Info anal 2. 1. pótzh. MINTAMEGOLDÁS 2014. 03. 27.

$\boxed{-1-}$

1, $\boxed{12}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-4}{x^2+5}$$ Szeparálható: $$\underbrace{\int\frac{dy}{y^2-4}}_{I_1}=\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+5}}_{I_2}$$ (2)

$$I_1=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{y+2}\,dy+\frac{1}{4}\int\frac{1}{y-2}\,dy=-\frac{1}{4}\ln|y+2|+\frac{1}{4}\ln|y-2|+C$$

$$\frac{1}{y^2-4}=\frac{1}{(y+2)(y-2)}=\frac{A}{y+2}+\frac{B}{y-2}=\frac{(A+B)y+2(B-A)}{y^2-4}$$ (5)

$$\left.\begin{aligned}A+B&=0\\-A+B&=1/2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=-1/4\\B&=+1/4\end{aligned}$$

$$I_2=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt5}\right)^2}=\frac{1}{5}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5}\cdot\sqrt5+C=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5}+C$$ (4)

Tehát a megoldás:

$$-\frac{1}{4}\ln|y+2|+\frac{1}{4}\ln|y-2|=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5}+C$$ (1)

2, $\boxed{14}$

$$y'-\frac{2}{x}y=x^3e^x$$ lineáris

$$(H):\ y'=\frac{2}{x}y\ \overset{y\neq0}{\Longrightarrow}\ \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2\,dx}{x}\Rightarrow\ln|y|=2\ln|x|+C$$

$$y_{H,\text{ált}}(x)=Kx^2;\quad K\in\mathbb{R}$$ (6)

$y_{I,p}(x)=K(x)\,x^2$, (2) ezt beírva az egyenletbe:

$$x^2K'(x)+\cancel{2xK(x)}-\cancel{\frac{2}{x}K(x)\cdot x^2}=x^3e^x$$

$$K'(x)=xe^x;\quad K(x)=\int\underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x$$

$u'=1\quad v=e^x$

$$y_{I,p}(x)=x^2(x-1)e^x$$ (4) ; $$y_{I,\text{ált}}(x)=y_{I,p}(x)+y_{H,\text{ált}}(x)=x^2(x-1)e^x+Kx^2$$ (2)

$K\in\mathbb{R}$

3, [12] $y' = (3x+y)^2 + 1$ $\quad u = 3x+y$ (2) helyettesítést alkalmazzuk.

$u' = 3 + y'$; $y' = u' - 3$

$u' - 3 = u^2 + 1$; $\frac{du}{dx} = u^2 + 4$ (2) ; $\int \frac{du}{u^2+4} = \int dx$

$\frac{1}{4} \int \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = x + C$; $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) \cdot 2 = x + C$ (6)

$\frac{u}{2} = \frac{3x+y}{2} = \operatorname{tg}(2(x+C))$; $\underline{\underline{y(x) = 2\operatorname{tg}(2x+K) - 3x}}$ (2)

$K \in \mathbb{R}$

— o —

4, a, [6] $K = -1$ esetén az izoklina:
$y = x^2 + 2$ (1)

$K = 0$ esetén: $y = x^2 + 1$ (1)

$K = +1$ esetén: $y = x^2$ (1)

Általában az izoklina:

$y = x^2 + 1 - K$ (2)

$\Rightarrow K = x^2 + 1 - y \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y' = x^2 - y + 1}}$ (1)

[6] b, Jellemezze $y(x)$ az $(1,2)$ ponton átmenő megoldást.

$y' = x^2 - y + 1 \quad \Rightarrow y'(1) = 1^2 - 2 + 1 = 0$ (2)

$y'' = 2x - y' + 0 \quad \Rightarrow y''(1) = 2 - 0 = +2 > 0$ (2)

Tehát az $(1,2)$ ponton átmenő megoldásnak itt lokális (2) minimuma van.

5, [14] $y^{(4)}+2y''+y=4x^2+5$

(H): $\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2=(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2=0$

$\Rightarrow \underline{y_{H,\text{ált}}(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3x\sin x+C_4x\cos x}$ ⑥

$y_{I,p}(x)=Ax^2+Bx+C$ ② $/\cdot 1$

$y''_{I,p}(x)=2A$ $/\cdot 2$

$+\ y^{(4)}_{I,p}(x)=0$ $/\cdot 1$

$4x^2+5=Ax^2+Bx+C+4A \Rightarrow A=4,\ B=0,\ C+4A=5$

$C=5-4A=-11$

$\underline{y_{I,p}(x)=4x^2-11}$ ④

$\underline{\underline{y_{I,\text{ált}}(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3x\sin x+C_4x\cos x+4x^2-11}}$ ②

$C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}$

6, [12] $5x$ megoldás $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$ ②

$2e^{2x}\cos(3x)$ megoldás $\Rightarrow \lambda_{3,4}=2\pm 3i$ ②

Karakterisztikus polinom:

$\lambda^2(\lambda-2+3i)(\lambda-2-3i)=\lambda^2(\underbrace{(\lambda-2)^2}_{\lambda^2-4\lambda+4}+9)=\lambda^4-4\lambda^3+13\lambda^2$ ④

Az egyenlet: $\underline{\underline{y^{(4)}-4y^{(3)}+13y''=0}}$ ②

$\underline{\underline{y_{H,\text{ált}}(x)=A+Bx+Ce^{2x}\sin(3x)+De^{2x}\cos(3x)}}$ ②

7, a,

$\boxed{6}$ $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n) \qquad f(n) = q^n$

$$q^2 = 4q - 3; \quad q^2 - 4q + 3 = (q-3)(q-1) = 0$$

$$\Rightarrow f(n) = A\,3^n + B \cdot 1^n = \underline{\underline{A \cdot 3^n + B}}$$

b,

$\boxed{4}$ Mivel $\lim\limits_{n \to \infty} 3^n = \infty$, ezért $f(n)$ csak úgy lehet korlátos, ha $A = 0$. Ebben az esetben $f(0) = f(10) = B = \underline{\underline{5}}$

— o —

8, a, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n =$

$\boxed{5}$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e} < 1$$

Tehát a sor <u>konvergens</u>!

b, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+n}{3+2n}\right)^{n^2}$; $\displaystyle\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{3+n}{3+2n}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0} \cdot \frac{\overbrace{\left(1+3/n\right)^n}^{\to e^3}}{\underbrace{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}_{\to e^{3/2}}} \longrightarrow 0$

$\boxed{5}$

Tehát a sor <u>konvergens</u>!

c,

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+5}}$ Nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, ugyanis

$$1 < n^2 + 5 < 6n^2 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{1}}_{\to 1} < \underbrace{\sqrt[n]{n^2+5}}_{\to 1} < \sqrt[n]{6n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{6}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\to 1}$$

Így $\displaystyle\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+5}} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \neq 0.$

Tehát a sor <u>divergens</u>.