ANALÍZIS(2) Mérnök Informatikus szak | I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása | 2010. okt. 29. Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

Adja meg a

$$y' = \frac{y+2}{y+5}\, x\, e^{-3x^2}\,, \qquad y \neq 5 \quad y \neq -5$$

differenciálegyenlet $y(0) = -1$ valamint az $y(0) = -2$ kezdeti értékhez tartozó megoldását!
(Implicit alakban kérjük a megoldásokat.)

$y \equiv -2$ mo. (1)

$y \neq -2$ $\quad \int \frac{y+5}{y+2}\, dy = \int x e^{-3x^2} dx$ (3)

$\int \left(1 + \frac{3}{y+2}\right) dy = -\frac{1}{6} \int \underbrace{-6x e^{-3x^2}}_{f' e^f} dx$

$y + 3 \ln |y+2| = -\frac{1}{6} e^{-3x^2} + C$

(2) (2) (1)

$y(0) = -1$: $\quad -1 + 3 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} = -\frac{1}{6} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{6}$

$y + 3 \ln (y+2) = -\frac{1}{6} e^{-3x^2} - \frac{5}{6}$ (2)

$y(0) = -2$: $\quad y \equiv -2$ (2)

2. feladat (12 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3}{x}\, y = \frac{x^4}{x^2+2}\,, \qquad x \neq 0$$

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ (2)

(H): $\quad y' = \frac{3}{x} y \qquad y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú

$\int \frac{1}{y} dy = 3 \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln y = 3 \ln x$

$\Rightarrow y = x^3 = \varphi(x)$

$y_H = C \cdot x^3 \quad C \in \mathbb{R}$ (5)

an2i1p101029/1.

(I): $y_{ip} = c(x) \cdot x^3$

$y_{ip}' = c' \cdot x^3 + c \cdot 3x^2$ Behelyettesítve (I)-be:

$$\left(c' x^3 + \cancel{c \cdot 3x^2}\right) - \frac{3}{\cancel{x}} \cancel{c \cdot x^3} = \frac{x^4}{x^2+2} \Rightarrow c' = \frac{x}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2}\, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2)$$

$$\Rightarrow y_{ip} = \frac{x^3}{2} \ln(x^2+2) \quad 5$$

$$y_{id} = C x^3 + \frac{x^3}{2} \ln(x^2+2)\ ; \quad C \in \mathbb{R}$$

3. feladat (15 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! $u = \dfrac{y}{x}$ helyettesítéssel dolgozzon!

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\,\frac{y}{x} + 4\,, \qquad x \neq 0$$

(Implicit alakban kérjük a megoldást.)

$$y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' x + u \cdot 1 \quad 2$$

Behelyettesítve:

$$u' x + u = u^2 + 3u + 4 \quad 2$$

$$\Rightarrow u' x = u^2 + 2u + 4$$

$$\frac{du}{dx} = u' = (u^2 + 2u + 4)\,\frac{1}{x}$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{u^2 + 2u + 4}\, du}_{} = \int \frac{1}{x}\, dx \quad 3$$

$$\int \frac{1}{(u+1)^2 + 3}\, du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\, du$$

$$\frac{1}{3}\ \frac{\operatorname{arctg} \frac{u+1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln|x| + C$$

$$4 \qquad 2 \qquad 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{x} + 1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C \quad 1$$

4. feladat (8 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű homogén lineáris, valós konstans együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldásai között szerepel az alábbi függvény:

$$y = 4\,\mathrm{e}^{-3x} + 5\,\mathrm{e}^{-x} + 7x$$

e^{-3x} miatt : $\lambda_1 = -3$ 1

e^{-x} miatt : $\lambda_2 = -1$ 1

x miatt $\lambda_{3,4} = 0$ 2

A karakterisztikus egyenlet:

$(\lambda+3)(\lambda+1)\cdot\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$ 3

A de.: $y^{IV} + 4y''' + 3y'' = 0$ 1

5. feladat (13+9=22 pont)

$$y'' - 2\,y' + \alpha\,y = f(x)$$

Írja fel a fenti differenciálegyenlet általános megoldását, ha:

a) $\alpha = 5$ és $f(x) = 9\,e^x - 5\,x$

b) $\alpha \le 1$ és $f(x) = 0$.

a) $y'' - 2y' + 5y = 9e^x - 5x$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ 2 $\ldots \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm j2$ 2

$y_H = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ 2 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$5 \mid y_{ip} = Ae^x + Bx + C$ 2

$-2. \mid y'_{ip} = Ae^x + B$

$1. \mid y''_{ip} = Ae^x$

$e^x(5A - 2A + A) + (5B)x + (5C - 2B) = 9e^x - 5x$

$4A = 9 \Rightarrow A = \frac{4}{9}$

$5B = -5 \Rightarrow B = -1$

$5C - 2B = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{5}B = -\frac{2}{5}$

