Biomechanika

2016. 03. 17.

„A mai lesz a legnehezebb."

Rugalmasságtan:

q : teher

eltolódások: $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ } eltolódás mező → alakváltozások (mennyiségek)

$\xleftrightarrow{G}$

teher: $q_x(x,y,z)$, $q_y(x,y,z)$, $q_z(x,y,z)$

ST → feszültségek

egyensúlyi egyenletek

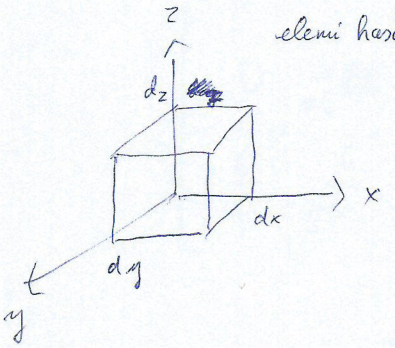
~~feszültségek~~

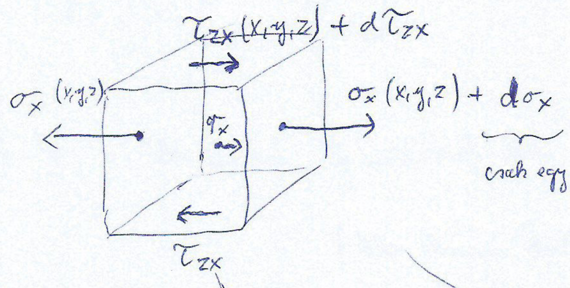
alakváltozások		feszültségek
$\varepsilon_x(x,y,z)$	$\xleftrightarrow{A}$	$\sigma_x(x,y,z)$
$\varepsilon_y(x,y,z)$		$\sigma_y(x,y,z)$
$\varepsilon_z(x,y,z)$		$\sigma_z(x,y,z)$
$\gamma_x(x,y,z)$		$\tau_{xy}(x,y,z)$
$\gamma_y(x,y,z)$		$\tau_{yz}(x,y,z)$
$\gamma_z(x,y,z)$		$\tau_{zx}(x,y,z)$

egyenletben

Egyensúlyi egyenletek:

elemi hasáb





csak egy nö vektorral jelezzük

x irányú

x-irányú erők egyensúlya:

$$\Sigma F_{ix}: \; q_x \cdot dxdydz \cancel{- \sigma_x dydz}$$

$$+ (\cancel{\sigma_x} + d\sigma_x)\, dydz$$

$$\cancel{- \tau_{yx} \cdot dxdz}$$

$$+ (\cancel{\tau_{yx}} + d\tau_{yx})\, dxdz$$

$$\cancel{- \tau_{zx}\, dxdy}$$

$$+ (\cancel{\tau_{zx}} + d\tau_{zx}) \underbrace{dxdy}_{} = 0$$

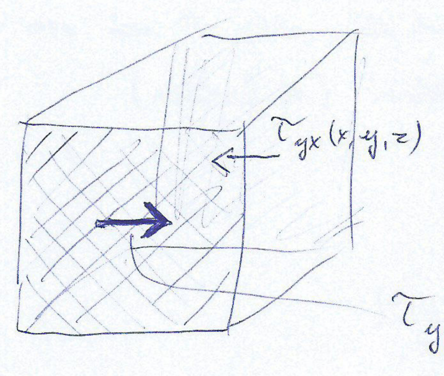
jobbra mutató (+) feszültség

y-normálisú síkon van egy balra mutató erő

alsó meg felső lap

dx-dy felületen oszlik meg

előlap és hátlap maradt ki



- mindkét oldalt leosztunk $dx \cdot dy \cdot dz$-t
- $\lim_{dx \to 0,\, dy \to 0,\, dz \to 0}$ határértéket veszünk

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \\ q_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ q_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}}$$

csak a betűket kell cserélni!

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

röviden:

$$\underline{\underline{L}}^* \vec{\sigma} + \vec{q} = 0$$

$$\underset{3\times 6}{\underline{\underline{L}}^*} \quad \underset{6\times 1}{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}} \quad \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}} \quad \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

vetületi egyenletek
(csak x irány, csak y irány, csak z irány)

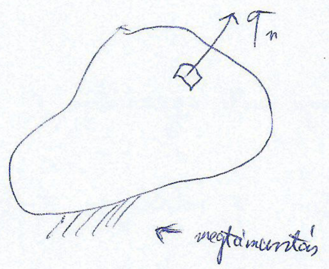
$\underline{\underline{L}}^*$ operátor mátrix:

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & xy & yz & xz \end{array}$$
$$\underset{3\times 6}{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}$$

$\partial\sigma$

perem azon részén, ahol feszültséget írunk elő: $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{q}_n$

(lehet, hogy 0-t írunk elő)



olyan perem is lehet, ahol elmozdulást írunk elő
de ha valahol erőt írunk elő, akkor ott már nem lehet
elmozdulást is előírni (és fordítva)

Geometriai egyenletek:

$$\varepsilon_x(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \underline{\underline{L}} \cdot \vec{u}} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & & \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

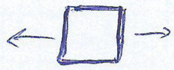
(homogén, izotróp, időfüggetlen anyag) + (lineárisan rugalmas)

└ kétszer akkora feszültségre kétszer akkora alakváltozás

Anyagegyenletek:

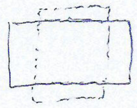
$$\vec{\varepsilon} = \underline{\underline{H}}\,\vec{\sigma}$$ Általánosított Hook-törvény.

anyagi hajlékonysági / engedékenységi mátrix



$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$

harántkontrakció:



csökken a keresztmetszet, ha nyújtjuk

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix}$$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\cdot\varepsilon_x$

ν = Poisson-tényező

$\nu \leqq 0{,}5$ térfogat nem változik

gyakorlatilag $\nu < 0{,}5$

(gumikkal jól közelíthető a 0,5)

$\tau = G\cdot\gamma$ nem befolyásol más irányt

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\ ; \quad \vec{\sigma} = \underline{\underline{D}}\,\vec{\varepsilon}\ ; \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{H}}^{-1}$$

anyagi merevségi mátrix — inverznek létezni kell

„hajléktalansági mátrix" :)

15 menő:

3+6+6 = 15 egyenlet, 15 ismeretlen

15 függvény: feszültségek (σ_{xyz}, τ_{xyz})

alakváltozások ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$)

~~egyensúlyi~~ egyenletek

elmozdulás (u, v, w)

geometriai egyenletek (6 db) helyett kompatibilitási egyenletek felírása (3 db)

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z} = \ldots$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x} = \ldots$$

$$2\cdot\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$2\cdot\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\,\partial z} = \ldots$$

$$2\cdot\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y} = \ldots$$

EGYENÉRTÉKŰ

mindegy, melyiket írjuk fel

15 egyenlet megoldása :

