

1. feladat (13+4+3=20 pont)

$$y' = \frac{y^2 - 9}{x^2 + 4}$$

- a) Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- b) Oldja meg az $y(2) = -3$, illetve $y(2) = 2$ kezdetiérték problémákat!
- c) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = x$ egyenessel? Rajzoljon be a koordinátarendszerbe egy vonalelemet, amely párhuzamos az adott egyenessel!
-

a) $y \equiv \pm 3$ megoldás. Ha $y \neq \pm 3$:

$$\frac{1}{6} \int \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y+3} dy = \int \frac{1}{y^2-9} dy = \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx$$

$$\text{Innen a megoldás: } \frac{1}{6} (\ln |y-3| - \ln |y+3|) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

b) A partikuláris megoldások: $y(2) = -3$: $y \equiv -3$

$$y(2) = 2 : \frac{\ln 1 - \ln 5}{6} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{2} + C \implies C = -\frac{\ln 5}{6} - \frac{\pi}{8},$$

$$\text{tehát a megoldás: } \frac{\ln(3-y) - \ln(y+3)}{6} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{\ln 5}{6} - \frac{\pi}{8}$$

c) Az 1-hez tartozó izoklina egyenletét keressük. Ennek egyenlete $(y^2 - 9)/(x^2 + 4) = 1$. Ezután meg kell adni egy 1 meredekségű vonalelemet egy olyan ponthoz, amely az izoklinára esik.

2. feladat (18 pont)

Vezesse be az $u = y^2$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az általános megoldást:

$$2yy' + \frac{4}{x}y^2 = 5x^2$$

$u' = 2yy'$. Behelyettesítve: $u' + \frac{4}{x}u = 5x^2$ lineáris elsőrendű DE.

A homogén egyenlet megoldása $u \equiv 0$, és $\ln |u| = -4 \ln |x|$, összesítve $u_h = \frac{c}{x^4}$.

Az inhomogén egyenlet megoldása $u_{iá} = \frac{c(x)}{x^4}$, ahol $5x^2 = \frac{c'(x)}{x^4}$, így $c(x) = \frac{5}{7}x^7$, tehát $u_{iá} = \frac{C}{x^4} + \frac{5}{7}x^3$

Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása: $y^2 = \frac{C}{x^4} + \frac{5}{7}x^3$.

3. feladat (20 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' + 6y'' + 10y' = 10x e^{-x} + 2$$

A $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $0, -3 \pm i$, tehát $y_h = c_1 + e^{-3x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$. Az inhomogén egyenlet megoldásait a külső rezonancia miatt $y_{ip} = Ax + (Bx + C)e^{-x}$ alakban keressük. Ekkor

$$\begin{aligned} 10 \cdot | \quad y'_{ip} &:= A + (-Bx + B - C)e^{-x} \\ 6 \cdot | \quad y''_{ip} &= (Bx + C - 2B)e^{-x} \\ 1 \cdot | \quad y'''_{ip} &= (-Bx + 3B - C)e^{-x} \end{aligned}$$

$10A = 2, 10 = -10B + 6B - B = -5B, 0 = 10B - 10C + 6C - 12B + 3B - C$,
tehát $B = -2, C = -\frac{2}{5}$, így az általános megoldás:

$$y = y_{ip} + y_h = \frac{x}{5} - 2xe^{-x} - \frac{2e^{-x}}{5} + c_1 + e^{-3x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

4. feladat (16+8=24 pont)

Abszolút vagy feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{5n^2+2n}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt[n]{\frac{n+2}{5n^2+2n}}$$

Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára.

a) $\left| (-1)^{n+1} \frac{n+2}{5n^2+2n} \right| = \frac{n+2}{5n^2+2n} \geq \frac{n}{5n^2+2n^2} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$. A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens, a minoráns-kritérium miatt a sor nem abszolút konvergens.

