A45

2021. október 14., csütörtök 8:44

A45

A4 Valószínűségszámítás — V. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. október 14.

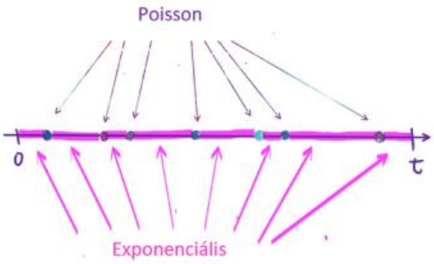
Poisson folyamat

A esemény, X_t a valószínűségi változó, mely az A bekövetkezését számolja a $[0, t)$ intervallumon. $X_t \geq 0$. Az alábbi 5 tulajdonság teljesülésekor beszélhetünk Poisson folyamatról:

- $[t_0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3), \ldots [t_{n-1}, t_n)$ diszjunkt intervallumok, X_t={A bekövetkezésének száma} független minden intervallumon.
- $P(X_t)$ csak t-től függ.
- $P(X_{\Delta t} = j)$ = P({A j-szer következik be Δt-n})
- $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X_{\Delta t}=1)}{\Delta t} = \lambda$ mert a λ mint az átlag bekövetkezési arány!
- Annak vszsége, hogy A egynél többször bekövetkezik Δt-n, elhanyagolható:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=2}^{\infty} P(X_{\Delta t} = k) = 0$$

Poisson folyamat



Jelölés: kis ordó $o(\Delta t)$ függvény, $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$ ~ legfeljebb semmi

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(X_{\Delta t}=1)}{\Delta t}=\lambda \Leftrightarrow P(X_{\Delta t}=1)=\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=2}^{\infty}P(X_{\Delta t}=k)=\frac{1-P(X_{\Delta t}=0)-P(X_{\Delta t}=1)}{\Delta t}=0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}P(X_{\Delta t}=k)=1-P(X_{\Delta t}=0)-P(X_{\Delta t}=1)=o(\Delta t)$$

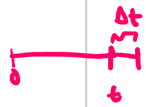
Poisson folyamat

Mivel a valószínűségek nemnegatívak

$$\sum_{k=2}^{\infty}P(X_{\Delta t}=k)=o(\Delta t)\Leftrightarrow P(X_{\Delta t}=k)=o(\Delta t)\ \forall k$$

FÜGGETLENSÉG

$$P(X_{t+\Delta t}=0)=P(X_t=0)\cdot P(X_{\Delta t}=0)$$



DERIVÁLT

$$P(X_{t+\Delta t}=0)=P(X_t=0)\cdot(1-P(X_{\Delta t}=1)-o(\Delta t))$$

maradék $\sum_{k=2}^{\infty} P(X_{\Delta t}=k)$

/ : Δt

$$\frac{P(X_{t+\Delta t}=0)-P(X_t=0)}{\Delta t}=-P(X_t=0)\cdot\frac{P(X_{\Delta t}=1)+o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Legyen $P(X_t=k)=V_k(t)$ függvény

lim

$$\underbrace{\frac{V_0(t+\Delta t)-V_0(t)}{\Delta t}}_{V_0'(t)}=-V_0(t)\underbrace{\frac{V_1(\Delta t)}{\Delta t}}_{\to\lambda}+V_0(t)\underbrace{\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}_{\to 0}$$

$\boxed{A3}$

Poisson differenciálegyenlet

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_0(t+\Delta t) - V_0(t)}{\Delta t} = \boxed{V_0'(t) = \lambda V_0(t)}$$

szeparábilis egyenlet

$$\int \frac{V_0'(t)}{V_0(t)} = \int -\lambda$$

$$\ln |V_0(t)| = -\lambda t + c$$

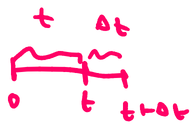
$C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{V_0(t) = C \cdot e^{-\lambda t}} \rightarrow P(X_t = 0)$$

Volt egy kezdeti értékünk:

$$V_0(0) = P(X_0 = 0) = 1 \Rightarrow C = 1 \quad V_0(t) = \underline{e^{-\lambda t}} = P(X_t = 0)$$

