GEOMETRIAI OPTIKA I. – A FÉNYVISSZAVERŐDÉS

Tükörbe nézve csak egy lehetetlen,
arcod akárhogy fordítod,
Azt látni, milyen vagy te, mint ember,
ha valós magad látni nem akarod.

PIET HEIN
(Farkas László fordítása)

36.1 Bevezető

Amikor a fény sima tükröző felületről visszaverődik, a visszavert sugarakból kép is kialakulhat. Ebben a fejezetben bennünket ennek a kölcsönhatásnak az *eredménye* érdekel, azt, hogy ez a kölcsönhatás *miképpen megy végbe*, később fogjuk tárgyalni. Ezért ebben a fejezetben aránylag kevés új fizikáról lesz szó, viszont több geometriáról, mint az előző fejezetekben. Az elektromágneses sugárzás tárgyalását a látható tartományba eső részre korlátozzuk, amelyben tetszőleges rezgésszámú hullám ugyanúgy viselkedik. Amennyiben a színkép látható részén messzire túlmegyünk, a kölcsönhatás megváltozik. Így például az a vékony alumíniumlemez, amely a látható fény számára tükröző felület, lényegében átlátszónak bizonyul a röntgen- és a gammasugarak számára.

A látható fény hullámhossztartománya kiterjed a színképben látott színek teljes sorozatára, a mély ibolyától a sötét vörösig, ez hullámhosszban kb. 400 nm-től 700 nm-ig terjed. A **nanométer** (nm) hosszegység, ($1 \text{nm} \equiv 10^{-9}$ m,) az a szokásos mértékegység, amellyel a látható fény hullámhosszát mérjük. Normális látású ember már alig tud megkülönböztetni két olyan színt, amelynek a hullámhossza 1 nm-rel különbözik egymástól.[1] Egy másik hosszegység, amit általában a spektroszkópusok használnak, az *angström*, (Å), ($1 \text{Å} \equiv 10^{-10}$ m), de ezt fokozatosan kiszorítja a nanométer. A 36-1 táblázat a látható fény színképét mutatja az egyes színtartományokat jellemző hullámhosszak közelítő értékének feltüntetésével.

Ahogyan a legutolsó fejezetben tárgyaltuk, az elektromágneses sugárzás forrásai, alapjában véve, a *gyorsuló töltések*. Amennyiben megfontolásainkat a látható fény előállítására korlátozzuk, a forrás gyakran egy forrón izzó test, pl. izzólámpa izzószála, amelynek tipikus hőmérséklete kb. 3000 K. Szilárd

36-1 TÁBLÁZAT
Hullámhosszak és színek

Hullámhossz (nm)	Szín
420	Lila
470	Kék
520	Zöld
570	Sárga
620	Narancs
670	Piros

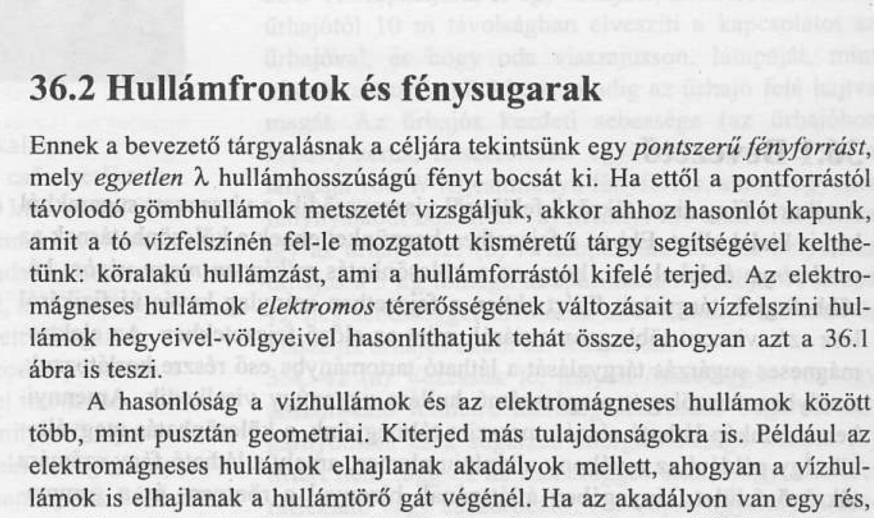
[1] Az emberi fül sok tekintetben jobb megkülönböztetésekre képes, mint a szem. Míg a látható fény alig fog át egy oktávot (a frekvenciában ez egy kettes szorzót jelent), a hallható hang hullámtartománya mintegy 10 oktáv, és a legkisebb érzékelhető változás a hangmagasságban egy cent, ahol is egy oktáv 1200 centből áll.

testekben hőmozgást végző atomok és molekulák olyan sugárzást bocsátanak ki, amely sokféle hullámhossz keveréke. A hullámhossz többnyire az infravörös tartományba esik, az energiának csupán kis százaléka jut a látható tartományba. Az *ívfény* különösen erős fényforrás, amely akkor alakul ki, amikor egymástól csupán néhány milliméterre széthúzott szénrudak között egyenáramú elektromos kisülés jön létre (ívfény fémrudak között is létrejöhet; *a fordító megjegyzése*). Az egyik rúdvégbe ütköző elektronok hatására ott kb. 4000 K hőmérséklet alakul ki, aminek eredménye az erős fehér fényt kibocsátó forrás létrejötte. Az ívfény különösen alkalmas arra, hogy vetítőgépekben és erős reflektorokban használják. Az üvegcsőbe zárt fénygőzön keresztül kialakuló *ívkisülés* eredménye a közvilágításra használt higanygőzlámpa kékeszöld és a nátriumlámpa autóutakról ismert sárgás fénye. A fénycsövekben argongáz-higanygőz keverékben jön létre elektromos kisülés; az itt keletkező ibolyántúli sugárzást a fénycső belső falán vékony rétegben felvitt ún. fénypor elnyeli, majd az elnyelt energiát látható fény formájában újra kibocsátja, azaz *fluoreszkál*. A *lézerek*, ezek a legutóbbi évtizedek során kifejlesztett fényforrások keskeny, különleges nyalábban rendkívül intenzív és közelítőleg *monokromatikus* (egyszínű) sugárzást bocsátanak ki. Ez lényegében egyetlen hullámhosszúsággal jellemezhető. A lézerekről a 39. fejezetben lesz szó.

36.2 Hullámfrontok és fénysugarak

Ennek a bevezető tárgyalásnak a céljára tekintsünk egy *pontszerű fényforrást*, mely *egyetlen* λ hullámhosszúságú fényt bocsát ki. Ha ettől a pontforrástól távolodó gömbhullámok metszetét vizsgáljuk, akkor ahhoz hasonlót kapunk, amit a tó vízfelszínén fel-le mozgatott kisméretű tárgy segítségével kelthetünk: köralakú hullámzást, ami a hullámforrástól kifelé terjed. Az elektromágneses hullámok *elektromos* térerősségének változásait a vízfelszíni hullámok hegyeivel-völgyeivel hasonlíthatjuk tehát össze, ahogyan azt a 36.1 ábra is teszi.

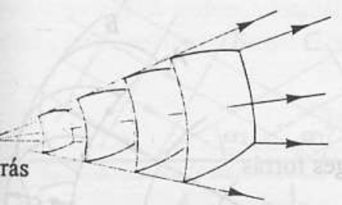
A hasonlóság a vízhullámok és az elektromágneses hullámok között több, mint pusztán geometriai. Kiterjed más tulajdonságokra is. Például az elektromágneses hullámok elhajlanak akadályok mellett, ahogyan a vízhullámok is elhajlanak a hullámtörő gát végénél. Ha az akadályon van egy rés, *apertúra*, akkor a hullámok a rés mögött szétterülnek, ez a *diffrakciónak* nevezett jelenség (39. fejezet). Az elhajlás nagysága függ a résnek a hullám-



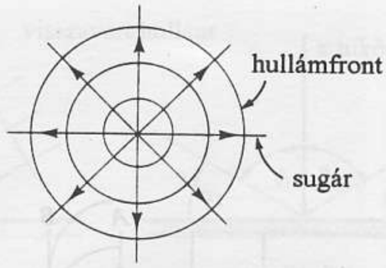
(a) pontforrásból kifelé terjedő gömbhullám sematikus képe

(b) körhullámok a víz felszínén

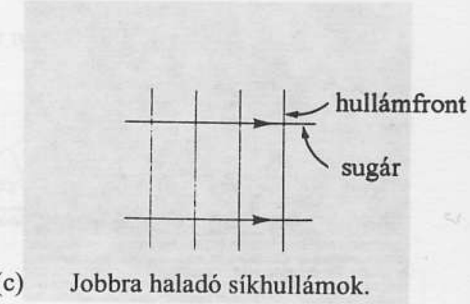
-1 ábra
pontszerű fényforrásból kibocsátott
y gömbhullámainak síkmetszete ha-
ló a vízfelszín egy pontjában keltett
hullámokhoz.



(a) A pontforrásból kiinduló gömbhullám-front részletek.



(b) A pontforrásból kiinduló gömbhullám-frontok szokásos ábrázolása.



(c) Jobbra haladó síkhullámok.

-2 ábra

ugarak merőlegesek a hullámfrontokra. A nyilak a hullámfront terjedési irányát mutatják.

szhoz viszonyított méretétől. (Minél inkább megközelíti a rés szélessége a lámhosszat, annál nagyobb az elhajlás). De a diffrakciójelenségeket egy őbbi fejezetre halasztjuk és itt csak azokat az eseteket tárgyaljuk, ameknél a rés – vagy az akadály – mérete nagy a hullámhosszhoz képest és az elhajlás és szétterülés hatásaitól kicsinységük miatt eltekinthetünk. Ez özelítés kiválóan megfelel tükrök, lencsék, prizmák és más optikai berenések, pl. teleszkópok (távcsövek) és mikroszkópok elemzésére.

A pontforrásból kibocsátott fényhullámok esetében a táguló gömbfelüminden pontjában a *hullám fázisa ugyanakkora*; Az azonos fázisú felületet **lámfrontnak** nevezzük. Vázlatkészítéskor gyakran ábrázoljuk a hullámntokat vonalakkal, mint a 36.1a. ábrán. Tanácsos azonban észben tartani, y az elektromágneses hullámok hullámfrontjai *felületek*. Az az irány, erre a hullámfront terjed, mindig merőleges a magára hullámfrontra. Báry vonalat, amely merőleges a hullámfrontra, **sugárnak** nevezünk, a sura helyezett nyíl a terjedés irányát mutatja. A 36-2b ábrán bemutatunk ány sugarat, mely a pontszerű fényforrásból kiinduló gömbhullámtokkal kapcsolatos. A forrástól nagyon nagy távolságban a hullámfrontok vegében *síkká* válnak, mivel a gömbfelületek sugara nagyon nagy lesz. a hasznos lehet, ha a hullámfrontokat egy hullámhossznyi távolságra oljuk fel egymástól, bár ennek nincsen különösebb jelentősége. Ahogyan d megmutatjuk, a pontforrásból kiinduló két sugár elegendő lesz az optirendszerek elemzéséhez.

36-3 ábra

A napsugár fénynyalábjai azt a benyomást keltik, hogy a fénysugarak széttartó egyenes vonalakban haladnak. A fénynyalábok a valóságban párhuzamosak, csak perspektivikus okokból látszanak széttartónak.

