A47

2021. október 28., csütörtök 8:23

A47

A4 Valószínűségszámítás — VII. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. október 28.

Várható érték, szórás folytonos eset

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Példa (Egyenletes eloszlás)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} \, dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \boxed{\frac{b+a}{2}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 \, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} \, dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} =$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-3a^2-6ab}{12} = \frac{b^2+a^2-2ab}{12} = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Példa

Exponenciális eloszlás

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 \, dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot x^2 \, dx = \left[-e^{-\lambda x} \cdot x^2 \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} \cdot 2x \, dx =$

$E(x) = \frac{1}{\lambda}$

u' v $u \cdot v$

IMPROPRIUS INTEGRAL

$$= \left[-e^{-\lambda x} \cdot x^2 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \cdot 2x \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \cdot 2 \, dx = \left[-e^{-\lambda x} \cdot x^2 - \frac{e^{-\lambda x} \cdot 2x}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cdot 2 \right]_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x^2}{e^{\lambda x}} - \frac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} - \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} \right) - \left(0 - 0 - \frac{2}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$0 \quad 0 \quad 0$

$$D^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

Diszkrét eloszlások I.

Bernoulli/indikátor $\sim \mathbb{1}(p)$

Egyszeri kísérlet p vszséggel sikeres, $1 - p$-vel sikertelen.
súlyfüggvény: $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$

várható érték: p

szórásnégyzet: $p(1 - p)$!

Mikor használjuk: amikor egyszeri kísérletről van szó, bináris kimenetellel, pl. egy darab pénzfeldobás

Diszkrét eloszlások II.

Binomiális (Bernoullik összege) $\sim$ *Binom*(n, p)

n Bernoulliból k sikeres. Kísérletek függetlenek.
súlyfüggvény: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$k = 0, 1, \ldots, n$
várható érték:np

szórásnégyzet:$np(1-p)$!

Mikor használjuk: amikor visszatevéssel húzunk egy csoportból, ami két alcsoportra osztható valamilyen szempont szerint (sikeres-sikertelen, jó-selejtes, etc.), vagy független kísérletek közül hány lesz sikeres (10 érmefeldobásból hány lesz fej).
Miről lehet felismerni: darabszámot számol egy véges mintában

Diszkrét eloszlások III.

Hipergeometriai $\sim$ *Hipergeom*(N, M, n, m)

AKA lottó
súlyfüggvény: $P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$
$m = 0, 1, \ldots, M$
várható érték: $n\frac{M}{N}$

szórásnégyzet: $n\frac{M}{N}\frac{N-n}{N-1}\left(1 - \frac{M}{N}\right)$

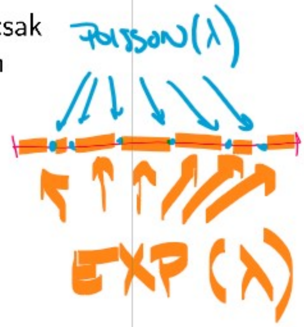
Mikor használjuk: amikor visszatevés nélkül húzunk egy csoportból, ami két alcsoportra osztható valamilyen szempont szerint (sikeres-sikertelen, jó-selejtes, etc.), hányat (m) húzunk a kitüntetett M csoportból.

Diszkrét eloszlások IV.

Poisson $\sim$ *Pois*(λ)

Független kísérletek, sikeres kísérlet bekövetkezésének várható száma egységnyi intervallumon: λ. Egy időpillanatban egy esemény következik be, a bekövetkező események száma csak az intervallum hosszától függ. A diszjunkt intervallumokon bekövetkező események függetlenek egymástól.

súlyfüggvény: $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
$k = 0, 1, \ldots, \infty$
várható érték=szórásnégyzet: λ
Mikor használjuk: földrengések, erdőtüzek éves száma, ügyfélszolgálatra beérkező hívások száma egy órában, sürgősségire beérkező betegek száma egy órában, etc.
Miről lehet felismerni: események darabszámát számolja (mint a binomiális) de a bekövetkező események száma nem korlátos felülről. Események között eltelt idő exponenciális.



Diszkrét eloszlások V.

Geometriai $\sim$ *Geom*(p)

Az első sikeres kísérlet k.-ra következik be

súlyfüggvény: $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$
$k = 1, \ldots, \infty$
várható érték: $\frac{1}{p}$
szórásnégyzet: $\frac{1-p}{p^2}$

Mikor használjuk: független Bernoulli kísérleteknél, pl érmefeldobás
Miről lehet felismerni: sorszámot számol (mikor lesz az első?)

Diszkrét eloszlások VI.

