[redacted]
Sztoch. kérd.
villany oldalon anyagok!

Tapasztalati mérésszórás (papíron hibás)

$$S_n^2 = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Tavalyi vizsgasor

Beágy. Markov-lánc átm. mtx → legyen dt mindig 0

Várakozási idő param. függ attól, h hol vagyunk. Ha letelt az idő, ugrani kell

Spektrál mérték csupán ugrásai → trigonometrikus
(6 kérdésből egyik lesz)

A, B ftlen azonos elosz.

$X_n = \sum_k A_k \cos(\omega_k n) + B_k \sin(\omega_k n)$

$X_n = \sum_k A_0 + A_k \cos(\omega_k n) + B_k \sin(\omega_k n)$

spektrálmérték diszkrét → (F) tiszta ugrásos
–||– diszkrét

20?? dec. 1 zh/5    Markov-lánc lesz

M/M/4/4

ftl. exp. $\mu=2$

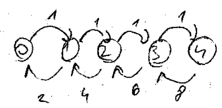
$\lambda=1$ intenzitással érkeznek az ügyfelek a pénztárba

4 pénztáros van (...), mindegyiknél $\mu=2$ param. exp. időközönként belül el egy ügyféllel

1 közös sorban állnak, a sorban 4 hely van → ugyis most egyenként 1 hely a pénztárnál

$X_t$: bent lévő sorban álló ügyfelek száma t-kor ∈ fi Markov lánc

Állapotok: 0, 1, 2, 3, 4    $i \to (i+1)$ lépés rátája $\lambda$ ($i=0,1,2,3$ esetén)
$i \to (i-1)$ –||– $i \cdot \mu = i \cdot 2$
többi átmenet 0



a/

tart. idő param:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| λ | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 |

1 rátával el.
+2 rátával elmegy

0
+8

a)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2/3 | 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 4/5 | 0 | 1/5 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 6/7 | 0 | 1/7 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

beágy. d.i. Markovlánc átmeneti mtx

b/ P(3. ugrás után 2-es állapot | első ugrás előtt 1-es) ⇔ P(3. ugrással kerül először a 2-es állapotba | első ugrás előtt 1-es) d.i. ML:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "1"] & \bullet \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[r, bend left, "1/3"] & \bullet \arrow[l, bend left, "4/5"] \arrow[r, bend left, "1/5"] & \bullet \arrow[l, bend left, "6/7"] \arrow[r, bend left, "1/7"] & 4 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

ez egy születési-halálozási folyamat v. bolyongás

P(~~...~~ 3-ugrás után 2-es | először 1-es)

$1\to0\to1\to2$ $\quad$ $1\to2\to1\to2$ $\quad$ $1\to2\to3\to2$

$$\frac{2}{3}\cdot1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}$$

P(3. ugrás után <u>először</u> 2-es | ...

$0\to1\to2$

$$\frac{2}{3}\cdot1\cdot\frac{1}{3}$$

c/ 3-masban van, 1-nél kevesebb kell várni ugrásig

$$P(1 \text{ időn belül van ugrás} \mid \text{kezdő áll. a 3-mas}) = P(Exp(7) < 1) = F_{Exp(7)}(1) = 1-e^{-7\cdot1} = 1-e^{-7}$$

3-as állapotban $\lambda=7$ exp. idő várakozás

d/ 1-es állapotból indítjuk, hat. meg $X_t$ stacionárius eloszlását $\to$ most 1 osztály van, mindegy honnan indul

Ehhez kell először <u>infinitezimális</u> <u>generátor</u> (A)

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ \hline 0. & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1. & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2. & 0 & 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3. & 0 & 0 & 6 & -7 & 1 \\ 4. & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}$$

Elsődleges ML-ből a főátlón kívül adott, főátlóval sora lesz összesen 0

ezután a stac. elo. egy $\Pi$ vektor, $\Pi A = 0$

$\pi$ az $A$-nak $\underline{\underline{\lambda=0}}$ sajátértékhez tartozó baloldali s.v.

(diszkrétnél $\lambda=1$-hez kell számolni)

$$\boxed{A^T\pi^T=0}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

~~XXXX~~

pl. $\pi_4=1$, $\pi_3=8$, $\pi_2=48$, $\pi_1=192$, $\pi_0=384$

$$\pi=\left(\frac{384}{633}, \frac{192}{633}, \frac{48}{633}, \frac{8}{633}, \frac{1}{633}\right)$$

e/ $P(X_{1000000}=3 \mid X_0=1) \approx \pi_3 = \frac{48}{633}$

f/ hányadrészben hány időben van „i" állapotban

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{384}{633}$ | $\frac{192}{633}$ | $\frac{48}{633}$ | $\frac{8}{633}$ | $\frac{1}{633}$ |

g/ költség: $t\cdot i$, ha $t$ ideig $i$ csengő között

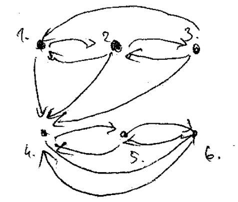
Átlagos költség hosszú távon (időegységenként): $\frac{384}{633}\cdot0+\frac{192}{633}\cdot1+\frac{48}{633}\cdot2+\frac{8}{633}\cdot3+\frac{1}{633}\cdot4$