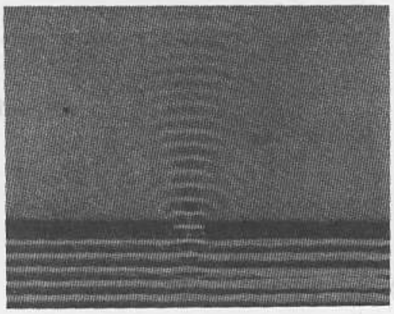
.3 A Huygens-elv

optikai rendszerek elemzésének hasznos módszerét dolgozta ki Christian gens (1629-1695) holland fizikus és csillagász. A következőket javasol-

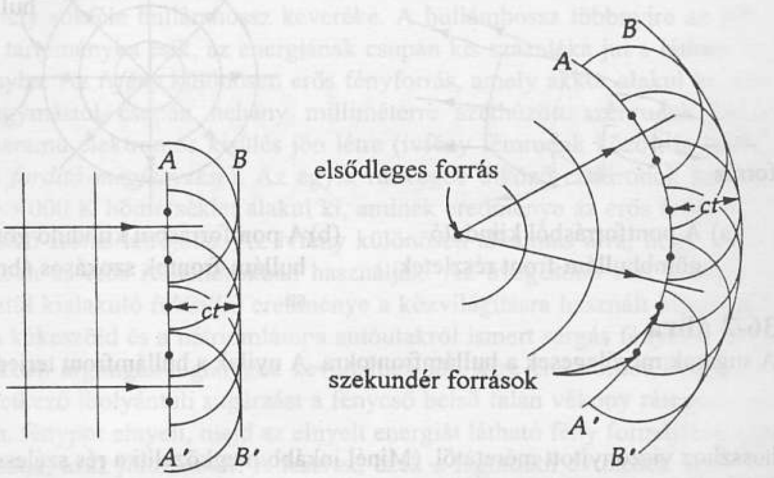
HUYGENS-V

A hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető. Az elemi hullámok a fény sebességével terjednek tova. Egy későbbi *t* időpontban a hullámfront új helyzetét az elemi hullámok burkolója adja meg.[2]

Az eljárás kissé mesterkélt. Ha a hullámfronton valamennyi pont valóban pontforrás lenne, akkor az elemi hullámoknak nemcsak a hullámfront haladásának irányába előre, hanem hátrafelé is kellene terjedniük. Ez utóbbit Huygens figyelmen kívül hagyta. Egy bonyolultabb leírásból, amit később Kirchhoff adott meg, kiderült, hogy a hátrafelé kibocsátott sugárzás interferencia miatt kioltódik. Erről a 38. fejezetben lesz szó.



(a) Síkhullámok hullámkádban. A síkhullám olyan gáthoz érkezik, amelyiken a hullámhosszhoz képest kis nyílás van. Huygens elvével összhangban ez a nyílás szekundér hullámok forrásaként viselkedik, a gát túloldalán körhullámok jelennek meg.



(b) síkhullámfrontok (c) Gömbhullámfrontok.

36-4 ábra

Huygens-elv. Az AA' hullámfrontot elemi hullámok kibocsátására alkalmas pontforrások sorozatának tekintjük. A t idő elteltével ezek a szekundér hullámok ct távolságra jutnak el. Ezeknek a szekundér hullámoknak az eredője a BB' hullámfront. A nyilak a hullámterjedés irányát mutatják

A 36-4 ábra bemutatja az eljárást. Az AA' hullámfront minden pontja pontforrásnak tekinthető, mindegyikből új, másodlagos (szekundér) elemi hullámok indulnak ki. Egy későbbi t időpontban ezeknek az elemi hullámoknak a burkolója a BB' hullámfront. Az eljárás nemcsak a sík- és a gömbhullámfrontok esetén, hanem tetszőleges alakú hullámfront esetében is működik.

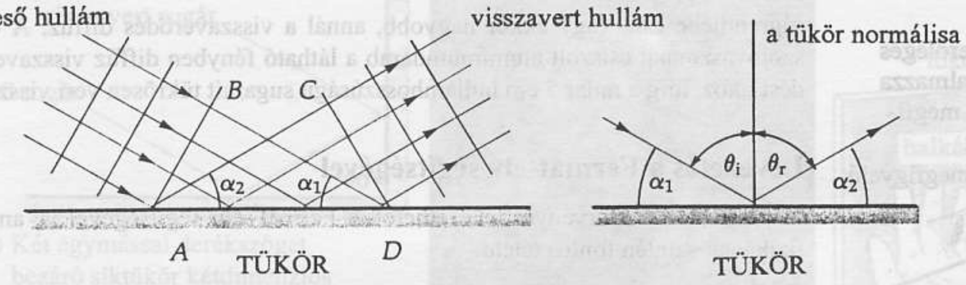
36.4 A fényvisszaverődés síktükrön

A tükrökön tapasztalt fényvisszaverődés törvényét minden bizonnyal már Platón korában, az i.sz.e. 4. században is ismerték. Itt most két módszerrel is levezetjük ezeket a törvényeket, mindkét módszer a fizika egy-egy fontos elvét világítja majd meg.

Levezetés a Huygens-elv segítségével

Gyakran ugyanabban az értelemben beszélünk arról, hogy belenézünk egy tükörbe, ahogyan benézünk egy szobába. A képeket úgy látjuk, mintha azok bizonyosan a tükör másik oldalán lennének. Minden gyerek kíváncsi volt már arra, hogy milyen lehet átmenni a tükrön abba a másik világba, amely kölcsönösen és egyértelmű összefüggésben van a valódi világ dolgaival. Milyen távol van a tükör mögött egy adott tárgy képe? Tekintsünk egy síkhullámot, amely a tükörhöz érkezik, ahogyan a 36-5a ábra mutatja. A beeső AB hullámfronthoz tartozó sugarak a tükör felületével α_1 szöget alkotnak. Ahogyan a beeső elektromágneses hullám egyes részei a tükröt érik, a tükör felületének elektronjait rezgésbe hozzák. Ezek a rezgő elektronok elektromágneses hullámokat bocsátanak ki, így mindegyikük másodlagos hullámok forrásává válik.[3]

[3] Úgy tűnhet, hogy Huygens elgondolása, mely szerint a szabad térben a hullámfront minden pontja elemi hullámok kiindulópontja, csak ügyes trükk, amely elvezet a helyes eredményhez. Amikor azonban közeg is jelen van, amelyben a rezgő elektronok játsszák az újra kisugárzott hullámok forrásának szerepét, ez az elgondolás valóban hihetőnek és olyannak mutatkozik,



(a) A CD visszavert hullámfrontot azoknak az elemi hullámoknak a burkolója alkotja, amelyek a tükör felületén keletkeztek.

(b) A beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel: $\theta_i = \theta_r$

36-5 ábra
Síkhullám visszaverődése síktükrön.

Vizsgáljuk meg közelebbről a 36-5 ábrán bemutatott visszavert hullámfrontokat! Amint az AB hullámfront A pontja a tükör felületét eléri, az A pontból körhullám terjed a CD visszavert hullámfront C pontja felé. Ezalatt a B pontból induló hullám folytatja útját a tükör D pontjáig. Ha a hullámvonulatnak az A és a C közötti út megtételéhez ugyanakkora idő kell, mint a B pontból indulónak a D-be éréséhez, akkor a C és D pontok azonos fázisban lesznek és így mindketten a visszavert hullámfronthoz tartoznak. Természetesen a tükör az A és B pontok közötti tetszőleges pontból induló elemi hullámokat a C és D pontok közötti megfelelő pontba veri vissza. Ennélfogva az AC és a BD távolságok egyenlőek, az ABD derékszögű háromszög pedig egybevágó az ACD derékszögű háromszöggel. (Közös az AD átfogójuk és a megfelelő oldalaik egyenlőek. Ezért az α_1 és α_2 szögek egyenlőek.) Ebből következik, hogy θ_i ill. θ_r, pótszögeik is egyenlőek. Az optikában az a szokás, hogy a szögeket a felületre merőleges, *normális* iránytól mérjük. Ezért a 36-5b ábrán is látható módon a θ_i *beesési szög* és a θ_r *visszaverődési szög* egyenlő. Továbbá, ha az elemzést a háromdimenziós térben hajtjuk végre, megmutatható, hogy a beeső sugár, a tükör normálisa és a visszavert sugár egy síkban fekszenek.

A FÉNYVISSZA-VERŐDÉS TÖRVÉNYEI

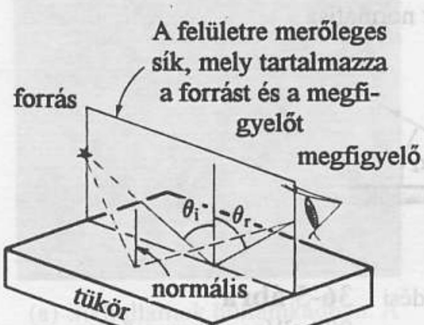
(1) A beesési szög és a visszaverődési szög egyenlő: $\theta_i = \theta_r$

(2) A beeső sugár, a tükör normálisa és a visszavert sugár egy síkban fekszik.

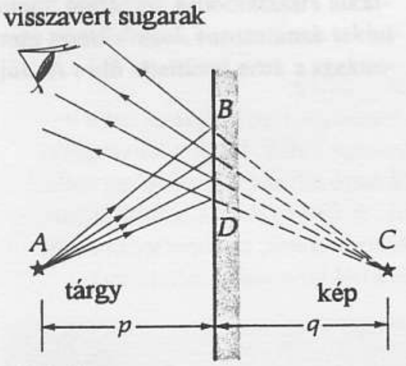
Ha a felület rücskös, mint a 36-6 ábrán látszik, a párhuzamosan érkező sugarak különböző szögekben verődnek vissza. Ezt a visszaverődési típust, a *diffúz* (szórt) visszaverődést mutatja az a papírlap is, amit most Ön éppen olvas. Bár a lap megvilágítása egy olvasólámpából kiinduló, lényegében párhuzamos sugarakkal történik, a lap minden irányból olvasható. A legtöbb önállóan nem világító tárgy a diffúz visszaverődés következtében látható. A diffúz és a *tükrös* visszaverődés közti különbség a felületi egyenetlenségeknek a megvilágító fény hullámhosszához viszonyított méretétől függ. Ha az egyenetlenségek a fény hullámhosszához képest kicsik, akkor tükrös visszaverődés következik be. Ha a szabálytalanságok mérete a hullámhossz nagy-

36-6 ábra
Diffúz visszaverődés esetén a párhuzamosan érkező sugarak a felület egyenetlenségei miatt különböző irányokban verődnek vissza.

amely az elektromágneses hullámok és az anyagi közeg kölcsönhatását helyesen írja le. Huygens idejében azt hitték, hogy a fényt hordozó közeg - az éter, ahogyan akkor nevezték - mindenütt jelen van, még a vákuumban is. Ezért könnyű megérteni, hogy hogyan is születtett Huygens elve. Természetesen Einstein nyomán a mai fényelmélet már nem használja az éter fogalmát.



36-7 ábra
Fermat elve: a fénysugár úgy verődik vissza, hogy a fényforrás és a megfigyelő közti teljes utat minimális idő alatt tegye meg.



36-8 ábra
A síktükör a tükör mögött alkot képet, ugyanolyan távolságban a tükörtől, mint amennyivel a tárgy van a tükör előtt.

36-9 ábra
A síktükrök olyan képet alkotnak, mely a tükörtől – a tükör mögött – ugyanolyan távol van, mint a tükör előtt a tárgy. A kép ugyanakkora, mint a tárgy.

ságrendjébe esik vagy akkor nagyobb, annál a visszaverődés diffúz. A csiszolóvászonnal csiszolt alumíniumdarab a látható fényben diffúz visszaverődést okoz, míg a radar 5 cm hullámhosszúságú sugarait tükrösen veri vissza.

Levezetés a Fermat-elv segítségével

A visszaverődés törvényei levezethetők a Fermat[4]-elv segítségével is, ami a fizikának szintén fontos tétele.

A FERMAT-ELV **A fénysugár egyik pontból a másikba olyan úton terjed, amely ugyanannyi vagy kevesebb időt vesz igénybe, mintha bármely más úton haladna.**

Illusztrációképpen alkalmazzuk a Fermat-elvet a 36-7 ábrán látható esetre. A fényforrás és a megfigyelő a síktükörre merőleges síkban van. A szaggatott vonal egy tetszőleges fénysugarat ábrázol. Világosan látszik, hogy a kiválasztott út nem a legrövidebb a forrástól a megfigyelőig, ezért a fény nem is teszi meg a legrövidebb idő alatt. Míg nyilvánvalónak látszik, hogy a legrövidebb út (a kihúzott vonal) abba a síkba esik, amely a tükör normálisát tartalmazza, továbbá az is igaz, hogy a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel. Az utóbbi állításnak a Fermat-elvvel való bebizonyítását feladatként az olvasóra bízzuk.