1) Elmozdulás - módszer : az elmozdulásokat tekintjük ismeretlennek

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \cdot \vec{u} \;;\quad \vec{\sigma} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \vec{u} \;;\quad \underline{\underline{L}}^{*} \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{L}}\, \vec{u} + \vec{q} = 0 \rightarrow \text{egyensúlyi egyenlet}$$

elmozdulás

2) Erő - módszer : egyensúlyi egyenletek megoldása (maradék paraméterek) → feszültségek

ezt továbbvezetjük az anyagegyenletbe → alakváltozások

felírjuk a kompatibilitási egyenleteket, kész → kompatibilitási egyenlet

---

~~egyen.~~

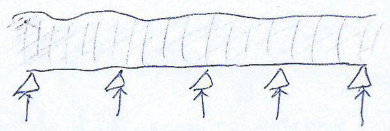
Koncentrált erőt nem lehet beírni az előző egyenletekbe (∞ teher lenne)

⇒ Munka- és energiatételek :

Általánosított erők : külső + belső erők
megoszló + koncentrált
nyomatékként megjelenő erők

Általános elmozdulások :
elmozdulások (eltolás, forgás)
alakváltozások

statikailag lehetséges erőrendszer : amely az egyensúlyi feltételeket teljesíti

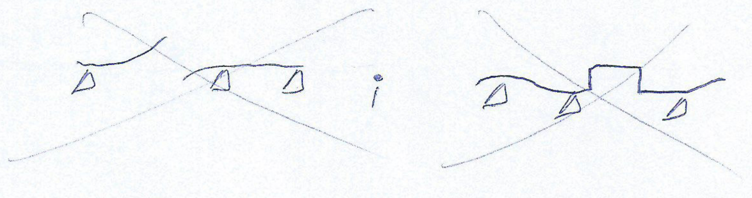


Statikailag határozatlan erőrendszer.
Nem tudjuk, hogy fog kialakulni az erők.

geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer : (az előző duális párja)

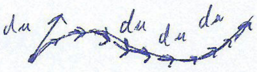
amely teljesíti a geometriai peremfeltételeket és geometriai egyenleteket

Ne legyen a gerendában törés, szakadás.



Általánosított erőrendszer munkája :

teljes munka : $W = W_{külső} + W_{belső}$



$$W_{külső} = \iint\limits_{V\,0}^{\vec{u}} \vec{q}^{\,T} \cdot d\vec{u}\, dV$$ (u = elmozdulás állapota, a 0-tól egy $\vec{u}$ végső állapotba)

$$+$$

$$\iint\limits_{S_\sigma\,0}^{\vec{u}} \vec{q}_n^{\,T}\, d\vec{u}\, dS + \int\limits_{S_n} r^T \cdot u\, dS$$

S_u ?

$$W_{belső} = -\iint\limits_{V\,0}^{\vec{\varepsilon}} \vec{\sigma}^{\,T} \cdot d\vec{\varepsilon}\, dV$$

Miért kisebb? Erő – ellenerő.

kiegészítő munka : $\tilde{W} = \tilde{W}_{külső} + \tilde{W}_{belső}$

$$\tilde{W}_{külső} = \iint\limits_{V\,0}^{\vec{q}} \vec{u}^{\,T} d\vec{q}\, dV \ldots$$

$$\tilde{W}_{belső} = -\iint\limits_{V\,0}^{\sigma} \vec{\varepsilon}^{\,T} d\vec{\sigma}\, dV$$

4 tételt fogunk használni :

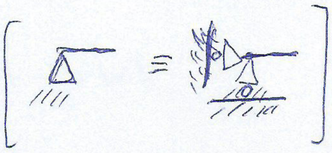
1) virtuális elmozdulások tétele :

- virtuális elmozdulás = tényleges elmozdulásrendszer egy geometriailag lehetséges variációja (tetszőlegesen kicsi elmozdulás is lehet)

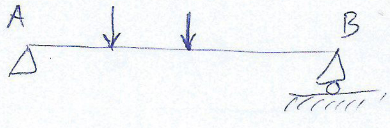
Statikailag lehetséges erőrendszer bármely virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája 0. „virtuális munka"

$\delta W = 0$

Használata : erő jellegű mennyiségek meghatározása.



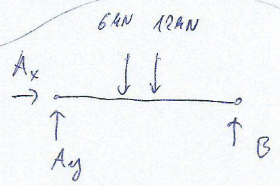
$\boxed{\text{Pl.}}$



Csak a függőleges erők meghatározása.

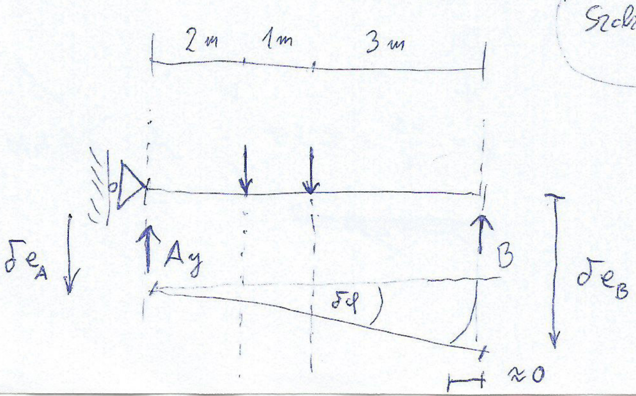
A_y, B ?

Szokásos módon (tartó elhülönítése) :

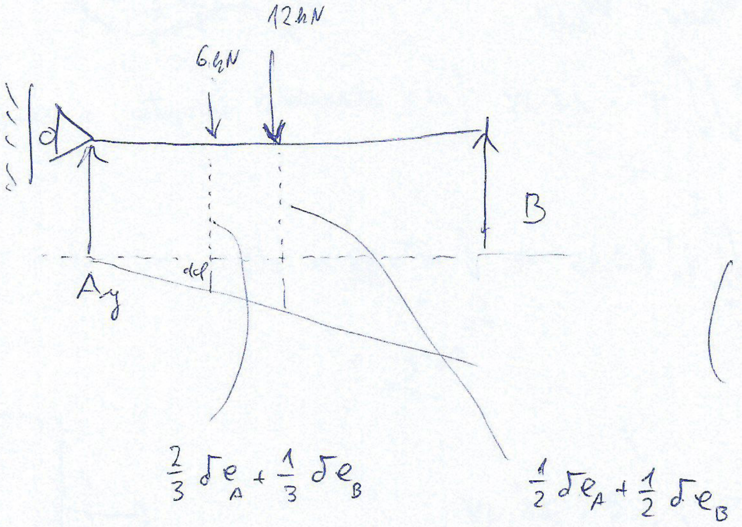


$\Sigma M_i^{(A)}: \; 6\cdot 2 + 12\cdot 3 - B\cdot 6 = 0 \;\rightarrow\; B = 8\,kN$

