A42ea

2021. szeptember 15., szerda 23:30

A4222ea

A4 Valószínűségszámítás — II. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. szeptember 16.

Valószínűségek alaptulajdonságai

Jelölés: $P(A)$ az A esemény valószínűsége

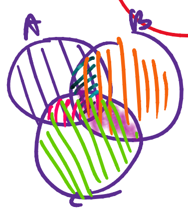
- A biztos esemény $\Rightarrow P(A) = 1$
- A lehetetlen esemény $\Rightarrow P(A) = 0$.
- $P(A) = 0 \not\Rightarrow A$ lehetetlen esemény
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$ ha A és B egymást kizáró események: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A, B, C tetszőleges események $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- $A_1, A_2, \ldots$ egymást kizáró események $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

P(eltalálom az 50-es [illegible]) = ?

P(konkrét pont eltalálása) = $\underline{0}$

$$\frac{1^2 \cdot \cancel{\pi}}{25^2 \cdot \cancel{\pi}} = \frac{1}{625}$$

SZITA FORMULA



Szorzatszabály

Mi a helyzet az események metszetével?

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

ahol $P(B|A)$ **feltételes valószínűség**,

a B valószínűsége, ha A bekövetkezett/tudjuk, hogy bekövetkezik

nyilván

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Két eseményt **független**nek nevezünk, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

azaz $P(A|B) = P(A)$ ill. $P(B|A) = P(B)$

Függetlenség

Példa

Egy dobozban van 2 fekete és két zöld golyó. Mind számozva vannak, a feketék az 1-es és 2-es (F1,F2), a zöldek a 3-as és a 4-es (Z3,Z4). A következő eseményeink vannak:

$A = \{$fekete golyót húzunk$\}$,

$B = \{$páros sorszámú golyót húzunk$\}$,

$C = \{$2-nél nagyobb sorszámú golyót húzunk$\}$

Független-e A és B? Mi a helyzet A és C-vel?

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = P(F2) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

Tehát A és B függetlenek.

$P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(C)$

A és C egymást kizáró események de nem függetlenek egymástól. Általánosságban két egymást kizáró esemény nem lehet független (kivéve ha az üres halmazról és a teljes eseménytérről van szó).

Szorzatszabály több eseményre

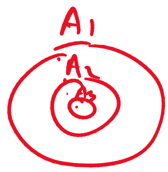
$\dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{\cancel{P(A_1)}}$ $\dfrac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \cancel{P(A_1)} \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$

$P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$\vdots$



Szorzatszabály csökkenő halmazsorozatra ($A_1 \supset A_2 \supset \ldots$):

$P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2)$

$P(A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2) \cdot P(A_4|A_3)$

$\vdots$

$A_1 \cap A_2 = A_2$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3$

Több esemény függetlensége

Példa

x-et és y-t random választjuk 0 és 1 között.

$A = \{y > \frac{1}{2}\}$, $B = \{x < \frac{1}{2}\}$,

$C = \{y < \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}\} \cup \{x > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}\}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ $= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ $= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

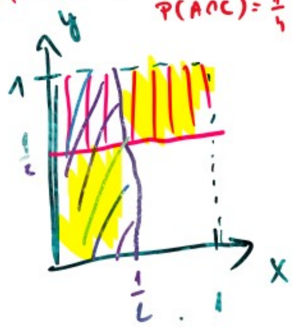
de

$P(A \cap B \cap C) = \underbrace{P(\emptyset)}_{0} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ (Rajz) $\neq \frac{1}{8}$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$



Három esemény függetlensége

A, B, C események akkor és csak akkor függetlenek egymástól, ha a következő egyenlőségek mind teljesülnek:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$P(\overline{A} \cap B \cap C) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C})$$
$$P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C})$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$$

Azaz a páronkénti függetlenség nem elég!

Monty Hall paradoxon

TIPP: 1. ajtó

MONTY HALL KINYITJA 2. AJTÓT, AHOL

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

1. 2. 3. 4 . . . 100

$\frac{99}{100}$

Feltételes valószínűség

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teljes valószínűség tétele:

S

100

Feltételes valószínűség

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

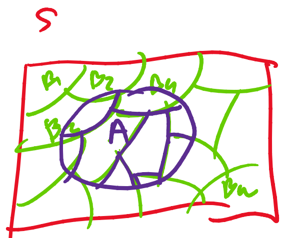
Teljes valószínűség tétele:

$B_1, B_2, \dots B_n$ egymást kizáró események és $\cup_i B_i = S$.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

