

2. A z -transzformált

2.1. Egy információátviteli probléma

Legyen adott egy üzenetátviteli rendszerünk, amelyben az üzeneteket két alapjel – mondjuk a és b – segítségével kódoljuk és továbbítjuk. Egy üzenet formája az a és b alapjelekből álló valamely véges hosszúságú sorozat. Például: $abaabbb$. Ilyen rendszerekre példa lehet a telegráf vagy a binárisan kódolt adatátviteli rendszerek (fax, internet, stb.).

A rendszerben az a alapjel átviteléhez k_1 , míg a b alapjel átviteléhez k_2 időegységre van szükség (k_1 és k_2 pozitív egész). Tegyük fel a meghatározottság kedvéért, hogy $k_2 \geq k_1$.

Kérdés: Hány olyan egymástól különböző üzenet (jelsorozat) van amelyek átviteléhez pontosan n időegység kell?

Jelölje s_n azon az egymástól különböző üzeneteknek a számát, amelyek pontosan n időegység alatt vihetők át. Ekkor s_n teljesíti a

$$s_n = s_{n-k_1} + s_{n-k_2}, \quad n \geq k_2 \quad (2.1)$$

rekurzív összefüggést, mivel két eset van: ha az utolsó átvitt alapjel k_1 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_1} db különböző $n - k_1$ hosszú jelsorozat lehet, ill. ha az utolsó átvitt alapjel k_2 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_2} féle $n - k_2$ hosszú jelsorozat lehetett. Természetesen a rekurzív képletünk akkor határozza meg egyértelműen az (s_n) sorozatot, ha megadjuk a sorozat első k_2 db kezdeti értékét:

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_1, \quad \dots, \quad s_{k_2-1} = u_{k_2-1}.$$

Speciális eset: Legyen az $a = \cdot$ átviteléhez szükséges idő egy egység, $k_1 = 1$ és az $b = -$ átviteléhez szükséges idő 2 egység, azaz $k_2 = 2$. Ekkor

n	s_n	lehetséges sorozatok
1	1	\cdot
2	2	$\cdot\cdot; -$
3	3	$\cdot\cdot\cdot; \cdot-; --$
4	5	$\cdot\cdot\cdot\cdot; \cdot\cdot-; \cdot--; --\cdot; --$

Látható, hogy ebben az esetben az

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + s_{n-2}, & n \geq 2, \\ s_0 &= 0, & s_1 = 1 \end{aligned}$$

rekurzió adja a probléma megoldását.

Ilyen rekurzív sorozatok megoldásai keresésére a z -transzformált módszert fogjuk alkalmazni.

2.2. A z -transzformált

Tekintsünk egy (x_n) valós vagy komplex számokból álló sorozatot. Ebben a fejezetben minden sorozatról feltesszük, hogy az indexe 0-val indul, $n = 0, 1, 2, \dots$ (Ez az alkalmazásokban nem megszorítás, hiszen mindig át tudjuk úgy alakítani a sorozat képletét, hogy az indexe 0-val kezdődjön.)

2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozatnak létezik a z -transzformáltja a $z \in \mathbb{C}$ helyen, ha az

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

sor konvergens. Az $x = (x_n)$ sorozat $z \in \mathbb{C}$ helyen vett z -transzformáltját az

$$X(z), \quad \mathcal{Z}\{x_n\}(z), \quad \mathcal{Z}\{x\}(z)$$

szimbólumokkal szokás jelölni.

Valós vagy komplex számsorok konvergenciájának ellenőrzésére használhatjuk például a gyök-kritériumot. Ezt alkalmazva a fenti sorra kapjuk, hogy $X(z)$ létezik, azaz a sor konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x_n}{z^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|x_n|}}{|z|} < 1,$$

és $X(z)$ nem létezik, azaz a végtelen sor nem konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x_n}{z^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|x_n|}}{|z|} > 1.$$

Jelölje ezért

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|},$$

feltéve, hogy a határérték létezik. Ekkor a fenti számolás azt adja, hogy $X(z)$ konvergens, ha $|z| > R$, és $X(z)$ divergens, ha $|z| < R$. Az R számot a z -transzformált *konvergenciasugárának* nevezzük. Ha $R = 0$, akkor $X(z)$ létezik minden $z \neq 0$ -ra.

