Ismert a valós számok rendezett testje, és a $\wedge : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ függvény. Alkalmazzuk az $a^x = \wedge(a, x)$ jelölést minden $a \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{Q}$ esetén.

Ismertek továbbá a hatványozás azonosságai, illetve a monotonítása. Nevezetesen, ha $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ és $x, x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, akkor

(a) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$ (exponenciális Cauchy egyenlet);

(b) $(a_1 a_2)^x = a_1^x a_2^x$;

(c) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$;

(d) $a^{x_1} < a^{x_2} \qquad (1 < a,\ x_1 < x_2)$;

(e) $a^{x_2} < a^{x_1} \qquad (a < 1,\ x_1 < x_2)$;

(f) $a_1^x < a_2^x \qquad (a_1 < a_2,\ 0 < x)$;

(g) $a_2^x < a_1^x \qquad (a_1 < a_2,\ x < 0)$.

Kiterjesztjük a fenti függvényt tetszőleges valós kitevőre úgy, hogy megmaradjanak a hatványozás azonosságai és monotonítása. Megmutatjuk, hogy ez a függvény mindkét változójában folytonos.

1. Definíció. Legyen az $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olyan, hogy

$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Meg kell mutatnunk, hogy ez a definíció korrekt, azaz az $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ sorozat minden x-re konvergens, és határértéke pozitív.

2. Állítás. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re (indukciós feltétel)! Ezt felhasználva (a) miatt

$$(a - b) \sum_{k=1}^{n+1} a^{(n+1)-k} b^{k-1} = (a - b) \sum_{k=1}^{n} a^{(n+1)-k} b^{k-1} + (a - b)\, b^n =$$
$$= a\,(a - b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} + (a - b)\, b^n = a\,(a^n - b^n) + (a - b)\, b^n = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

3. Következmény. *Ha $0 \le b \le a$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$(a - b)\, n b^{n-1} \le a^n - b^n \le (a - b)\, n a^{n-1}.$$

Bizonyítás. A feltételek és (f) miatt $b^k \le a^k$ minden $k = 0, \dots, n$-re, így

$$(a - b)\, n b^{n-1} = (a - b) \sum_{k=1}^{n} b^{n-k} b^{k-1} \le (a - b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \le (a - b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} a^{k-1} = (a - b)\, n a^{n-1}.$$

Ez pedig az előző állítás szerint éppen a bizonyítandó.

4. Tétel. *Az* $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ *sorozat konvergens minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén. Továbbá, bármely* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$1 + x \le \exp(x) \qquad \text{\textit{és}} \qquad 0 < \exp(x).$$

Bizonyítás. 1. eset: $\boxed{0 \le x}$
Legyen $a = 1 + \dfrac{x}{n}$ és $b = 1 + \dfrac{x}{n+1}$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < b \le a$, így a fenti következmény szerint

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \le \frac{x}{n(n+1)}(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget és alkalmazva (a)-t, kapjuk, hogy a sorozat monoton nő:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right) \le \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Legyen most $p \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x < p$, és legyen $a = 1 + \dfrac{x}{pn}$ és $b = 1$. Ekkor $0 < b \le a$, így a fenti következmény szerint

$$\left(1+\frac{x}{pn}\right)^{n+1} - 1 \le \frac{x}{pn}(n+1)\left(1+\frac{x}{pn}\right)^n.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget és alkalmazva (a)-t, kapjuk, hogy:

$$\left(1+\frac{x}{pn}\right)^n\left(\left(1+\frac{x}{pn}\right)-\frac{x}{pn}(n+1)\right) \le 1.$$

Mivel $0 < 1 - x/p$, ezért

$$\left(1+\frac{x}{pn}\right)^n \le \frac{1}{1-x/p}, \quad \text{azaz (f) miatt} \quad \left(1+\frac{x}{pn}\right)^{pn} \le \left(\frac{1}{1-x/p}\right)^p.$$

Tehát az $\left(1+\dfrac{x}{pn}\right)^{pn}$ részsorozat felülről korlátos, így a monoton növekedés miatt az $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ sorozat is, tehát valóban konvergens. Továbbá, a monoton növekedés miatt

$$0 < 1 + x = \left(1+\frac{x}{1}\right)^1 \le \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