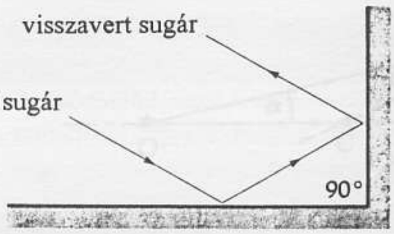
Térjünk most vissza ahhoz a kérdéshez, amit a fejezet elején vetettünk fel. Milyen messze van a tükör mögött a tárgy képe? A válasz érdekében szerkesszünk néhány sugarat a visszaverődés törvényeinek megfelelően! A 36-8 ábra az A (★) forrásból kiinduló és a tükör által visszavert sugarakat mutatja. A visszavert sugarak meghosszabbításai a tükör mögötti *C* pontban metszik egymást, ezért olyan benyomásunk támad, mintha onnan indulnának ki. Ez az *A* fényforrás képe. (Bár mi az ábrán három sugármenetet rajzoltunk, a *C* pont kitűzéséhez már kettő is elegendő.) A tárgyalás megkönnyítésére a következő jelölést vezetjük be. Legyen a *t tárgytávolság*, a tárgynak a tükörre merőleges egyenes mentén a tükörtől vett távolsága, a *k képtávolság* pedig a képnek a tükör síkjára merőlegesen mért távolsága a tükörtől. A visszaverődés törvénye szerint az ábrán felvett sugarak az ábra síkjában fekszenek, valamint nyilvánvaló, hogy az *ABD* háromszög egybevágó a *CBD* háromszöggel. (Van ugyanis közös oldaluk, a *BD*, és a háromszögek másik két megfelelő oldala a *BD* oldallal egyenlő szöget zár be.) Így:

A KÉP HELYE SÍKTÜKRÖKNÉL **A *k* képtávolság egyenlő a *t* tárgytávolsággal**

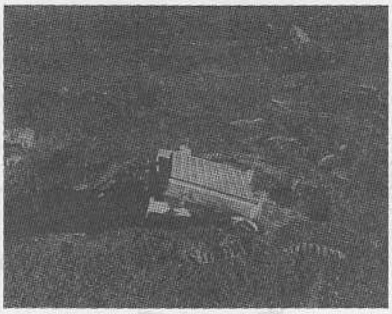
Ezt a következtetést pontszerű tárgyra vonatkozóan nyertük.

Véges kiterjedésű tárgy felfogható pontszerű fényforrások eloszlásaként, melyek mindegyikének meglesz a saját képe. Így fennáll a tárgy és tükörképe közti kölcsönösen egyértelmű összefüggés. Minthogy minden egyes tárgypontra és képére $t = k$, a tárgy és a kép a tükör két oldalán szimmetrikusan helyezkedik el, amint azt a 36-9 ábra mutatja.

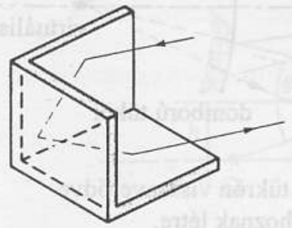
[4] A modern valószínűségszámítást Pierre de Fermat (1601-1665) francia nemesember alkotta meg a szerencsejátékok iránti érdeklődése miatt. A Fermat-elv mellett nevezetes még a Fermat-sejtésről is, melynek bizonyítása még mindig ellenáll a matematikusok erőfeszítéseinek. Egy, a halála után előkerült jegyzetében, amit egy könyv margójára írt, azt állította, hogy bebizonyította, hogy az *xyz* egész számok körében az $x^n + y^n = z^n$ összefüggésnek nincsen nemtriviális megoldása $n > 2$ esetére. Mind a mai napig senki nem tudta igazolni, vagy cáfolni ezt az állítást.



(a) Két egymással derékszöget bezáró síktükör kétdimenziós saroktükröt alkot olyan sugarakra vonatkozóan, melyek a tükrök síkjára merőleges síkban haladnak. Két visszaverődés után bármely beeső sugár önmagával párhuzamosan, a forrás felé indul vissza.

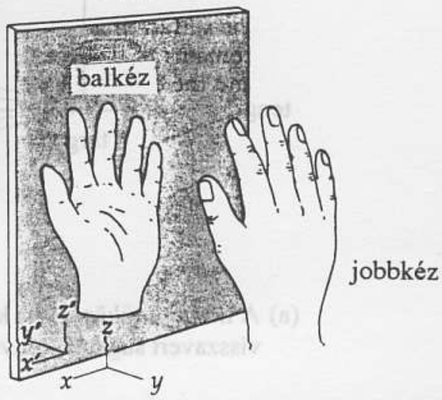


(c) Laser Rangingretro Reflector (LRRR), lézeres távmérő visszaverőrendszer a Holdon. Az Apollo asztronautái három 45,72 cm oldalhosszúságú négyzet alakú egyenként 100 saroktükröt tartalmazó tükröt helyeztek el a Holdon, míg a negyediket egy orosz űrhajó telepítette. Több földkörüli pályán közlekedő űrhajón is voltak saroktükrök. A Földről a tükrökhöz indított lézer impulzusok oda-vissza útjának ideje olyan pontosan mérhető, hogy a Föld-LRRR távolságot mindössze néhány cm-es hibával meg lehetett határozni. Ezáltal lehetővé vált olyan hosszútávú vizsgálatok megkezdése, amelyek a Föld és a Hold relatív mozgásának finomszerkezetét tárják majd fel. A kontinensek elmozdulását ma már közvetlenül vizsgálják ezzel a technikával.



(b) A három, egymásra kölcsönösen merőlegesen elhelyezett tükör (háromdimenziós saroktükör) a beeső fénysugarakat a beesési iránnyal párhuzamosan veri vissza. A járművekre szerelt „macskaszemek" ilyen saroktükrök százaiból állnak.

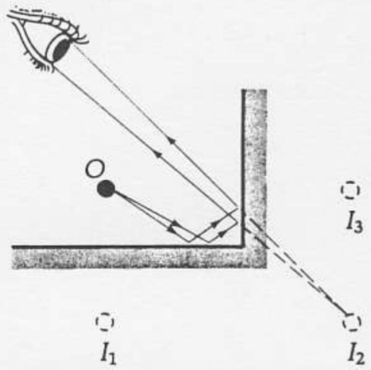
36-12 ábra
Saroktükrök



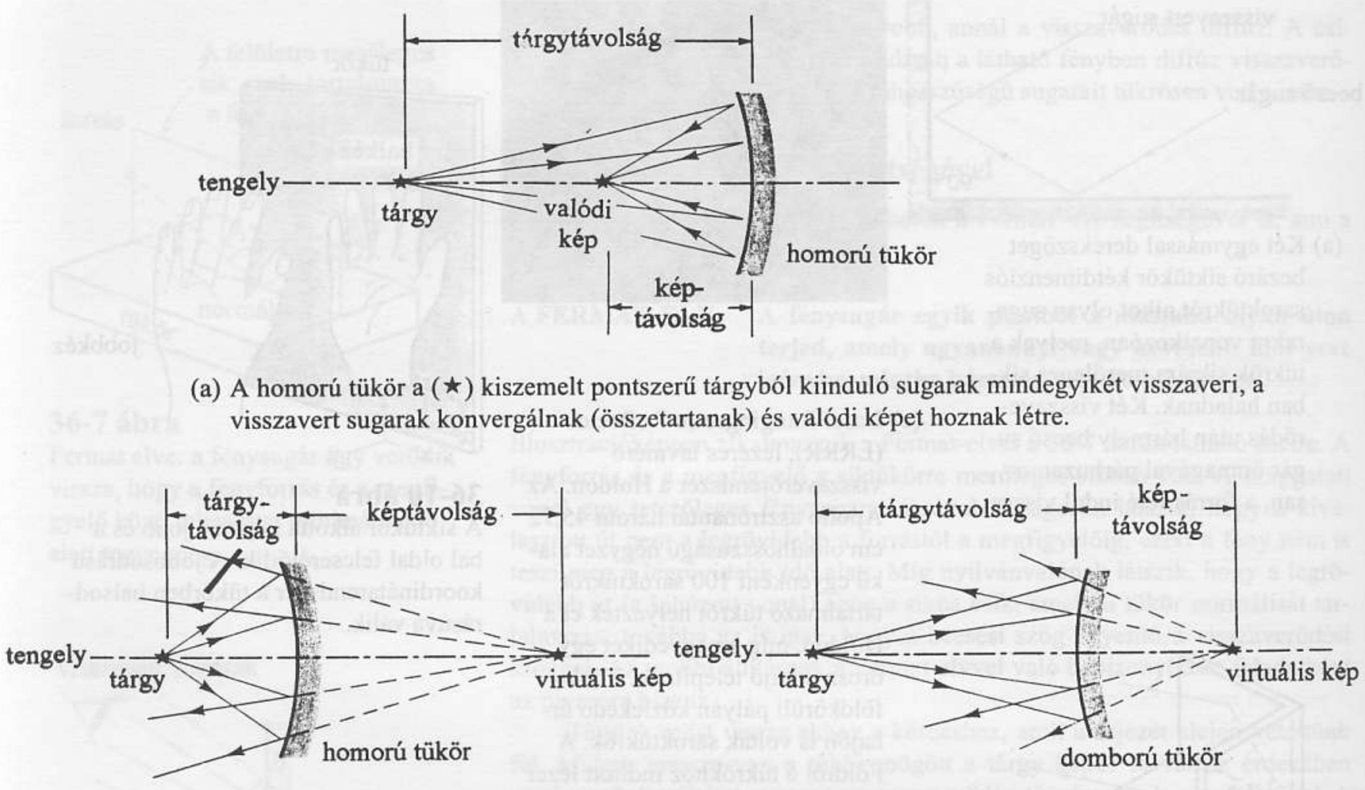
36-10 ábra
A síktükör alkotta képen a jobb és a bal oldal felcserélődik. A jobbsodrású koordinátarendszer a tükörben balsodrásúvá válik.

A síktükrök alkotta képek sajátos tulajdonsága, hogy a jobb és bal oldal felcserélődik. Jobb kezünk pl. bal kézként jelenik meg, lásd a 36-10. ábrát. Hasonlóképpen jobbsodrású koordinátarendszer tükörképe balsodrású koordinátarendszer.

Két egymásra merőleges síktükör 90°-os *szögtükröt*, vagy saroktükröt alkot (36-12a ábra). Bármely sugár két visszaverődés után pontosan a beeső sugárral párhuzamosan, de ellentétes irányban – a forrás felé – verődik vissza. (36B-3 feladat) Három tükör, amely kocka csúcspontja körüli oldalakként helyezkedik el, háromdimenziós saroktükörként viselkedik, 36-12b ábra. A járművekre felszerelt macskaszemek és egyes útjelző táblák kicsiny saroktükrök százaiból állnak.



36-11 ábra
Az O-ban lévő tárgyról az egymásra merőlegesen állított két síktükör három képet alkot. (Segíteni fog, ha berajzoljuk azokat az O-ból induló sugarakat, melyek az I_1 és I_3 képeket alkotják. Mindegyik csak egy visszaverődést szenved.)



(a) A homorú tükör a (★) kiszemelt pontszerű tárgyból kiinduló sugarak mindegyikét visszaveri, a visszavert sugarak konvergálnak (összetartanak) és valódi képet hoznak létre.

(b) A (★) pontszerű tárgyakból kiinduló sugarak a homorú vagy a domború tükrön visszaverődve úgy divergálnak (széttartanak), hogy meghosszabbításaik virtuális képet hoznak létre.

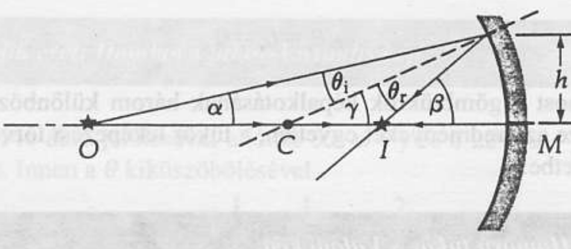
36-13 ábra
Gömbtükrök képalkotása

36.5 Fényvisszaverődés gömbtükrön

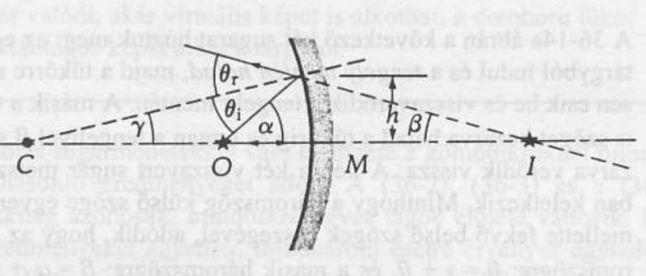
Sokunk legnagyobb sajnálatára reggelente az életnagyságnál jóval nagyobb képünk köszönt bennünket a borotválkozó vagy sminktükörben. Leggyakrabban, amikor tükörrel találkozunk, a kép a tükör mögött van, bár – ahogyan majd látni fogjuk – vannak bizonyos esetek, amikor a kép a tükör előtt is létrejöhet.

