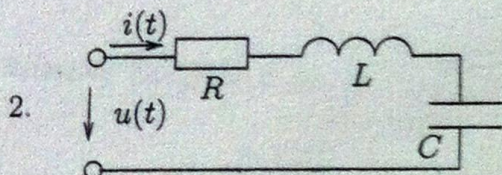


SOLUTIONS

1. Adja meg az alapkörfrekvenciáját és Fourier-sora állandó összetőjét annak a periodikus $u(t)$ feszültségnek, amelyre $u(t) = (10V/ms) \cdot t$, ha $0 \leq t < 0,5\pi$ és $u(t + 0,5\pi) = u(t)$ minden t esetén (az idő egysége ms).

$$\omega_0 = 4\text{krad/s}$$

$$U_0 = 2,5\pi V \approx 7,854V$$



Egy soros RLC-kétpólus feszültsége $u(t) = [10 + 20 \cos \omega_0 t]V$, $R = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = 10\Omega$. Adja meg a kétpólus $i(t)$ áramának időfüggvényét!

$$i(t) = (2 \cos \omega_0 t)A$$

3. Határozza meg az $x(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{1}{\alpha})] e^{-\alpha t}$ jel Fourier-transzformáltját!

$$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} (1 - e^{-1 - j\frac{\omega}{\alpha}})$$

4. Egy folytonos idejű rendszert soros RC-kétpólus reprezentál, amelynek bemenő jele a kétpólus feszültsége, válasza a kondenzátor feszültsége. Adja meg a rendszer sávzsélességét, ha az áteresztő tartományban az amplitúdókarakterisztika maximumtól való eltérése nem lehet több, mint 3 dB!

$$\Delta\omega = \frac{1}{CR}$$

5. Egy L induktivitású tekercs árama I_0 , ha $t < 0$, és $I_0 e^{-\alpha t}$, ha $t \geq 0$. Határozza meg a tekercs feszültségének Laplace-transzformáltját!

$$U_L(s) = \frac{-\alpha I_0 L}{s + \alpha}$$

6. Határozza meg a $h(t) = A\varepsilon(t)e^{-\alpha t} \sin \beta t$ impulzusválaszú rendszer átviteli függvényét, vagy indokolja, ha a feladat nem megoldható!

$$H(s) = A \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

7. Egy $H(j\omega) = \frac{j\omega + \alpha}{j\omega + 2\alpha}$, ($\alpha > 0$) átviteli karakterisztikájú rendszer bemenő jele $u(t) = U_0 \varepsilon(t) e^{-\alpha t}$. Határozza meg a válasz időfüggvényét!

$$y(t) = U_0 \varepsilon(t) e^{-2\alpha t}$$

8. Egy folytonos idejű rendszer két pólusa $p_1 = \alpha + j\beta$, $p_2 = \alpha - j\beta$, két zérusa z_1, z_2 , ahol α és β valós, z_1, z_2 nem feltétlenül valós szám. Mely α, β, z_1 és z_2 értékekre minimálfázisú a rendszer?

$$\alpha < 0, \operatorname{Re} z_1 < 0, \operatorname{Re} z_2 < 0, \beta \text{ is optional}$$

9. Adott egy diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása:
$$\begin{aligned} x[k+1] &= ax[k] + bu[k] \\ y[k] &= cx[k] + du[k] \end{aligned}$$

Határozza meg az impulzusválasz értékeit a $k = 0$ és a $k = 1$ ütemben!

$$h[0] = d$$

$$h[1] = bc$$

10. Határozza meg az előző pontban az állapotváltozós leírásával adott rendszer átviteli függvényét!

$$H(z) = \frac{d + (bc - ad)z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

11. Adott egy 8 periódushosszú diszkrét idejű periodikus jel: $x[k] = 4\delta[k] - 4\delta[k - 2]$, ha $0 \leq k \leq 7$. Határozza meg a jel Fourier-sora $\frac{\pi}{2}$ diszkrét körfrekvenciához tartozó komponensének valós amplitudóját és fázisszögét!

$$X_2 = 2$$

$$\rho_2 = 0$$

12. Határozza meg az amplitúdóspektrumát az $x[k] = 4\delta[k] - 4\delta[k - 2]$ diszkrét idejű jelnek!

$$X(\vartheta) = 8|\sin \vartheta| \quad \left(= \sqrt{32(1 - \cos 2\vartheta)} \right)$$

13. Határozza meg a z -transzformáltját az $x[k] = 1 + \varepsilon^k$ ($2 \cdot 0,5^k - 2$) diszkrét idejű jelnek, vagy indokolja, ha a feladat nem megoldható!

$$X(z) = \frac{z^2 - 1,5z}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

14. Határozza meg az $y[k] - 0,64y[k - 2] = 2u[k] + 4u[k - 1]$ rendszeregyenlettel adott diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikáját!