$\Sigma M_i^{(B)}: \; -6\cdot 4 - 12\cdot 3 + A_y\cdot 6 = 0 \;\rightarrow\; A_y = 10\,kN$



$\delta e_A, \delta e_B$: virtuális elmozdulások folytatás (virtuális):



$$\left(\begin{array}{l} d\varphi << 1 \\ tg\,\varphi \approx \varphi \end{array} \right)$$

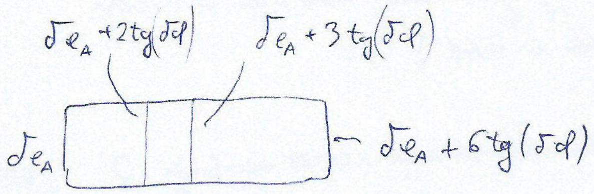
$$\delta W = -A_y \cdot \delta e_A + 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\delta e_A + \frac{1}{3}\delta e_B\right) + 12\left(\frac{1}{2}\delta e_A + \frac{1}{2}\delta e_B\right) - B\,\delta e_B = 0$$

$$\Rightarrow \delta e_A(-A_y + 4 + 6) + \delta e_B(2 + 6 - B) = 0$$

bármilyen δe_A és δe_B esetén teljesülnie kell:

$\delta e_A = 0 \rightarrow \delta e_B(2+6-B) = 0 \Rightarrow B = 8$ kN ✓

$\delta e_B = 0 \rightarrow \delta e_A(-A_y+4+6) = 0 \Rightarrow A_y = 10$ kN ✓



$\delta\varphi << 1 \rightarrow tg\,\delta\varphi \approx \delta\varphi$

$$\delta W = -A_y \cdot \delta e_A + 6(\delta e_A + 2\delta\varphi) + 12(\delta e_A + 3\delta\varphi) - B(\delta e_A - 6\delta\varphi) = 0$$

$$\delta e_A \underbrace{(-A + 6 + 12 - B)}_{0} + d\varphi \cdot \underbrace{(12 + 12 \cdot 3 - B \cdot 6)}_{0} = 0$$

y irányú vetületi egyenlet

$\downarrow$

$B = \frac{48}{6} = 8$ kN ✓ ; $A = 10$ kN ✓

~~A = 4 kN~~ ?

2) virtuális erők tétele:

- virtuális erő = egy virtuális erőrendszer a tényleges erőrendszernek egy kicsiny, de statikailag lehetséges variációja.

(legyen egyensúly)

Egy geometriailag lehetséges ~~erőrendszer~~ elmozdulásrendszer akkor a tényleges, ha bármely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája 0.

$$\delta\tilde{W} = \underbrace{\vec{u}^T \cdot \delta\vec{q}} - \int_V \vec{\varepsilon}^T \cdot \delta\vec{\sigma} \cdot dV = 0$$

Egy-egy elmozdulást számolhatunk.

mivesenek integrálok, nem koncentrált erők

$$\iint_{V\,0}^{\vec{q}} \vec{u}^T d\delta\vec{q}\; dV \quad 1.$$

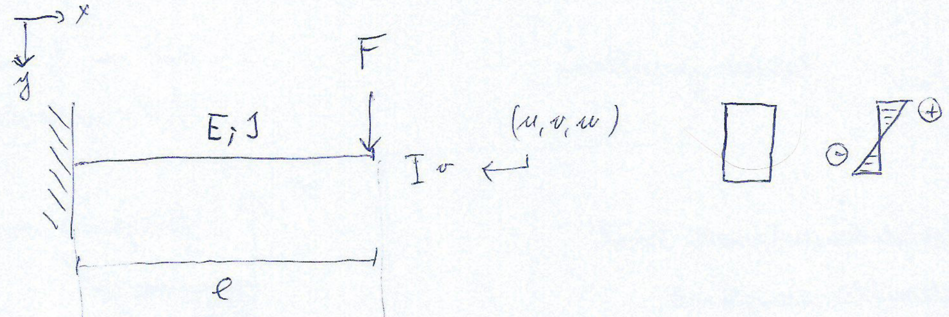
$$\int_V \vec{u}^T \delta\vec{q}\; dV \quad 2.$$

$$\vec{u}^T \cdot \delta\vec{f} \quad 3.$$

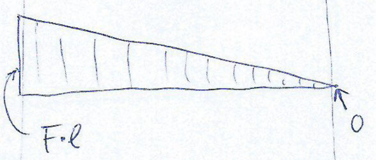
$$\underbrace{\vec{u}^T \cdot \delta\vec{f}}_{u \cdot \delta F} = \int_V \vec{\varepsilon}^T \cdot \delta\vec{\sigma}\; dV$$

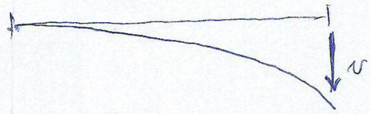
kérdéses pont elmozdulása

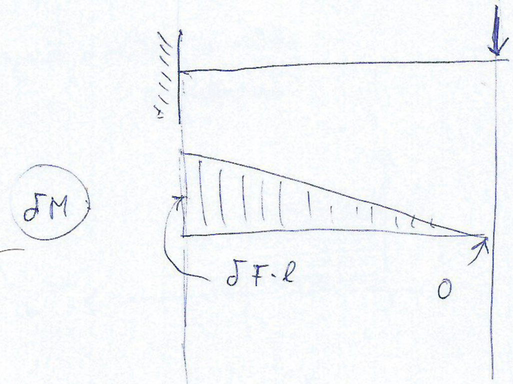
Pl.



M: hajlító nyomaték







térfogat

$$V \cdot \delta F = \int_V \varepsilon_x \delta\sigma_x \; dV = \iint_{l\,A} \frac{M_z}{J_z E} y \cdot \frac{\delta M_z}{J_z} \cdot y \cdot dA \cdot dl$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z y}{J_z \cdot E}$$

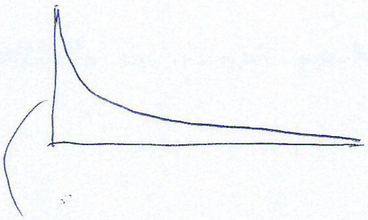
Hook-törvény

$$\delta\sigma_x = \frac{\delta M_z}{J_z} \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$V \cdot dF = \int_l \left(\frac{M_z \, \delta M_z}{E \cdot J_z \cdot J_z} \cdot \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{J_z} \right) dl$$

$$VdF = \int_l \frac{M_z \, \delta M_z}{E J_z} \, dl$$



$F\,dF \cdot l^2$

$$V\,dF = \frac{1}{E J_z} \cdot \frac{1}{3} \cdot F\,dF\,l^2 \cdot l$$

ha $dF \neq 0$, akkor: $V = \frac{F l^3}{3 E J_z}$

virtuális elmozdulásnak beírhatunk bármit dF-nek

pl. legyen $dF = 1$

---

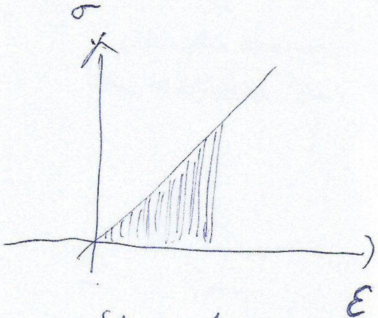
3) potenciális energia szélsőérték tétele (stacionaritási tétele):