Negatív Binomiális $\sim$ *Negbinom*(k, p)

Ahányadik kísérletnél a k. sikeres következik be. k db geometriai összege.

súlyfüggvény: $P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$
$n = 1, \dots, \infty$
várható érték: $\frac{k}{p}$
szórásnégyzet: $\frac{k(1-p)}{p^2}$

nem kell

Mikor használjuk: független Bernoulli kísérleteknél, pl érmefeldobás
Miről lehet felismerni: sorszámot számol (mikor lesz a k.?)

Folytonos eloszlások I.

Egyenletes $\sim$ *Uni*(a, b)
sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$$

várható érték: $\frac{a+b}{2}$
szórásnégyzet: $\frac{(b-a)^2}{12}$

!

Mikor használjuk: amikor egy részintervallum valószínűsége arányos a teljes intervallum hosszával.

Folytonos eloszlások II.

Exponenciális $\sim Exp(\lambda)$

sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Folytonos eloszlások III.

Exponenciális $\sim Exp(\lambda)$
örökifjúság:$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$
(az, hogy mennyi ideje él, nem befolyásolja, hogy mennyit fog még élni)
várható érték:$\frac{1}{\lambda}$
szórásnégyzet: $\frac{1}{\lambda^2}$
Ez a λ ugyanaz a λ mint a Poissonnál. A várható érték viszont reciprok!

Mikor használjuk: olyan elektronikai eszközök, alkatrészek élettartama, amik nem kopásból eredően mennek tönkre (villanykörte, félvezető chip), illetve Poisson eloszlású események között eltelt idő (ügyfélszolgálaton első hívásig, vagy két hívás között eltelt idő).

Folytonos eloszlások IV.

Erlang $\sim$ *Erlang*(n, λ)

n db exponenciális összege, mikor következik be a k. sikeres kísérlet? (Gamma eloszlás speciális esete.)

sűrűségfüggvény: $f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{n-1!} e^{-\lambda x}$ → ezt kell tudni!

eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$ ← Ezt megint hogyan a λ!

várható érték: $\frac{n}{\lambda}$

szórásnégyzet: $\frac{n}{\lambda^2}$ } nem kell

Mikor használjuk: Poisson eloszlású események esetén, illetve, ha azt tudjuk, hogy két esemény között eltelt idő exponenciális eloszlású, akkor a k. bekövetkező eseményig eltelt idő *Erlang*(k, λ) eloszlású.

Folytonos eloszlások V.

PL

$P(\xi.$ legkisebb $< 0{,}6) = F_{BÉTA}(x)$

Béta $\sim$ *Beta*(n, k)

n db egyenletes eloszlású [0,1]-en valváltozó között a k. legkisebb eloszlása

sűrűségfüggvény: $f(x) = n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$!

eloszlásfüggvény: $F(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$

várható érték: $\frac{k}{n+1}$

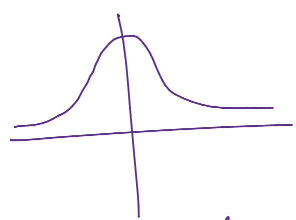
szórásnégyzet: $\frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}$ } nem kell

Mikor használjuk: minimuma, maximuma random számoknak, paraméterbecslés binomiálisra.

minimum: $k = 1$

maximum: $k = n$

Folytonos eloszlások VI.



Normális $\sim N(\mu, \sigma^2)$

STAND. NORM. $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Kedvenc Jolly Jokerünk, más néven Gauss, vagy haranggörbe

sűrűségfüggvény: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

eloszlásfüggvény: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt$

várható érték: μ

szórásnégyzet: σ^2

Mikor használjuk: emberek magassága, IQ-ja, termékek súlya, mérési hibák nagysága. Berendzések, alkatrészek élettartama, ha azok kopás miatt mennek tönkre. Legfőbb alkalmazás CHT, azaz tetszőleges független, azonos eloszlású valváltozók összegének, átlagának a várható értéktől való eltérését megbecsüljük alkalmazás CHT, azaz tetszőleges független, azonos eloszlású valváltozók összegének, átlagának a várható értéktől való eltérését megbecsüljük.

Standard Normális

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Példa

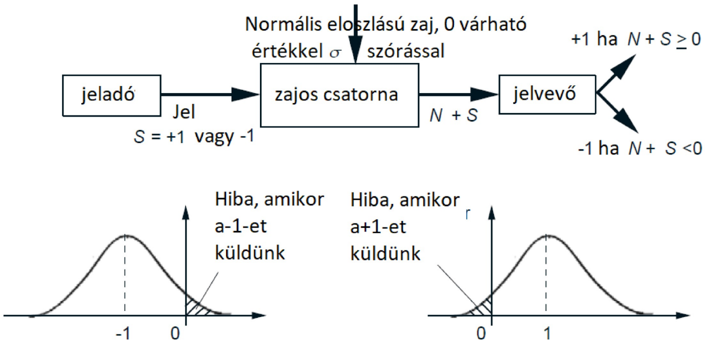
Egy bináris üzenetet ($S = -1$ v. 1) próbálunk küldeni egy zajos csatornán keresztül. A zaj normális eloszlású $\mu = 0$ várható értékkel és σ szórással. A fogadó -1-et implikál, ha az érkezett érték ~~pozitív~~ negatív és $+1$-et ha ~~negatív~~ pozitív.
Hibáról akkor beszélünk, ha -1-et küldenek, és a zaj akkora, hogy pozitív szám lesz belőle, azaz $N + S = N - 1 \geq 0$ vagy ha $+1$-et küldenek és negatív szám érkezik: $N + S = N + 1 < 0$.
Mi a hiba valószínűsége?