Megjegyezzük, hogy ha a z -transzformált változóját helyettesítjük a $w = 1/z$ új változóval, akkor a

$$X(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w^n$$

hatványsort kapjuk, amit a sorozat *generátorfüggvényének* hívunk. Látható, hogy a generátorfüggvény és a z -transzformált között igen szoros a kapcsolat. Kombinatorikában például gyakran használják a generátorfüggvényt különböző feladatokban, de a differenciaegyenletek megoldására a z -transzformált módszert igen kényelmes használni, hiszen ennek a Laplace-transzformálthoz hasonló tulajdonságai vannak, ahogy ezt majd láthatjuk a fejezet során.

2.2. Példa. Számítsuk ki az $x_n = a^n$, ($a \neq 0$) sorozat z -transzformáltját!

A z -transzformált definícióját és a geometriai sor összegképletét alkalmazva kapjuk $|z| > |a|$ -ra, hogy

$$\mathcal{Z}\{a^n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$

Valóban, a konvergenciasugár ebben az esetben $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = |a|$. □

2.3. Példa. Tekintsük az $x_n = 1$ konstans sorozatot.

Ez az előbbi sorozat speciális esete ($a = 1$), ezért

$$\mathcal{Z}\{1\}(z) = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1.$$

□

2.4. Példa. Az *egység impulzus sorozat* vagy más néven a *Kronecker-delta sorozat* definíciója: adott k nemnegatív egészre $\delta_n^{(k)}$ legyen a következő

$$\delta_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = k \\ 0, & \text{ha } n \neq k. \end{cases}$$

Definíció alapján

$$\mathcal{Z}\{\delta_n^{(k)}\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(k)} z^{-n} = z^{-k}, \quad z \neq 0.$$

Speciálisan, ha $k = 0$, akkor

$$\mathcal{Z}\{\delta_n^{(0)}\}(z) = 1, \quad z \neq 0.$$

□

2.5. Példa. Tekintsük a *Heaviside-sorozatot* vagy *egységugrás sorozatot*, azaz valamely k pozitív egészre

$$u_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < k \\ 1, & \text{ha } n \geq k. \end{cases}$$

Ekkor minden $|z| > 1$ -re

$$\mathcal{Z}\{u_n^{(k)}\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z^{-k}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{1-k}}{z - 1}.$$

□

2.6. Tétel. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $M \geq 0$ és $a > 0$ konstansok, hogy az (x_n) sorozatra

$$|x_n| \leq Ma^n, \quad \text{minden } n = 0, 1, \dots \text{-re.}$$

Ekkor az (x_n) sorozatnak létezik a z -tanszformáltja minden $|z| > a$ -ra.

Bizonyítás: Mivel a feltétel szerint

$$\frac{|x_n|}{|z|^n} \leq M \left(\frac{a}{|z|} \right)^n, \quad \text{és} \quad M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{|z|} \right)^n \quad \text{konvergens, ha } |z| > a,$$

ezért a majoráns kritérium alapján a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ sor is abszolút konvergens, azaz a z -transzformált létezik. □

Adott $k > 0$ egész, a_1, \dots, a_k valós konstansok, (b_n) valós sorozat. Az

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} + b_n, \quad n = k, k+1, \dots \quad (2.2)$$

egyenletet k -adrendű konstans együtthatós lineáris rekurzív differenciaegyenletnek hívjuk. Az egyenlet egyértelműen definiál egy (x_n) sorozatot, ha megadjuk a sorozat első k darab tagját:

$$x_0 = u_0, \dots, x_{k-1} = u_{k-1}, \quad (2.3)$$

ahol u_0, \dots, u_{k-1} adott számok.

A következő állítás értelmében a (2.2)–(2.3) rekurzív sorozat mindig exponenciálisan korlátos, feltéve, hogy a (b_n) sorozat is az. Ebből következik, hogy a (2.2) egyenlet megoldásának mindig létezik a z -transzformáltja elég nagy $|z|$ -re.

2.7. Tétel. Tegyük fel, hogy a (b_n) sorozat exponenciálisan korlátos, azaz léteznek olyan $B \geq 0$ és $b \geq 1$ számok, hogy $|b_n| \leq Bb^n$ minden $n = k, k+1, \dots$ egész számra. Ekkor a (2.2)–(2.3) rekurzív sorozat is exponenciálisan korlátos, azaz léteznek olyan $M \geq 0$ és $a \geq 1$ számok, hogy $|x_n| \leq Ma^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2.3. A z -transzformált tulajdonságai