A görbült felületű tükrök – elsősorban *gömbtükrök* – homorúak (konkávok) vagy domborúak (konvexek) lehetnek, attól függően, hogy melyik típusú görbült felületre esik be a vizsgált fény. A gömbfelület felszíne, ha a gömb belseje felől közelítjük meg, akkor **homorú**, ha kívülről, akkor **domború**.

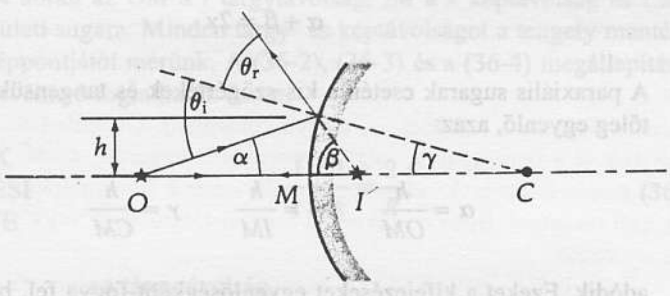
A gömbtükör képalkotásának jellemzésére sugármeneteket szerkesztünk. Jó tájékozódásul szolgál ehhez az optikai tengely, ami a tükör szimmetriatengelye, és a tükör felületére merőlegesen halad át. Tekintsünk egy, az optikai tengelyen elhelyezkedő pontot és vizsgáljuk meg, hogyan változtatja meg a tükör az e pontból kiinduló sugármeneteket. Visszaverődés után a sugarak vagy összetartóvá válnak (konvergálnak) és **valódi** képet alkotnak, ahogyan a 36-13a ábra mutatja, vagy széttartóvá válnak (divergálnak) és látszólagos vagy **virtuális** képet alkotnak, mint a 36-13b ábrán. A *valódi* szó azt jelenti, hogy a fénysugarak ténylegesen metszik egymást a kép helyén és ott képet alkotnak. Ha oda ernyőt helyeznénk (anélkül, hogy a sugarak haladását befolyásolnánk), az ernyőn kép jönne létre. A *virtuális* szó azt jelenti, hogy a fénysugarak valójában nem mennek át a képponton, s hiába helyeznénk el oda ernyőt, nem jönne létre rajta kép, pontosan úgy, ahogyan a síktü-



(a) Első eset: homorú tükör, valódi kép.



(b) Második eset: homorú tükör, virtuális kép.



(c) Harmadik eset: domború tükör, virtuális kép.

36-14 ábra

Sugármenet-elemzés gömbtükrök esetén. Az O tárgyból kiinduló és a tükör tengelye mentén haladó sugár a tengely irányába verődik vissza. A tengellyel α szöget bezáró irányban haladó sugár a tengellyel β szöget bezáró irányban verődik vissza. A kép ott keletkezik, ahol a két visszavert sugár metszi egymást.

kör alkotta kép esetében. Mindkét esetben azonban, ha szemünk olyan helyen van, hogy a tükröt elhagyó visszavert sugarakat fel tudja fogni, látjuk a képet. Egyéb támpont híján azonban nem tudjuk eldönteni, hogy a kép valódi-e vagy látszólagos, szemünk számára mindkét képtípus ugyanolyan.

A kép helyének meghatározása érdekében *két* olyan *sugarat* húzunk meg, melynek menetét könnyű megállapítani. Mivel minden visszavert sugár ugyanazon a ponton halad át, ezért már kettő is elegendő a kép helyének meghatározásához. A 36-14 ábra jelölései szerint a görbületi középpont a C pontban, a tárgy az O, a kép az I, a tükör pedig az M pontban van. Azokra a sugármenetekre szorítkozunk, amelyek az optikai tengellyel annyira kicsiny szöget zárnak be, hogy adiánban mért értékük közelítőleg egyenlő a szög tangensének értékével. Vagyis tg $\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$. Az ilyen sugarak a tengelyhez közel haladnak és közelítőleg párhuzamosak a tengellyel, ezért **paraxiális** (tengellyel párhuzamos) sugaraknak nevezzük őket. Ezt a közelítést elfogadva a sugármenet-analízis eredményét érvényesnek fogjuk találni mindazon tükrökre, amelyek átmérője sokkal kisebb a görbületi sugaruknál.[5] Minden esetben a visszaverődés törvényét alkalmazzuk és az egyszerűség kedvéért az indexeket elhagyjuk:

[5] Ezt a feltételt gyakran úgy fogalmazzuk meg, hogy „kis nyílásszögű (apertúrájú) tükör"-ről beszélünk. Ez azt jelenti, hogy a tükör átmérője kicsi a görbületi sugárhoz képest. Minthogy ez relatív mérték, lehet, hogy egy 3 m átmérőjű csillagászati tükör kis apertúrájúnak tekinthető, míg az 5 cm átmérőjű közönséges tükör nem.

$$\theta_i = \theta_r = \theta$$

Elemezzük most a gömbtükrök képalkotásának három különböző esetét és foglaljuk össze az eredményeket egyetlen, a tükör leképezési törvénye néven ismert egyenletbe:

Első eset: Homorú tükör – Valódi kép

A 36-14a ábrán a következő két sugarat húztuk meg: az egyik az O tárgyból indul és a *tengely mentén halad*, majd a tükörre merőlegesen esik be és visszaverődik a tengely mentén. A másik a tengellyel α szöget bezárva halad a tükörig és onnan a tengellyel β szöget bezárva verődik vissza. A kép a két visszavert sugár metszéspontjában keletkezik. Minthogy a háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, adódik, hogy az egyik háromszögre: $\beta = \gamma + \theta$, és a másik háromszögre: $\beta = \alpha + 2\theta$. Ezzel kiküszöbölve a θ szöget, kapjuk, hogy

$$\alpha + \beta = 2\gamma \qquad (36\text{-}1)$$

A paraxiális sugarak esetén a kis szögértékek és tangensük közelítőleg egyenlő, azaz:

$$\alpha \approx \frac{h}{OM} \qquad \beta \approx \frac{h}{IM} \qquad \gamma \approx \frac{h}{CM}$$

adódik. Ezeket a kifejezéseket egyenlőségként fogva fel, behelyettesítünk a (36-1) egyenletbe, s azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{IM} = \frac{2}{CM} \qquad (36\text{-}2)$$

Figyeljük meg, hogy a h és θ nem jelenik meg ebben az összefüggésben. Ez azt jelenti, hogy a tárgyról minden irányban (legalábbis az optikai tengellyel közel párhuzamosan) kiinduló és a tükörről visszaverődő fénysugarak mind a képpontba tartanak.

Második eset: Homorú tükör-Virtuális kép

Az 1. esetben követett eljáráshoz hasonlóan a 36-14b ábra jelöléseivel adódik, hogy $\theta = \beta + \gamma$ és $\alpha = \theta + \gamma$. Innen a θ kiküszöbölésével nyerjük, hogy

$$\alpha - \beta = 2\gamma$$

A szögeket a tangenseikkel közelítve a paraxiális sugarakra azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{IM} = \frac{2}{CM} \qquad (36\text{-}3)$$

Harmadik eset: Domború tükör-Virtuális kép

A 36-14c ábra jelölésével adódik $\theta = \alpha + \gamma$ és a $2\theta = \alpha + \beta$ egyenlősége. Innen a θ kiküszöbölésével

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{IM} = -\frac{2}{CM} \tag{36-4}$$

kapható. Figyeljük meg, hogy szemben a homorú tükör esetével, amely akár valódi, akár virtuális képet is alkothat, a domború tükör *mindig* látszólagos képet alkot a tárgyról.

A képalkotás sugármenetekkel való elemzése a gömbtükröknél mindhárom esetben hasonló eredményeket adott. A (36-2), (36-3) és a (36-4) egyenletek alakilag azonosak, mindössze egyes tagok előjele változik. Előnyös, ha az eredményeket *egyetlen*, mindhárom esetre érvényes egyenletbe foglaljuk össze. Ezt azzal érjük el, hogy elfogadunk egy **előjelkonvenciót** az egyenletben szereplő mennyiség számértékére vonatkozóan. Figyeljük meg, hogy a 36-14 ábrán az OM a t tárgytávolság, IM a k képtávolság és CM a tükör R görbületi sugara. Minden tárgy- és képtávolságot a tengely mentén a tükör M középpontjától mérünk. A (36-2), (36-3) és a (36-4) megállapítások leképezési törvénnyé foglalhatók össze.

A TÜKRÖK LEKÉPEZÉSI TÖRVÉNYE

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R}, \tag{36-5}$$

ahol t a tárgytávolság,
k a képtávolság,
R a tükör görbületi sugara.

Ahhoz, hogy ezt az egyenletet használni tudjuk, el kell fogadnunk a következő *előjelkonvenciót:*

ELŐJELKONVENCIÓ TÜKRÖK ESETÉRE[6]

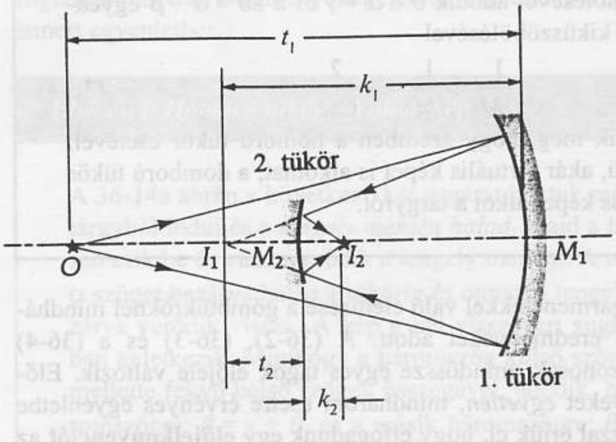
(1) A t számértékének előjele pozitív, ha a *tükörhöz érkező* sugarak széttartanak (divergálnak). Egyébként t negatív.

(2) A k számértékének előjele pozitív, ha a *tükörtől távozó* sugarak összetartóak (*konvergálnak*). Egyébként k negatív.

(3) Az R számértékének előjele pozitív, ha a tükör homorú és negatív, ha domború.

Az előjelkonvenciót érdemes jól megjegyezni, mert a legtöbb probléma megoldásakor szükség van rá a (36-5) és (36-7) leképezési törvényben. Emlékeztetünk arra, hogy a leképezési törvényt mindig a fenti formában kell felírni! *A negatív előjel csak akkor szerepelhet, amikor már behelyettesítjük a*

[6] Néhány más előjelkonvenció is használatos. Az egyik változat szerint t, k és f (lásd a (36-6) képletet) mind pozitív abban a szokásos esetben, amikor a tükör valódi képet hoz létre valódi tárgyról. Ettől a szabvány helyzettől minden eltérés egy mínusz jel felléptét követeli meg. Az eltérések közé soroljuk azt is, ha a t tárgytávolság kisebb, mint a tükör fókusztávolsága. A tükrökön a fény visszaverődik, így a valódi képek a beeső fény oldalán keletkeznek. Az R előjelét a (3) pontban megfogalmazott szabály határozza meg.



36-15 ábra

Összetett, többszörös tükörrendszer, amelynél az előjelkonvenciónak megfelelően a t_2 tárgytávolság negatív ($t_2 < 0$) Ez azért van így, mert a második – M_2 – tükörre eső sugarak összetartóak.

változó számértékét. Ugyanezt a szabályt követjük a fizika valamennyi általános törvényében is!

