Sajátfelbontás

$A^{n\times n}$ C invertálható

acsa, ha sajátvektorai függetlenek (ndb)

$C=[s_1|s_2|\ldots|s_n]$ $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)$

↳ Mindig csökkenő a sorrend

$\Lambda=C^{-1}AC$

$\boxed{A=C\Lambda C^{-1}}$ $\Rightarrow\Lambda$ diagonális $\rightarrow$ Diagonizálás

Sajátérték és saját vektorok

$A^{n\times n}$ Karakterisztikus polinom: $\boxed{\det(A-\lambda I)}=0$

↳ Gyökei a sajátértékek. $\Rightarrow\lambda$

$\boxed{Ax=\lambda x}$ x vektor a λ-hoz tartozó sajátvektor

Sajátaltér: sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a nullvektor által kifeszített altér

↳ Annyi van, ahány sajátérték

↳ $\underline{A-\lambda I \text{ mátrix redukált alakja}}$ $\Rightarrow$ szabad paraméterekhez tartozó vektorok a bázisok

↳ s, t "oszlopok" ↳ különböző λ-hoz különböző saját alterek tartoznak

↳ MINDIG

Háromszög mátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata!

↳ Alsó/Felső/Diagonális

Spektrálfelbontás

$\Rightarrow$ Acsa, ha diagonizálható

$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\ldots+\lambda_kP_k$

$\sum_{k=1}^{k}P_k=I$ $P_iP_j=0$ ha $i\neq j$

P_i az $N(A-\lambda_iI)$ sajátaltérre való $O(A-\lambda_iI)$ altér menti vetítés

$A=C\Lambda C^{-1}$ $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_k\end{bmatrix}$ $C=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_k]$ $C^{-1}\begin{bmatrix}y_1^T\\ y_2^T\\ \vdots\\ y_k^T\end{bmatrix}$ $\Rightarrow P_i=x_iy_i^T$

↳ Bal sajátvektorok

jobb sajátvektorok

Cayley-Hamilton tétel

$A^{n\times n}$ diagonalizálható és felbontása $C\Lambda C^{-1}$

akkor $A^k = C\Lambda^k C^{-1}$ és p egy tetszőleges polinom $\Rightarrow p(A) = C\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & p(\lambda_2) & \\ & & p(\lambda_n)\end{bmatrix}C^{-1}$

$\chi_A(A) = 0$ ha χ_A az A mátrix karakterisztikus polinomja

Sajátérték multiplicitás

Algebrai $\Rightarrow$ Hányszor fordul elő egy adott λ a sajátértékek között

Geometriai $\Rightarrow$ Sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója

Akkor diagonalizálható ha minden alg. és geom. multiplicitás megegyezik

Mátrix sajátértékei hatványozáskor

$A \Rightarrow \lambda$ és x

$A^k \Rightarrow \lambda^k$ és x $\Rightarrow$ marad

Mátrixok definitsége

Kvadratikus alak

$x^T A x = f(x)$

Pozitív definit, ha $f(x) > 0$

Pozitív szemidefinit, ha $f(x) \geq 0$

Negatív szemidefinit, ha $f(x) \leq 0$

Negatív definit, ha $f(x) < 0$

Indefinit, ha $x \neq 0$ és $f(x) < 0$ és $f(x) > 0$ érték is van

$\Rightarrow$ U.ez, ha A szimmetrikus mátrixról beszélünk

Ekvivalensek: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimetrikus mátrix
- pozitív szemidefinit
- Van olyan pozitív szemidefinit B mátrix, hogy $A = B^2$ és B egyértelmű
- Van olyan C mátrix, hogy $A = C^T C$

1. Definitség sajátértékből $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

minden sajátérték pozitív $\Rightarrow$ pozitív definit

minden sajátérték nemnegatív $\Rightarrow$ pozitív szemidefinit

minden sajátérték negatív $\Rightarrow$ negatív definit

minden sajátérték nempozitív $\Rightarrow$ negatív szemidefinit

van negatív és pozitív sajátérték $\Rightarrow$ indefinit

Pozitív definit mátrixok faktorizációi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és szimmetrikus

Ekvivalensek:
- A pozitív definit
- LU felbontásban, minden főátlóbeli eleme U-nak pozitív
- Létezik R felsőháromszög mátrix, hogy főátlóbeli elemek pozitívak és $\boxed{A = R^T R}$