Példa

STANDARDIZÁLÁS

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N < 1) = 1 - P\left(\frac{N-\mu}{\sigma} < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$



Centrális Határeloszlás Tétel (CHT)

Legyenek $X_1, X_2, \dots X_n$ azonos eloszlású, független valváltozók μ várható értékkel és σ^2 varianciával. Ekkor

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$E(S_n) = n \cdot \mu$
$D^2(S_n) = n \cdot \sigma^2$
$D(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq a\right) = \Phi(a)$$

STANDARD NORM ELO.

Példa
Olyan ellenállásokkal dolgozunk, amelyek egymástól független ingadozásokat mutatnak 550Ω *várható értékkel és* 30Ω *szórással, egyenletes eloszlásban. Adj becslést annak vszségére, hogy 10 sorba kapcsolt ellenállás eredője* 5600Ω*-nál nagyobb!*

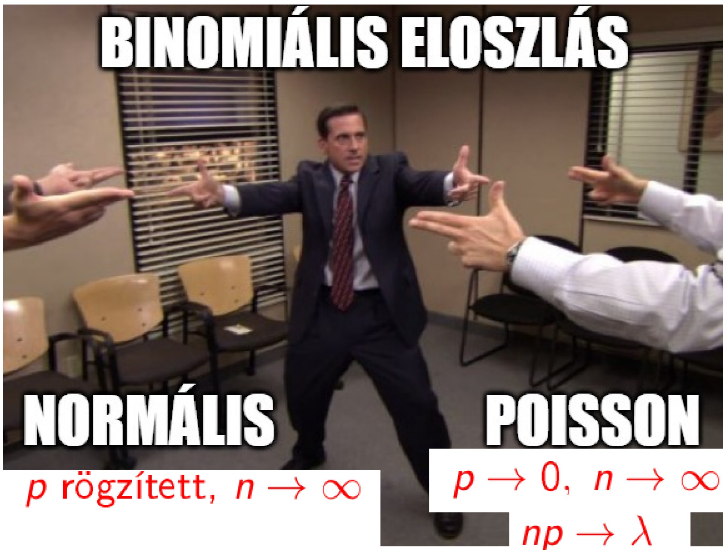
$\mu = 550$
$\sigma = 30$

Eredő ellenállás $= \underline{S_{10}}$

$1 - P(X < \dots)$

$$P\left(\frac{S_{10} - 10 \cdot 550}{\sqrt{10} \cdot 30} > \frac{5600 - 10 \cdot 550}{\sqrt{10} \cdot 30}\right) = 1 - \Phi(1.05) \approx \underline{0.1469}$$

Mit közelítettünk mivel?



Valváltozók transzformációja

$X \sim F_X(x), Y = g(X)$, Y eloszlása X-ből?

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_Y(g(X) \leq y) = \int_{\{g(X) \leq y\}} f_X(s)ds$$

Példa: $X \sim Uni(-1, 1)$, $Y = e^X$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & ha \quad -1 < x < 1, \\ 0 & egyébként \end{cases}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \qquad -1 < x < 1$$

$$F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = F_X(\log y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log y$$

LÁNCSZABÁLY

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}F_X(\log y) = f_X(\log y)\frac{1}{y} = \frac{1}{2y}$$

Példa

$X \sim Uni(-1,1), \ Y = X^2$

LOL, EZT ÓRÁN ÁTJAVÍTOTTAM ROSSZRA. MÉGIS AZ EREDETI JÓ, CSAK A SŰRŰSÉGFV-BŐL HIÁNYZOTT A KONSTANS.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \quad -1 < x < 1$$

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) =$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = 2F_X(\sqrt{y}) - 1 =$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) - 1 = \sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}F_X(\sqrt{y}) = \underbrace{f_X(\sqrt{y})}_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\cancel{2}4\sqrt{y}}$$

$0 < y < 1$

Valváltozók transzformációja

Ha $g(X) = Y$ egy **szigorú monoton növekedő** függvény, akkor

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(x)} f_X(x)dx = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

Ha $g(X) = Y$ egy **szigorú monoton csökkenő** függvény, akkor

$$F_Y(y) = \int_{g^{-1}(x)}^{\infty} f_X(x)dx = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

Lineáris trafó

$Y = aX + b$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) =$$

$$= \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0, \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

$f_Y(y) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

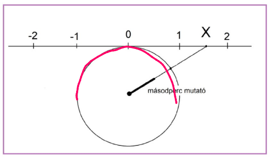
Megjegyzés: ez történik a normális eloszlás standardizálásánál is.