$\Pi = \Pi_{külső} + \Pi_{belső}$ munkavégző képesség

potenciál (Π)

$\Pi_{külső} = -W_{külső}$

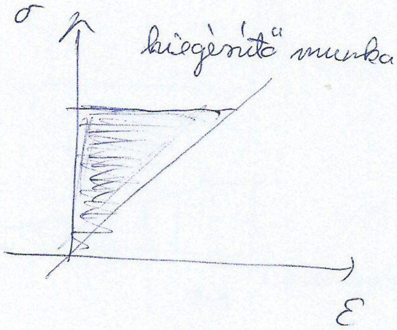
$\Pi_{belső} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma}(\vec{\varepsilon})\, dV$ - belsőenergia-változás

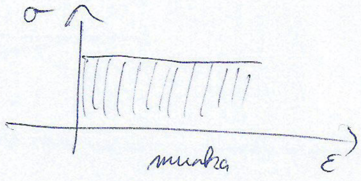


ezért van $\frac{1}{2}$-es szorzó
(W = görbe alatti terület)

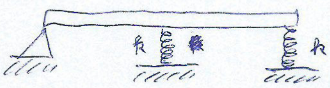
TÉTEL:
geometriailag lehetséges elmozdulásrendszerek közül az a tényleges, melynél a potenciális energiának stacionaritási pontja van.

Használata: egyensúlyi helyzet meghatározása





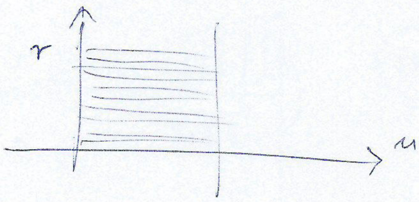
ebben az esetben a kiegészítő munka = 0



az elmozdulást jellemző paraméterek ~~...~~ függvényében felírjuk a potenciális energiát: $\Pi(c_1, c_2 \dots)$

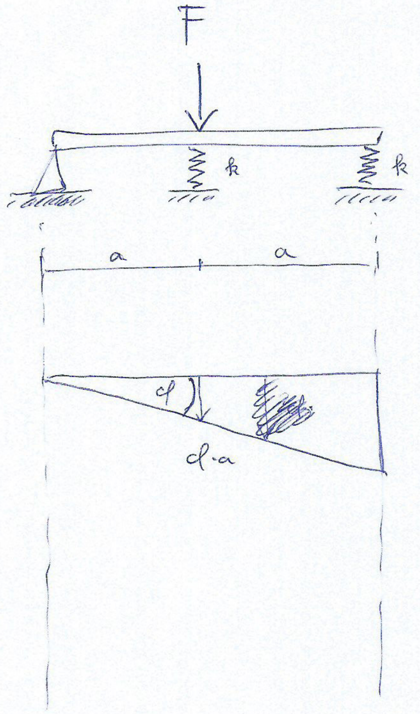
$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = \dots = 0 \Rightarrow c_1 = ?\ c_2 = ?\ \dots$

$\Pi_{belső} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2$



erőnek az elmozdulással végzett munkája

$$\Pi_{belső} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2$$

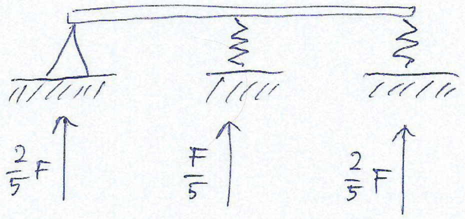


$$\Pi(\varphi) = -F\varphi a + \frac{1}{2}k(\varphi a)^2 + \frac{1}{2}k(\varphi 2a)^2$$

$$= -F\varphi a + \frac{5}{2}k\varphi^2 a^2$$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0 \Rightarrow -Fa + 5ka^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{F}{5ka}$$ (valamelyik helyére 0-t helyettesítettünk)



---

4) Kiegészítő potenciális energia minimumtétele:

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_{külső} + \tilde{\Pi}_{belső}$$

$$\tilde{\Pi}_{külső} = -\tilde{W}_k$$

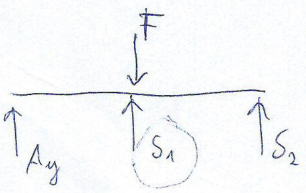
$$\tilde{\Pi}_{belső} = \frac{1}{2}\int_V \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{\sigma})\, dV$$

A statikailag lehetséges erőrendszerek közül az a tényleges, ~~amelyik~~ amelynél a kiegészítő potenciális energiának minimuma van.

Statikailag határozatlan rendszerek számítására alkalmas.

$$\tilde{\Pi}_{belső} = \frac{1}{2}\frac{S^2}{k}$$ / rugóerő^2 ; $S = k \cdot \Delta l$

Pl.



$$\Sigma M_i^{(A)}: \cancel{Fa} \; Fa - S_1 a - S_2 \cdot 2a = 0 \rightarrow S_2 = \frac{F - S_1}{2}$$

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{S_1^2}{k} + \frac{1}{2}\frac{\left[(F - S_1)/2\right]^2}{k}$$ minimuma?

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2k}\left(S_1^2 + \frac{S_1^2}{4} - \frac{2FS_1}{4} + \frac{F^2}{4}\right)$$

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2k}\left(\frac{5}{4}S_1^2 - \frac{1}{2}FS_1 + \frac{F^2}{4}\right)$$

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dS_1} = \frac{1}{2k}\underbrace{\left(\frac{5}{2}S_1 - \frac{F}{2}\right)}_{0} \Rightarrow S_1 = \frac{F}{5}$$

$$:= 0$$

(minimum)

Biomechanika

2016.03.24.

$\boxed{\text{jövő héttől D327-ben lesz az óra!}}$

I Anyagmodellek:

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x \quad ; \quad \underbrace{\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\varepsilon}}_{\text{általánosított Hooke-törvény}}$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

- időfüggetlen anyag: $\sigma(\varepsilon)$
- időfüggés figyelembe vétele: $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, $\varepsilon(\sigma, \dot{\sigma})$ $\left(\dot{\varepsilon} = \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)$
- terheléstörténet (korábbi terhelés hogyan befolyásol): rugalmas, rugalmatlan anyagmodell

rugalmas: a testszerkezet visszanyeri 100%-ban eredeti alakját

rugalmatlan: maradó alakváltozások

Időfüggetlen, rugalmas anyagok:

Terhelés - tehermentesítés után visszanyeri az eredeti alakot.