$$0 \leq \frac{n+2}{5n^2+2n} = a_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n}} \rightarrow 0.$$

Ugyanakkor $a_n = \frac{n+2}{5n^2+2n} \geq \frac{n+3}{5(n+1)^2+2(n+1)} = a_{n+1}$, ha

$$5n^3+22n^2+31n+14 = (n+2)(5n^2+12n+7) \geq (n+3)(5n^2+2n) = 5n^3+17n^2+6n,$$

ami teljesül, hiszen $5n^2 + 25n + 14 \geq 0$. A sor tehát Leibniz-sor, vagyis konvergens, vagyis feltételesen konvergens.

A hibabecsléshez: $|s - s_{100}| \leq a_{n+1} = \frac{103}{5 \cdot 101^2 + 202}$.

b) $1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{7}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{5n^2 + 2n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+2}{5n^2 + 2n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+2n}{5n^2}} = \sqrt[n]{\frac{3}{5}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$,
tehát az általános tag nem tart 0-hoz, így a sor divergens (elég az alsó becslés is).

5. feladat (5+13=18 pont)

a) Ismertesse a gyökkritérium valamelyik alakját!

b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6+n^2}{4+n^2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n^2}{3^{2n-1}}$ sor?

a) Itt az Analízis 1 jegyzet 64-65. oldalain található tételek valamelyikét kell leírni.

b) $a_n = \left(\frac{6+n^2}{4+n^2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n^2}{3^{2n-1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{6}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2}} \cdot \frac{(\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{3}}{9} \right) = \frac{e^6}{e^4} \frac{1^2 \cdot 1}{9} = \frac{e^2}{9} < 1$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

IMSC feladat (15 IMSC pont)

Egy ejtőernyős tömege az ernyővel együtt 80 kg. Az ejtőernyős leszállásánál (kezdősebessége nulla) a levegő ellenállása négyzetesen arányos a mozgás v sebességével (az arányossági tényező: $k = 400$). Határozzuk meg a leereszkedés sebességét az idő függvényeként, és állapítsuk meg a leereszkedés maximális sebességét! ($g = 10m/s^2$)

Newton második törvényét alkalmazzuk: $ma = F = mg - kv^2$. Jelölje $v(x)$ az ejtőernyős sebességét az x idő függvényében. Azaz a megoldandó kezdetiértékfeladat

$$mv' = mg - kv^2, \quad y(0) = 0.$$

Itt m -mel való osztás és behelyettesítés után az

$$v' = 5(2 - v^2)$$

differenciálegyenlethez jutunk, ami egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. $0 \leq v < \sqrt{2}$ (a kezdeti feltétel miatt ezt az esetet kell vizsgálni) esetén

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arth}(v/\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - (v/\sqrt{2})^2} dv = \int \frac{1}{2 - v^2} dv = 5x + C .$$

Innét látható, hogy a kezdeti feltétel teljesítéséhez $C = 0$ a jó választás. Azaz a sebességet a

$$v(x) = \sqrt{2} \operatorname{th}(\sqrt{50}x)$$

függvény írja le. Ez pedig mutatja, hogy az ejtőernyős sebessége nem lesz soha $\sqrt{2}$ -nél nagyobb, mivel $v(x) \rightarrow \sqrt{2}-$, ha $x \rightarrow \infty$.

(A bal oldali integrál parciális törtekre bontással is integrálható:

$$\int \frac{1}{2 - v^2} dv = \int \left(\frac{1/(2\sqrt{2})}{\sqrt{2} - v} + \frac{1/(2\sqrt{2})}{\sqrt{2} + v} \right) dv = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + v}{\sqrt{2} - v} = 5x .$$

A sebességfüggvényre

$$v(x) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{e^{10\sqrt{2}x} + 1} \right)$$

függvény adódik (ugyanaz, mint a korábbi, csak más alakban). Innét a megoldás ugyanaz, mint korábban.)