2.8. Tétel (Linearitás). Legyen $X(z)$ az (x_n) sorozat z -transzformáltja, amely konvergencia sugara R_1 és legyen $Y(z)$ az (y_n) sorozat z -transzformáltja, amely konvergencia sugara R_2 . Ekkor bármely a és b komplex számokra

$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\}(z) = aX(z) + bY(z), \quad |z| > \max\{R_1, R_2\}.$$

Bizonyítás: Legyen $|z| > \max\{R_1, R_2\}$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(ax_n + by_n)z^{-n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a||x_n z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |b||y_n z^{-n}| < \infty,$$

tehát a bal oldalon álló z -transzformált is létezik, és az értéke

$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (ax_n + by_n)z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = aX(z) + bY(z).$$

□

2.9. Példa. Számítsuk ki az $x_n = \sin an$ sorozat z -transzformáltját!

Az Euler-formula szerint

$$\sin an = \frac{e^{ian} - e^{-ian}}{2i},$$

így a z -transzformált linearitását használva

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\sin an\} &= \frac{1}{2i} (\mathcal{Z}\{e^{ian}\} - \mathcal{Z}\{e^{-ian}\}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z - e^{ia}} - \frac{z}{z - e^{-ia}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{z^2 - ze^{-ia} - z^2 + ze^{ia}}{z^2 - (e^{ia} + e^{-ia})z + 1} = \frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}. \end{aligned}$$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\mathcal{Z}\{\cos an\} = \frac{z^2 - z \cos a}{z^2 - 2z \cos a + 1}.$$

□

Bizonyítás nélkül tekintsük a következő állítást:

2.10. Tétel (Unicitás tétel). Legyen az (x_n) és (y_n) két sorozat, amelyek $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ és $Y = \mathcal{Z}\{y_n\}$ z -transzformáltjai konvergensek a $|z| > R_1$, illetve $|z| > R_2$ tartományokban. Ha $X(z) = Y(z)$, $|z| > \max\{R_1, R_2\}$, akkor $x_n = y_n$, minden $n = 0, 1, 2, \dots$ -re.

A 2.10. Tétel szerint tehát a z -transzformáltnak egyértelmű inverz művelete létezik, amelyet *inverz z -transzformáltnak* hívunk, és \mathcal{Z}^{-1} -gyel jelölünk. Azaz ha $\mathcal{Z}\{x_n\}(z) = X(z)$, akkor $\mathcal{Z}^{-1}(X) = x_n$.

A z -transzformált linearitásából könnyen igazolható az alábbi tulajdonság.

2.11. Tétel. Az inverz z -transzformált lineáris, azaz minden a és b konstansra

$$\mathcal{Z}^{-1}\{aX(z) + bY(z)\} = a\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} + b\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}.$$

2.12. Példa. Számítsuk ki az

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + z - 20}$$

függvény inverz z -transzformáltját!

A nevező szorzattá alakítható, így parciális törtekre alakítjuk a kifejezést, de egy z szorzótényezőt először kiemelünk:

$$\frac{z^2 - z}{z^2 + z - 20} = z \left(\frac{2}{3} \frac{1}{z + 5} + \frac{1}{3} \frac{1}{z - 4} \right) = \frac{2}{3} \frac{z}{z + 5} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 4},$$

ezért

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{2}{3}(-5)^n + \frac{1}{3}4^n.$$

□

2.13. Példa. Számítsuk ki az

$$X(z) = \frac{4z^2 + z}{z^2 - z + 1}$$

függvény inverz z -transzformáltját!

A nevező nem alakítható szorzattá, így a szinusz és koszinusz azonosságokra vezetjük vissza a számolást:

$$\begin{aligned} \frac{4z^2 + z}{z^2 - z + 1} &= \frac{4z^2 + z}{z^2 - 2z\frac{1}{2} + 1} = \frac{4z^2 + z}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} = \frac{4(z^2 - z\frac{1}{2}) + 3z}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} \\ &= 4 \frac{z^2 - z\cos\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} + 2\sqrt{3} \frac{z\sin\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1}, \end{aligned}$$

ezért

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right).$$

□

2.14. Tétel (Eltolás). Legyen (x_n) olyan sorozat, amelyet (tesztőleges módon) kiterjesztünk negatív indexekre is, legyen $u_n^{(k)}$ az egységugrás sorozat. Legyen továbbá az $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ z -transzformált konvergencia sugara R , és legyen $k > 0$ rögzített egész. Ekkor

$$(a) \mathcal{Z}\{u_n^{(k)}x_{n-k}\} = z^{-k}X(z), \quad |z| > R, \quad (\text{eltolás jobbra})$$

$$(b) \mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^kX(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}, \quad |z| > R, \quad (\text{eltolás balra}).$$

Bizonyítás: Az (a) rész következik a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-(j+k)} = z^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j}$$

összefüggésekből, ahol a $j = n - k$ helyettesítést használtuk.