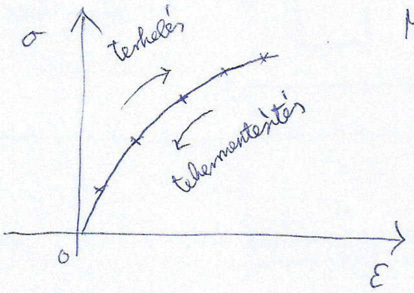
A feszültségek csak az anyagváltozásoktól függenek.

$$\sigma_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\sigma_y(-\text{"}-) \; ; \; \sigma_z(-\text{"}-)$$

$$\tau_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_y(-\text{"}-) \; ; \; \tau_z(-\text{"}-)$$



Mindig ugyanazokat a pontokat érinthetjük.

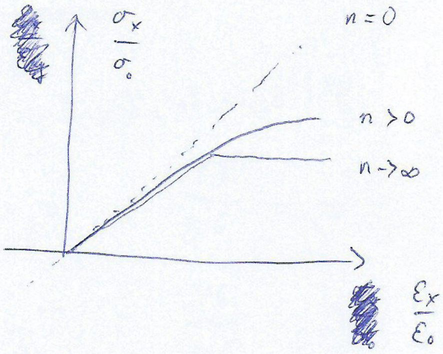
$$\sigma_x = C\,\varepsilon_x^n$$

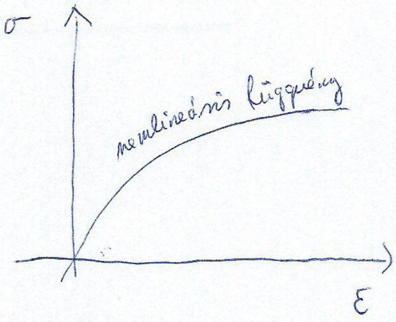
→ paraméter-illesztéssel meghatározható C és n

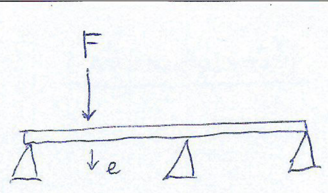
C: konstans

Lambert-O. modell: $$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_x}{\sigma_0} + \frac{3}{7}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)^n$$

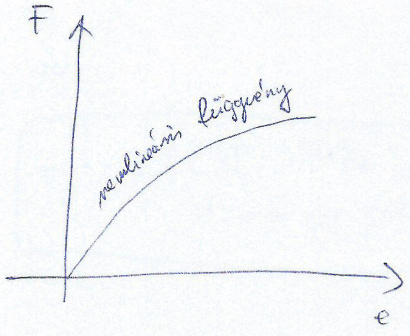
R?







e : kis elmozdulás



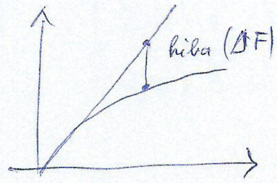
Az ilyen feladatokat numerikusan, több lépésben oldjuk meg. (Először $\frac{1}{10}F$, aztán $\frac{2}{10}F$, ... $\frac{10}{10}F$.)

Végtelenül kicsi részen: $\Delta\sigma_x^i = E_t \cdot \Delta\varepsilon_x^i$ (i = i. lépésben érvényes)

$$E_t(\varepsilon_x)$$

Másik módszer: linearitás ellenőrzése.

Mindig az érintővel megyünk tovább.

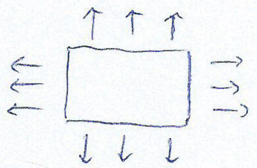


kiegyensúlyozatlan erő (ΔF)

Newton-Raphson-féle iteráció.

$$\Delta\sigma_x = E_x \cdot \Delta\varepsilon_x + E_{xy} \cdot \Delta\varepsilon_y$$
$$\Delta\sigma_y = E_{yx} \cdot \Delta\varepsilon_x + E_y \cdot \Delta\varepsilon_y$$

NÖVEKMÉNYES ANYAGMODELL

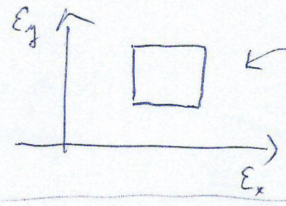


Mérjük $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ alakváltozásokat, kimérjük $\underbrace{E_x, E_y}_{\text{rugalmassági modulusok}}$ konstansokat.

E_x, E_{xy}, E_{yx}, E_y felírása $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ függvényeként, ez alapján megadható az anyagmodell.

Úgy kell megválasztani E_x, E_{xy}, E_{yx}, E_y értékét, hogy statikailag lehetséges legyen.

↳ ne csináljunk örökmozgót



vissza kell érkezni a kiindulópontba

Hiperelasztikus anyagmodell:

minden rugalmas anyag kezelhető hiperelasztikusként

Alakváltozási sűrűségi függvény rendelhető a modellhez. $\Psi(\underline{\varepsilon})$

energiasűrűségi

$\Psi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ térfogategységre jutó energia

$$\sigma_x = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_y}; \quad \sigma_z = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_z}$$

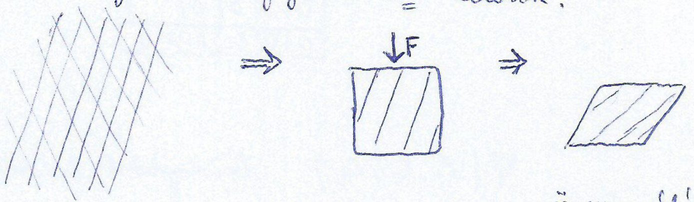
$$\tau_{xy} = \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{xy}}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{yz}}; \quad \tau_{zx} = \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{zx}}$$

Általánosított Hook-törvény : $\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\varepsilon}$

$$\Psi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{D}} \, \underline{\varepsilon}$$

Bármilyen, $\underbrace{\text{nem izotróp}}$ anyag esetén is, de lineárisan rugalmas anyagnál $\underline{\underline{D}}$ létezik.

iránytfüggő : pl. kompozit anyag



összenyomódás + szögtorzulás

Síkbeli eset :

