Zárthelyi dolgozat

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Egy urnában (kizárólag) kék, fehér és sárga golyók vannak, melyekből kihúzunk néhányat. Jelöle rendre K, F ill. S azokat az eseményeket, hogy a húzott golyók között van kék, fehér, ill. sárga. Fejezzük ki a fenti három esemény és a halmazműveletek segítségével a következő eseményeket. **A megadott kifejezések helyességének indoklása is szükséges.**

   a) Minden kihúzott golyó azonos színű.

   b) A kihúzott golyók színei közt a lehetséges háromból legalább kettő előfordul.

   c) A kihúzott golyók színei közt a lehetséges háromból pontosan kettő fordul elő.

   Megoldás:

   a)

   (1 pont) Az, hogy minden kihúzott golyó azonos színű, azt jelenti, hogy vagy csak kéket, vagy csak fehéret, vagy pedig csak sárgát húztunk.

   (2 pont) Ebből az első eset úgy írható le, hogy húztunk kéket, de nem húztunk sem fehéret, sem sárgát, azaz $K \cap \overline{F} \cap \overline{S}$ teljesül. A másik két eset analóg módon írható le: $\overline{K} \cap F \cap \overline{S}$ és $\overline{K} \cap \overline{F} \cap S$.

   (1 pont) Mivel a fenti három esetből legalább az egyik teljesül, így az uniójukat kell venni:

   $$(K \cap \overline{F} \cap \overline{S}) \cup (\overline{K} \cap F \cap \overline{S}) \cup (\overline{K} \cap \overline{F} \cap S).$$

   b)

   (2 pont) Ez éppen az a) részben látott esemény komplementere,

   (1 pont) azaz
   $$\overline{(K \cap \overline{F} \cap \overline{S}) \cup (\overline{K} \cap F \cap \overline{S}) \cup (\overline{K} \cap \overline{F} \cap S)}$$

   Természetesen ez átalakítható pl. a de Morgan-azonosságokkal:

   $$\overline{(K \cap \overline{F} \cap \overline{S})} \cap \overline{(\overline{K} \cap F \cap \overline{S})} \cap \overline{(\overline{K} \cap \overline{F} \cap S)} = (\overline{K} \cup F \cup S) \cap (K \cup \overline{F} \cup S) \cap (K \cup F \cup \overline{S}).$$

Egy másik lehetséges felírás adódik a következő érvelésből:

(2 pont) Ha legalább kettő előfordul a húzott színek között, akkor ez a kettőt háromféleképp választhatjuk ki: vagy húztunk kéket és fehéret ($K \cap F$), vagy fehéret és sárgát ($F \cap S$), vagy kéket és sárgát ($K \cap S$).

(1 pont) A három esetből legalább az egyik fennáll, így ismét az uniót kell venni:

$$(K \cap F) \cup (F \cap S) \cup (K \cap S).$$

c)

(2 pont) A b) részben látott eseményből ki kell vonni azt az eseményt, amikor mindhárom szín előfordul:

(1 pont)

$$((K \cap F) \cup (F \cap S) \cup (K \cap S)) \setminus (K \cap F \cap S)$$

Egy másik lehetőség, hogy a metszetekben azt az eseményt is feltüntetjük, amelyik nem következik be:

$$(K \cap F \cap \overline{S}) \cup (\overline{K} \cap F \cap S) \cup (K \cap \overline{F} \cap S)$$

2. Tegyük az alábbi 3 eseményt a bekövetkezésük valószínűsége szerint növekvő sorrendbe. Az választ részletes számolással támasszuk alá. Kivételesen ne kerekítsük az egyes valószínűségeket 4 tizedesjegyre, hanem számoljunk a feladat megoldásához szükséges pontossággal.

A: Egy 32 lapos megkevert magyarkártya-pakliból találomra húzva 8 lapot, kihúzzuk az összes zöld lapot. (Egy magyarkártya-pakli 4 különböző szín mindegyikéből 8 darab lapot tartalmaz.)

B: Ötös találatunk lesz az ötöslottón. (Az ötöslottón 90 számból húznak véletlenszerűen 5 darabot.)

C: Tízszer egymás után hatost dobunk egy szabályos hat oldalú dobókockával.

Megoldás:

(1 pont) Egy 32 lapos pakliból $\binom{32}{8}$ féleképp tudunk 8 lapot húzni.

(1 pont) Ebből egyféleképp fordulhat elő, hogy mind a 8 lap zöld,

(1 pont) így

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10\,518\,300} \approx 0{,}000\,000\,095\,072.$$

(1 pont) Az ötöslottón 90 számból húznak 5 darabot, ezt $\binom{90}{5}$-féleképp tehetik.