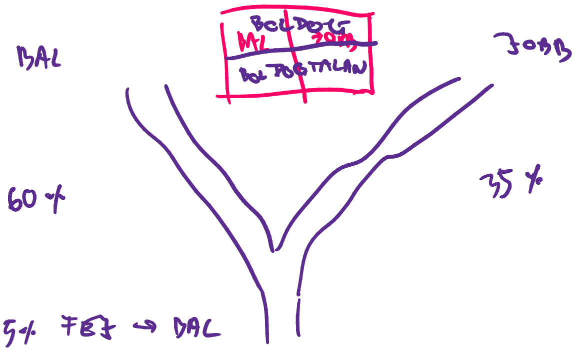
Bayes tétel:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$



$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$
$\dots \cup (A \cap B_n)$

Mese a bayes-i királyfiról



55% FEJ → BAL
45% ÍRÁS → JOBB

$P(\text{BOLDOG}) = \underbrace{0{,}55}_{P(\text{BAL})} \cdot \underbrace{0{,}6}_{P(\text{BOLDOG}|\text{BAL})} + \underbrace{0{,}45}_{P(\text{JOBB})} \cdot \underbrace{0{,}35}_{P(\text{BOLDOG}|\text{JOBB})} =$

$= P(\text{BAL}) \cdot P(\text{BOLDOG}|\text{BAL}) + P(\text{JOBB}) \cdot P(\text{BOLDOG}|\text{JOBB}) =$

$= P(\text{BAL} \cap \text{BOLDOG}) + P(\text{JOBB} \cap \text{BOLDOG})$

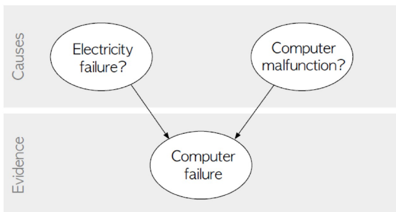
$= 0{,}4875$

$P(\text{BAL} | \text{BOLDOG}) = \frac{P(\text{BAL} \cap \text{BOLDOG})}{P(\text{BOLDOG})}$

$\frac{0{,}55 \cdot 0{,}6}{0{,}4875} = 0{,}6769$

Bayes háló

A Bayes hálók irányított gráfok, ahol ha két pont között él van, akkor közöttük van egy feltételes függőség (egyik okozója a másiknak). Amelyik pontból az él indul, szülőnek, amibe érkezik, gyereknek hívjuk.

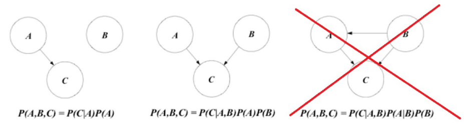


Nem indul a számítógépünk, a lehetséges okok közül (áramkimaradás vagy a gép meghibásodása) mi a legvalószínűbb?

Bayes háló

A Bayes hálók célja, hogy az összes lehetséges (és láthatatlan) ok valószínűségét felfedjük a (látható) eredményeket feltéve.

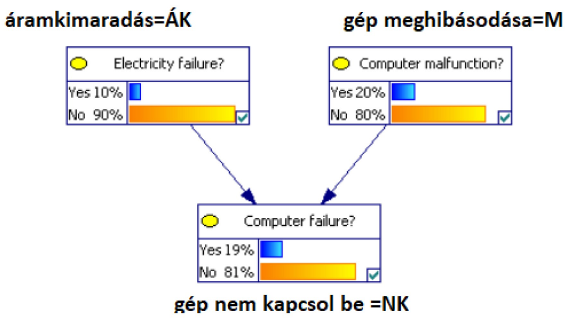
$$P(Ok|Eredmény) = \frac{P(Eredmény|Ok) \cdot P(Ok)}{P(Eredmény)}$$



Tehát egy csúcsból a másikba mutató nyíl mindig kauzalitást jelent "A okozója C-nek". Éppen ezért körök nem fordulhatnak elő a hálóban.

Apriori valószínűségek

Apriori valószínűségek (mielőtt megfigyelnénk az eredményt): P(gép nem kapcsol be) $=?$
P(áramkimaradás) $= 0.1$, P(gép meghibásodás) $= 0.2$



Feltehetjük a következőket:

- csak ez a két ok lehetséges (meghibásodás és áramkimaradás), azaz $P(\overline{NK}|\overline{ÁK} \cap \overline{M}) = 1$
- a két ok független egymástól
- ha áramkimaradás van, akkor biztosan nem kapcsol be a gép $P(NK|AK) = 1$
- Ha nincs áramkimaradás, csak valamilyen meghibásodás akkor annak a valószínHusége, hogy a gép nem kapcsol be 0.5

ÁK	M	P(NK| ÁK ∩ M)
I	H	1
I	I	1
H	H	0
H	I	0.5

P(nem kapcsol be) =

$= P(NK \cap ÁK) + P(NK \cap M) =$

$= P(NK|ÁK) \cdot P(ÁK) +$
$P(NK|M) \cdot P(M) =$

$= 1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}2}}$

Aposteriori valószínűségek

Aposetriori valószínűségek (miután megfigyeltük az eredményt):