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{2 + 4e^{-j\vartheta}}{1 - 0,64e^{-j2\vartheta}}$$

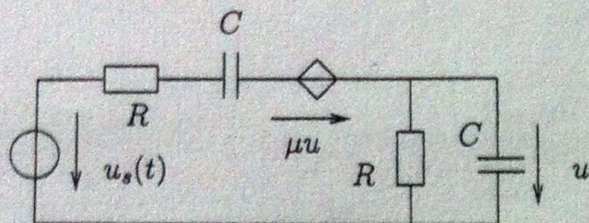
15. Egy véges impulzusválaszú (FIR-típusú) diszkrét idejű rendszer zérusai: $z_1 = 0,5$ és $z_2 = 2$, impulzusválaszának értéke a $k = 0$ ütemben 10. Adja meg a rendszer impulzusválaszának időfüggvényét!

$$h[k] = 10\delta[k] - 25\delta[k - 1] + 10\delta[k - 2]$$

SOLUTIONS

1. nagyfeladat (Kérjük, a megoldást külön lapra írja!)

Az ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer bemenő jele az $u_s(t)$ forrásfeszültség, válasza a bejelölt u feszültség.



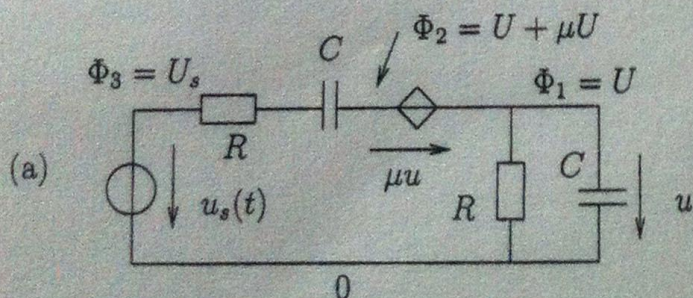
- (a) Adja meg a rendszer átviteli függvényét normálalakban! (2,5 pont)
- (b) A μ paraméter mely tartományában gerjesztés-válasz stabilis a rendszer, ha $C > 0$ és $R > 0$? (1 pont)

Bizonyos numerikus értékek és a V, mA, ms koherens mértékegységrendszerben az átviteli függvény alakja: $H(s) = \frac{2s}{s^2 + 5s + 4}$.

A továbbiakban az ezen paraméterértékekkel megadott rendszerre végezze a számításait!

- (c) Határozza meg a rendszer impulzusválaszát és adja meg a mértékegységét is a V, mA, ms egységekkel koherens módon! (2 pont)
- (d) A rendszer bemenő jele az a πms periódusidejű periodikus feszültség, amelynek komplex Fourier-együtthatói a következők: $U_{s0}^C = 20V, U_{s1}^C = 5e^{-j20^\circ}V$ és $U_{s2}^C = 1,5e^{j30^\circ}V$. Határozza meg a válaszfeszültség időfüggvényét másodrendű valós Fourier-polinomos közelítésben! (2 pont)

Solution



The Kirchhoff current law with the Laplace transforms of the nodal potentials noted in the figure for the closed surface which covers the controlled source is:

$$\frac{U + \mu U - U_s}{R + \frac{1}{sC}} + \frac{U}{R} + U_s C = 0. \quad (1,5 \text{ points})$$

Multiplying both sides by $R(sCR + 1)$

$$U_s C R + \mu U_s C R - U_s s C R + U(1 + s C R) + U_s C R(1 + s C R) = 0$$

$$U(s^2 C^2 R^2 + (3 + \mu)s C R + 1) = U_s s C R$$

$$U = U_s \frac{s C R}{s^2 C^2 R^2 + (3 + \mu)s C R + 1} \quad (0,5 \text{ points})$$

The transfer function in normal form is:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C R} s}{s^2 + \frac{3 + \mu}{C R} + \frac{1}{C^2 R^2}} \quad (0,5 \text{ points})$$

2,5 points

(b) The denominator is Hurwitz polynomial, (the system is BIBO stable) if $\mu > -3$. 1 point

(c) $H(s) = \frac{2s}{s^2 + 5s + 4} = \frac{2s}{(s+4)(s+1)} = \frac{\frac{8}{3}}{s+4} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+1}$ (1 point)

