

1. feladat (18 pont)

Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait algebrai alakban!

$$z^4 + (4 - i)z^2 - 4i = 0$$

Mo. $z^2 = \frac{i - 4 + \sqrt{(4 - i)^2 + 16i}}{2} = \frac{i - 4 + \sqrt{(4 + i)^2}}{2}$ (6p) vagyis $z^2 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ (4p) vagy $z^2 = -4$ (2p). Az első egyenlet megoldásai $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, (4p), a második egyenlet megoldásai pedig $\pm 2i$. (2p).

2. feladat (5+12=17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n}{n^3 + n + 2} = 2$!

Mo. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. (5p)

b) Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\left| \frac{2n^3 - 3n}{n^3 + n + 2} - 2 \right| = \frac{5n + 4}{n^3 + n + 2} \leq \frac{9n}{n^3} = \frac{9}{n^2} < \varepsilon, \quad (7p)$$

ha $n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$ (3p), így $N(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt{\frac{9}{\varepsilon}} \right\rceil$. (2p)

3. feladat (21 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 - 4n^2 + 8}{n^4 + 3n^3 - 7n}}, \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 - 4n^2 + 8}{n^4 + 3n^3 - 7n}}$$

Mo. $n \geq 5$ esetén (1p) (elég nagy n esetén is jó)

$$1 \stackrel{(2p)}{\leftarrow} \sqrt[n]{\frac{1}{8}} \stackrel{(2p)}{\leftarrow} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \stackrel{(3p)}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^3 - \frac{n^3}{2}}{n^4 + 3n^4}} \stackrel{(2p)}{\leq} a_n \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^3 + 8n^3}{n^4}} \stackrel{(1p)}{\leq} \sqrt[n]{9} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \stackrel{(2p)}{\rightarrow} 1$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ **(1p)**.

$$b_n \stackrel{(4p)}{=} \sqrt{\frac{n^3}{n^4} \cdot \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^3}}} \rightarrow 0. \quad (3p)$$

4. feladat (21 pont)

Konvergencia-e az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. $a_2 = \sqrt{5} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $4a_n - 3 < 4a_{n+1} - 3$ tehát $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} < \sqrt{4a_{n+1} - 3} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő **(5p)**. Ha a sorozat korlátos, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső korlátja **(2p)**. A lehetséges A határérték kielégíti az $A = \sqrt{4A - 3}$ egyenletet **(2p)**, vagyis $A = 1$ vagy $A = 3$ **(2p)**. Mivel $a_n \geq 2$, így a határérték csak 3 lehet **(2p)**. Belátjuk, hogy $a_n < 3$ **(2p)**. $a_1 < 3$, és ha $a_n < 3$, akkor $4a_n - 3 < 9$, így $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} < 3$ **(4p)**. A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, tehát határértéke 3. **(2p)**

5. feladat (23 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz superiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \left(\frac{9-n}{4+n}\right)^{3n}, \quad b_n = \left(\frac{9-n}{4+n}\right)^{n^3}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{\left(1 - \frac{9}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}\right)^3 \rightarrow e^{-39}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\left(\frac{\left(1 - \frac{9}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}\right)^3 \rightarrow -e^{-39}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \quad (7p)$$

A sorozat torlódási pontjai a $\pm e^{-39}$ **(2p)**, vagyis $\limsup a_n = e^{-39} \neq -e^{-39} = \liminf a_n = 0$ **(2p)**, és a sorozat nem konvergens **(1p)**.

$b_n = a_n^{\frac{n^2}{3}}$ **(4p)**, így elég nagy n esetén $|b_n| < (e^{-13} + \varepsilon)^{n^2} \rightarrow 0$, ha $\varepsilon < 1 - e^{-13}$ **(4p)**. Így a sorozat egyetlen torlódási pontja 0 **(1p)**, és $\limsup b_n = \liminf b_n = 0 = \lim b_n$ **(2p)**.

IMSC feladat (8 IMSC pont)

Bizonyítsa be, hogy $z = re^{i\vartheta}$, $w = Re^{i\varphi}$, $0 \leq r < R$ esetén

$$\operatorname{Re} \left(\frac{w+z}{w-z} \right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \varphi) + r^2}!$$

Mo. $\frac{w+z}{w-z} = \frac{(w+z)(\bar{w}-\bar{z})}{|w-z|^2} = \frac{|w|^2 - |z|^2 + z\bar{w} - \bar{z}w}{|w-z|^2}$.

Itt $\operatorname{Re}(z\bar{w} - \bar{z}w) = 0$, és $|w-z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w)$, ahol $|z|^2 = r^2$, $|w|^2 = R^2$ és $z\bar{w} + \bar{z}w = 2 \operatorname{Re} z\bar{w} = 2Rr \cos(\vartheta - \varphi)$.