$\Big\}\ y_{ip} = \frac{4}{9}e^x - x - \frac{2}{5}$ 3

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = \ldots$ 2

an2z1p10102913.

b.) $\lambda^2 - 2\lambda + \alpha = 0$

$\lambda_{1,2} = \ldots = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ (3)

Ha $\alpha = 1$: $\lambda_{1,2} = 1$ $\quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ (3) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ha $\alpha < 1$: 2 külb. való gyök:

$y = C_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x}$ (3) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

6. feladat (15 pont)

$$y' = y^2 + x^2 - 2x$$

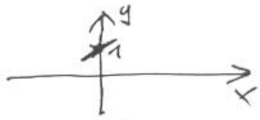
a) Rajzolja be a differenciálegyenlethez tartozó iránymező irányát az alábbi pontokban: $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$, $P_3(1,-1)$!

b) Írja fel az izoklinák egyenletét! Rajzolja fel azon izoklinát, melynek pontjaiban a megoldásfüggvénynek lokális szélsőértéke lehet!

c) Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(2,0)$ ponton.
Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 2$ helyen?
Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0 = 2$ pontbeli harmadik deriváltját!
($y'''(2) = ?$)

a.) $\boxed{3}$

$y'(P_1) = y^2 + x^2 - 2x \Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1$



(1)

$y'(P_2) = y^2 + x^2 - 2x \Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = -1$

(1)

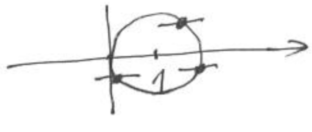
$y'(P_3) = y^2 + x^2 - 2x \Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 0$

(1)

b.) $\boxed{4}$ Az izoklinák egyenlete: $y^2 + x^2 - 2x = K$ (2)

Lokális szé. lehet: $K = 0$

$y^2 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$



(2)

c.) $\boxed{8}$ $y(2) = 0$

$y'(2) = y^2 + x^2 - 2x \Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = 0 \Rightarrow$ lehet lok. szé. itt (1)

an2z1p101029/4.

$y'' = 2yy' + 2x - 2$ ③

$y''(2) = 2yy' + 2x - 2 \Big|_{\substack{x=2\\ y=0\\ y'=0}} = 2 > 0$ ①

$y'(2) = 0$, $y''(2) > 0 \Rightarrow$ lok. min. van itt, tehát nincs lok. max. ①

$y''' = 2y'y' + 2yy'' + 2$

$y'''(2) = 2y'y' + 2yy'' + 2 \Big|_{\substack{x=2\\ y=0\\ y'=0\\ y''=2}} = 2$ ②

7. feladat (15 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányados kritérium limeszes alakját!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok:

$b1)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad\qquad b2)\quad \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k+1}\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}$

a.) $\sum^{\infty} a_n$; $a_n > 0$

Ha $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

Ha $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1$ vagy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div ③

b1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} =$

$= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{1}{n})} \to \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. ⑥

b2) $\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{3^n \cdot 3\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = 3\sqrt[n]{3}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = 3\cdot\sqrt[n]{3}\,\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \to$

$\to 3\cdot 1\cdot \frac{1}{e^2} = \frac{3}{e^2} < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ konv. ⑥

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' - 3y = 10\,\mathrm{e}^{2x}$$

$\lambda^2+2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=-3\,,\ \lambda_2=1$

$y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$ 4

$-3 \mid y_{ip} = A e^{2x}$

$2. \mid y'_{ip} = 2A e^{2x}$

$1. \mid y''_{ip} = 4A e^{2x}$

$e^{2x}(-3A+4A+4A) = 10 e^{2x}$

$5A=10 \Rightarrow A=2$

$y_{ip} = 2e^{2x}$ 4

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = \dots$ 2

9. feladat (10 pont)

$$f(n) = \frac{7}{2}\,f(n-1) - \frac{3}{2}\,f(n-2)$$

a) Írja fel a rekurzió általános megoldását!

b) Írja fel a rekurzió $f(0) = 5\,,\ f(1) = \dfrac{15}{2}$ megoldását!

a.) $f(n)=q^n$ alakban keressük a megoldást $(q\neq 0)$:

$\boxed{7}$ $q^n = \frac{7}{2}q^{n-1} - \frac{3}{2}q^{n-2} \Rightarrow q^2 = \frac{7}{2}q - \frac{3}{2} \Rightarrow q^2 - \frac{7}{2}q + \frac{3}{2} = 0$

$\Rightarrow q_1 = 3\,,\ q_2 = \frac{1}{2}$

Mivel a megoldások 2 dimenziós lineáris teret alkotnak: $f(n) = C_1\cdot 3^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b.) $\boxed{3}$

$f(0)=5: \quad C_1 + C_2 = 5$

$f(1)=\frac{15}{2}: \quad 3C_1 + \frac{1}{2}C_2 = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow C_1 = 2\,,\ C_2 = 3$

$f(n) = 2\cdot 3^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

an2z1p10102916.