(1 pont) A kihúzott számötöst egyféleképp találhatjuk el,

(1 pont) így az ötös valószínűsége

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 0{,}000\,000\,022\,754.$$

(1 pont) Egyszer dobva egy kockával $\frac{1}{6}$ valószínűséggel kapunk hatost.

(1 pont) Ezt egymás után 10-szer függetlenül megismételve az egyes hatosdobások valószínűségei összeszorzódnak,

(1 pont) így

$$\mathbb{P}(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1}{60\,466\,176} \approx 0{,}000\,000\,016\,538.$$

(1 pont) Mindezek alapján $\mathbb{P}(C) < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$.

3. Egy három tagú matematikuscsaládban a fiú megfigyelte, hogy mikor hazaér, az esetek 20%-ában senki nincs otthon, az esetek 50%-ában csak az édesanyja, a maradék esetekben pedig mindkét szülője. Tudja, hogy édesanyja az esetek 80%-ában magára zárja az ajtót; ha mindketten otthon vannak, akkor már csak az esetek 40%-ában zárják be, de ha nincs otthon senki, szórakozottságból akkor is az esetek 5%-ában nyitva marad az ajtó. A fiú egy délután hazaér, és zárva találja az ajtót. Mekkora a valószínűsége, hogy nincs otthon senki?

Megoldás:

(0 pont) A rövidség kedvéért vezessünk be jelöléseket a következő eseményekre:

$$\begin{aligned} Z &= \{\text{a fiú zárva találja az ajtót}\}, & S &= \{\text{nincs otthon senki}\}, \\ A &= \{\text{csak az anya van otthon}\}, & M &= \{\text{mindkét szülő otthon van}\}. \end{aligned}$$

(Ha nincs bevezetve külön jelölés az eseményekre, hanem szövegesen vannak körülírva, nem jár pontlevonás.)

(1 pont) A kérdéses valószínűség: $\mathbb{P}(S \mid Z)$.

(1 pont) Az S, A, M események teljes eseményrendszert alkotnak,

(2 pont) ezért alkalmazható rájuk a Bayes-tétel:

$$\mathbb{P}(S \mid Z) = \frac{\mathbb{P}(Z \mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(Z \mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(Z \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Z \mid M)\,\mathbb{P}(M)}.$$

Ha esetleg a tétel nincs nevesítve, akkor is hivatkozni kell rá, hogy ez a formula az előadás anyagának része. Az előadásra való hivatkozás nélkül a formulára nem jár pont. Ha valaki külön alkalmazza az egyerű Bayes-tételt, majd utána a teljes valószínűség tételét (mindkettőnél a tétel nevére vagy az előadásra hivatkozva), akkor is jár ez a két pont (egy-egy a két tétel alkalmazásáért). Hivatkozás nélkül ebben az esetben sem jár az adott pont. Kizárólag hibátlanul felírt formulá(k)ra adható pont.

(2 pont) A feladat szövege alapján

$$\mathbb{P}(Z \mid S) = 0{,}95, \qquad \mathbb{P}(Z \mid A) = 0{,}8, \qquad \mathbb{P}(Z \mid M) = 0{,}4,$$

(2 pont) továbbá

$$\mathbb{P}(S) = 0{,}2, \qquad \mathbb{P}(A) = 0{,}5, \qquad \mathbb{P}(M) = 1 - (0{,}2 + 0{,}5) = 0{,}3.$$

(1 pont) Tehát behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(S \mid Z) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}2}{0{,}95 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}3}.$$

Ha a megoldó nem írja le általános alakban a formulát, csak a behelyettesített értéket, akkor a formuláért járó 2 pontot is megkapja, amennyiben *hivatkozik a tételre*, és a behelyettesített értékek *midegyikének* jelentése *pontosan* tisztázott, valamint a helyettesítés *hibátlan*.

(1 pont) A műveleteket elvégezve

$$\mathbb{P}(S \mid Z) = \frac{0{,}19}{0{,}19 + 0{,}4 + 0{,}12} = \frac{0{,}19}{0{,}71} = \frac{19}{71} \approx 0{,}2676.$$

4. Tegyük fel, hogy egy számítógépes program kockadobást szimulál, valójában azonban nem egyenletesen véletlenszerűen generálja a kimenetelét, hanem a 6-os valószínűsége csak 0,15, míg az többi öt lehetséges kimenetel mindegyike ugyanazon valószínűséggel adódik. Adjuk meg a program kimenetelének várható értékét és szórását.

Megoldás:

(1 pont) Legyen X a generált szám.

(1 pont) A feladat szövege szerint $\mathbb{P}(X = 6) = 0{,}15$, továbbá

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = x.$$

(1 pont) Mivel ezen valószínűségek összege 1, így

(1 pont) $5x + 0{,}15 = 1$, azaz $x = 0{,}17$.