Poisson differenciálegyenlet



$P(X_{t+\Delta t} = j)$: A j-szer következik be t-n és 0-szor Δt-n, vagy $j-1$-szer t-n és egyszer Δt-n, stb.

függetlenség

$$P((X_{t+\Delta t} = j) = P(X_t = j) \cdot P(X_{\Delta t} = 0) + P(X_t = j-1) \cdot P(X_{\Delta t} = 1)$$

$$+ P(X_t = j-2) \cdot P((X_{\Delta t} = 2) \ldots$$

j	0
$j-1$	1
$j-2$	2
$\vdots$	
1	$j-1$
0	j

$$V_j(t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{j} V_{j-k}(t) V_k(\Delta t)$$

$$V_j(t+\Delta t) = V_j(t)(\underbrace{1 - V_1(\Delta t) - o(\Delta t)}_{V_0(\Delta t)}) + V_{j-1}(t) V_1(\Delta t) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{j} V_{j-k}(t) V_k(\Delta t)$$

Poisson differenciálegyenlet

$$\frac{V_j(t+\Delta t)-V_j(t)}{\Delta t} \overset{\lambda}{=} V_j(t)\overbrace{\frac{V_1(\Delta t)}{\Delta t}}^{\to\lambda} - V_j(t)\overbrace{\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}^{\to 0} +$$

$$+V_{j-1}(t)\frac{V_1(\Delta t)}{\Delta t} + \sum_{k=2}^{j}\frac{V_{j-k}(t)V_k(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$$

$/ : \Delta t$

nem szeparálható homogén

INHOMOGÉN

$$V_j'(t) = -\lambda V_j(t) + \lambda V_{j-1}(t)$$

Inhomogén diffegyenlet, ugyanúgy megoldjuk, mint az előzőt:

$$\boxed{V_j(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = P(X_t = j)}$$

Másképp

$(1+\frac{1}{n})^n \to e$

$\lambda =$ az események várható száma egységnyi intervallumon

$\frac{\lambda t}{n} =$ az események várható száma t/n hosszú intervallumon

$(1-\frac{\lambda t}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda t}$

$P(k$ részintervallum tartalmaz pontosan 1 eseményt, $n-k$ pedig 0-t) $=$ Binomiális $p = \frac{\lambda t}{n}$ paraméterrel

$(1-\frac{\lambda t}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

A1

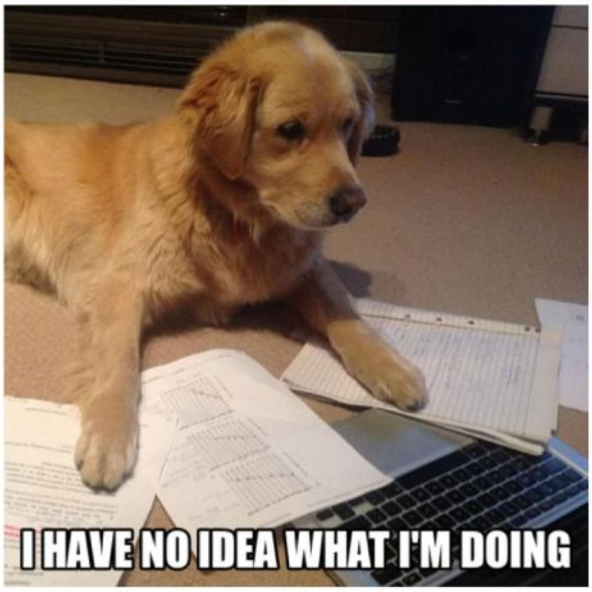
$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} \to 1$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\cdot\boxed{\frac{(\lambda t)^k}{k!}}$$

$$\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n} \to 1$$

Eddig nem a binomiálist közelítettük Poissonnal??