Tudományosabban: van $\exists$ $f$, ami az állapotokon értelmezett $f\{0,1,2,3,4\}\to\mathbb{R}$

alkalmi időátlaga $(f(X_t))$ ~~...~~ $=\sum_i \pi_i f(i)$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)\,dt \xrightarrow{1 \text{ valószínűséggel}} E_\pi f \quad \text{(ergodtétel)}$$

2009 jan. 3

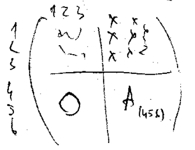


Omlálózik i-ből j, ha vezet út i-ből j-be és j-ből i-be is.

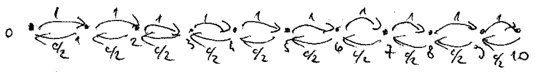
átmeneti $\{1,2,3\}$ ← tranziens osztály, stac. eo. 0 lesz

-"- $\{4,5,6\}$

Stac. eloszláshoz elég a 4,5,6 közötti mtx



2010 dec 20 $M/M/1/B$ $B=10$



$X_t$: rendszerállapot mérete

$\left.\begin{array}{l}\text{méret}: Exp\left(\frac{1}{2}\right), \text{mert } \mathbb{E}(\text{méret}) = 2 \\ \text{kiszolg. idő}: \frac{\text{méret}}{c}\end{array}\right\}$ kiszolgálási idő $\sim Exp\left(\frac{c}{2}\right)$, mert $\mathbb{E}(\text{k.i.}) = \frac{2}{c}$

~~lefelé ugrás~~ ~~rátája~~

↳ lefelé ugrás rátája $\frac{c}{2}$

a) $Exp\left(\frac{c}{2}\right)$

b) ráta-mtx

| | 0 | 1 | 2 | ... | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 1 | | | |
| 1 | c/2 | | 1 | ... | |
| 2 | | c/2 | | ... | |
| ⋮ | | | | | |
| 10 | | | | c/2 | 1 |

2011. jan. 10 VM/2

| | jó pénzzel adakozik | áll. | nem | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| férfiak | 109 | 365 | 26 | 500 |
| nők | 192 | 249 | 9 | 450 |

Homogenitásvizsgálat: a két v.v. azonos eloszlású-e?

$$\chi^2 = n\cdot m\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\frac{\gamma_i}{n}-\frac{\mu_i}{n}\right)^2}{\gamma_i+\mu_i} = 500\cdot 450\cdot\left(\frac{\left(\frac{109}{500}-\frac{192}{450}\right)^2}{109+192}+\frac{\left(\frac{365}{500}-\frac{249}{450}\right)^2}{365+249}+\frac{\left(\frac{26}{500}-\frac{9}{450}\right)^2}{26+9}\right) =$$

$n=500$ $r=3$

$m=450$

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\gamma_i$ | 109 | 365 | 26 |
| $\mu_i$ | 192 | 249 | 9 |

$= 50{,}62$

összehasonlítva $\chi^2_{r-1}$ azaz $\chi^2_2$-eloszlás $(1-\varepsilon)$-kvantilisével $= 0{,}95$-kvantilissel

posta eloszlásban: $\underline{5{,}991}$

$50{,}62$ vs. $5{,}991$

$r-1 = df$ szabadsági fokok száma $= 2$

$\varepsilon = 0{,}05$

Döntés: $50{,}62 > 5{,}991 \rightarrow$ <u>elvetjük</u> a hipotézist

2011.01.03. lap /2

| minőség \ eredmény | jó | rossz |
|---|---|---|
| jó | 416 | 16 |
| rossz | 23 | 5 |

$n=460$

95%-os szignifikanciaszinten: hipotézis: független a minőség és a valóság

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 416 | 16 | 432 ($\nu_{i\cdot}$) |
| 2 | 23 | 5 | 28 |
| $\Sigma$ | 439 ($\nu_{\cdot j}$) | 21 | 460 ($n$) |