2. eset: $\boxed{x < 0}$
Legyen most fordítva, azaz $a = 1 + \dfrac{x}{n+1}$ és $b = 1 + \dfrac{x}{n}$, és legyen $n_0 = [-x]$. Ekkor $n_0 < n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < b \le a$, így a fenti következmény szerint

$$\frac{-x}{n(n+1)}(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget és alkalmazva (a)-t, kapjuk, hogy az első n_0 tag elhagyásával kapott sorozat monoton nő:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right) \le \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$n_0 < n$ esetén $0 < 1 + x/n < 1$, így az első n_0 tag elhagyásával kapott sorozat felülről korlátos, így konvergens, és ekkor az eredeti sorozat is konvergens. Továbbá, $-1 < x < 0$ esetén $n_0 = 0$, így ekkor

$$0 < 1 + x = \left(1+\frac{x}{1}\right)^1 \le \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

és $x \le -1$ esetén

$$1 + x \le 0 < \left(1+\frac{x}{n_0+1}\right)^{n_0+1} \le \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

5. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\exp(x)\exp(-x) = 1.$$

Bizonyítás.

$$\exp(x)\exp(-x) = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n = \lim\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{-x^2}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

6. Tétel.

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Bizonyítás. Mivel

$$0 \leq \left(\frac{x-y}{2n}\right)^2 = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4n^2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{xy}{n^2} \leq \left(\frac{x+y}{2n}\right)^2,$$

ezért

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{xy}{n^2} \leq 1 + \frac{x+y}{n} + \left(\frac{x+y}{2n}\right)^2 = \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^2,$$

és így $\max\{-x,-y\} \leq n$ esetén (f) miatt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n},$$

és innen határátmenettel

$$\exp(x)\exp(y) \leq \exp(x+y).$$

Másrészt,

$$\exp(x+y)\exp(-y) \leq \exp((x+y)-y) = \exp(x),$$

miatt az exp függvény 4. tétel szerinti pozitivitása és az 5. állítás szerint

$$\exp(x+y) = \exp(x+y)\cdot 1 = \exp(x+y)\exp(-y)\exp(y) \leq \exp(x)\exp(y).$$

7. Megjegyzés. A 4. tétel szerint $1+x \leq \exp(x)$. Innen azonnal látszik, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty.$$

Ha $x < 0$, akkor az 5. állítás miatt $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, és

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Megmutatjuk, hogy $e = \exp(1)$ jelöléssel $\left(\exp|_{\mathbb{Q}}\right)(x) = e^x$.

8. Tétel. *Ha $\mathrm{f} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1) $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y)$ *minden* $x, y \in \mathbb{Q}$*-ra;* *2)* $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1)^x$ *minden* $x \in \mathbb{Q}$*-ra.*

Bizonyítás. A 2) $\Longrightarrow$ 1) irány éppen az ismert (a).
Bizonyítsuk be 1) $\Longrightarrow$ 2)-t. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1)^x$-et először lássuk be $x \in \mathbb{N}$ esetén teljes indukcióval.

$x = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1)^x$ teljesül valamely $x \in \mathbb{N}$-re (indukciós feltétel).

Ekkor 1) szerint $\mathrm{f}(x+1) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(1)$, ami az indukciós feltétel miatt $\mathrm{f}(1)^x\,\mathrm{f}(1)$, azaz (a) alapján $\mathrm{f}(1)^{x+1}$.

Ha $x \in \mathbb{Q}^+$, akkor $\exists n, m \in \mathbb{N}$, amire $x = m/n$. Ekkor

$$\mathrm{f}(1)^m = \mathrm{f}(m) = \mathrm{f}(m/n + m/n + \cdots + m/n) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(x)\cdots\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)^n,$$

azaz (c) miatt $\mathrm{f}(1)^x = \mathrm{f}(1)^{m/n} = \mathrm{f}(x)$.

Ha $x = 0$, akkor $\mathrm{f}(1) = \mathrm{f}(0+1) = \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(1)$, és mivel $\mathrm{f}(1) \neq 0$ ezért $\mathrm{f}(0) = 1$. Ehhez hasonlóan (a) miatt $\mathrm{f}(1)^0 = 1$, ami adja az állítást.