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

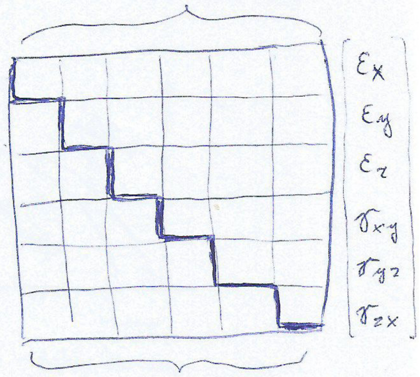
akár minden eleme lehet $\neq 0$

szimmetrikusnak kell lennie

$$F_{ij} = C_{ijkl} \cdot \underline{A}_{kl}$$

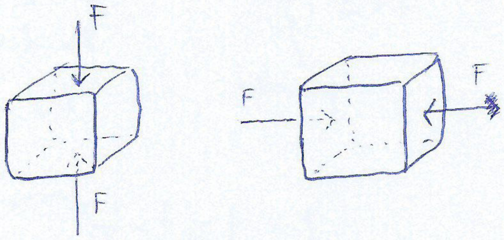
anyagváltozás tenzor

D mátrix teli is lehet (nincs benne 0 elem) :



szimmetria miatt ezek ugyanolyanok, ismertek

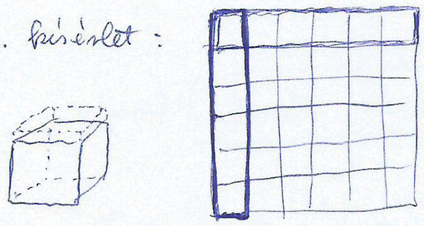
21 értéket kell mérni



a két összenyomásból származó ismeretlenek nem függetlenek, elég csak az egyiket elvégezni!

kapcsolat van a két ~~egy~~ alakváltozás között

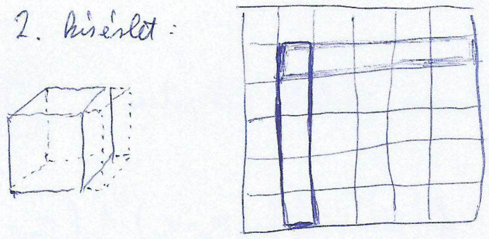
1. kísérlet :



6 + 6 paraméter meghatározása

szimmetria miatt

2. kísérlet :



már csak 5 paramétert tudunk meghatározni

Ortotróp anyag (legegyszerűbb): 3 egymásra merőleges szimmetriasíkja van

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & 0 & 0 & 0 \\ \; & \; & \; & 0 & 0 & 0 \\ \; & \; & \; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \; \end{bmatrix}$$

Elég 8 anyagi paraméter, ami bizonyos körülmények között lecsökkenthető 5-re, izotróp anyag esetén pedig 2-re.

$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ főirányokkal felírható

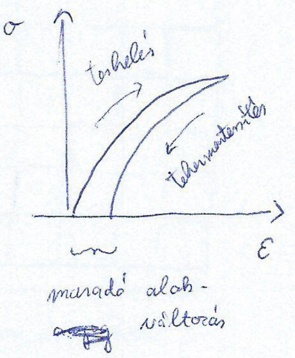
$\tilde{\Psi}(J_1', J_2', J_3')$ invariánsokkal is

nehézség: τ_{xy} meghatározásához parciális deriválásokat kellene végezni

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_1'} \cdot \frac{\partial J_1'}{\partial \gamma_{xy}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_2'} \cdot \frac{\partial J_2'}{\partial \gamma_{xy}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_3'} \cdot \frac{\partial J_3'}{\partial \gamma_{xy}}$$

ENNYIT AZ IDŐFÜGGETLEN, RUGALMAS ANYAGOKRÓL

Időfüggetlen, terheléstörténettől függő: – KÉPLÉKENY



A viselkedése ~~felírható~~ felbontható két állapotra: rugalmas / képlékeny

Folyási feltétel: $\cancel{f(\sigma_{ij}}$

$f(\underline{\sigma}, k)$

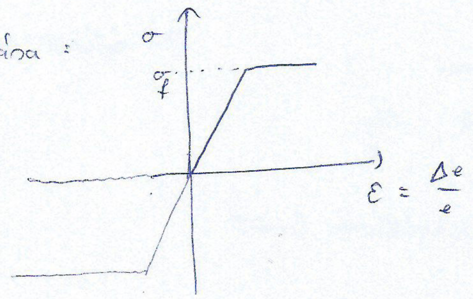
↑ paraméter

ha $f < 0$: rugalmas

ha $f = 0$: képlékeny

($f > 0$ lehetetlen)

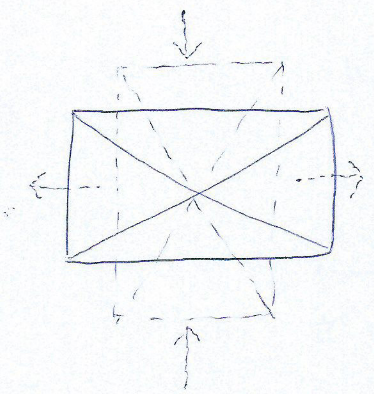
pl. acél nyújtása:



$f = |\sigma_x| - \sigma_f$ folyási feszültség

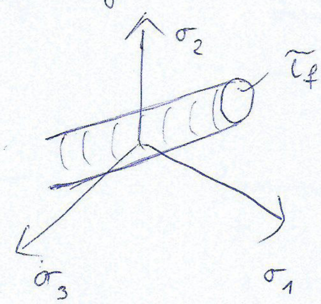
Általánosan, térbeli állapotra: Huber – Mises – Hencky törvény

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \tau_f^2$$



az átlók is szögtorzulást szenvednek

Főfeszültségek térben



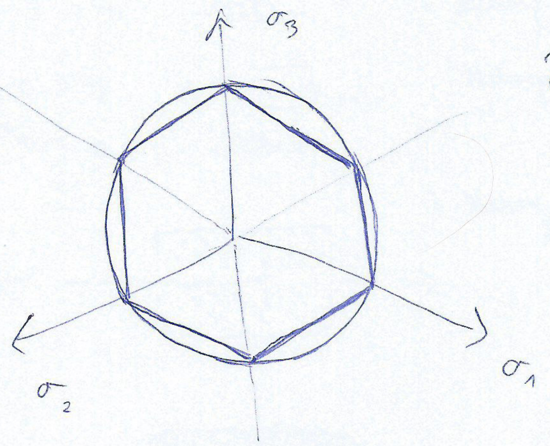
?

Tresca : $f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_f^2$

$f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau_f^2$

$f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4\tau_f^2$

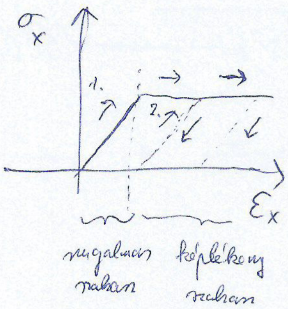
a Tresca-féle f nem egyezik meg a Huber-Mises-Hencky-féle f-fel.



Hatszög metszetű prizmatikus hasáb.

