Analízis 1. **1. ZH (β)** **2020.10.16.**

1. feladat — 14 pont

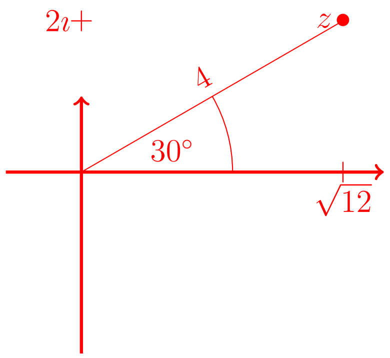
Legyen $z = \sqrt{12} + 2\imath$. Határozza meg a

$$\frac{z+\imath}{\overline{z}+\imath}, \qquad \text{és} \qquad \sqrt{\imath z}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

Megoldás: $\frac{z+\imath}{\overline{z}+\imath} = \frac{\sqrt{12}+3\imath}{\sqrt{12}-\imath} = \frac{(\sqrt{12}+3\imath)(\sqrt{12}+\imath)}{(\sqrt{12}-\imath)(\sqrt{12}+\imath)} = \frac{12-3+4\sqrt{12}\imath}{13}$

$\mathrm{Re}\left(\frac{z+\imath}{\overline{z}+\imath}\right) = \frac{9}{13}$ és $\mathrm{Im}\left(\frac{z+\imath}{\overline{z}+\imath}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{13}$ $\boxed{\textbf{7p.}}$



$|z| = 4$, $\arg z = 30°$,
$z = 4(\cos 30° + \imath \sin 30°)$

$\sqrt{\imath z} = \sqrt{(\cos 90° + \imath \sin 90°) \cdot 4(\cos 30° + \imath \sin 30°)} = \sqrt{4(\cos 120° + \imath \sin 120°)} = 2(\cos(60° + k \cdot 180°) + \imath \sin(60° + k \cdot 180°))$, $k = 0, 1$
$\mathrm{Re}\,(\sqrt{\imath z}) = \pm 1, \mathrm{Im}\,(\sqrt{\imath z}) = \pm\sqrt{3}.$ $\boxed{\textbf{7p.}}$

2. feladat — 14 pont

Írja le az algebra alaptételét!

Határozza meg a

$$z^4 - 2\imath z^3 + 3z^2$$

polinom komplex gyökeit, és írja fel a gyöktényezős alakját!

Megoldás: Tétel bármelyik változata jó. $\boxed{\textbf{2p.}}$
$0 = z^4 - 2\imath z^3 + 3z^2 = z^2(z^2 - 2\imath z + 3).$ $\boxed{\textbf{2p.}}$ A megoldások $z_{1,2} = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, és $z_{3,4} = \frac{2\imath + \sqrt{(-2\imath)^2 - 4\cdot 3)}}{2} = \frac{2\imath + \sqrt{-16}}{2} = \frac{2\imath \pm 4\imath}{2}$, $\boxed{\textbf{5p.}}$ azaz $z_3 = 3\imath$, és $z_4 = -\imath$.
A gyöktényezős alak $z^4 - 2\imath z^3 + 3z^2 = z^2(z-3\imath)(z+\imath).$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

3. feladat **32 pont**

Határozza meg az

- $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2-5}\right)^{2n^2+3}$;
- $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n}{2n^3-n+1}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

$$a_n = \left(\frac{1+2/n^2}{1-5/n^2}\right)^{2n^2+3} \overset{\boxed{\mathbf{8p.}}}{=\!=} \frac{\left((1+2/n^2)^{n^2}\right)^2}{\left((1-5/n^2)^{n^2}\right)^2} \cdot \frac{(1+2/n^2)^3}{(1-5/n^2)^3} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{8p.}}} \frac{(e^2)^2}{(e^{-5})^2} \cdot \frac{1}{1} = e^{14}$$

$1 \leftarrow \sqrt[n]{\dfrac{4}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{4n^2}{n^3}} \geq \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n}{2n^3-n+1}} \geq \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{2n^3}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}} \to 1$ $\boxed{\mathbf{8p.}}$, így a rendőrelv miatt $b_n \to 1$ $\boxed{\mathbf{8p.}}$

