ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI β **változat**

2010. március 11.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (19 pont)

$$y' = \frac{y^2-9}{y} \quad \frac{5}{2x^2+4}$$

a) Oldja meg a differenciálegyenletet! (Nem kell y - ra kifejeznie!)
b) Adja meg az $y(0) = 2$ és az $y(0) = -3$ kezdetiérték probléma megoldását!
c) Jelöljön ki olyan tartományt, amelybe eső kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható a tartományban! Indokoljon!

a.) $\boxed{11}$

$y \neq 0$

$y \equiv \pm 3$ megoldás (2)

Ha $|y| \neq 3$:

$$\int \frac{y}{y^2-9}\,dy = \int \frac{5}{2x^2+4}\,dx \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-9}\,dy = \frac{5}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-9| = \frac{5}{4}\,\frac{\operatorname{arctg} x/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

(3) (3) (1)

b.) $\boxed{4}$

$y(0)=2$: $\frac{1}{2}\ln 5 = 0 + C$

$$\frac{1}{2}\ln(9-y^2) = \frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln 5 \quad (2)$$

$y(0)=-3$: $y \equiv -3$ (2)

c.) $\boxed{4}$

Pl. $T = \{(x,y) : 0 < y < 3,\ -\infty < x < \infty\}$

$g \in C^0_{(0,3)}$ és itt $g(y) \neq 0$

$f \in C^0_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow y(x_0)=y_0$ k.é.p. egyértelműen megoldható, ha $y_0 \in (0,3)$, x_0 tetsz., tehát $(x_0,y_0) \in T$ és $(x,y) \in T$.

an2z1100311/1.

2. feladat (13 pont)

$u = x + 2y$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{1}{x+2y}, \qquad y \neq -\frac{x}{2}$$

A megoldást nem kell y - ra kifejeznie!

$y = \frac{1}{2}(u - x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(u' - 1)$

Behelyettesítve: $\frac{1}{2}(u'-1) = \frac{1}{u}$ (3) szeparábilis

$u' = 1 + \frac{2}{u} = \frac{u+2}{u} \Rightarrow u \equiv -2 : y = -\frac{1}{2}x - 1$ megoldás (2)

$\int \frac{u}{u+2}\, du = \int dx$ (2)

$\int \frac{u+2-2}{u+2}\, du = x + C \Rightarrow \int \left(1 - \frac{2}{u+2}\right) du = x + C$

$\Rightarrow u - 2 \ln|u+2| = x + C$ (5)

Tehát a megoldás:

$x + 2y - 2 \ln|x + 2y + 2| = x + C$, (1) $C \in \mathbb{R}$

3. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - \frac{4}{x}y = x^4 e^{-2x}, \qquad x \neq 0$$

(H): $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x} y$ $\qquad y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú

$\int \frac{1}{y}\, dy = 4 \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \ln y = 4 \cdot \ln x \Rightarrow y = x^4 = \varphi(x)$

$\Rightarrow y_H = C \cdot x^4$; $C \in \mathbb{R}$ (6)

(I): $y_{ip} = c(x) \cdot x^4$ (2)

$y_{ip}' = c' \cdot x^4 + c \cdot 4x^3$

$c' x^4 + c \cdot 4x^3 - \frac{4}{x} c x^4 = x^4 e^{-2x} \Rightarrow c' = e^{-2x}$ (3)

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Rightarrow y_{ip} = -\frac{x^4}{2} e^{-2x}$ (2)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C \cdot x^4 - \frac{x^4}{2} e^{-2x}$

(2)

an2z1100311/2.

4. feladat (15 pont)

a) Írja fel az

$$y' = 2x + x^2 + y^2$$

differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét! Rajzolja fel azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában!
Jelölje be az iránymezőt az $x_0 = 0, y_0 = -1$ pontban is!

b) Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(0, 0)$ ponton.
Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 0$ helyen?

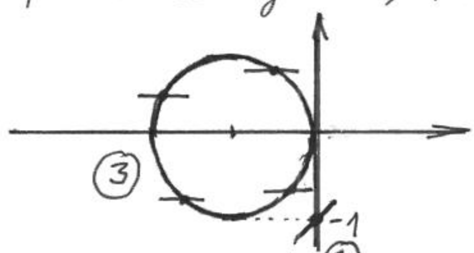
c) Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0 = 0$ pontbeli harmadik deriváltját!
$(y'''(0) = ?)$

a.) Az izoklinák: $2x + x^2 + y^2 = K$ (2)

$\boxed{6}$ $(x+1)^2 + y^2 = K+1$

A lok. szé. létezésének szükséges feltétele: $y' = 0 \Rightarrow K = 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$



$x_0 = 0,\ y_0 = -1:\ y'(0) = 1$

(3) (1)

b.) $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

$\boxed{5}$ $y'' = 2 + 2x + 2yy'$

$y''(0) = 2 + 0 + 0 = 2 > 0$, tehát $x_0 = 0$-ban lokális minimuma van, tehát nincs lokális maximum.