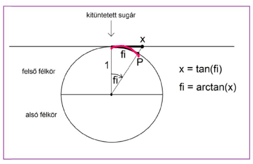
Cauchy eloszlás

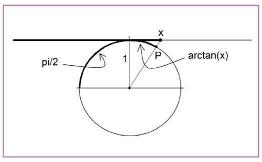
Legyen X az egyenletes szögsebességgel forgó mutató által kimetszett pont a számegyenesen. Mi X eloszlása?

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{\pi/2 + \arctan(x)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

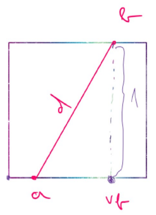


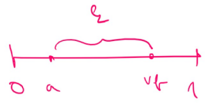


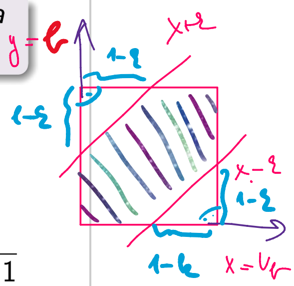


Példa

Egy négyzet két átellenes oldalán kijelölünk egy-egy pontot, a távolságuk négyzetének eloszlására vagyunk kíváncsiak.







$$d^2 = |a - v_b|^2 + 1$$
$$\sqrt{d^2 - 1} = |a - v_b|$$
$$|a - v_b| \le k$$
$$c = |X - Y| \le k, \; d = \sqrt{c^2+1}$$
$$x - k \le y \le x + k$$
$$F_C(k) = P(C \le k) =$$
$$= \boxed{1 - (1-k)^2} = \boxed{2k - k^2}$$
$$F_d(u) = P(\sqrt{c^2+1} < u) =$$
$$= P(c < \sqrt{u^2-1}) = \boxed{2\sqrt{u^2-1} - u^2 + 1}$$

Felújítást kérnek, $EXP(\lambda)$ ideig kell várni, míg elkezdi a munkát

t_0

$X \sim EXP(\lambda)$ $\quad$ $Y \sim Uni(4, \lambda)$

várhatóan 10 nap alatt elkészül $\quad$ $\lambda = ?$

$$P(X < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{15,87}}$$

$$E(X) = \frac{1}{15,87}$$

$$E(X+Y) = 10 = \underbrace{E(X)}_{\frac{1}{\lambda}} + \underbrace{E(Y)}_{\frac{4+\lambda}{2}}$$

$$10 = \frac{1}{\lambda} + \frac{4+\lambda}{2}$$

$$10 = \frac{2 + 4\lambda + \lambda^2}{2\lambda}$$

$$20\lambda = 2 + 4\lambda + \lambda^2$$

$$0 = \lambda^2 - 16\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 8}}{2} \quad \sqrt{248}$$

$\boxed{15,87}$

$0,13$ λ

A városban a balesetek előfordulása Poisson eloszlású (napi intenzitás). Annak a valószínűsége, hogy egy nap nulla baleset történik 0,6.

1) Mi a valószínűsége, hogy az első balesetig min. 2 órát kell várni?

2., Mi a valószínűsége, hogy a 4. baleset délután 3 után történik?

0. lépés: λ meghatározása

$$P(X=0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} \overset{t=1}{=} e^{-\lambda} = 0{,}6$$

$$\frac{1}{e^{\lambda}} = 0{,}6$$

$$\lambda = \log\left(\frac{1}{0{,}6}\right) \approx \underline{\underline{0{,}22}}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}22}$$

Y balesetek között eltelt idő   2 óra $= \frac{1}{12}$ nap

$Y \sim EXP(0{,}22)$ $P\left(Y > \frac{1}{12}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{12}}\right) =$

$$= e^{-\frac{0{,}22}{12}} = \underline{0{,}98}$$

$W \sim \text{Erlang}(4; 0{,}22)$ 15 óra $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$$P\left(W > \frac{5}{8}\right) = \boxed{\sum_{k=0}^{3} \frac{\left(0{,}22 \cdot \frac{5}{8}\right)^k}{k!} e^{-0{,}22 \cdot \frac{5}{8}}} = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{\left(0{,}22 \cdot \frac{5}{8}\right)^k}{k!} e^{-0{,}22 \cdot \frac{5}{8}}\right)$$

$$\underline{P(W < w)} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda w)^k}{k!} e^{-\lambda w} = \underline{\underbrace{1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(0{,}22 \cdot w)^k}{k!} e^{-0{,}22 w}}}$$