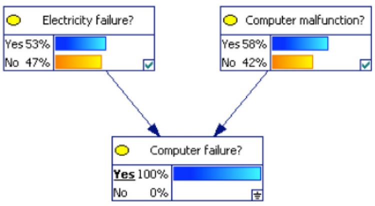
$$P(ÁK|NK) = P(ÁK \cap M|NK) + P(ÁK \cap \overline{M}|NK) =$$
$$= \frac{P(NK|ÁK \cap M) \cdot P(ÁK \cap M)}{P(NK)} + \frac{P(NK|ÁK \cap \overline{M}) \cdot P(ÁK \cap \overline{M})}{P(NK)}$$

$$P(M|NK) = P(M \cap ÁK|NK) + P(M \cap \overline{K}|NK) =$$
$$= \frac{P(NK|ÁK \cap M) \cdot P(ÁK \cap M)}{P(NK)} + \frac{P(NK|\overline{K} \cap M) \cdot P(\overline{K} \cap \overline{M})}{P(NK)}$$

rajz, számolás

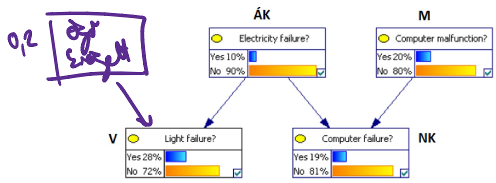
Új apriori valószínűségek

Az eredmény megfigyelése után (gép nem működik) frissítjük az apriori valószínűségeket.



Több okozat (új apriorik)

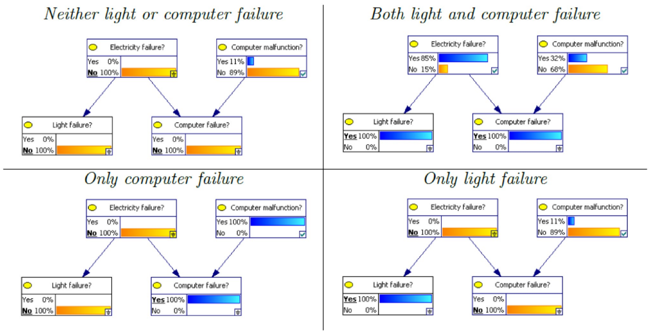
Mi történik, ha a világítás is kimegy?



Ha nincs áram, akkor a világítás sem működik $P(V|ÁK) = 1$, ha viszont áram van, akkor 0.2 az esélye, hogy a körte égett ki $P(V|\overline{ÁK}) = 0.2$

$$P(V) = 1 * 0.53 + 0.2 * 0.47 = 0.28$$

Lehetséges eredmények



Bayes háló

- N db eseménynél 2^N egyenletre van szükség az együttes viselkedésük/függetlenségük megadásához. Azaz a változók függvényében exponenciálisan nő az egyenletek száma.
- Egy csúcs mindig feltételesen független a többi nem gyerekétől a szülőjére nézve. Azaz A, B feltételesen függetlenek C-re nézve, ha $P(A|B, C) = P(A|C)$.
- Ahelyett, hogy N változó függetlenségét próbálnánk belátni, a feltételes függetlenség miatt sokkal egyszerűbb a változók közötti kapcsolatokat feltárni.

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Michael Horný—Bayesian Networks
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Székely J. Gábor —Paradoxonok a véletlen matematikájában

Köszönöm a figyelmet!

$\boxed{\text{PÉLDA}}$

	I. FUTÓSZALAG	II. FUTÓSZALAG	III. FUTÓSZALAG
SELEJT ARÁNY	2 %	1 %	5 %
TERMÉKEK	50 %	30 %	20 %

$P(\text{RANDOM ALKATRÉSZ SELEJTES}) = ?$

$P(\text{SELEJT}) = P(\text{SELEJT} \cap \text{I.}) + P(\text{SELEJT} \cap \text{II.}) + P(\text{SELEJT} \cap \text{III.})$

$= \underbrace{P(\text{SELEJT} \mid \text{I.})}_{0{,}02} \cdot \underbrace{P(\text{I.})}_{0{,}5} + \underbrace{P(\text{SELEJT} \mid \text{II.})}_{0{,}01} \cdot \underbrace{P(\text{II.})}_{0{,}3} + \underbrace{P(\text{SELEJT} \mid \text{III.})}_{0{,}05} \cdot \underbrace{P(\text{III.})}_{0{,}2} =$

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

$= 0{,}02 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}01 + 0{,}003 + 0{,}01 = \underline{0{,}023}$ SELEJTES

$P(\text{II. FUTSZ.} \mid \text{SELEJTES}) = \dfrac{P(\text{II} \cap \text{SELEJT})}{P(\text{SELEJT})} = \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}3}{0{,}023} = \dfrac{0{,}003}{0{,}023} = \underline{\underline{0{,}13}}$