$h(t) = \varepsilon(t) (2,6667e^{-4t} - 0,6667e^{-t}) \frac{1}{ms}$ (1 point) (Without the proper unit 0,5 points) 2 points

(d) The input signal in second order Fourier polynomial approximation is:

$u_s(t) = [20 + 10 \cos(2t - 20^\circ) + 3 \cos(4t + 30^\circ)] V$. (0,5 points)

The frequency response is $H(j\omega) = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$

$H(j\omega)|_{\omega=0} = 0, \quad H(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{j4}{j10} = 0,4,$

$H(j\omega)|_{\omega=4} = \frac{j8}{-12+j20} = 0,3430e^{-j30,96^\circ}$ (1 point)

$u(t) = [4 \cos(2t - 20^\circ) + 1,0290 \cos(4t - 0,96^\circ)] V$ (0,5 points) 2 points
(-0,0168)

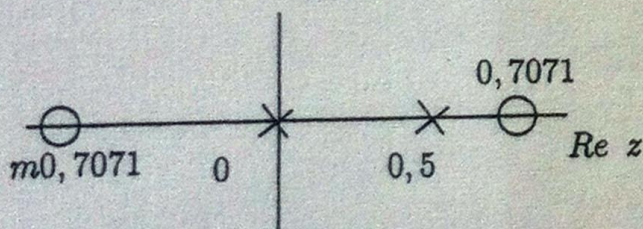
2. nagyfeladat (Kérjük, a megoldást külön lapra írja!)

Egy diszkrét idejű rendszer az $y[k] - 0,5y[k-1] = 2u[k] - u[k-2]$ rendszeregyenlettel adott.

- (a) Határozza meg a rendszer átviteli függvényét normálalakban és ábrázolja a pólus-zérus elrendezést! (2 pont)
- (b) Határozza meg a rendszer válaszána időfüggvényét az $u_b[k] = 10 \cos \pi k$ bemenő jelre! (2 pont)
- (c) Határozza meg a rendszer válaszána időfüggvényét az $u_c[k] = \varepsilon[k]10 \cos \pi k$ belépő gerjesztésre! (2,5 pont)
- (d) Adja meg a (c) pontbeli válaszjel szabad és gerjesztett összetevőjét! (1 pont)

Solution

(a) $H(z) = \frac{2-z^{-2}}{1-0,5z^{-1}} = \frac{2z^2-1}{z(z-0,5)} = \frac{2(z+\sqrt{0,5})(z-\sqrt{0,5})}{z(z-0,5)}$ (1 point)
Poles: $p_1 = 0, \quad p_2 = 0,5;$ Zeros: $z_1 = 0,7071, \quad z_2 = -0,7071.$
Im z



(1 point) 2 points

(b) $H(e^{j\theta}) = \frac{2-e^{-j2\theta}}{1-0,5e^{-j\theta}}$ $H(e^{j\theta})|_{\theta=\pi} = \frac{1}{1,5} = 0,6667$ (1,5 points)
 $y_b[k] = 6,6667 \cos \pi k$ (0,5 points) 2 points

(c) $U_c(z) = \frac{10z}{z+1}$ (1 point)

$Y_c(z) = U_c(z)H(z) = \frac{10z}{z+1} \frac{2-z^{-2}}{1-0,5z^{-1}} = z^{-1}z \frac{20z^2-10}{z^2+0,5z-0,5} = z^{-1}z \frac{20(z^2+0,5z-0,5)-10z}{z^2+0,5z-0,5}$

$Y_c(z) = z^{-1}z \left(20 + \frac{-10z}{(z+1)(z-0,5)} \right) = z^{-1}z \left(20 + \frac{-6,6667}{z+1} + \frac{-3,3333}{z-0,5} \right)$ (1 point)

$Y_c(z) = 20 + z^{-1} \left(-6,6667 \frac{z}{z+1} - 3,3333 \frac{z}{z-0,5} \right)$

$y_c[k] = 20\delta[k] + \varepsilon[k-1] (-6,6667 \cdot (-1)^{k-1} - 3,3333 \cdot 0,5^{k-1})$ (0,5 points) 2,5 points

(d) $y_{cg}[k] = -6,6667 \cdot (-1)^{k-1} = 6,6667 \cos k\pi$, if $k \geq 1$
 $y_{cf}[k] = 20\delta[k] - 3,3333\varepsilon[k-1]0,5^{k-1} - y_{cg}[0]\delta[k] = 13,3333\delta[k] - 3,333\varepsilon[k-1]0,5^{k-1}$ 1 point