Tükörrendszerek esetén egyes tükrökre a t tárgytávolság lehet negatív is. Például a (36-15) ábrán az M_1 első tükör – ha egyedül volna jelen – I_1-ben valódi képet hozna létre. Bizonyos értelemben ez a kép az M_2 másik tükör számára tárgyként szerepel, (t_2 tárgytávolsággal). De mivel az M_2 tükröt az előtt érik el a fénysugarak, mielőtt metszenék egymást, az M_2 tükröt érő sugarak *konvergálnak.* Az előjelkonvenció miatt a t_2 számértékét így negatívnak kell tekinteni. Ilyen esetekben a tárgyat látszólagos vagy *virtuális tárgynak* nevezzük.

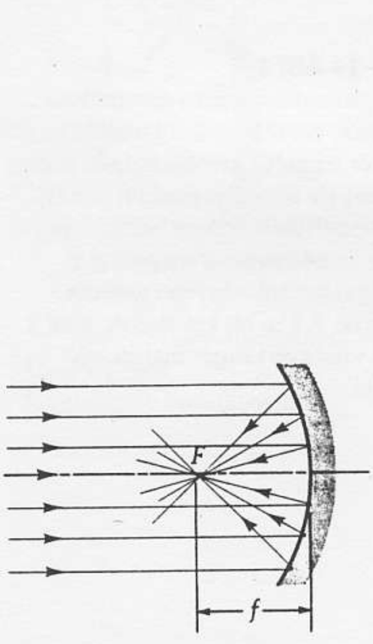
A tükrökkel (és lencsékkel) kapcsolatban gyakran használjuk a **fókusztávolságot** (f) (lásd a (36-16) ábrát). *Homorú* tükörre eső, a tengellyel párhuzamosan érkező sugárnyaláb úgy verődik vissza, hogy a sugarak egy pontban, a tükör előtt f távolságban találkoznak. Ezt a pontot nevezzük **fókuszpontnak.**[7] Ha a párhuzamos sugarak *domború* tükörre esnek, divergens, széttartó módon verődnek vissza, éspedig úgy, mintha a tükör túloldalán a fókusztávolságban lévő pontból erednének. A párhuzamosan érkező sugarak azt jelzik, hogy a tárgy a végtelenben van, vagyis $t = \infty$. Ezt az értéket behelyettesítve a leképezési törvénybe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{k}=\frac{2}{R}$$

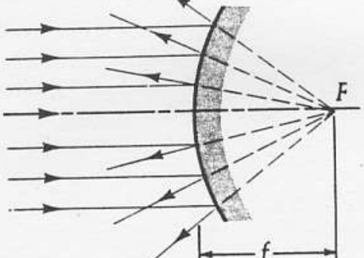
ahol k egyben az f fókusztávolsággal egyenlő. Ezt f-re megoldva

$$f=\frac{R}{2} \qquad (36\text{-}6)$$

adódik. Tekintettel arra, hogy a fókusztávolság számértéke a *homorú* tükrökre *pozitív*, a domború tükrökre pedig *negatív*, a (36-5) egyenlet a következő alakot ölti:



(a) homorú tükör



(b) domború tükör

36-16 ábra

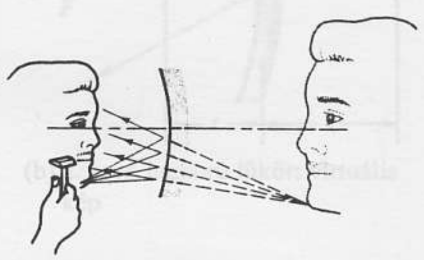
A tengellyel párhuzamosan érkező fénynyalábról alkotott kép esetén, a képtávolságot fókusztávolságnak hívjuk. F a fókuszpont. Homorú tükör esetén f pozitív, domború tükörnél f negatív.

[7] Az, hogy az F pontot fókuszpontnak nevezzük, nem jelenti azt, hogy a kép mindig ebben a pontban keletkezik. Ez csak a tengellyel párhuzamosan érkező sugarak esetén igaz; minden más esetben a kép máshol jön létre. Hasznos, ha F-re, mint olyan pontra gondolunk, amely a tükörhöz „tartozik”, és amely a sugármenet diszkussziójában segít.

LEKÉPEZÉSI TÖRVÉNY (alternatív alak)

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \qquad (36\text{-}7)$$

Ebben a fejezetben könnyű összezavarodni, amikor a tükrök és lencsék különböző elrendezésének számos esetét elemezzük. A fejezet legfontosabb megállapítása azonban egyetlen egyenletben foglalható össze: $1/t + 1/k = 1/f$. Ez szolgál a tükrök és lencsék képalkotásakor a képtávolság meghatározásának kiindulópontjául. *Az előjelkonvenció ismerete azonban lényeges.* Az előjelkonvenció emlékezetbe idézésének egyik egyszerű módja a következő: Egy „megszokott összeállításban", amikor a tárgy egy *gyűjtő (homorú) tükörtől* annak fókusztávolságán kívül helyezkedik el, t, k, f és R mindegyikének számértéke pozitív. Negatív a számértéke a tükör mögé kerülő távolságoknak. A következő két példa kellőképpen meg fogja világítani a leképezési törvény és az előjelkonvenció használatát.



36-17 ábra
A 36-1 példához.

36-1 PÉLDA

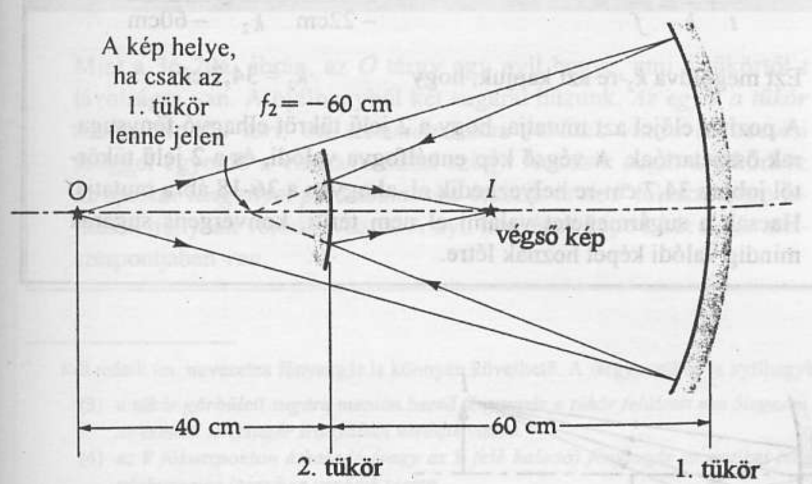
Borotválkozótükröt az ablak mellett tartva létrehozhatjuk a Nap képét az ablak melletti falon, ha a tükör a faltól 50 cm-re van. Borotválkozás közben a borotválkozó személy álla 20 cm-re van (a tükör előtt). Adjuk meg, hogy milyen távol van a tükörtől az álláról alkotott kép.

MEGOLDÁS

A fénysugarak a Napból lényegében párhuzamosan érkeznek, ezért a Nap képe a tükör fókuszpontjában áll elő. Így $f = +50$ cm. (Tudjuk, hogy f pozitív, mert csak a homorú (gyűjtő) tükrök alkotnak valódi képet és az előjelkonvenció szerint ezek fókusztávolsága pozitív.) A borotválkozó ember álláról induló fénysugarak divergálnak, miközben a tükörhöz közelednek, ezért az előjelkonvenció szerint $t = +20$ cm. A tüköregyenletből kiindulva:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{+20\text{ cm}}+\frac{1}{k}=\frac{1}{+50\text{ cm}}$$

Ezt k-ra megoldva adódik, hogy: $k = -33{,}3$ cm.



36-18 ábra
A 36-2 példához.

Az előjelkonvenció szerint a negatív előjel azt jelenti, hogy tükörfelületről széttartó fénysugarak indulnak úgy, mintha a tükör *mögött* lévő virtuális képből erednének. (Itt a *virtuális* szó ismételten azt jelenti, hogy a kép tényleges helyén semmiféle sugár nem megy át). Így a kép a tükör mögött 33,3 cm-re van (lásd a (36-17) ábrát).

36-2 PÉLDA

Tekintsük a 36-18. ábrán bemutatott tükörrendszert. Határozzuk meg a tárgy végső képének a helyét. Valódi vagy virtuális képet kapunk?

MEGOLDÁS

Tükörrendszerek esetén azt az eljárást kell követnünk, hogy meghatározzuk az egyes tükrök által alkotott képek helyét olyan sorrendben, ahogyan a fény az egyes tükrökről visszaverődik. Ebben az esetben az 1. tükörrel kell kezdeni. Írjuk fel a tüköregyenletet:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{+(40\text{cm}+60\text{cm})}+\frac{1}{k_1}=\frac{1}{45\text{cm}}$$

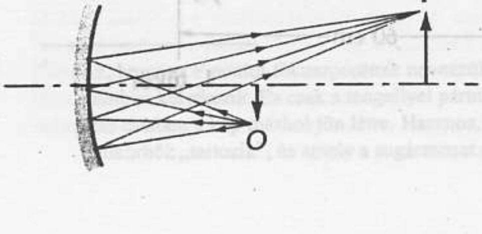
Ha ezt k_1-re megoldjuk, adódik, hogy $\underline{k_1 = +82\text{ cm}}$

Az előjelkonvenció szerint a pozitív előjel azt jelenti, hogy a fénysugarak konvergálnak, amikor az 1 jelű tükröt elhagyják! Ha ez a tükör egyedül lenne jelen, 82 cm-rel az 1 jelű tükör előtt valódi képet hozna létre. Ezek a fénysugarak azonban 22 cm-rel az előtt, hogy ez a kép kialakulhatna, a 2 jelű tükörre esnek. Mindemellett úgy vehetjük, mintha létezne ez a feltételezett kép, a 2 jelű tükör számára tárgyként szerepelne. Mivel a 2 jelű tükörre érkező fénysugarak összetartóak, a t_2 tárgytávolság negatív, ($t_2 = -22$ cm, az előjelkonvenció szerint). A tárgy látszólagos (*virtuális*), mert azon a helyen semmiféle fénysugár nincsen jelen. A megfelelő számértékeket behelyettesítve a tüköregyenletbe, adódik, hogy

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-22\text{cm}}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{-60\text{cm}}$$

Ezt megoldva k_2-re azt kapjuk, hogy $k_2 = 34{,}7\text{ cm}$

A pozitív előjel azt mutatja, hogy a 2 jelű tükröt elhagyó fénysugarak összetartóak. A végső kép ennélfogva valódi, és a 2 jelű tükörtől jobbra 34,7 cm-re helyezkedik el, ahogyan a 36-18 ábra mutatja. Hacsak a sugármenetet valami el nem téríti, konvergens sugarak mindig valódi képet hoznak létre.



36-19 ábra
Minden sugár, amely a nyíl hegyéről indul és a tükörre esik, a fókuszban álló nyílhegy-képben találkozik.

Amikor a feladat olyan, hogy látszólagos tárgyak és többszörös visszaverődés szerepel benne, akkor a pontos sugármenetek megszerkesztése nem könnyű. Tulajdonképpen a látszólagos tárgytól a következő tükörig fény ténylegesen nem halad, ezért ezekben az esetekben csak előzetes sugármenetábra vázolható fel az első kép helyének megállapítása érdekében, s ezután a tüköregyenletet kell használni arra, hogy a második tükör által készített kép helyét meghatározzuk. (Pontos, méretarányos ábrák megrajzolásával a kép mindig megszerkeszthető!; *A fordító megjegyzése.*)

36.6 A sugárdiagram és a nagyítás

A borotválkozótükör szerepe az, hogy egyenes állású, nagyított képet hozzon létre. Ebben a fejezetben a sugármenetek megszerkesztésével azt mutatjuk meg, hogy hogyan képeződik le egy, az *optikai tengelyen kívül* fekvő pont. Ábráinkon az ilyen pontokat nyíllal ábrázoljuk; a nyíl hegye az *O*-val jelölt pontba mutat (lásd a 36-19 ábrát). Egy tárgy *bármely pontjából* kiinduló összes fénysugár (legalábbis azok, amelyek a tükörre jutnak) a tükörről visszaverődve a *kép megfelelő pontjában* gyűlik össze. Általában a nyíl hegyéből kiinduló sugarak menetét szerkesztjük meg (persze, a nyíl többi pontjai is hasonlóan képeződnek le). Már két, egymást *I*-ben (képpontban) metsző fénysugár elegendő *I* helyének meghatározásához. Noha más választással is élhetnénk, a továbbiakban két jellegzetes, minden esetben előforduló és egyszerű menetű (ún. nevezetes) fénysugarat választunk a szerkesztéshez:

A KÉPSZERKESZTÉS SORÁN HASZNÁLT NEVEZETES FÉNYSUGARAK:

(1) Az a sugár, amelyik a tükröt a középpontjában éri, szimmetrikusan verődik vissza. (A beesési szöggel egyenlő a visszaverődési szög.)

