ANALÍZIS 2.	VIZSGADOLGOZAT	2014. június 5.
Mérnök-informatikus szak	BME, Mat. Int., Analízis Tsz.	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (13 pont)

Határozza meg az $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = e^x + \dfrac{e^{3x}}{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

2. feladat (7+4=11 pont)

a) Írja föl azt a legalacsonyabb rendű, lineáris, homogén, állandó együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $x\sin(2x)$ és az e^{3x} függvény! Írja föl az egyenlet általános megoldását!

b) Milyen alakban keressük az $y''(x) + y(x) = \sin(x)$ differenciálegyenlet partikuláris megoldását? (A megoldást nem kell meghatározni.)

3. feladat (4+8=12 pont)

Határozza meg a következő függvények 0 körüli Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Mindkét esetben adja meg elemi műveletekkel a x^4 együtthatóját!

$$a)\quad f(x) = \mathrm{ch}(3x^2), \qquad\qquad b)\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8+5x^2}}$$

4. feladat (3+4+5=12 pont)

a) Definiálja egy kétváltozós függvény határértékét (x_0, y_0)-ban!

b) Határozza meg a következő függvények határértékét a $(0,0)$-ban!

$$i)\quad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad\qquad ii)\quad g(x,y) = \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}.$$

5. feladat (3+3+6=12 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor az I intervallumon egyenletesen konvergens? (Mondja ki a definíciót!)

b) Mondja ki a függvénysor egyenletes konvergenciájára tanult elégséges kritériumot!

c) Bizonyítsa be a b) pontban adott állítást!

6. feladat$*$ (8+6=14 pont)

a) Ismertesse egy rajzon a gömbi polár koordinátákat! Számolja ki a gömbi polártranszformáció Jakobi-determinánsát! (Levezetéssel együtt!)

b)

$$\iiint_V x^3yz\,dV = ?, \qquad V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\in[0,\infty),\ \ x^2+y^2+z^2\le 4\}$$

7. feladat$*$ (3+4+6=13 pont)

Az $u(x,y) = \alpha x^3 - 3xy^2 - 2xy$ függvény egy $f(z)$ mindenütt reguláris komplex függvény valós része $(z = x+iy)$.

$$a)\quad \alpha = ? \qquad\qquad b)\quad f'(1-2i) = ? \qquad\qquad c)\quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = ?$$

8. feladat$*$ (3+10=13 pont)

a) Mikor mondhatjuk biztosan, hogy egy komplex függvény zárt görbére vett integrálja nulla? Nevezze meg és mondja ki a tanult tételt!

b)

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{\sin(2z)}{(z-2+i)^4}dz = ? \qquad \text{(Algebrai alakban!)}$$

A kört egyszer járjuk körbe pozitív irányban.

A $*$-al jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!