ANALÍZIS 1.	**I. ZÁRTHELYI**	**2015. október 15.**
Mérnök informatikus szak	β-variáns	Munkaidő: 50 perc

1. feladat (12 pont)
Adja meg trigonometrikus alakban az

$$z^4 + 2(i+1)z^2 + i = 0$$

egyenlet összes megoldását.

$(z^2)_{1,2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \dfrac{-2(i+1)+\sqrt{8i-4i}}{2} = -i-1+\sqrt{i}$, és mivel $i \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\big)$,
így $\sqrt{i} \overset{\mathbf{2p}}{=} \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

$$z^2 = -i-1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)(i+1) \overset{\mathbf{3p}}{=} (\sqrt{2}-1)\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})\right)$$

egyenlet megoldásai $z_{1,2} \overset{\mathbf{1p}}{=} \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8})\right)$, a

$$z^2 = -i-1-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)(i+1) \overset{\mathbf{2p}}{=} (1+\sqrt{2})\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})\right)$$

egyenlet megoldásai $z_{3,4} \overset{\mathbf{1p}}{=} \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8})\right)$

---

2. feladat (7 pont)
A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

$$\frac{n^3+3n}{n^2+4} \to \infty.$$

Legyen $P > 0$, olyan $N(P)$ küszöbindexet keresünk, hogy $n \geq N(P)$ esetén $\dfrac{n^3+3n}{n^2+4} > P$ teljesüljön (**2p**). Ehhez elég, ha

$$\frac{n^3+3n}{n^2+4} \geq \frac{n^3}{n_4^2 n^2} = \frac{n}{5} > P, \qquad \textbf{(3p)}$$

vagyis $N(P) = [5P] + 1$ jó lesz (sőt, $N(P) = 5P$ is, ha nem követeljük meg, hogy a küszöbindex egész legyen) (**2p**).

---

3. feladat (6+4 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{5n+7}{5n-4}\right)^{10n-1}, \qquad b_n = \frac{n^7 + 7^n - 4^{2n+1}}{n^3 2^n - 2^{4n-1}}.$$

$$a_n \overset{\mathbf{3p}}{=} \left(\frac{\left(1+\frac{7}{5n}\right)^{5n}}{\left(1-\frac{4}{5n}\right)^{5n}}\right)^2 \left(\frac{5n+7}{5n-4}\right)^{-1} \overset{\mathbf{3p}}{\to} \left(\frac{e^7}{e^{-4}}\right)^2 \cdot 1 = e^{22}.$$

$$b_n \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{4^{2n}}{2^{4n}} \cdot \frac{\frac{n^7}{16^n} + \left(\frac{7}{16}\right)^n - 4}{\frac{n^3}{8^n} - \frac{1}{2}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} \frac{-4}{-\frac{1}{2}} = 8.$$

---

4. feladat (11 pont)
Legyen $a_1 = 5$, és $a_{n+1} = \sqrt{10a_n - 24}$

a) Igazolja, hogy a $4 \leq a_n \leq 6$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Ha a sorozat konvergens, A határtéke kielégíti az $A = \sqrt{10A - 24}$, vagyis az $A^2 - 10A + 24 = 0$ egyenletet. Ennek megoldásai $A = 4$ és $A = 6$. (**2p**)

a) Sejtés: $4 \leq a_n \leq 6$. (**1p**) Teljes indukcióval igazoljuk.

   i) $4 \leq a_1 = 5 \leq 6$. (**1p**)

   ii) $4 \leq a_n \leq 6 \Longrightarrow 40 \leq 10a_n \leq 60 \Longrightarrow 16 \leq 10a_n - 24 \leq 36 \Longrightarrow$
   $4 \leq \sqrt{10a_n - 24} = a_{n+1} \leq 6$. (**2p**)

b) $a_2 = \sqrt{10 \cdot 5 - 24} = \sqrt{26} \geq 5 = a_1$. Sejtés: a sorozat monoton növő.Teljes indukcióval igazoljuk.

i) $5 = a_1 \leq a_2 = \sqrt{26}$. (**1p**)

ii) $a_n \leq a_{n+1} \Longrightarrow 10a_n \leq 10a_{n+1} \Longrightarrow 10a_n - 24 \leq 10a_{n+1} - 24 \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{10a_n - 24} \leq \sqrt{10a_{n+1} - 24} = a_{n+2}$. (**2p**)

c) Mivel a sorozat monoton növő és felülről korlátos, így konvergens, és határértéke a legkisebb felső korlátja, ami csak $A = 6$ lehet. (**2p**)

---

5. feladat (6+4 pont)
Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját.

$$a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{\frac{n^2+4}{n^3+3n}}, \qquad b_n = (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{n^2+4}{n^3+3n}}.$$

Konvergensek-e a sorozatok?

$$\frac{n^2}{n^3+3n^3} \leq \frac{n^2+4}{n^3+3n} \leq \frac{n^2+4n^2}{n^3}, \text{ (}\mathbf{2p}\text{) vagyis}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{4n}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{5}{n}} = \sqrt[n]{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}. \qquad (\mathbf{1p})$$

Mivel $p > 0$ esetén $\sqrt[n]{p} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, és szorzat, illetve hányados határértéke a határértékek szorzata, illetve hányadosa, így a rendőrelv értelmében $\sqrt[n]{\frac{n^2+4}{n^3+3n}} \to 1$. (**1p**) Emiatt $a_{2n} \to 1$, $a_{2n+1} \to -1$, vagyis $S = \{-1, 1\}$, $\limsup a_n = 1 \neq -1 = \liminf a_n$, vagyis a sorozat nem konvergens. (**2p**)

$\frac{n^2+4}{n^3+3n} \to 0$ (lehet hivatkozni arra, hogy a 2. feladatban szereplő sorozat reciproka) (**1p**) , így $\sqrt{\frac{n^2+4}{n^3+3n}} \to 0$, vagyis b_n egy 0-hoz tartó sorozat és egy korlátos sorozat szorzata (**1p**). Emiatt $\lim b_n = 0 = \limsup b_n = \liminf b_n$, és $S = \{0\}$ (**2p**).