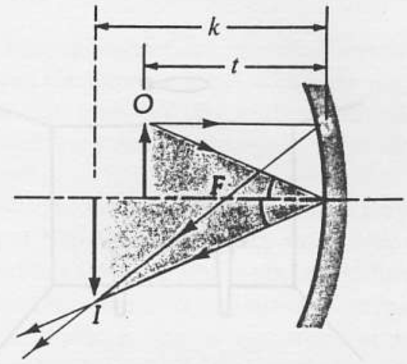
(2) Az optikai tengellyel párhuzamos sugár az *F* fókuszponton át verődik vissza.

A két visszavert sugár[*] metszéspontja megadja a nyílhegy képének helyét, a nyíl többi részét a tükör hasonlóan képezi le.

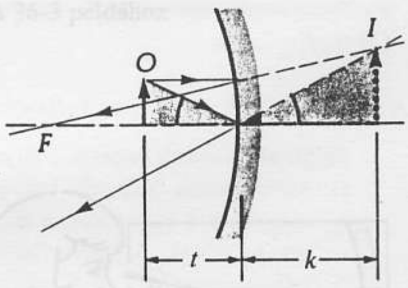
Mint az előző pontban, a három lehetséges esetet most is külön fogjuk tárgyalni. Emlékezzünk arra, hogy a homorú tükrök fókusztávolsága és görbületi sugara is pozitív és mindkét pont a tükör előtt helyezkedik el. Ezzel szemben a *domború* tükrök fókusztávolsága és görbületi sugara is negatív és mindkettő a tükör mögött helyezkedik el. Minden gömbtükörre $f = R/2$.

Első eset: Homorú tükör – Valódi kép

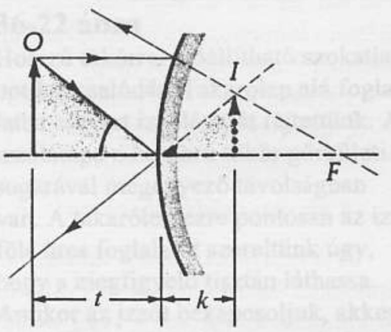
Mint a 36-20a. ábrán, az *O* tárgy egy nyíl hegye, ami a tükörtől *t* távolságra van. A nyílhegyből két sugarat húzunk. *Az egyik a tükör középpontjába tart, ott szimmetrikusan verődik vissza* (a beesési szöggel egyenlő a visszaverődési szög). A másik sugár a tükörhöz az *optikai tengellyel párhuzamosan* érkezik és az *F* fókuszponton áthaladó irányban verődik vissza. A nyíl hegyének képe e két sugár metszéspontjában van.



(a) 1. eset; homorú tükör: valódi kép



(b) 2. eset; homorú tükör: virtuális kép



(c) 3. eset; domború tükör: virtuális kép

36-20 ábra

Gömbtükrök nagyítása. A tükrök mögött meghosszabbított sugarakat szaggatott vonalak jelölik. A virtuális képeket pontozott vonalakkal ábrázoltuk.

[*] Két másik ún. nevezetes fénysugár is könnyen követhető. A tárgypontból (a nyílhegyből)

(3) *a tükör görbületi sugara mentén beeső fénysugár a tükör felületét merőlegesen éri és az eredeti fénysugár irányában verődik vissza.*

(4) *az F fókuszponton áthaladó (vagy az F felé haladó) fénysugár az optikai tengellyel párhuzamos irányban verődik vissza.*

Kettőnél több sugármenet felvázolása is hasznos lehet, mert ezzel ellenőrizhetjük a szerkesztést. Szerencsétlen esetekben ezeket a sugarakat nehézkes megrajzolni.

Az optikai rendszerek által alkotott kép nagysága lényeges jellemző. A kép ugyanis nagyobb vagy kisebb is lehet a tárgynál. A nevezetes sugarakat felhasználva a tengely, a kép és a tárgy által alkotott háromszögek lehetővé teszik a tengelyre merőleges N **tranzverzális nagyítás** mértékének egyszerű kifejezését.

$$N \equiv \frac{képnagyság}{tárgynagyság}. \tag{36-8}$$

Figyeljük meg, hogy a 36-20a ábra vonalkázott háromszögei hasonló derékszögű háromszögek, amelyeknél a megfelelő oldalak aránya megegyezik. Tehát

NAGYÍTÁS $$N = -\frac{k}{t} \tag{36-9}$$

A negatív előjelet azért vezettük be, hogy az N *negatív* értéke *fordított állású* képre utaljon. Ugyanez az előjelkonvenció érvényes mind tükrök, mind lencsék esetére.

A sugármenetek megszerkesztésével igazolni tudjuk, hogy ha homorú tükör *valódi* képet hoz létre, akkor az mindig fordított állású és *nagyobb*, mint az eredeti tárgy. A különböző esetekre vonatkozó részleteket nem szükséges memorizálni, mert ezek az információk benne foglaltatnak az előjelkonvencióban, és a nagyítás definíciójában. A képszerkesztés alapján minden egyes esetben megállapíthatók ezek a jellegzetességek.

2. eset: Homorú tükör – Virtuális kép

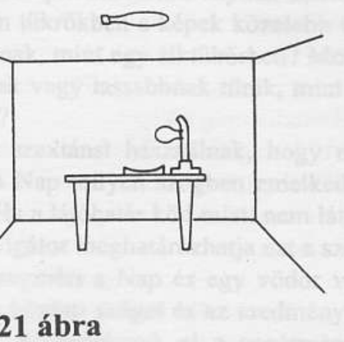
Ha a tárgyat a fókusztávolságnál közelebbre tesszük a homorú tükörhöz, a kép virtuális lesz, ahogyan az a 36-20b. ábrán látszik. Mint az első esetben, most is két nevezetes sugarat használunk a szerkesztéshez. Az egyik a tárgyat jelentő nyílhegyet a tengellyel *párhuzamos* irányban hagyja el, és az F fókuszponton áthaladó irányban verődik vissza. A másik sugár a *tükör középpontjában szimmetrikusan verődik vissza*. Az előző esettel szemben most a visszavert fénysugarak úgy divergálnak, mintha a tükör mögött lévő pontból indultak volna ki. Ez a pont a nyílhegy képe. Helyének meghatározásához meghosszabbítjuk a visszavert sugarakat egészen metszéspontjukig. Ez a metszéspont lesz a képpont. Mivel azonban a meghosszabbított sugarak mentén tényleges fénysugár nem halad, ezeket a vonalakat szaggatottan húztuk. Minthogy a képet nem tényleges fénysugarak alkotják, a kép *virtuális*. A képet pontozott vonallal rajzoltuk meg.

A vonalkázott háromszögek megint hasonlóak, úgyhogy (mint az előbb), az N nagyítás $N = k/t$. Miként az ábra mutatja, ha homorú tükör látszólagos képet hoz létre, akkor az mindig nagyobb, mint a tárgy. A borotválkozótükör homorú és ha az arcunktól megfelelő távolságra helyezzük el, akkor egyenes állású látszólagos képet hoz létre a tükör mögött.

Az imént diszkutált két eset fontos vonásokban különbözik. Az 1. esetben a tárgy a tükör fókusztávolságánál *messzebb* van és fordított állású valódi kép jön létre. A 2. esetben a tárgy *közelebb* van a fókusztávolságnál és egyenesállású virtuális kép jön létre.

3. eset: Domború tükör – Virtuális kép

A 36-20c ábrán a nyílhegy végpontjáról érkező sugár a tükör középpontjából szimmetrikusan verődik vissza. A másik nevezetes sugár a tükörhöz a tengellyel párhuzamos irányban közeledik és úgy verődik vissza, mintha a fókuszpontból jönne. (Emlékezzünk arra, hogy domború tükör esetén a görbületi középpont és a fókuszpont is a tükör mögött van.) A nagyítás: $N = k/t$. A domború tükrök mindig virtuális képet alkotnak (valódi tárgyról) és ezek a képek mindig kisebbek a tárgynál. A fényes gömbökön látszó képek mind ebbe a típusba tartoznak.

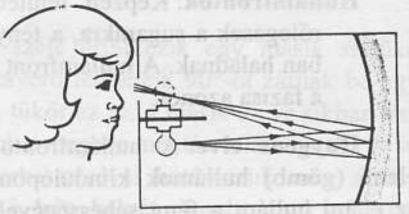


36-21 ábra
A 36-3 példához

A képek leírásához az alábbiakat kell megadni:

A KÉPEK JELLEMZŐI	**valódi vagy virtuális** **egyenes vagy fordított állású,** **a nagyítás.**

Nem érdemes memorizálni a képalkotás összes típusát, amik szóró és gyűjtőtükrök (és lencsék) előtt különböző távolságokban álló tárgyak esetében felmerülnek. Ehelyett inkább abban érdemes jártasságot szerezni, hogy gyorsan felvázoljuk a nevezetes sugarakat, amik felfedik a kép jellegét. Ez a megközelítés sokkal egyszerűbb és lehetővé teszi olyan helyzetek elemzését is, amelyekkel esetleg még nem találkoztunk. *A numerikus számításokhoz az előjelkonvenció ismerete lényegbevágó.*



36-22 ábra
Hosszú tükörrel előállítható szokatlan optikai csalódás. Takarólap alá foglalatba csavart izzólámpát rejtettünk. Az izzólámpa a homorú tükör görbületi sugarával megegyező távolságban van. A takarólemezre pontosan az izzó fölé üres foglalatot szereltünk úgy, hogy a megfigyelő tisztán láthassa. Amikor az izzót bekapcsoljuk, akkor a világító izzó valódi képe megjelenik az üres foglalatban. Ha a tükör jó minőségű, akkor a látvány – és az illúzió – meglepő.

36-3 PÉLDA

Asztallapon 0,50 m-re az íróasztali izzólámpa alatt homorú tükör fekszik, ahogyan a 36-21 ábrán látszik. A mennyezeten megjelenik az izzó fordított állású, éles képe, amely az izzó méretének ötszöröse. (a) Milyen magasan van a mennyezet? (b) Mekkora a tükör fókusztávolsága?

MEGOLDÁS

(a) A feladatban leírt helyzet eléggé valószínűtlen (hacsak nem véletlenül fordul elő). Általában a mennyezeten nem jön létre tiszta, éles kép, mert a képtávolság és tárgytávolság között, a leképezési törvény által meghatározott összefüggésnek kell fennállnia:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}$$

Minthogy ebben a példában csak a t tárgytávolság van megadva, még két ismeretlennel van dolgunk: a k-val és az f-fel. Szükség van egy további összefüggésre a t és a k között. Ha ismert az N nagyítás, akkor a (36-9) egyenlet megfelel erre a célra: $N = -k/t$. A számértékeket felhasználva $N = -5$, (ez *negatív*), mert a kép fordított állású) és $t = 0{,}5\text{m}$ (ez *pozitív*, mert az izzóból érkező fénysugarak divergálnak, mielőtt a tükörhöz érnének), kifejezzük a k távolságot az asztal lapja és a mennyezet között:

$$k = -Nt = -(-5)(0{,}5\text{ m}) = 2{,}50\text{ m}$$

A k képtávolság pozitív, s ez természetes is, hiszen tudjuk, hogy a tükröt elhagyó sugarak konvergálnak, mert *valódi* képet kell létrehozniuk a mennyezeten.

(b) Most, hogy a három ismeretlen közül kettőnek az értékét már tudjuk, alkalmazzuk a leképezési törvényt.

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{+0{,}5\ \mathrm{m}}+\frac{1}{+2{,}5\ \mathrm{m}}=\frac{1}{f}$$

Ennek megoldása a fókusztávolságra: $f = 0{,}417$ m

Összefoglalás

A *fény terjedését sugarak* és *hullámfrontok* jellemzik.

Sugarak: Képzelt vonalak a terjedés iránya mentén.