Ha $x \in \mathbb{Q}^-$, akkor $-x \in \mathbb{Q}^+$, és így az előzőek és (a) szerint $\mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(1)^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{f}(1)^x}$. Mivel

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(x-x) = \mathrm{f}(0) = 1,$$

ezért $\mathrm{f}(-x) = \dfrac{1}{\mathrm{f}(x)}$, ami adja az állítást.

A definíció szerint $\exp(0) = 1$, így a 6. és a 8. tétel szerint $e = \exp(1)$ választással valóban $\exp(x) = e^x$ minden $x \in \mathbb{Q}$-ra.

Könnyen adhatunk becslést e-re. Például $(1 + 1/n)^n$ monoton növekedése miatt

$$2,7 < 1,01^{100} \leq \lim(1 + 1/n)^n = e.$$

Hasonlóan, $(1 - 1/n)^n$ monoton növekedése miatt $0,36 < 0,99^{100} \leq \lim(1 - 1/n)^n = \exp(-1)$. Az 5. állítás szerint $\exp(-1)\exp(1) = 1$, így

$$e = 1/\exp(-1) < 1/0,36 < 2,8.$$

9. Állítás. *Ha* $x < 1$*, akkor*

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenséget beláttuk a 4. tételben minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

x helyére $-x$-et írva

$$1 - x \leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

és innen, mivel $0 < 1 - x$ és $0 < \exp(x)$

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

10. Tétel. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *folytonos.*

Bizonyítás. A fenti állításból azonnal következik, hogy

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1.$$

Ebből pedig, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén a 6. tétel szerint

$$\lim_{x\to a} \exp(x) = \lim_{x\to a} \exp(a)\exp(x-a) = \exp(a) \lim_{x\to a} \exp(x-a) =$$
$$\exp(a) \lim_{x-a\to 0} \exp(x-a) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a),$$

vagyis az exp függvény valóban mindenütt folytonos.

A $\mathbb{Q}$-n értelmezett e^x-et persze máshogy is kiterjeszthetnénk $\mathbb{R}$-re. Még úgy is tudnánk más kiterjesztést adni, hogy a hatványozás azonosságai megmaradjanak. A monotonitást viszont csak ez a kiterjesztés őrzi meg, mint ahogy csak ez a kiterjesztés lesz folytonos. Ezt mutatja a következő

11. Állítás. *Legyen* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $D \subset]a,b[$ *sűrű* $]a,b[$*-ben, és* $\mathrm{f},\mathrm{g} :]a,b[\to \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\mathrm{f}\,|D = \mathrm{g}\,|D$*. Ha* f *és* g *folytonos, akkor megegyeznek.*

Bizonyítás. Legyen $x \in]a,b[$, közelítsük egy x_n D-beli sorozattal. Ekkor

$$\mathrm{f}(x) = \lim \mathrm{f}(x_n) = \lim \mathrm{g}(x_n) = \mathrm{g}(x).$$

12. Tétel. exp *szigorúan monoton nő.*

Bizonyítás. Mivel (d) miatt $\exp(x)$ monoton nő $\mathbb{Q}$-n, és folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért monoton nő $\mathbb{R}$-en.

Ebből, ha $x, y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x < y$, akkor $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$, amire $x < x_0 < y_0 < y$, így az előbb látott monotonitás és (d) miatt $\exp(x) \leq \exp(x_0) < \exp(y_0) \leq \exp(y)$, vagyis az exp függvény szigorúan monoton nő.