Erlang/Gamma eloszlás

Az n. esemény (sikeres kísérlet) bekövetkezésének időpontja: az exponenciális eloszlás általánosítása (első esemény bekövetkezésének ideje). Az események számának eloszlása ugyanúgy Poisson. Ha S_n-nel jelöljük az időpontot, amikor az n. esemény bekövetkezik, akkor

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Legyen $N(t)$ az események száma, ami t időpontig bekövetkezik. Ekkor tehát $X_i \sim Exp(\lambda)$, $S_n \sim \text{Erlang}(n)$, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda)$, sőt

ERLANG(N) POISSON

$$F(t) = P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n) = 1 - \overbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}}^{P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)\dots+P(N=n-1)}$$

POISSON-nál a változó k
ERLANG-nál a változó t

azaz, ha az n. esemény t időpont előtt történt, az annyit jelent, hogy n vagy több esemény történt t idő alatt.

Erlang/Gamma eloszlás sűrűségfüggvénye

A1-A2

ERLANG sűrűségfv-e

$$f(t) = \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\right)' = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} -$$

$$-e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(\lambda t)^{k-1}\lambda}{k!} = \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{0.\text{ tag}} + \lambda e^{-\lambda t} \sum_{\boxed{k=1}}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} -$$

TELESZKÓPIKUS ÖSSZEG

$$-e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(\lambda t)^{k-1}\lambda}{k!} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k(\lambda t)^{k-1}}{k!} - \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] =$$

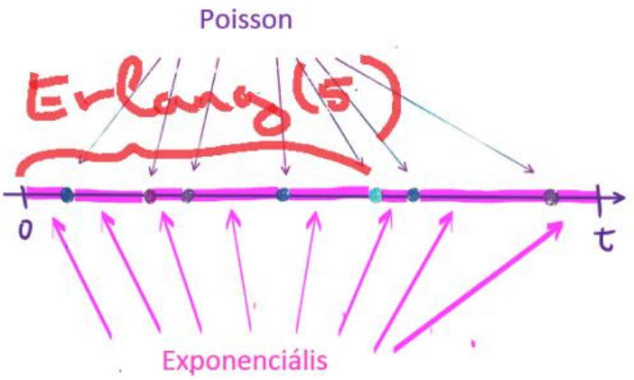
$$\frac{(\lambda t)^0}{0!} - \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right]\right) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

Gamma: $\underline{\frac{\lambda(\lambda t)^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda t}}$ $\quad p \in \mathbb{R} \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Euler-féle Gamma fv

Erlang/Exponenciális/Poisson



Az Erlang úgy viszonyul az exponenciálishoz folytonosban, mint a negatív binomiális a geometriaihoz diszkrétben.

Példa

$Z \sim$ Erlang(5)

X élettartam $\sim EXP(\lambda)$

Y aktuális szám $\sim$ POISSON(12)

$E(X) = \frac{1}{12}$ (hónap) $\lambda = 12$

EXP(12)

A forrasztás nem megfelelő minősége miatt a gyártósorról lekerült egy sorozat hibás rögzítőfék, melyekben az aktuátor vezérlő elektronikájának várható élettartama mindössze egy hónap. Ha meghibásodik cserélni kell.

Mi a valószínűsége, hogy

- *túlél egy hónapot?* $P(X > \frac{1}{12}) = 1 - P(X \le \frac{1}{12}) = 1 - F(\frac{1}{12}) = 1 - (1 - e^{-12 \cdot \frac{1}{12}}) = \underline{e^{-1}}$
- *4 tartalék elektronikával (azaz összesen 5-tel) kihúzunk egy évet?* = 1 éven belül < 5 meghibásodás = $P(Y=0) + P(Y=1) + \ldots + P(Y=4) =$ $t=1$

  Mi a valószínűsége, hogy az 5. meghibásodás 1 év után következik be
- *a harmadikat a 6. hónap ~~előtt~~ kell beszerelni?*
- *két hibásodás között több mint 2 hónap telik el?*
- *ha túlélt 1.5 hónapot, túlél még egyet?*

- két hibásodás között több mint 2 hónap telik el?
- ha túlélt 1.5 hónapot, túlél még egyet?
- ha már háromszor kellett cserélni, még háromszor kell majd egy évben?