Hullámfrontok: Képzelt felületek, amelyek merőlegesek a sugarakra, a fény terjedése irányában haladnak. A hullámfront minden pontjának a fázisa azonos.

Huygens elve: A hullámfrontok minden pontja elemi (gömb) hullámok kiindulópontjának tekinthető, az elemi hullám a fény sebességével terjed tova. Egy későbbi t időpontban a hullámfront új helyzetét az elemi hullámok burkolója adja meg.

Fermat elve: Két pont között a fény olyan úton terjed, amelynek megtételéhez ugyanannyi vagy kevesebb idő szükséges, mint bármely más út esetén.

A visszaverődés törvénye: $\theta_i = \theta_r$

A képszerkesztéshez többnyire az alábbi két sugármenetet használjuk: A tárgyat jelképező nyíl hegyéből kiinduló alábbi két – vagy néhány további – sugár metszéspontja tűzi ki a nyílhegy képét (lásd a 8. lábjegyzetet).

(1) A tükör középpontjába befutó sugár, amely szimmetrikusan verődik vissza.

(2) Az optikai tengellyel párhuzamosan haladó sugár, amely az *F* fókuszponton áthaladva verődik vissza.

A *képek valódiak, virtuálisak, egyenes* vagy *fordított állásúak* lehetnek:

leképezési törvény	**nagyítás**
$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}$	$N=-\frac{k}{t}$

ahol *t* a tárgytávolság, *k* a képtávolság, *f* a fókusztávolság (= *R*/2). Ezek az egyenletek az **előjelkonvencióval** együtt használhatók:

(1) *t* értéke *pozitív*, ha a tükörre eső sugarak széttartóak (*divergálnak*);

(2) *k* értéke *pozitív*, ha a tükröt elhagyó sugarak összetartóak (*konvergálnak*),

(3) az $f = R/2$ fókusztávolság előjelét a tükör *R* görbületi sugarának az előjele határozza meg. Ez *pozitív*, ha a tükör felülete *homorú*, és *negatív*, ha a felület *domború*.

Az előjelkonvenciót úgy jegyezhetjük meg, hogy ha homorú tükör előtt a fókusztávolságnál nagyobb van a tárgy, akkor a leképezési törvényben szereplő összes mennyiség számértéke pozitív; negatív előjele a tükör túloldalára kerülő távolságoknak van.

Kérdések

1.) A síktükör olyan képet alkot, amelyen a jobb és bal oldal felcserélődik. Miért nem cserélődik fel a síktükör alkotta képen a „fent" és a „lent"?

2.) Valódi vagy virtuális képet fognak alkotni a síktükör által visszavert konvergáló sugarak?

3.) Kirakatüvegre festett jelet a boltból nézve fordítottnak látunk. Amikor a fordított jelet tükörből nézzük, a jel képe fordítottnak látszik?

4.) Állítsunk össze síktükörrendszert úgy, hogy olyan képet alkosson, amelynél a jobb és a bal oldal nincsen felcserélve (úgy, mint egyetlen síktükör esetén).

5.) Egy szoba sarkában a mennyezet és két fal síktükör. Ha a sarokba nézünk, hány képet látunk?

6.) Milyen feltételek esetén alkot a domború tükör valódi képet? (Ez megvalósítható, ha egy második tükröt is alkalmazunk.)

7.) Vázoljuk fel azt a tükörrendszert, amellyel tarkónkat láthatjuk. Megvalósítható-e ez csupán két tükör használatával úgy, hogy tekintetünk közvetlenül a fejtől kiinduló egyenesen legyen? (A képnek egyenesállásúnak kell lennie!) Ezen a képen a jobb és a bal oldal fel van-e cserélve? Mi a minimálisan szükséges tükrök száma, ha vízszintesen előre akarunk nézni? Adjuk meg a sugármenetet is. Ezen a képen a jobb és a bal oldal felcserélődik-e?

8.) Írjuk le, milyen feltételek között ad egy gömbtükör a) valódi, b) virtuális, c) egyenes állású, d) fordított, e) nagyított és f) kicsinyített képet. Mind a homorú, mind a domború tükörrel foglalkozzunk!

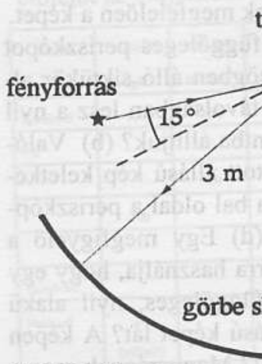
9.) Igen távoli tárgyat közelítünk (a tengely mentén) a homorú tükörhöz egészen addig, hogy érintse a tükröt. Írjuk le, hogy hogyan változnak a kép jellegzetességei és a helye e folyamat során. Ismételjük meg az eljárást domború tükörrel is!

Feladatok

36-4 – Fényvisszaverődés síktükrön

36A-1 Fénynyaláb esik síktükörre és visszaverődik. Mutassuk meg, hogy ha a tükröt α szöggel a tükör síkjában lévő tengely körül elforgatjuk, akkor a visszavert sugár 2α szöggel fordul el.

36A-2 Ahogyan a 36-23 ábrán látható, egy fénysugár 15° beesési szöggel esik síktükörre és a 3 m távolságban lévő skálára verődik vissza. Milyen messzire mozdul el a fényfolt, ha a tükröt 2°-kal elforgatjuk? A skála görbült, úgy, hogy a visszavert sugár mindig merőlegesen érje.



36-23 ábra
A 36A-2 feladathoz

36B-3 Lézersugár két, egymáshoz képest derékszögben álló tükrön verődik vissza, ahogyan a 36-12a ábra mutatja. A sugarak és a tükörlapok normálisai mind ugyanabban a síkban fekszenek. Bizonyítsuk be, hogy ha a beesési szög olyan, hogy a fénysugár mindkét tükrön visszaverődik, akkor a kilépő fénysugár mindig párhuzamos és ellentétes irányú a belépővel.

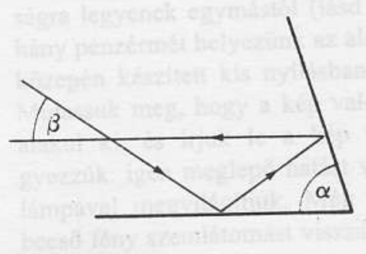
36B-4 Egy hölgy, akinek szemei a padlótól 1,59 m-re vannak, tükör előtt áll. (a) Ha a kalapjának teteje 14 cm-rel magasabban van mint a szeme, határozzuk meg, legalább mekkora legyen a falitükör függőleges mérete, hogy (a kalapot is beleértve) magát tetőtől talpig láthassa. Milyen magasan legyen a padlótól a tükör alsó széle?

10.) Egyes autók visszapillantó tükre enyhén domború. Miért? Az ilyen tükrökben a képek közelebb vagy távolabb látszanak, mint egy síktükörben? Mozgásuk gyorsabbnak vagy lassabbnak tűnik, mint síktükörből nézve?

11.) A navigátorok szextánst használnak, hogy megmérjék, hogy a Nap milyen szögben emelkedik a látóhatár fölé. Ha a látóhatár köd miatt nem látható pontosan, a navigátor meghatározhatja ezt a szöget úgy is, hogy megméri a Nap és egy vödör vízen visszavert képe közötti szöget és az eredményt elosztja kettővel. Magyarázzuk el a sugármenetek megszerkesztésével, hogy hogyan működik ez az eljárás?

36B-5 Síktükör széle érintkezik egy másik síktükör szélével, és visszaverő felületeik 90°-ot zárnak be egymással. Az egyik tükör az xz, a másik az yz síkban van, tehát a széleik a $\pm$ z-tengely mentén találkoznak. A sugármenet megszerkesztésével határozzuk meg arról a tárgyról készült 3 kép helyét, amely az $x = 30$ cm, $y = 40$ cm koordinátájú pontban van.

36B-6 Fénysugár két tükrön szenved visszaverődést, ahogyan a 36-24 ábra mutatja. Mindkét fénysugár és a két tükör normálisa is ugyanabban a síkban fekszik. Adjuk meg a β szöget az α függvényeként! Igazoljuk, hogy ha $\alpha = 90°$, akkor $\beta = 0$.



36-24 ábra
A 36B-6 feladathoz

36.5 Fényvisszaverődés gömbtükrön
36.6 Képszerkesztés és nagyítás

36A-7 Egy 6 cm átmérőjű üveggömbnek a felülete tükröző. A gömb nyugalomban van az asztalon. Egy légy mászik az asztalon a gömb felé.(a) Adjuk meg a légy képének a távolságát a gömb felületétől, amikor a légy 4 cm-re van a gömb felületétől. Szerkesszük meg a képet! (b) Írjuk le a kép jellegzetességeit.

36A-8 Egy 2,7 cm magas tárgy domború gömbtükörtől 15 cm távolságra van letéve. A tükör görbületi sugara 29 cm. Hol és milyen kép keletkezik? Szerkesszük meg a képet.

36A-9 Homorú tükör görbületi sugara 30 cm. (a) Hová tegyük a tükör elé a tárgyat, hogy képe a tükör mögött 15 cm-re keletkezzék? (b) Ha a tükör domború, görbületi sugara ugyanakkora, akkor hová tegyük a tárgyat? Szerkesszük meg a képet.

36B-10 Vizsgáljunk domború gömbtükörre az optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénnyalábot. A leképezési törvény szerint a tengelyhez közel haladó sugarak az F fókuszpontban, a tükörtől $R/2$ távolságban futnak össze. Mi történik a tengelytől távolabb futó sugarakkal? Az F pontnál közelebb vagy távolabb fognak találkozni? Illusztráljuk a választ egy, a visszaverődés törvénye szerint pontosan megszerkesztett fénysugárral.

36B-11 Gömbtükör elé 30 cm távolságra helyezett tárgyról a tükörtől 40 cm-re valódi kép keletkezik. Határozzuk meg, hogy hová kell a tárgyat elhelyezni ahhoz, hogy a kép a tükör mögött 20 cm-re legyen. Szerkesszük meg a képet.

36B-12 A 8. lábjegyzetben azt állítottuk, hogy a (3) és (4) sugarakat egyes esetekben nehézkes megrajzolni. Szerkesszük meg e két sugár menetét. (Útmutatás: vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor a tárgy az F ponthoz vagy az R görbületi középponthoz közel helyezkedik el.)

36B-13 Homorú tükörtől 5 cm-re elhelyezett tárgyról a tükör valódi és négyszeresre nagyított képet alkot. Adjuk meg a tükör görbületi sugarát. Szerkesszük meg a képet.

Vegyes feladatok.

36-25 ábra
A 36C-14 feladathoz

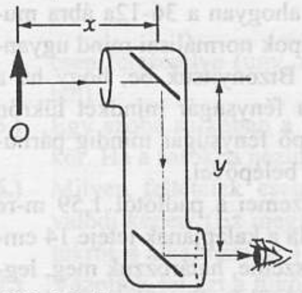
36C-14 A 36-25 ábra háromszög alaprajzú zárt teret mutat, melynek belső falai tükrök. Egy fénysugár lép be a rövidebb oldal közepén készített kis lyukon. Készítsünk az alábbi esetek mindegyikére külön-külön vázlatot, mely a fénysugár útját követi és határozzuk meg a θ szög értékét, amely megfelel a feladat kívánalmainak. (a) A fénysugár mindkét oldalfalon egyszer visszaverődik és a lyukon keresztül elhagyja a térrészt. (b) A fénysugár csak egyszer verődik vissza és elhagyja a térrészt. (c) Van-e olyan sugármenet, melyen három visszaverődés után lép ki a fény? Ha igen, rajzoljuk fel a sugármenetet és adjuk meg a θ szöget! (d) A sugár négyszer verődik vissza és azután lép ki.

36C-15 Megfigyelő pontszerű fényforrást szemlél, melynek fénye egy tükörben visszaverődik, ahogyan a 36-7 ábra mutatja. Fermat elvének alkalmazásával mutassuk meg, hogy a θ_i beesési szög és a θ_r visszaverődési szög egyenlő. Használjuk fel, hogy a beeső sugár és a visszavert sugár ugyanabban a síkban fekszenek, de azt ne, hogy a forrás és a megfigyelő a tükör fölött ugyanolyan távolságra van. (Útmutatás: Válasszuk független változónak azt a távolságot, ami a tükrön a forrás alatti pont és a visszaverődési pont között van, ettől mind θ_i, mind θ_r függ.)