(2 pont) A várható érték definíciója szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + 4 \cdot \mathbb{P}(X = 4) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5) + 6 \cdot \mathbb{P}(X = 6)\\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 0{,}17 + 6 \cdot 0{,}15 = 3{,}45.\end{aligned}$$

(2 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó formula szerint $\mathbb{E}(X^2)$ értéke

$$\begin{aligned}&1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + 4^2 \cdot \mathbb{P}(X = 4) + 5^2 \cdot \mathbb{P}(X = 5) + 6^2 \cdot \mathbb{P}(X = 6)\\ &= (1 + 4 + 9 + 16 + 25) \cdot 0{,}17 + 36 \cdot 0{,}15 = 14{,}75.\end{aligned}$$

(Az előadáson tanult formula használata az állításra való hivatkozás nélkül csak 1 pontot ér. Természetesen ez a 2 pont megkapható a várható értéknek az X^2 eloszlásából való kiszámolásáért is.)

(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 14{,}75 - 3{,}45^2 = 2{,}8475$,

(1 pont) amiből $\mathbb{D}(X) = \sqrt{2{,}8475} \approx 1{,}6875$.

5. Legyen $X \sim Bin(n; p)$ egy binomiális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X \geq 3)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 3$ és $\mathbb{D}(X) = 1,5$.

Megoldás:

(1 pont) A binomiális eloszlás várható értéke alapján $\mathbb{E}(X) = np = 3$.

(1 pont) Mivel $\mathbb{D}(X) = 1{,}5$, így $\mathbb{D}^2(X) = 1{,}5^2 = \frac{9}{4}$.

(1 pont) A binomiális eloszlás szórásnégyzetére tanult képlet alapján $\mathbb{D}^2(X) = \frac{9}{4} = np(1 - p)$,

(1 pont) tehát

$$(1 - p) = \frac{np(1 - p)}{np} = \frac{3}{4}.$$

(1 pont) Ebből $p = \frac{1}{4}$

(1 pont) és $n = \frac{np}{p} = 12$.

(2 pont) $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$

(Ez a 2 pont akkor is jár, ha valaki nem tér át a komplementerre, hanem felírja 13 valószínűség összegeként a kérdéses valószínűséget.)

(1 pont) Az eloszlás súlyfüggvényének értékeire tanult képlet szerint ez az összeg

$$\binom{12}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{11} + \binom{12}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

(1 pont) $\approx 0{,}3907$

(Ha valaki a szórásnégyzet képletét a szórásra alkalmazza, akkor az első 6 pontból legfeljebb 1 pontot kaphat, az utolsó 4-ből pedig az első hármat megkaphatja, ha a formulák paraméteresen fel vannak írva helyesen.)

6. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből két érték hiányzik. Határozzuk meg a hiányzó értékeket, ha tudjuk, hogy az $\{X = 2\}$ és $\{Y = 0\}$ események függetlenek.

Y \ X	0	1	2
0	1/10	1/5	
2		1/4	1/5

Megoldás:

(0 pont) Vezessünk be változókat a hiányzó mennyiségek jelölésére, legyen $x = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0)$ és $y = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2)$.

(1 pont) Az együttes eloszlás táblázatában szereplő valószínűségek összege 1,

(1 pont) azaz $1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + x + y + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = x + y + \frac{3}{4}$,

(1 pont) ebből pedig $y = \frac{1}{4} - x$.

(1 pont) Az $\{X = 2\}$ és $\{Y = 0\}$ események függetlenek, azaz

$$x = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2)\,\mathbb{P}(Y = 0) \tag{1}$$

(1 pont) Itt $\mathbb{P}(X = 2)$ a 2 értékhez tartozó oszlopban szereplő valószínűségek összege, vagyis $x + \frac{1}{5}$.

(1 pont) Hasonlóan, $\mathbb{P}(Y = 0)$ a 0-hoz tartozó sorban lévő számok összege, azaz

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + x = x + \frac{3}{10}$$

(1 pont) Ezt (1) jobb oldalába behelyettesítve $x = \left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{3}{10}\right) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{50}$, azaz az

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{50} = 0$$

egyenlet megoldását keresseük,

(1 pont) ami a másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{6}{25}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{100} - \frac{24}{100}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}}{2},$$

így a két lehetséges megoldás $x = \frac{3}{10}$ és $x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

(1 pont) Az első megoldásból azonban $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = y = \frac{1}{4} - \frac{3}{10} < 0$ következne, ami lehetetlen,

(1 pont) így tehát $x = \frac{1}{5}$ és $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$.