ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI

2010. ápr. 15.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

A megfelelő definícióval bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x^2 - 32}{x+4} = -16 \qquad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

(D) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$:

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (3)

$|f(x) - A| = \left| \frac{2x^2-32}{x+4} + 16 \right| \underset{x \neq -4}{=} |2(x-4) + 16| = |2(x+4)| =$ (2) (2)

$= 2|x+4| < \varepsilon \qquad |x+4| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon)$ (3)

2. feladat (16 pont)

A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek!

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2\,(x+3)} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} + \frac{1}{x-2}$$

$f(x)$ szakadási helyek : $0, -3$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\overbrace{x^3+x^2-5x+3}^{\to 3}}{\underbrace{x^2}_{+0}\ \underbrace{(x+3)}_{\to 3}} = +\infty$: másodfajú szakadás (3)

(8)

$x = -3$-ban $\frac{0}{0}$ alakú :

$$
\begin{array}{l}
x^3 + x^2 - 5x + 3 \ : \ x+3 = x^2 - 2x + 1 \\
-(x^3 + 3x^2) \\
\hline
\quad -2x^2 - 5x + 3 \\
\quad -(-2x^2 - 6x) \\
\hline
\qquad x + 3 \\
\qquad -(x+3) \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \underbrace{\frac{x+3}{x+3}}_{=1} \frac{x^2-2x+1}{x^2} = \frac{16}{9}$: elsőfajú szakadás (megszüntethető szak.)

an1z21004151/1.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2+0} g(x) = \lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2+0} \frac{2}{\underbrace{x-2}_{\to +0}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2-0} g(x) = \lim_{x\to 2-0}\underbrace{\left(\frac{1}{-(x-2)} + \frac{1}{x-2}\right)}_{=0} = 0$$

$x = 2$-ben másodfajú szakadás van. 5

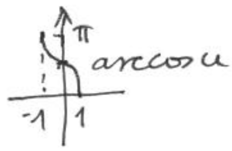
3. feladat (15 pont)

$$f(x) = 2\pi + \arccos(2-x)$$

a) $D_f = ?\,,\quad R_f = ?\,,\quad f'(x) = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!

c) $f^{-1}(x) = ?\,,\quad D_{f^{-1}} = ?\,,\quad R_{f^{-1}} = ?$



a.) $\boxed{7}$

$-1 \le 2-x \le 1$

$-3 \le -x \le -1$

$1 \le x \le 3 \quad : D_f = [1,3]$ 3

$\arccos(2-x) \in [0,\pi] \Rightarrow R_f = [2\pi, 3\pi]$ 1

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(2-x)^2}} \cdot (-1)$ 3 $\quad x \in (1,3)$

b.) $\boxed{2}$

$f'(x) > 0 \quad x \in (1,3)$-ban és f folyt. $[1,3]$-ban

$\Rightarrow f$ szig. mon. nő $[1,3]$-ban $\Rightarrow \exists f^{-1}$ D_f-en

c.) $\boxed{6}$

$y = 2\pi + \arccos(2-x)$

$y - 2\pi = \arccos(2-x)$

$2 - x = \cos(y-2\pi)$

$x = 2 - \cos(y-2\pi)$

$f^{-1}(x) = 2 - \cos(x-2\pi) \; (= 2 - \cos x)$ 4

$D_{f^{-1}} = R_f = [2\pi, 3\pi]\;;\; R_{f^{-1}} = D_f = [1,3]$ 2

4. feladat (26 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(3x^2)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2x^2)}{\operatorname{sh}(3x^2)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^4 \ln x^3$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x} - 3e^{4x} + 3e^{-3x}}{2e^{3x} + 5e^{4x} + e^{-x}}$

a) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} \underbrace{\sin 3x^2}_{\text{korl.}} = 0$

(Ha L'H-t erőltet vagy $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$-re hivatkozik, akkor 0 pont.)

b.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x^2}{\operatorname{sh} 3x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot 4x}{\operatorname{ch} 3x^2 \cdot 6x} = \frac{2}{3}$ (2)

$\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \to 1$ (2), $\operatorname{ch} 3x^2 \to 1$ (2), $\frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$

(1) $\frac{0}{0}$

c.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x^3}{\frac{1}{x^4}}$, $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ (2) $\frac{\infty}{\infty}$ $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2}{-4x^{-5}}$ (3) $= \lim\limits_{x\to 0+0} -\frac{3}{4}x^4 = 0$ (2)

d.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{4x}}{e^{4x}}}_{=1} \frac{e^{-2x} - 3 + 3e^{-7x}}{2e^{-x} + 5 + e^{-5x}}$ (5) $= \frac{0-3+0}{0+5+0} = -\frac{3}{5}$ (2)

5. feladat (19 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}, & \text{ha } x < 1 \\ (2+x^2)^x, & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = ?$

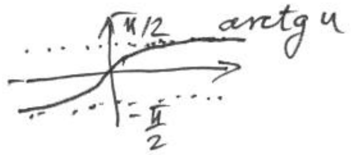
Folytonos-e a függvény $x = 1$-ben?

Differenciálható-e a függvény $x = 1$-ben?

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a) $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}$ 3

$\boxed{7}$ $\quad 1-x \to +0$, $\quad \frac{1}{1-x} \to +\infty$



$f(1+0) = f(1) = 3 \neq \frac{\pi}{2} = f(1-0) \Rightarrow f$ nem folytonos $x=1$-ben 2

f nem folyt. $x=1$-ben $\Rightarrow f$ nem differenciálható $x=1$-ben 2

b.)

$\boxed{12}$ Ha $x<1$: $\quad f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} \underbrace{\frac{-1}{(1-x)^2}(-1)}_{=\left((1-x)^{-1}\right)'}$ 4

Ha $x>1$:

$f'(x) = \left(e^{\ln (2+x^2)^x}\right)' = \left(e^{x\cdot \ln(2+x^2)}\right)' =$ 2

$= \underbrace{e^{x \ln(2+x^2)}}_{=(2+x^2)^x} \cdot \underbrace{\left(x\cdot \ln(2+x^2)\right)'}_{\left(1\cdot \ln(2+x^2) + x \frac{1}{2+x^2}\cdot 2x\right)}$ 3 3

6. feladat (14 pont)

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$$

a) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?
b) Írja fel az $x_0 = -2$ ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét!

$f'(x) = x - \frac{4}{x^2} \quad (x \neq 0)$ 2

$f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3} \quad (x\neq 0)$ 2

a.) $f''(x) = \frac{x^3+8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	+	0	−	∄	+
f	∪	infl. p.	∩	szak. hely	∪

6

b.) $y_é = f(-2) + f'(-2)(x+2) = 0 + (-3)(x+2)$ 4

an1z2100415/4.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+5)^3}$$

szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!
Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek? Ha igen, milyen jellegű?

$x \neq -5$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+5)^3 - (x-1)3(x+5)^2}{(x+5)^6} = \frac{-2x+8}{\underbrace{(x+5)^6}_{>0}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

3 1

	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,4)$	4	$(4,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	szak h.	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$

6

8. feladat (10 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!

b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{4x+1}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 2$ pontban!

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 2

b.) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{4(2+h)+1}-3}{h} =$ 2

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+4h}-3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+4h}+3}{\sqrt{9+4h}+3} =$ 2

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{9+4h-9}{h(\sqrt{9+4h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \frac{4}{\sqrt{9+4h}+3} = \frac{4}{6} \left(=\frac{2}{3}\right)$

4

an1z21004115/5.