(az egyik a Tresca-féle,
a másik a H-M-H-féle)

/ képlékeny anyagok, folyásfeszültségek /

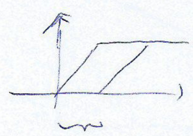


egyszerűsített modell

Folyási függvények :

- rugalmas állapot : $f < 0$
- képlékeny állapot : $f = 0$

passzív képlékeny állapot	aktív képlékeny állapot
$df < 0$	$df = 0$
$d\sigma \sim d\varepsilon$ arányos	$d\sigma$ korlátozott
	$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}^r + d\varepsilon^p$
	$d\varepsilon^r \sim d\sigma$

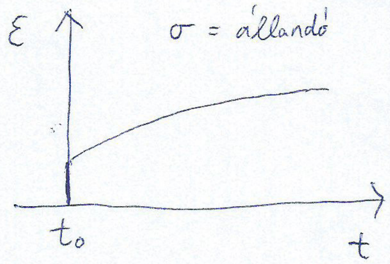


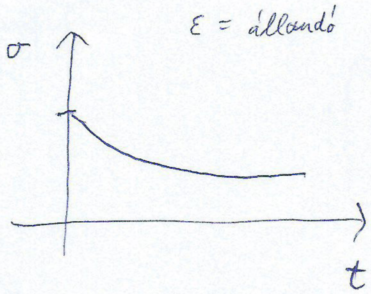
(p = plaszticitás)

(r = rugalmas)

$d\varepsilon^p$: a képlékeny alakváltozás növekménye → ebből lesz a maradó alakváltozás
→ $d\varepsilon^p$ merőleges a folyási függvény érintősíkjára

Időfüggő viselkedés:





azonos feszültség mellett az alakváltozás növekszik → kúszás

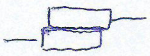
pl. betonnál minél korábban terheljük, annál nagyobb lesz a kúszás

kifeszítünk valamit, majd így hagyjuk, idővel egyre kisebb feszültség lesz → relaxáció ernyedés

/ 3. lehetőség: ha a terhelés változik – ezzel nem foglalkozunk /

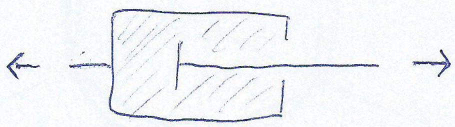
Viszkózus anyagmodell:

rugalmas anyagmodell:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

képlékeny anyagmodell:  μ $\sigma < \sigma^{max} \rightarrow \varepsilon = 0$

súrlódás $\sigma = \sigma^{max} \rightarrow d\varepsilon$

viszkózus anyagmodell:

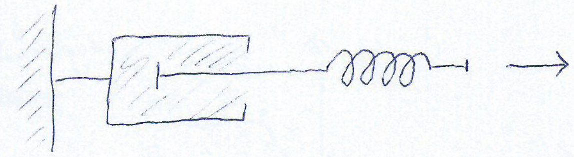


$\sigma \sim \dot{\varepsilon}$

$\sigma = \mu \cdot \dot{\varepsilon}$

Többféle modell együttes leírása:

Maxwell-féle viszkoelasztikus modell:

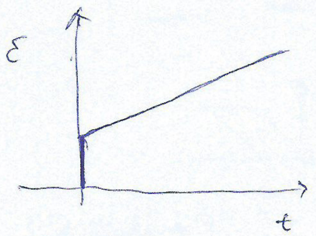


dugattyú + rugó sorbakapcsolva

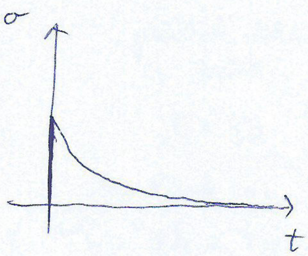
$\sigma^v = \sigma^e = \sigma$

$\varepsilon^v + \varepsilon^e = \varepsilon$

$\dot{\varepsilon}^v = \frac{\sigma}{\mu}$; $\dot{\varepsilon}^e = \frac{\sigma}{E}$

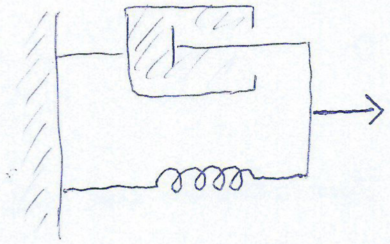


kúszás



relaxáció

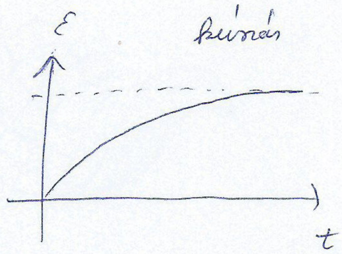
Kelvin-Voigt-féle viszkoelasztikus modell:

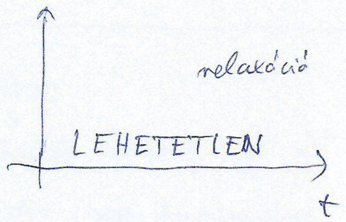


$$\varepsilon^v = \varepsilon^e = \varepsilon$$

$$\sigma^v + \sigma^e = \sigma$$

$$\varepsilon^v = \frac{\sigma^v}{\mu} \; ; \; \varepsilon^e = \frac{\sigma^e}{E}$$

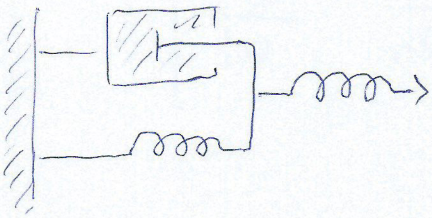




kezdeti kúszás nem lehet

relaxációra a modell alkalmatlan

egyjél:

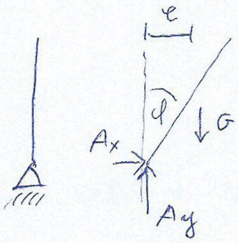


ez megoldana valamit ...

II Stabilitásvizsgálat: Mi történik, ha kicsit kimozdítjuk az egyensúlyi helyzetből?