13. Definíció. Jelölje ln, az exp függvény inverzét, azaz

$$\ln = \exp^{-1}.$$

14. Megjegyzés. A 12. tétel miatt az exp függvény nyilván injektív. Továbbá, az 1. definíció, illetve a 7. megjegyzés és a 10. tétel miatt

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ bijekció.}$$

Emiatt a fenti definíció korrekt, és

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ bijekció.}$$

A 12. tétel miatt az ln függvény is nyílván szigorúan monoton nő, illetve a 7. megjegyzés miatt

$$\ln(x) < 0, \text{ ha } 0 < x < 1; \qquad \ln(1) = 0; \qquad 0 < \ln(x), \text{ ha } 1 < x,$$

és

$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty.$$

Ezért persze ln is folytonos, és végül $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $y_1 = \ln x_1$ és $y_2 = \ln x_2$. Ekkor $x_1 = \exp(y_1)$ és $x_2 = \exp(y_2)$, így a 6. tétel miatt

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(\exp(y_1)\exp(y_2)) = \ln(\exp(y_1 + y_2)) = y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2.$$

15. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$. Definiáljuk az a alapú exponenciális függvényt a következőképpen

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

16. Tétel. *Ha* $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ *és* $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, akkor*

(a) $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$ (exponenciális Cauchy egyenlet)*;*

(b) $(a_1 a_2)^x = a_1^x a_2^x$*;*

(c) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$*;*

(d) $a^{x_1} < a^{x_2} \quad (1 < a,\ x_1 < x_2)$*;*

(e) $a^{x_2} < a^{x_1} \quad (a < 1,\ x_1 < x_2)$*;*

(f) $a_1^x < a_2^x \quad (a_1 < a_2,\ 0 < x)$*;*

(g) $a_2^x < a_1^x \quad (a_1 < a_2,\ x < 0)$*.*

Bizonyítás. (a)- és (b)-nél alkalmazzuk a 6. tételt, és (b)-nél a 14. megjegyzést is.

(a) $a^{x_1+x_2} = \exp\left((x_1 + x_2)\ln a\right) = \exp\left(x_1 \ln a + x_2 \ln a\right) = \exp\left(x_1 \ln a\right)\exp\left(x_2 \ln a\right) = a^{x_1}a^{x_2}$.

(b) $$(a_1a_2)^x = \exp\left(x\ln(a_1a_2)\right) = \exp\left(x(\ln a_1 + \ln a_2)\right) = \exp\left(x\ln a_1 + x\ln a_2\right) = \\ = \exp\left(x\ln a_1\right)\exp\left(x\ln a_2\right) = a_1^x a_2^x.$$

(c) $(a^{x_1})^{x_2} = \exp\left(x_2 \ln(a^{x_1})\right) = \exp\left(x_2 \ln(\exp\left(x_1 \ln a\right))\right) = \exp\left(x_2x_1 \ln a\right) = a^{x_1x_2}$.

(d)-, (e)-, (f)- és (g)-nél alkalmazzuk a 12. tételt, és a 14. megjegyzést.

(d) $1 < a$ miatt $0 < \ln a$, így $x_1 < x_2$ miatt $x_1 \ln a < x_2 \ln a$. Innen a 12. tétel adja, hogy $a^{x_1} = \exp(x_1 \ln a) < \exp(x_2 \ln a) = a^{x_2}$.

(e) $0 < a < 1$ miatt $\ln a < 0$, így $x_1 < x_2$ miatt $x_2 \ln a < x_1 \ln a$. Innen a 12. tétel adja, hogy $a^{x_2} = \exp(x_2 \ln a) < \exp(x_1 \ln a) = a^{x_1}$.

(f) A 14. megjegyzés és $a_1 < a_2$ miatt $\ln a_1 < \ln a_2$, így $0 < x$ miatt $x \ln a_1 < x \ln a_2$. Innen a 12. tétel adja, hogy $a_1^x = \exp(x \ln a_1) < \exp(x \ln a_2) = a_2^x$.

(g) A 14. megjegyzés és $a_1 < a_2$ miatt $\ln a_1 < \ln a_2$, így $x < 0$ miatt $x \ln a_2 < x \ln a_1$. Innen a 12. tétel adja, hogy $a_2^x = \exp(x \ln a_2) < \exp(x \ln a_1) = a_1^x$.

Végül belátjuk a mindkét változóbeli folytonosságot.

17. Tétel. *Ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor az $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ függvény folytonos.*
Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor az $a \in \mathbb{R}^+ \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ függvény folytonos.

Bizonyítás. A 10. tétel, a 14. megjegyzés, a folytonos függvények konstansszorosáról szóló téttel, és a folytonos függvények kompozíciójáról szóló tételek alkalmazásával kapjuk az állításokat.