = \underline{\underline{27{,}5 mT}}$$

---

5) $Z_0 = 50\ \Omega$

$l = 200 m$

IDTV $\gamma = j\beta$

$v = 1{,}5 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$Z_2 \Rightarrow C = 22nF$

$Z_{be} = ?$

$f = 1MHz$

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 j \, tg \beta l}{Z_0 + Z_2 j \, tg \beta l}$$

$$tg \beta l = tg \frac{2\pi f}{v} \cdot l = tg \left(\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^8} \cdot 200\right) = -\sqrt{3}$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j 2\pi f \cdot 22 \cdot 10^{-9}} = -7{,}2343 j$$

$$Z_{be} = 50 \frac{-7{,}2343 j + 50 \cdot j (-\sqrt{3})}{50 + (-7{,}2343 j)(-\sqrt{3}) j} = j \frac{50 \, (-7{,}2343 - \sqrt{3} \cdot 50)}{50 - 7{,}2343 \sqrt{3}}$$

$$Z_{be} = \underline{\underline{-125{,}217 j}}$$

6.) IDTV $\gamma = j\beta$

$50\Omega = Z_2 = Z_0 \rightarrow r = \emptyset \rightarrow u^- = 0 \qquad u(z) = u^+ e^{-\gamma z} = u^+ e^{\gamma x}$

$u(t) = 100 \cos(\omega t) [V]$

$\lambda = 80 cm = 0{,}8 m$

$i(t) = ?$

$x = 10 cm = 0{,}1 m$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$i(t|z) = \frac{u^+}{Z_0} e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \frac{100}{50} e^{+j \frac{2\pi}{0{,}8} \cdot 0{,}1} \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(t) = 2 e^{j \pi/4} \cdot e^{j\omega t} \underset{\text{Re}\{\}}{=} \underline{\underline{2 \cos(\omega t + \pi/4)}}$$

7.

„Z irányban polarizált" $Ez \uparrow$ $(E \times H = |E||H| \sin(\gamma))$

$$H = E / Z_0$$

$$\boxed{\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}} \rightarrow \left|\frac{E^2}{Z_0}\right| = \underbrace{\sqrt{5^2 + 12^2}}_{|S|} \rightarrow E^2 = 377 \cdot 13 = 4901$$

valós

$$\underline{\underline{E = 70{,}01 \left[\frac{V}{m}\right]}}$$

$$s(t) = (5 \hat{e}_x + 12 \hat{e}_y) \cos^2(\omega t) \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

8.) kvázi stacionárius tér

$$z=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\delta\sigma} \quad ; \quad \left|z_{0_{\text{rész}},\,Cu}\right| = 1\,m\Omega \qquad 1+j=\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$$

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}=\sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} \qquad \sigma_{Cu}=57\,M\,S/m$$

[illegible]

$$z_{Cu}=\left|\frac{1+j}{\delta\sigma}\right| = 1m\Omega = \frac{\sqrt{2}}{\delta\sigma} \to \underbrace{\delta=\frac{\sqrt{2}}{\sigma\cdot 0{,}001} \quad ; \quad \delta^2\cdot\pi\cdot\mu\cdot\sigma=\frac{1}{f}}$$

$$\underline{\underline{f=7{,}22\,MHz}} \qquad f=\frac{1}{\frac{2}{\sigma^2\cdot 0{,}001^2}\cdot\pi\cdot\mu\cdot\sigma}=\frac{0{,}001^2\,\sigma}{2\pi\mu}=7{,}219\cdot 10^6$$

9.) levegő $Z_0 = 377\,\Omega$

$$E_\vartheta(r,\vartheta)=\frac{I\,\ell}{2\lambda}\,z_0\,\frac{\sin(\vartheta)}{r}\,e^{-j\beta r}$$

$R_s = 0{,}4\,\Omega = 80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$

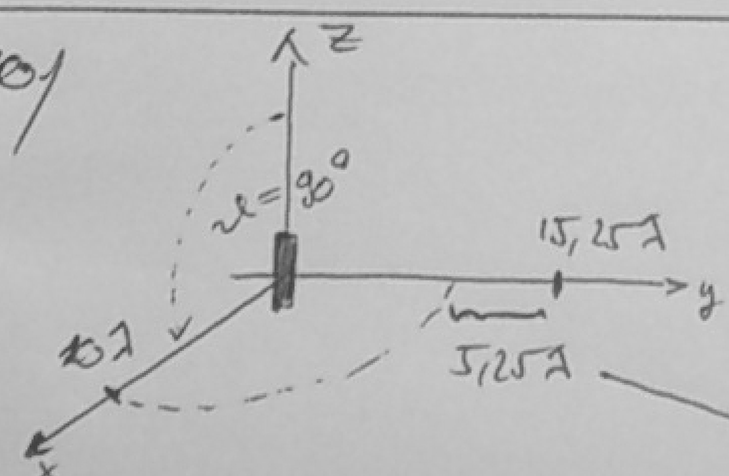
$I = 2A$

$r = 5\,km = 5000\,m$

$$\left|E_\vartheta\right|_{max}=\frac{I}{2}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)z_0\,\frac{1}{r}=\frac{2}{2}\sqrt{\frac{0{,}4}{80\pi^2}}\cdot 377\,\frac{1}{5000}$$

$$\frac{\ell}{\lambda}=\sqrt{\frac{R_s}{80\pi^2}} \qquad \underline{\underline{E_{max}=1{,}697\,m\,\frac{V}{m}}}$$

10.)



$$E_z(x,y,z)=(10\lambda;0;0) \qquad H z_0 = E$$

[illegible] $E_z = 30\cos(\omega t)\,m\,\frac{V}{m}$

$$H_x(x,y,z)=(0;15{,}25\lambda;0)$$

$z_0 = 377$

$$H_x=\frac{E_z}{z_0}\cos(\omega t+\beta z)\cdot\frac{15{,}25}{10} \quad ; \quad \beta z=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{4}\lambda=\frac{\pi}{2}$$

[illegible]

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$$

5,25 λ

egész periódus

$\frac{1}{4}$ per.

$$H_x=\frac{E_z}{z_0}\cos(\omega t+\beta z)\cdot\frac{10}{15{,}25}$$

„[illegible] hossz kompenzálás"

$$H_x=\frac{30\cdot 10}{377\cdot 15{,}25}\cos(\omega t+\pi/2)$$

$$\underline{\underline{H_x=52{,}2\cos(\omega t+\pi/2)\,\mu\,A/m}}$$