Egyértelmű $\Rightarrow$ Cholesky felbontás

- Létezik C valós és invertálható mátrix, hogy $\boxed{A = C^T C}$
- Létezik szimmetrikus és pozitív definit mátrix, hogy $\boxed{A = B^2}$ és ez egyértelmű

Cholesky felbontás

$$A = LU \Rightarrow U = D \cdot \hat{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & 0 \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = D^{\frac{1}{2}} \cdot L^T \qquad A = R^T R$$

Mivel D diagonális, ezért $D^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \dots, \sqrt{d_{nn}})$

$\Rightarrow$ LU felb. emlékeztető $\Rightarrow$ Hányszorosát vonom ki a sorból? #

U $\rightarrow$ felső h. mátrix

L $\rightarrow$ ~~felső~~ alsó h. mátrix

Ha R főátlóbeli elemei pozitívak, akkor invertálható $\Rightarrow$ $\boxed{C = R \Rightarrow C^T C \text{ felb-hoz}}$

$B = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T \Rightarrow$ sajátfelbontásból

$\Lambda^{\frac{1}{2}}$: $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots \sqrt{\lambda_n})$

Q: sajátvektorok

$\Rightarrow$ mivel $A^k = Q \Lambda^k Q^T$

Szinguláris érték, szinguláris vektor

r rangú $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\Rightarrow$ $\sigma \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ pozitív valós hogy ~~létez~~ $u \in \mathbb{R}^m$ és $v \in \mathbb{R}^n$
($u \neq 0$ és $v \neq 0$)

$$\boxed{Av = \sigma u \text{ és } A^T u = \sigma v}$$

$v \Rightarrow$ jobb szinguláris vektor
$u \Rightarrow$ bal szinguláris vektor

σ Multiplicitása s ha maximum s független $v_1 \dots v_s$ és $u_1 \dots u_s$ vektor létezik

Annyi szinguláris érték van, amennyi a mátrix rangja

Számítása

$\boxed{A^T A} \Rightarrow$ sajátértékek kiszámítása
↳ pozitívak $\Rightarrow$ gyökvonás $\Rightarrow$ csökkenő sorrendbe kell tenni!
↳ Hozzátartozó sajátvektorokból egységnyi hosszúak $\Rightarrow$ v vektorok
↳ $\boxed{Av = \sigma u}$ egyenlet kielégítésével kapjuk a hozzájuk tartozó u vektorokat.

Szinguláris felbontás

$A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ Ahol $\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$
$V_1 = [v_1 | v_2 | \dots | v_r]$ v_i vektor egységnyi
↳ sajátvektorokból az $A^T A$-ból
$U_1 = [u_1 | u_2 | \dots | u_r]$

$$\boxed{u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i}$$

$$A^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T$$

↳ Diag $\Rightarrow \frac{1}{\sigma_i}$ elemekkel a főátlóban

Vektornormák

Euklidészi norma:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

P norma $p \geq 1$ esetén

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

∞ norma/maximum norma

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \max_i |x_i|$$

Rácsnorma $\Rightarrow p = 1$

Mátrix normák

Frobéniuse norma $\Rightarrow$ (Kilapítja a mátrixot és veszi az euklidészi normáját)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}$$

$\|A\|_1 =$ Legnagyobb abszolút oszlopösszeg

$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\max_i \lambda}$

$\|A\|_\infty =$ Legnagyobb abszolút sorösszeg

Általánosított sajátvektor

$\boxed{x \neq 0 \,!}$

$(A-\lambda I)^k x = 0$ ha $k=1$ akkor $x \Rightarrow$ sajátvektor

Jordan lánc ha $(A-\lambda I)x_1 = 0$ és $(A-\lambda I)x_i = x_{i-1}$ $i = 1, 2, \dots k$

Jordan lánc számítása

$A-\lambda I$ mátrix hatványozása, amíg nullmátrixot nem kapunk $\Rightarrow (A-\lambda I)^k = 0$
$\hookrightarrow \lambda$ már legyen behelyettesítve!