A (b) állítás hasonlóan adódik a $j = n + k$ helyettesítéssel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^{-n} = \sum_{j=k}^{\infty} x_j z^{k-j} = z^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j} - \sum_{j=0}^{k-1} x_j z^{-j} \right).$$

□

2.15. Tétel. Legyen $a \neq 0$ komplex szám. Ha az (x_n) sorozat $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ z -transzformáltjának konvergencia sugara R , akkor

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\}(z) = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad |z| > R|a|.$$

Bizonyítás: Egyszerű számolással kapjuk

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{ha } \left|\frac{z}{a}\right| > R.$$

□

Az eltolási tétel lehetőséget ad differenciaegyenletek megoldására.

2.16. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+1} = 3x_n - 1, \quad x_0 = 1$$

differenciaegyenletet!

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának z -transzformáltját

$$zX(z) - zx_0 = 3X(z) - \frac{z}{z-1},$$

és használjuk a kezdeti feltételt:

$$(z-3)X(z) = z - \frac{z}{z-1},$$

azaz

$$X(z) = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{(z-1)(z-3)}.$$

Inverz z -transzformáltat számolva

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-3} - \frac{z}{(z-1)(z-3)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-3} - z \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} \right) \right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{z}{z-3} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} \right\} = \frac{1}{2} 3^n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

2.17. Tétel. Ha az (x_n) sorozat $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ z -transzformáltjának konvergencia sugara R , akkor

$$-zX'(z) = \mathcal{Z}\{nx_n\}(z), \quad |z| > R,$$

általában,

$$(-1)^k z^k X^{(k)}(z) = \mathcal{Z}\{n(n+1) \cdots (n+k-1)x_n\}(z), \quad |z| > R.$$

Bizonyítás: A z -transzformált konvergenciasugara definíciójából következik, hogy a $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w^n$ hatványsor konvergál a $|w| < 1/R$ tartományon. Tudjuk, hogy egy hatványor tagonként differenciálható a konvergenciatartományán belül, azaz

$$g'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n w^{n-1}, \quad |w| < 1/R.$$

Mivel $g(w) = X(1/w)$, ezért

$$-\frac{1}{w^2}X'\left(\frac{1}{w}\right) = g'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n w^{n-1},$$

azaz

$$-\frac{1}{w}X'\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} nx_n w^n.$$

A $z = 1/w$ helyettesítéssel kapjuk

$$-zX'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nx_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx_n\}(z), \quad |z| > R.$$

A második állítás teljes indukcióval könnyen igazolható. □

2.18. Példa. Számítsuk ki az $x_n = n$ sorozat z -transzformáltját!

A 2.17. Tételt alkalmazva

$$\mathcal{Z}\{n\} = \mathcal{Z}\{n \cdot 1\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = -z \frac{1 \cdot (z-1) - z \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

□

2.19. Példa. Számítsuk ki az $x_n = n^2$ sorozat z -transzformáltját!

A 2.17. Tételt alkalmazva újra

$$\mathcal{Z}\{n^2\} = \mathcal{Z}\{n \cdot n\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) = -z \frac{1 \cdot (z-1)^2 - z \cdot 2(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

□

2.20. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = u_n^{(2)}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$$

kezdeti érték feladatot!

z -transzformáltat számolva

$$z^2 X(z) - z^2 x_0 - zx_1 - 4zX(z) + 4zx_0 + 4X(z) = \frac{1}{z(z-1)},$$

amiből a kezdeti feltételeket is használva következik

$$X(z) = \frac{1}{z(z^2 - 4z + 4)(z-1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z}{(z-2)^2(z-1)}.$$

Számítsuk ki először

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-2)^2(z-1)} \right\} &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \left(\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z/2}{(z/2-1)^2} \right\} - \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-2} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} 2^n n - 2^n + 1 \\ &= 2^{n-1} n - 2^n + 1. \end{aligned}$$

Ezért az jobbra eltolási tételt használva

$$x_n = u_n^{(2)} (2^{n-3}(n-2) - 2^{n-2} + 1).$$

A $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ inverz z -transzformáltat kiszámolhatjuk úgy is, hogy kiindulunk az

$$\begin{aligned} X(z) &= z \cdot \frac{1}{z^2(z-2)^2(z-1)} = z \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{4} \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{z}{(z-2)^2} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

alakból. Ezért

$$x_n = -\frac{1}{4} \delta_n^{(1)} - \frac{1}{2} \delta_n^{(0)} + \frac{1}{8} 2^n n - \frac{1}{2} 2^n + 1.$$

Ellenőrizhető, hogy a fenti két képlet ugyanazt a sorozatot generálja. \square

Bizonyítás nélkül tekintsük az alábbi eredményt.