c.) $y''' = 2 + 2y'y' + 2yy''$

$\boxed{4}$ $y'''(0) = 2 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 2 = 2$

5. feladat (12+4+6=22 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' + y'' - 2y' = 10 \cos x$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását?

$$y''' + y'' - 2y' = 6 \operatorname{ch} 5x + 9x$$

(Nem kell megkeresnie!)

c) Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű, lineáris homogén valós konstans együtthatós differenciálegyenletet, amelynek megoldása: $y = 3x^2 + 4 \cos 3x$

a.) $\boxed{12}$

(H): $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda = \lambda(\lambda^2+\lambda-2) = \lambda(\lambda-1)\lambda+2)=0$

$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=-2$

$y_H = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$ 5 $\quad C_i \in \mathbb{R}$

$f(x) = 10 \cdot \cos x$

$y_{ip} = A\cos x + B\sin x$ 2 (nincs külső rezonancia)

$-2 \cdot | \; y'_{ip} = -A\sin x + B\cos x$

$1 \cdot | \; y''_{ip} = -A\cos x - B\sin x$

$1 \cdot | \; y'''_{ip} = A\sin x - B\cos x$

$\sin x\,(2A-B+A) + \cos x\,(-2B-A-B) = 10\cos x$

$\left.\begin{array}{l} 3A-B=0 \\ -A-3B=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-1, \; B=-3$

$y_{ip} = -\cos x - 3\sin x$ 3

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \cos x - 3\sin x$ 2

b.) $\boxed{4}$

$f(x) = (3e^{5x}) + (\cancel{3}e^{-5x}) + (9x)$

$y_{ip} = (Ae^{5x}) + (Be^{-5x}) + (Cx+D)x$

külső rez.

c.) $\boxed{6}$

x^2 miatt: $\quad \lambda_{1,2,3}=0$

$\cos 3x$ miatt: $\quad \lambda_{4,5} = \pm 3j$

$\lambda^3(\lambda-3j)(\lambda+3j) = \lambda^3(\lambda^2+9) = \lambda^5+9\lambda^3=0$

$y^{V} + 9y''' = 0$

6. feladat (16 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}\frac{1}{5^{n+1}}$$

c) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\; n!}{(2n)!}$$

a.) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és

$c<1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens

$c>1$ vagy $c=\infty \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens

$(\ c=1 \quad : \quad ?\ )$

3

b.) $\boxed{6}$ $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n \frac{1}{5\sqrt[n]{5}} = \left(1+\frac{-1/3}{n}\right)^n \frac{1}{5\cdot\sqrt[n]{5}} \to \frac{e^{-1/3}}{5} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}\cdot 5} < 1$

$\sqrt[n]{5} \to 1$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

c.) $\boxed{6}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!\,(2n)!}{(2n+2)!\;4^n\,n!} = \frac{4(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} \to 0 < 1$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

7. feladat (9 pont)

Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását! (Fejezze ki y-ra!)

$$y' - (\cos 2x)\, y = 2\cos 2x$$

$y' = (y+2)\cos 2x$

$y \equiv -2$ megoldás

$y \neq -2:\quad \int \frac{1}{y+2}\,dy = \int \cos 2x\,dx$

$\ln|y+2| = \frac{\sin 2x}{2} + C_1$

$|y+2| = e^{C_1}\, e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$

$y+2 = \pm e^{C_1}\, e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$

$y = -2 \pm e^{C_1}\, e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$ ill. $y\equiv -2$

$\Rightarrow\ y = -2 + C\, e^{\frac{1}{2}\sin 2x},\quad C\in\mathbb{R}$

8. feladat (11 pont)

$$f(n) = -\frac{1}{2} f(n-1) + \frac{1}{2} f(n-2)$$

a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!

b) Adja meg az $f(0) = 9$, $f(1) = 3$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

c) Írja fel az összes olyan megoldást, amelyre f(n)=o(1) (kisordo egy) teljesül!

a) $f(n) = q^n \quad (q \neq 0)$

$\boxed{6}$

$$q^n = -\frac{1}{2} q^{n-1} + \frac{1}{2} q^{n-2} \Rightarrow q^2 = -\frac{1}{2} q + \frac{1}{2}$$

$$q^2 + \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, \; q_2 = -1$$

$$f(n) = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 (-1)^n$$

b.) $f(0) = 9$: $\quad c_1 + c_2 = 9$

$\boxed{3}$ $f(1) = 3$: $\quad \frac{1}{2} c_1 - c_2 = 3$

$\Rightarrow c_1 = 8, \; c_2 = 1$

$$f(n) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n$$

c.) $f(n) = o(1) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(n) = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \; c_1 \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$

an2z11100311/6.