Poisson $P(Y \geq 6 \mid Y \geq 3) = \frac{P(Y \geq 6)}{P(Y \geq 3)} = \frac{1-(P(Y=0)+P(Y=1)+\dots+P(Y=5))}{1-(P(Y=0)+\dots+P(Y=3))}$

$P(Z_5 > 1) = ?$ $1-\left(1-\sum_{k=0}^{4}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\right)$

$P(Z_3 > 1)$

EXP $P(X > \frac{1}{6}) = 1-(1-e^{-\frac{12}{6}}) = e^{-2}$

örökifjú

$P(X > \frac{5}{24} \mid X > \frac{3}{24}) =$

$P(X > \frac{1}{12}) = e^{-1}$

Béta eloszlás

$X_1, X_2, \dots X_n \sim Uni(0,1)$ függetlenek, a k. legkisebbet keressük.

$P(X < 0{,}6) = ?$

Egyenletes d.v.:

$P(X < c) = \frac{c-a}{b-a}$

$k-1$ db $\quad$ $n-k$ db

0 $\quad$ X $\quad$ 1

k $\quad$ $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

$$\frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} = f(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

n, k egészek, de a Béta eloszlás definiálható tetszőleges valós paraméterekkel is ($k = a$ és $n - k + 1 = b$):

$$f(x) = \frac{1}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

Béta eloszlás

sűrűségfv

$n = 5, k = 1, 2, 3, 4, 5$

Béta eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(X < x) = P(\text{a k. legkisebb szám x-től balra van}) =$$

$$= P(\text{az x-től balra lévő számok száma legalább} k) =$$

$$= P(\text{az x-től balra lévő számok száma pontosan} k) +$$

$$+ P(\text{az x-től balra lévő számok száma pontosan } k+1) + \dots$$

$$+ P(\text{az x-től balra lévő számok száma pontosan } n) =$$

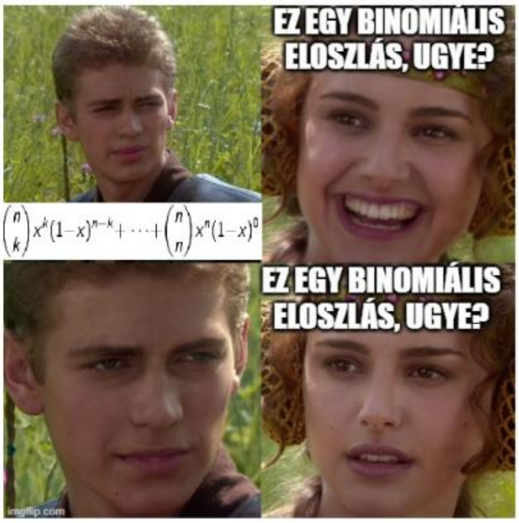
$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k+1} + \dots + \binom{n}{n} x^n (1-x)^0$$

5 számot generálok,
3. legkisebb

$$P(X < x) = \binom{5}{3} x^3 (1-x)^2 + \binom{5}{4} x^4 (1-x)^1 + \binom{5}{5} x^5 (1-x)^0$$

$$P(X < 0{,}5) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 + \binom{5}{4} 0{,}5^4 \cdot 0{,}5 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}5^5 = \underline{0{,}5^5 \cdot \left(\binom{5}{3} + 5 + 1\right)}$$

Nem láttuk ezt már valahol?



Példa

Mi a valószínűsége, hogy három random szám közül a legnagyobb kisebb, mint 0.4? A második legnagyobb kisebb, mint 0.2?

$n = 3$

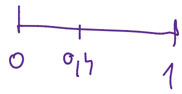
$\ell = 3$

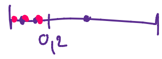
$X \sim Beta(3,3)$

$Y \sim Beta(3,2)$

$$P(X < 0{,}4) = \binom{3}{3} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = \underline{(0{,}4)^3}$$

$$P(Y < 0{,}2) = \binom{3}{2} \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^1 + \binom{3}{3} \cdot (0{,}2)^3 \cdot (0{,}8)^0 = \underline{3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 + (0{,}2)^3}$$





Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists

Köszönöm a figyelmet!