36C-16 Két síktükör tükröző felületei egymással szemben állnak, az egyik tükör széle a másik szélével érintkezik úgy, hogy a két sík közti szög α. Ha tárgyat helyezünk a két tükör közé, a képek egész sora jön létre. Általában, ha a két sík közti α szög olyan, hogy $n\alpha = 360°$, ahol n egész, a létrejött képek száma n–1. Szerkesszük meg az összes kép helyét $n = 6$ esetére, ha a tárgy a két tükör között, de nem a szögfelezőn van.

36C-17 Homorú tükör által alkotott valódi kép nagysága megkétszereződik, ha a tárgytávolság 80 cm-ről 50 cm-re csökken. Határozzuk meg a tükör görbületi sugarát. Szerkesszük meg a két esetnek megfelelően a képet.

36C-18 A 36-26 ábra egyszerű függőleges periszkópot mutat be, amelyet két 45°-os szögben álló síktükör alkot. (a) Az alsó tükörtől milyen távolságban lesz a nyíl (tárgy) képe, ha a nyilat az O pontba állítjuk? (b) Valódi, virtuális, egyenes vagy fordított állású kép keletkezik? (c) Felcserélődik a jobb és a bal oldal a periszkópba néző megfigyelő számára? (d) Egy megfigyelő a periszkópot vízszintesen tartva arra használja, hogy egy házsarok mögül kinézzen. Ha függőleges, nyíl alakú tárgyat figyel, vajon egyenes állású képet lát? A képen felcserélődik a jobb és a bal oldal? Magyarázzuk meg a válaszokat! (e) Mit lát az a megfigyelő, aki a függőleges iránnyal 45°-os szögben tartott periszkópon át néz?



36-26 ábra
A 36C-18 feladathoz

36C-19 Háromdimenziós saroktükör a beérkező fénysugarat a beesési iránnyal párhuzamosan a fényforrás felé veri vissza, ha a fénysugár mindhárom tükrön visszaverődik. Bizonyítsuk be ezt az állítást! (Útmutatás: tekintsük úgy, hogy a beeső sugár a $\mathbf{t}=t_x\hat{\mathbf{x}}+t_y\hat{\mathbf{y}}+t_z\hat{\mathbf{z}}$ vektor által megadott irányban halad. Milyen változás következik be t alakjában, amikor a sugár az xy síkban lévő tükrön visszaverődik?)

36C-20 Kempingtúrán két barát tükör segítségével vált üzenetet egymással. Mindegyik tükör mindkét oldalán tükröződővé tett síklap, középen kis lyukkal. Az egyik tükrét az arca elé tartva úgy céloz, hogy a lyukon áthaladó napfény foltja éppen arcára essen, és ezt saját tükrében lássa. Ezután a lyukon keresztül a célpontot (társa arcát) nézve úgy dönti a tükröt, hogy az arcán lévő foltnak a képe közel legyen vagy egybeessék a lyukkal. Magyarázzuk el a művelet elméletét. (Ez az egyszerű eszköz hatásos módszert tesz lehetővé eltévedt turisták és tengeri balesetek túlélői számára, mert ezzel adhatnak jelet a kereső repülőgépnek.)

36C-21 Egy 25 cm fókusztávolságú homorú tükör a tárgytól 200 cm-re alkot képet. Határozzuk meg azt a *két* tárgytávolságot, amely eleget tesz ilyen tárgy-kép viszonynak. Milyenek ezek a képek?

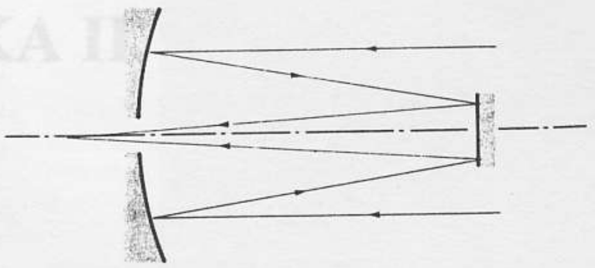
36C-22 Egészítsük ki az alábbi táblázatot *tükrök* esetére. Mindegyik esetben tegyük fel, hogy a tükör átmérője kicsi a felületének görbületi sugarához képest. Minden számérték cm-ben van kifejezve. Adjuk meg az összes előjelet az előjelkonvenciónak megfelelően.

A tükör típusa	Görbületi sugár	Fókusz távolság	Tárgy távolság	Kép			Nagyítás
				Távolsága	Valódi?	Fordított?	
Domború	-120	-60	+30	-20	Nem	Nem	+2/3
Sík			+30				
		+10		-20			
	-100		+5				
				+100			-2
Domború				-20			1/4 (előjel?)
Homorú	20 (előjel?)			+100			

36C-23 A 36C-22 feladat minden kérdéséhez készítsünk ábrát.

36C-24 Az alábbi három esethez szerkesszük meg a sugármeneteket. (a) Homorú tükör, amint valódi képet alkot, (b) homorú tükör, amint virtuális képet alkot, (c) domború tükör, amint virtuális képet alkot. Mindegyik esetben szerkesszük meg a nyíl alakú tárgy hegyéből kiinduló négy sugarat, amit a 36.6 pontban – és a 8. lábjegyzetben – említettünk.

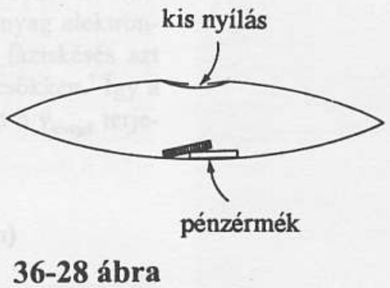
36C-25 Szemüveg nélkül egy ember könnyen fókuszálja szemét 70 cm-nél nem közelebbi tárgyakra. (a) Egy +75 cm fókusztávolságú borotválkozótükör használata esetén ez az ember 80 cm-rel a szeme előtt látja megerőltetés nélkül az arcát. Határozzuk meg, hogy milyen távol kell lennie az arcának a tükörtől? (b) Adjuk meg a nagyítást.



36-27 ábra
A 36C-26 feladathoz

36C-26 A távcsövek egyik fajtája a *Cassegrain-féle tükrös távcső*, amit a 36-27 ábrán mutatunk be. A nagy homorú tükörre távoli tárgyról beeső fény visszaverődik a kis tükrön. A fénysugarak ezután áthaladnak a nagy tükör felületén lévő lyukon, és a nagy tükör mögött alkotnak képet. Az elrendezés nagy előnye, hogy a kép fénykép készítésére, vagy más optikai képelemző eljárás számára könnyen elérhető helyen alakul ki. A nagy tükör görbületi sugara 14 m, a két tükör 5 m távolságra van egymástól. (a) Vajon a kis tükörnek homorúnak vagy domborúnak kell lennie ahhoz, hogy a nagy tükör mögött 1 m-re alakuljon ki a kép? (b) Adjuk meg a kis tükör görbületi sugarát.

36C-27 A „lebegő pénzérme" illúziója kelthető a 36-28 ábra szerint elrendezett két parabolatükörrel. A tükrök 7,5 cm fókusztávolságúak és egymással szemben vannak elhelyezve úgy, hogy középpontjuk 7,5 cm távolságra legyenek egymástól (lásd a 36-28 ábrát). Ha néhány pénzérmét helyezünk az alsó tükörre, a felső tükör közepén készített kis nyílásban előáll az érmék képe. Mutassuk meg, hogy a kép valóban ebben a nyílásban alakul ki, és írjuk le a kép tulajdonságait! (Megjegyezzük: igen meglepő hatást vált ki, ha a képet zseblámpával megvilágítjuk. Még súrlódó beeséskor is a beeső fény szemlátomást visszaverődik az érmék *képeiről*! Érthető, hogy miért?)



36-28 ábra
A 36C-27 feladathoz

36C-28 Homorú tükör előtt 50 cm-re tárgyat helyezünk el, amiről valódi kép alakul ki. Ha a tárgy 5 cm-rel a tükör felé mozdul, a kép 10 cm-t tesz meg. Adjuk meg a tükör fókusztávolságát.

34C-43 A válasz adott.

34C-45 A válasz adott.

34C-47 2000 A/s

34C-49 A válasz adott.

34C-51 A válasz adott.

34C-53 $i = 40{,}8 \sin(\omega t + 25{,}6°)$

34C-55 239 mH

34C-57 a) 100 μF b) 632 rad/s c) 125 W
d) 39,5 V f) 150 μF g)párhuzamosan

34C-59 A válasz adott.

XXXV. Fejezet

35A-1 30,0 cm

35B-3 A válasz adott.

35B-7 ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$;
ha $r > R$: $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$

35A-9 A válasz adott.

35B-11 377 Ω

35A-13 a) $1{,}67 \times 10^{13}$ T b) $3{,}32 \times 10^{12}$ W/m^2

35B-15 a) $(2\times10^{-8})\sin(kx - 10^{16}t)\hat{z}$
b) $1{,}88 \times 10^{-7}$ m c) $1{,}59 \times 10^{-10}$ J/m^3

35B-17 a) 1,20 m b) $u = 2{,}36 \times 10^5$ J/m^3
c) $E_o = 2{,}31 \times 10^8$ V/m

35B-19 A válasz adott.

35A-21 $8{,}97 \times 10^{-3}$ N

35A-23 $5{,}60 \times 10^{-6}$ N/m^2

35B-25 a) 1900 V/m b) $5{,}00 \times 10^{-11}$ J
c) $1{,}67 \times 10^{-19}$ kg·m/s

35C-27 a) $1{,}88 \times 10^{-10} \cos 377t$
b) $1{,}00 \times 10^{-4} \cos[(3{,}77 \times 10^{-8})t]$

35C-29 A válasz adott.

35C-31 A válasz adott.

35C-33 21,9 V/m

35C-35 a) 292 nm

35C-37 A válasz adott.

35C-39 A válasz adott.

35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

XXXVI. Fejezet

36A-1 A válasz adott.

36B-3 A válasz adott.

36B-5 (30, –40), (–30, 40), (–30, –40), (cm-ben)

36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép egyenesállású, virtuális,$N = 0{,}273$

36A-9 a) 7,50 cm b) ∞

36B-11 9,23 cm

36B-13 8,00 cm

36C-15 A válasz adott.

36C-17 40,0 cm

36C-19 A válasz adott.

36C-21 ha $t = 228$ cm, a kép fordított állású, valódi és $N = -0{,}123$
ha $t = 21{,}9$ cm, a kép egyenes állású, virtuális és N = 8,12

36C-23 A válasz adott.

36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67

36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

XXXVII. Fejezet

37A-1 $n = 1{,}52$

37B-3 A válasz adott.

37B-5 0,624 cm

37B-7 a) 20,6° b) 0,400 szteradián c) 35,4°

37B-9 1,51

37B-11 2,14 szteradián

37B-13 17,0%

37A-15 R

37B-17 2,00

37A-19 3,57 mm kifelé

37A-21 26,7 cm

37B-23 $2f$

37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125

37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) –51,7 cm
d) –17,24 cm

37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm

37A-31 a) 24,0 b) 48,1°

37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm

37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig

37C-37 A válasz adott.

37C-39 A válasz adott.

37C-41 A válasz adott.

37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c) 2,63 μs

37C-45 a gömbfelülettől számítva: a) $2{,}67R$ b) $1{,}80R$
c) $0{,}960R$

37C-47 A válasz adott.

37C-49 $(L^2 - 4fL)^{1/2}$

37C-51 A válasz adott.

37C-53 A válasz adott.

37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított állású kép $N = -2$ b) a lencse tárgyoldalán

37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a gyűjtőlencsén túl, $N = -0{,}42$

37C-59 A válasz adott.

XXXVIII. Fejezet

38A-1 5,00 mm

38A-3 1,33 mm

38B-5 A válasz adott.

38B-7 a) 1034,4827 b) 62,1°

38B-9 6

38B-11 sötét

38B-13 a) $2{,}73E_o$, 30° b) $2E_o$, 60°
c) 0, definiálatlan

38A-15 a) 105 nm b) 1,30

38A-17 199 nm