$\nu_{ij}$

Függetlenségvizsgálat

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\nu_{i\cdot} \cdot \nu_{\cdot j}} = 460 \cdot \left( \frac{\left(416 - \frac{432 \cdot 439}{460}\right)^2}{432 \cdot 439} + \frac{\left(16 - \frac{432 \cdot 21}{460}\right)^2}{432 \cdot 21} + \frac{\left(23 - \frac{28 \cdot 439}{460}\right)^2}{28 \cdot 439} + \frac{\left(5 - \frac{28 \cdot 21}{460}\right)^2}{28 \cdot 21} \right) = 12{,}09$$

$df = (r-1)\cdot(s-1)$

$df = 1$

$\varepsilon = 0{,}05$

$r=2, s=2$ $\chi^2$-et összehas. $\chi_{(r-1)\cdot(s-1)}$ $(1-\varepsilon)$-kvantilissel

$K = 3{,}841$

$12{,}09 > 3{,}841 \rightarrow$ elutasítjuk a hipotézist

valamilyen... tól

3.)

| | selejt | normál | kiváló |
|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2 | 3 |
| $P_{\text{hipotézis}}(i)$ | 0,1 | 0,7 | 0,2 |
| találat $(i)$ | 34 | 130 | 36 |

Hipotézis: a tényleges eloszlás 0,1 : 0,7 : 0,2

95% $n=200$ $r=3$

Illeszkedésvizsgálat

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{n p_i} = \frac{(34 - 200 \cdot 0{,}1)^2}{200 \cdot 0{,}1} + \frac{(130 - 200 \cdot 0{,}7)^2}{200 \cdot 0{,}7} + \frac{(36 - 200 \cdot 0{,}2)^2}{200 \cdot 0{,}2} = \frac{14^2}{20} + \frac{100}{140} + \frac{4^2}{40} = 10{,}91$$

Ezt kell összehas. $\chi_{r-1}$ $(1-\varepsilon)$-kvantilissel $df = 2$ $\varepsilon = 0{,}05$ $\rightarrow 5{,}991$

$10{,}91 > 5{,}991 \rightarrow$ elutasítjuk mi/2 2011/jan.3

Hely hónap alatt gyógyulnak: placebóval $2{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}4;\ 2{,}2;\ 0{,}9;\ 1{,}7$ $\sim X$

$x_i,\ i=1..6$ gyógyszerrel $1{,}2;\ 2{,}2;\ 1{,}1;\ 1{,}8;\ 0{,}5;\ 0{,}9;\ 1{,}6;\ 1{,}7$ $\sim Y$

$y_j,\ j=1..8$

nem tudjuk a gyógyulási eloszlásának szórását → t-próba

Hipotézis 1: – nem hat: $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$.

Hipotézis 2: – $\mathbb{E}X < \mathbb{E}X$ hat, gyorsabban gyógyul

Hipotézis 3: – $\mathbb{E}X > \mathbb{E}X$ árt.

Kétmintás t-próba, 1-oldali

(4-szer)
$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\,\sigma_1^{*2} + (n_2-1)\,\sigma_2^{*2}}{n_1+n_2-2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

$\bar{x}$: átlag, $x_i$-k átlaga $\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6}$ $n_1=6$

$\bar{y}$: –||– $y_j$-k $\frac{\sum_{j=1}^{8} y_j}{8}$ $n_2=8$

$\sigma_1^{*2}$ := $x_i$-k korrigált tapasztalati szórásnégyzete

$$\sigma_1^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2}{n_1-1}$$

$$\sigma_2^{*2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{y})^2}{n_2-1}$$

Ezt összehasonlítjuk $t_{n_1+n_2-2}$ eloszlás $1-\varepsilon$ kvantilisével $\left.\begin{array}{l} df = n_1+n_2-2 = 12 \\ \varepsilon = 0{,}05 \end{array}\right\} \to K = 1{,}782$

Tartomány: elfogadjuk, ha $t > -1{,}782$, elvetjük, ha $t < -1{,}782$

2011/jan3/mi/3

Maximum-likelihood becslés

$X_1..X_n$ független azonos eloszlású minta $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{, ha } 0<x<1 \\ 0 & \text{, ha nem} \end{cases}$ sűrűségfv. eloszlásból,

$\theta \in (0,\infty)$

adjunk maximum-likelihood becslést $\theta$-ra

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{, ha minden } x_i \in [0;1] \leftarrow \text{ekkor ez van} \\ 0 & \text{, ha nem} \end{cases}$$

deriv. $\theta$ szerint, legyen logaritmus $\Sigma$ van $\prod$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\ln x_i - \ln\theta\right] = \left(\frac{1}{\theta}-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\cdot\ln\theta$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\theta}\right)' = \frac{-1}{\theta^2}}$$

max hely: $0 = \ell'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \frac{-1}{\theta^2} - \frac{n}{\theta}$

$$n\theta = \sum_{i=1}^{n} -\ln x_i$$

$$\theta = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} -\ln x_i$$