~~Ahh~~ $(A-\lambda I)^{k-1} \cdot (x, y, z) \Rightarrow$ kapunk egy paraméterezett vektort $\Rightarrow$ válasszunk olyat, ami nem nullvektor és minél több benne a nulla ezlesz x_k

$(A-\lambda I) \cdot x_k = x_{k-1} \Rightarrow x_1$ esetén meg kell kapnunk a sajátvektor skalárszorosát

$\Rightarrow$ Kaptunk k db vektort $\Rightarrow$ Ez kell a jordan bázishoz

$X = [x_1 | x_2 | \dots | x_n]$ $X^{-1} A X = J$
$\hookrightarrow$ Jordan bázisban felírt alakja az A-nak
$\hookrightarrow$ Jordan blokkos alak kellene legyen

$$\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix} \dots$$

Ha a lánc nem elég hosszú, akkor vegyünk hozzá a másik sajátértéktől független vektort, ami $(A-\lambda I)y_1 = 0$ -et teljesíti

Jordan blokk

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$ alakú blokk

Jordan mátrix

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & O \\ & J_i \ddots & \\ O & & J_k \end{bmatrix}$$

Blokkdiagonális mátrix
↳ A többi elem 0

Minden $A \in C^{n \times n}$-hez létezik C, hogy ~~...~~ $J = C^{-1}AC$

Jordan felbontás

$A = CJC^{-1}$

Jordan normálalak

Random terek random hülyesége ⇒ mindig van olyan bázis, hogy A jordan mátrix.
↳ Egyértelmű, a blokkok sorrendjétől eltekintve.

Jordan láncok, hosszuk és a rang illetve J. normálalak

n_i jelöli az i hosszúságú jordan láncok számosságát ⇒ Egy adott λ sajátértékhez

$$\boxed{\begin{aligned} n_i &= \operatorname{rang}\left((A-\lambda I)^{i-1}\right) - n + a_\lambda \\ n_{i-1} + 2n_i &= \operatorname{rang}\left((A-\lambda I)^{i-2}\right) - n + a_\lambda \\ n_{i-2} + 2n_{i-1} + 3n_i &= \operatorname{rang}\left((A-\lambda I)^{i-3}\right) - n + a_\lambda \\ &\vdots \\ n_1 + 2n_2 + \dots (m-1)n_{m-1} + m n_m &= \cancel{n\ \text{rang}}\ a_\lambda \end{aligned}}$$

~~ha m a legkisebb rang~~

- Ha több sajátérték van, akkor mindegyikre van egy ilyen egyenletrendszer.
- Ha a_λ az λ sajátérték algebrai multiplicitása, akkor $\boxed{\operatorname{rang}\left((A-\lambda I)^i\right) = n - a_\lambda}$
- Jordan láncok száma: $\boxed{n - \operatorname{rang}(A-\lambda I)}$

Leghosszabb lánc hossza annyi, ahanyadik hatvány rang-ja 0 (vagy ismétlődni nem kezd?)
↳ több λ esetén
↳ Pl.: 5 2 1 0 rang esetén 4 a leghosszabb

Normálalakbeli blokkok mérete (és számossága

Adottak az n_i értékek ⇒ Normálalak n_i db i méretű blokkot tartalmaz. ⇒ Összes i-re

Mátrix polinomja

Jordan felbontás: $A = CJC^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ tetszőleges polinom.

$$p(A) = Cp(J)C^{-1} = C\begin{bmatrix} p(J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(J_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & p(J_k) \end{bmatrix} C^{-1}$$

Mátrixfüggvény a Jordan alakból

$A = CJC^{-1}$ ahol $J = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k)$ $\Rightarrow$ Jordan normálalak

$n_i = \mathrm{rend}(J_i)$

↳ mérete, nem a rangja

$$f(A) = C f(J) C^{-1} = C\,\mathrm{diag}(f(J_1), \dots, f(J_k)) \cdot C^{-1}$$

ahol

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & f(\lambda_i) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Mátrixfüggvény interpolációs polinommal

A mátrix μ_A minimálpolinomja és f függvény definiálva van A spektrumán.

Ekkor $f(x) := p(x)$, ahol $p(x)$ az a polinom, melynek foka $\boxed{\text{kisebb}}$, mint μ_A foka.

↳ legalább 1-el!

és $p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ $\quad i = 1, \dots, k$

↳ ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó Jordan blokk rendje (mérete) ($\Rightarrow$ milyen hosszú a leghosszabb Jordan lánc)

$p \Rightarrow$ Hermite-féle interpolációs polinom

Ha minden sajátérték 1x-es alg. mult.