2.21. Tétel (Kezdeti- és végérték tétel). Legyen $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$. Ekkor

(a) Kezdeti érték állítás:

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} X(z) = x_0,$$

(b) Végérték állítás:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

(feltéve, hogy ez a határérték létezik).

2.22. Definíció. Az $x = (x_n)$ és $y = (y_n)$ sorozatok *konvolúciója* alatt azt az $x * y$ -nal jelölt sorozatot értjük, amely általános tagja a következő összefüggéssel definiált:

$$(x * y)_n = \sum_{j=0}^n x_{n-j} y_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$(x * y)_n = \sum_{j=0}^n x_j y_{n-j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Szokás egyszerűen az $x_n * y_n$ jelölést is használni a konvolúciós sorozat n -edik tagjára.

Könnyen ellenőrizhetők a konvolúció alábbi tulajdonságai:

2.23. Állítás. Minden x, y, w sorozatra teljesül

(a) kommutativitás: $x * y = y * x$,

(b) asszociativitás: $(x * y) * w = x * (y * w)$,

(c) disztributivitás: $(x + y) * w = x * w + y * w$,

(d) $x * O = O$, ahol $O_n \equiv 0$ az azonosan nulla sorozat.

2.24. Tétel (Konvolúciós tétel). Ha $x = (x_n)$ és $y = (y_n)$ két sorozat, amelyek $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ és $Y = \mathcal{Z}\{y_n\}$ z -transzformáltjainak a konvergencia sugara R_1 , illetve R_2 , akkor azok konvolúciójának z -transzformáltja is létezik, és

$$\mathcal{Z}\{x * y\}(z) = X(z)Y(z), \quad |z| > \max\{R_1, R_2\}.$$

2.4. Alkalmazás

Térjünk vissza a 2.1. szakaszban definiált információátviteli probléma speciális esetéhez:

2.25. Példa. Számoljuk ki az

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1$$

rekurzív összefüggéssel definiált (s_n) sorozat képletét!

A z -transzformált kényelmes alkalmazásához írjuk át a rekurzív egyenletet az

$$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n, \quad n \geq 0$$

alakba. Legyen $S = \mathcal{Z}\{s_n\}$. Ekkor mindkét oldal z -transzformáltját véve és alkalmazva az eltolási tételt kapjuk, hogy

$$z^2 S(z) - z^2 s_0 - z s_1 = z S(z) - z s_0 + S(z),$$

ahova a kezdeti értékeket behelyettesítve

$$(z^2 - z - 1)S(z) = z,$$

azaz

$$S(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}.$$

$S(z)$ inverz z -transzformáltjának meghatározásához parciális törtekre bontunk, de úgy, hogy egy z szorzótényezőt meghagyunk a számlálóban:

$$\frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} = z \left(\frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} \right),$$

ahol

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ezt végigszámolva kapjuk

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{és} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

és így

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2} \right).$$

Ennek inverz z -transzformáltját véve

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

□

2.26. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+1} - 4y_n = 1, \quad y_{n+1} - x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1$$

differenceciaegyenlet-rendszert! Az egyenletek mindkét oldalának z -transzformáltját véve

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 - 4Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ zY(z) - zy_0 - X(z) &= 0, \end{aligned}$$

így a kezdeti feltételeket használva

$$\begin{aligned} zX(z) - 4Y(z) &= z + \frac{z}{z-1} \\ zY(z) - X(z) &= -z. \end{aligned}$$

Az algebrai egyenletrendszert megoldva kapjuk

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z(z-2)}{(z-1)(z+2)} = z \left(\frac{4}{3} \frac{1}{z+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{z-1} \right) \\ Y(z) &= -\frac{z^2}{(z-1)(z+2)} = z \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{z+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{z-1} \right). \end{aligned}$$

Ezért a megoldás

$$x_n = \frac{4}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}, \quad y_n = -\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}.$$

□