4. feladat **16 pont**

Határozza meg a

- $c_n = \dfrac{(-10)^{n-1} + n^2 \cdot 3^{2n+2}}{5^{n-1} \cdot 2^{n+1} + 1}$;

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás:

$$c_n = \frac{-0.1 \cdot (-10)^n + 9n^2 9^n}{0.4 \cdot 10^n + 1}$$

$$c_{2n} = \frac{-0.1 \cdot 100^n + 36n^2 81^n}{0.4 \cdot 100^n + 1} = \frac{-0.1 + 36n^2\,(0.81)^n}{0.4 + 0.01^n} \to -0.25$$

$$c_{2n-1} = \frac{0.01 \cdot 100^n + (2n-1)^2 81^n}{0.04 \cdot 100^n + 1} = \frac{0.01 + (2n-1)^2 0.81^n}{0.04 + 0.01^n} \to 0.25 \boxed{\mathbf{8p.}}$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: ± 0.25.

$\limsup c_n = 0.25, \liminf c_n = -0.25$ határérték nem létezik. $\boxed{\mathbf{8p.}}$

5. feladat — 24 pont

Legyen $a_1 = 11$ és $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n^2+9}{2}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

$\inf a_n = ?$ $\quad\quad$ $\sup a_n = ?$ $\quad\quad$ $\lim a_n = ?$

Megoldás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy $3 \leq a_n$ minden n-re. **3p.**
$n = 1$ esetén $3 \leq a_1 = 11$ teljesül.
Ha $3 \leq a_n$, akkor $9 \leq a_n^2$, $18 \leq a_n^2 + 9$ és $9 \leq \dfrac{a_n^2+9}{2}$, tehát $3 \leq \sqrt{\dfrac{a_n^2+9}{2}} = a_{n+1}$. **3p.**
Megmutatjuk, hogy $a_n \geq a_{n+1}$ minden n-re. **3p.**
Már beláttuk, hogy $a_n \geq 3$. Innen $a_n^2 \geq 9$, $2a_n^2 \geq a_n^2 + 9$, $a_n^2 \geq \dfrac{a_n^2+9}{2}$. Mivel a_n pozitív, ezért gyökvonás után kapjuk az állítást. **3p.**
Mivel a_n monoton csökkenő, így felülről korlátos, és $\sup a_n = a_1 = 11$ **2p.**
Megmutattuk, hogy a_n monoton, és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens. **3p.**
Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt{\dfrac{A^2+9}{2}}$ egyenletet. **3p.**
Mivel a_n monoton csökken, ezért $\inf a_n = \lim a_n = 3$. **4p.**

IMSC feladat — 8 pont

Írjunk az n tízes számrendszerben felírt alakja elé tizedes pontot, és ez elé egy 0 számjegyet. A kapott véges tizedes tört legyen a_n. (Azaz $a_n = 0.n$)

(a) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 1!

(b) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0!

(c) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0.5!

Ha valamelyik nem létezik indokolja!

(d) Adja meg az a_n sorozat torlódási pontjainak halmazát!

Megoldás:

(a) $\varphi(n) = 10^n - 1$ esetén $a_{\varphi(n)} = \dfrac{10^n - 1}{10^n} = 1 - 10^{-n} \to 1$ **2p.**

(b) Ilyen nincs, mert $a_n \geq 0.1$ minden n-re. **2p.**

(c) $\varphi(n) = 5 \cdot 10^{n-1}$ esetén $a_{\varphi(n)} = 0.5 \to 0.5$ **1p.**

(d) Mivel $0.1 \leq a_n \leq 1$ minden n-re, ezért $TP \subset [0.1, 1]$.
$A \in [0.1, 1[$ esetén legyen $\varphi(n) = \lfloor A \cdot 10^n \rfloor$. Ekkor $a_{\varphi(n)} \to A$.
(a) miatt $TP = [0.1, 1]$ **3p.**