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$$

Csak 1 sajátérték és nx-es alg. mult.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{f^{(j)}}_{\text{derivált}}(\lambda) \frac{(x-\lambda)^j}{j!}$$

Van ált. képlet is, de túl bonyi!

(471. lap alja)

Hermite féle polinom keresése:

Deriváltban helyettesítünk ← Csak λ értékeinél kell teljesüljön

m_A-nál eggyel kisebb ált polinom, ami kielégíti a $p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$ deriváltakat

↳ Annyi derivált, mint a $\boxed{\text{legnagyobb Jordan blokk} - 1}$ ⇒ Kis mátrixnál elég 1-2x deriválni

↳ Megkapjuk a polinom együtthatóit ⇒ helyettesítsük be a mátrixot és megkapjuk az eredményt.

A pozitív, ha minden eleme pozitív | $a_{ij} > 0$

A primitív, ha van olyan hatványa, ami pozitív | $\exists k, \forall i,j \; a_{ij}^{(k)} > 0$

A irreducibilis, ha minden cellájához van olyan hatvány, hogy az pozitív | $\forall i,j \Rightarrow \exists k \; a_{ij}^{(k)} > 0$

A reducibilis, ha van olyan cellája ami minden hatvány esetén 0 | $\exists i,j \; \forall k \; a_{ij}^{(k)} = 0$

Spektrálsugár $|\max_i |\lambda_i|| = \varrho(A)$ ⇒ Legnagyobb abszolútértékű sajátérték abszolútértéke

Perron vektor

Pozitív mátrix spektrálsugarához, mint sajátértékhez tartozó p sajátvektora, aminek ~~hossza 1 ⇒ Normalizált sajátvektor.~~ koordinátáinak összege 1.

↳ bal Perron vektor ⇒ bal sajátvektor alapján.

Perron tétel Ha A pozitív és r a spektrálsugara ($\varrho(A)$), akkor

- az r sajátérték algebrai multiplicitása 1.
- r domináns, azaz nagyobb, mint a többi sajátérték abszolútértéke $\boxed{|\lambda| < r}$

Perron-Frobénius-tétel

Ha A nemnegatív, akkor $r = \varrho(A)$ spektrálsugár sajátértéke A-nak és tartozik hozzá nemnegatív sajátvektor.

min sorösszeg $\leq \varrho(A) = r \leq$ max sorösszeg

min oszlopössz. $\leq \varrho(A) = r \leq$ max oszlopösszeg

$$\lim_{k \to \infty} (A/r)^k = \boxed{\frac{p q^T}{q^T p}}$$

p ⇒ Perron vektor ⇒ 1 koordináta összegű sajátvektor

q ⇒ bal Perron vektor ⇒ 1 kord. összegű bal sajátvektor

$$\Vert \quad \lim_{k \to \infty} \frac{I + A/r + (A/r)^2 + (A/r)^{k-1}}{k}$$

Reducibilis mátrixok

$\boxed{A \text{ nem negatív}}$!

A csa reducibilis, ha $\begin{bmatrix} X & Y \\ O & Z \end{bmatrix}$ hozható úgy, hogy X és Z négyzetesek

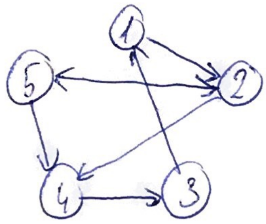
$\Rightarrow$ $P \cdot A P^T$ lesz ilyen alakú $\Rightarrow$ Létezik ilyen P permutáló mátrix

Különben a mátrix irreducibilis

Szomszédsági gráf

Ha a_{ij} pozitív $\Rightarrow$ vezet út i-ből j-be

Pl.: $\begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}$



$\Rightarrow$ Erősen összefüggő $\Rightarrow$ Irreducibilis

↳ Nincs hozzá megfelelő permutációs mátrix

<u>Primitív</u>, ha bármely két csúcs között van k hosszú út → hurokél is számít!

<u>Irreducibilis</u>, ha bármely két csúcs között van út. (Erősen összefüggő)

<u>Reducibilis</u>, van olyan két csúcs, amik között nincs út

Ha irreducibilis és főátlóban van pozitív elem, akkor <u>Primitív</u> is