0.1. A Laplace-transzformált

A Laplace-transzformált a következőképpen néz ki:

$$L[f(x)](p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x,$$

tehát egy egyváltozós függvényhez (x a változója) egy egyváltozós függvényt (p a változója) rendel. Az alábbi azonosságok teljesülnek a Laplace-transzformáltra:

$$L[f+g](p) = L[f](p) + L[g](p),\ \text{(additív)}$$

$$L[c \cdot f](p) = c \cdot L[f](p),\ \text{ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges (homogén).}$$

A fenti két tulajdonsága miatt lineáris.

$$L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a),\ \text{(eltolási szabály)},$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$
$$L[y'](p) = p \cdot L[y](p) - y(0), \quad L[y''](p) = p^2 \cdot L[y](p) - py(0) - y'(0).$$

0.1.1. Határozzuk meg a fenti azonosságokat felhasználva a következő függvények Laplace-transzformáltját:

(a) $f(x) = 1 \quad \left(\frac{1}{p}\right)$

(b) $f(x) = x \quad \left(\frac{1}{p^2}\right)$

(c) $f(x) = x^2 \quad \left(\frac{2}{p^3}\right)$

(d) $f(x) = 3x^2 + 2 \quad \left(\frac{6}{p^3} + \frac{2}{p}\right)$

(e) $f(x) = e^{3x} \quad \left(\frac{1}{p-3}\right)$

(f) $f(x) = e^{-2x} \quad \left(\frac{1}{p+2}\right)$

(g) $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{1}{p-a}\right)$

(h) $f(x) = \cos(2x) \quad \left(\frac{p}{p^2+4}\right)$

(i) $f(x) = \sin(-3x) \quad \left(\frac{-3}{p^2+9}\right)$

(j) $f(x) = 2\cos(-x) - 3\sin(3x) \quad \left(2\frac{p}{p^2+1} - 3\frac{3}{p^2+9}\right)$

(k) $f(x) = xe^x \quad \left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)$

(l) $f(x) = e^{-x}\cos(2x) \quad \left(\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right)$

Határozzuk meg $L[f](p)$ ismeretében f-t, a fejezet elején levő alapazonosságok segítségével!

0.1.2. **(a)** $L[f](p) = \dfrac{1}{p+2} \quad \left(e^{-2x}\right)$

(b) $L[f](p) = \dfrac{1}{(p-2)^2}$ $\quad \left(xe^{2x}\right)$

(c) $L[f](p) = \dfrac{1}{(p-1)^3}$ $\quad \left(\frac{x^2}{2}e^x\right)$

0.1.3. **(a)** $L[f](p) = \dfrac{p}{(p-1)^2}$ $\quad (e^x(1+x))$

(b) $L[f](p) = \dfrac{p-3}{p^2+4}$ $\quad \left(\cos(2x) - \frac{3}{2}\sin(2x)\right)$

(c) $L[f](p) = \dfrac{p+2}{p^2-2p-3}$ $\quad \left(\frac{5}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x}\right)$

(d) $L[f](p) = \dfrac{p-2}{p^2+4p+13}$ $\quad \left(e^{-2x}\cos(3x) - \frac{4}{3}\cdot e^{-2x}\sin(3x)\right)$

0.1.4. $L[f](p) = \dfrac{p+1}{(p^2+2p+2)(p^2+4)}$ $\quad \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x\right)$

0.1.5. $L[f](p) = \dfrac{8}{(p^2+1)(p^2+9)}$ $\quad (\sin x - \sin 3x)$

0.1.6. $L[f](p) = \dfrac{1}{(p^2-4p+5)(p^2-4p+8)}$ $\quad \left(\frac{1}{3}\cdot e^{2x}\sin x - \frac{1}{6}\cdot e^{2x}\sin 2x\right)$

Oldjuk meg a követező kezdetiértékes differenciálegyenleteket!

0.1.7. $y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 5$.

Megoldás $y(x) = e^{-x}(x+5)$.
Megjegyzés Ez majdnem a **2.4.2**-es feladat, csak ott nem volt kezdetiérték.

0.1.8. $y'' - 4y = 3e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

Megoldás $y(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$.

0.1.9. $y'' - y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Megoldás $y(x) = \frac{2xe^x + e^x + 3e^{-x}}{4}$.

0.1.10. $y'' + 4y = e^{-x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Megoldás $y(x) = \frac{1}{10}\left(2e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - 2\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x\right)$

0.1.11. $y'' - 4y = 4e^{-2x} - 8\sin 2x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

Megoldás $y(x) = e^{2x} - xe^{-2x} + 2e^{-2x} + \sin 2x$.
Megjegyzés Ez a **2.6.10**-es feladat másfajta megoldása.

0.1.12. $y'' = y' + e^{2x} + 2y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Megoldás $y(x) = \frac{1}{3}xe^{2x} - \frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$.

0.1.13. $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Megoldás $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} - xe^{-x} + 4e^{-x} - 3e^{-2x}$.

0.1.14. $y'' + 5y' + 4y = 2x^2 - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Megoldás $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{17}{16} + e^{-x} - \frac{17}{16}e^{-4x}$.

0.1.15. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

Megoldás $y(x) = e^{-x}(\sin x + \sin 2x)$.

0.1.16. $y'' + y' + 3y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

Megoldás $y(x) = \frac{3}{5}e^{-2x} - \frac{3}{5}\cos\frac{\sqrt{11}x}{2}e^{-x/2} + \frac{29}{5\sqrt{11}}\sin\frac{\sqrt{11}x}{2}e^{-x/2}$.

0.1.17. $y''' - 8y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Megoldás $y(x) = \frac{1}{16}(e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{8}e^{x}\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{8\sqrt{3}}e^{x}\sin\sqrt{3}x$.