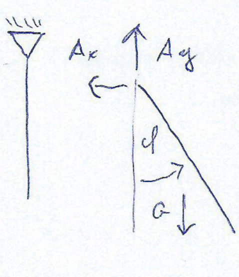
- stabil: bármilyen kitérítés esetén visszatér az egyensúlyi állapotba
- instabil: létezik olyan kis kitérítés, amely hatására a szerkezet továbbmozog
- kritikus egyensúlyi állapot: létezik olyan kis kitérítés, amely hatására „csak úgy ottmarad" ami szintén egyensúlyi állapot

Módszer: kitérített állapotban



$$\Sigma M_i^{(A)}: \quad +G\cdot e = + \ \dots \ (\circlearrowright)$$

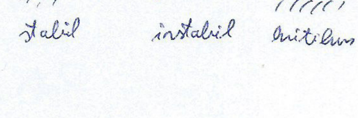
$$+\varphi \Rightarrow +M \longrightarrow \text{INSTABIL}$$



$$\Sigma M_i^{(A)}: \quad +G\cdot e = + \ \dots \ (\circlearrowright)$$

$$-\varphi \Rightarrow +M \longrightarrow \text{STABIL}$$

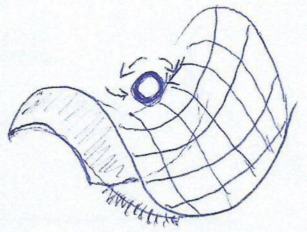
Potenciális energia: $\Pi(e)$ egyensúly: $\frac{\partial \Pi}{\partial e} = 0$



ha a potenciális energiának minimuma van, akkor az egy stabil egyensúlyi állapot

ha van olyan irány, amerre a Π-nek maximuma van, akkor az egy instabil egyensúlyi állapot

ha van olyan irány, amerre sem max, sem minimum, akkor az egy kritikus egyensúlyi állapot



$$\Pi(c_1, c_2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0$$

A potenciális függvény Hesse-mátrixára van szükség:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_1 \partial c_2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c_2 \partial c_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_2^2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}$$

DEFINIT

- Ha $\underline{\underline{H}}$ pozitív definit, akkor minimumunk van, stabil egyensúlyi helyzet.

  (⊕ definit = $\forall_i \, \lambda_i > 0$)

- Ha $\underline{\underline{H}}$-nak van ⊖ sajátértéke, akkor instabil.
- Ha $\underline{\underline{H}}$-nak a legkisebb sajátértéke 0 → kritikus állapot.

Végeselem módszer:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{- egyensúlyi egyenlet:} & & \underline{\underline{L}}^T \underline{\sigma} + \vec{q} = \underline{0} \\ \text{- anyagegyenlet:} & & \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\varepsilon} \\ \text{- geometriai egyenlet:} & & \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u} \end{array}\right\} \text{differenciál-egyenletrendszer}$$

Segítség: potenciális energia stacionaritási tétele:

$$\Pi(u, \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \cdot \varepsilon \, dV - \underbrace{\int_V \underline{u}^T \vec{q} \, dV}_{\text{külső erők által végzett munka}} = \text{stac.}$$

$$\Pi(u) = \int_V \frac{1}{2} \underbrace{\underbrace{\underline{u}^T \underline{\underline{L}}^T}_{\varepsilon^T} \underbrace{\underline{\underline{D}}}_{D^T}}_{\sigma^T} \underbrace{\underline{\underline{L}} \, \underline{u}}_{\varepsilon} - \underline{u}^T \cdot \vec{q} \, dV$$

Ritz-módszer: az $\underline{u}$-t bázisfüggvények lineáris kombinációjaként állítsuk elő

Ritz-módszer: $\underline{u} = \sum_{i=1} c_i \cdot \vec{\varphi}_i(x,y,z) = \underline{\underline{N}}(x,y,z) \cdot \underline{c}$

$$\Pi(\underline{c}) = \int_V \frac{1}{2} \underline{c}^T \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{L}}\, \underline{\underline{N}} \cdot \underline{c} - \underline{c}^T \underline{\underline{N}}^T \vec{q} \, dV$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = \ldots = 0$$

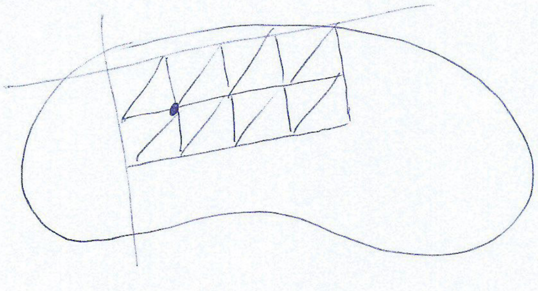
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{c}} = \underbrace{\int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{L}}\, \underline{\underline{N}} \, dV}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{c} - \underbrace{\int_V \underline{\underline{N}}^T \vec{q} \, dV}_{\underline{b}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{c} - \underline{b} = 0$$
$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{c} = \underline{b}$$
$$\underline{c} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b}$$

Ez a függvénytér finitizálása.
Végesszámú bázisfüggvényt veszünk fel.

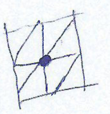
Végeselem módszer, mint speciális Ritz-módszer:

1) Bázisfüggvények felvétele:



- geometriai finitizálás: a tartomány felosztása végeselemekre
- csomópontok közül 1 kivételével mindenhol 0 egy bázisfüggvény értéke, a „saját" csomópontjában pedig 1 az értéke
- a csomóponthoz nem kapcsolódó elemeken a bázisfüggvények értéke 0.

pl.: egy csomópont kiválasztása
6 bázisfüggvény kapcsolódik hozzá



2) Mátrixok és tehervektorok számítása: az integrálást elemenként végezzük

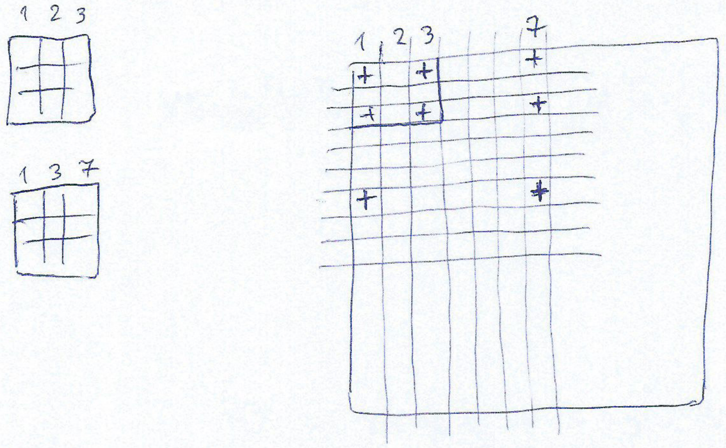
↑ TEHERVEKTOROK

csak az elem szabadságfokainak megfelelő részeken
tehát azokon a pontokon, amelyeknek van hatása a csomópontra
→ kisebb mátrixokkal számolunk

$$\underline{\underline{K}}^e = \int \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}} \, dV \; ; \quad \vec{q}^{\,e} = \int_V \underline{\underline{N}}^T \vec{q} \, dV$$

↑ elemi merevségi mátrix

3) Összegezzük a patchekre / kis mátrixokra tartozó integrálokat:



KOMPILÁLÁS

↓

Kompilálás : globális merevségi mátrix

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{u} = \vec{q}$$

Megoldás : egyensúlyi rendszer megoldása :

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \vec{q}$$

másodlagos mennyiségek