EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Schipp Ferenc

WAVELETEK

Egyetemi jegyzet

Alkalmazott- és Programtervező
Matematikusoknak

BUDAPEST, 2003

TARTALOM

7. Irodalomjegyzék

1. Affin waveletek

Ebben a pontban affin waveletek szerkesztésével foglalkozunk. Kiindulva valamely $\psi \in X := L^2(\mathbb{R})$ alapfüggvényből (***anyawaveletből***) azt vizsgáljuk, hogy milyen feltétel mellett lesz az alapfüggvényből ***transzlációval és dilatációval*** származtatott

$$\psi_k^n(x) := 2^{n/2}\psi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R},\ k, n \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

függvényrendszer ortonormált az

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad (f, g \in X)$$

skaláris szorzatra nézve. Az ilyen alakú rendszereket ***affin waveleteknek*** nevezzük. A továbbiakban feltesszük, hogy a ψ függvény $L^2(\mathbb{R})$-normája 1, azaz

$$\|\psi\|_X := \Big(\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} = 1.$$

Ekkor a ψ_k^n függvények is normáltak: $\|\psi_k^n\|_X = 1$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

A

$$\psi(x) := h(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < 1/2), \\ -1 & (1/2 \leqq x < 1), \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1)) \end{cases} \tag{2}$$

alapfüggvényből képzett $h_k^n(x) := 2^{n/2}h(2^n x - k)$ $(x \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z})$ rendszer a Fourier-sorok elméletében sok vonatkozásban kitüntetett ***Haar-***féle ortonormált rendszer. Egyszerűen igazolható, hogy a $(h_k^n, k, n \in \mathbb{Z})$ rendszer valóban ortonormált (lásd az 1.feladatot). A Haar-rendszer számos fontos térben mint pl. az L^p $(1 \leqq p < \infty)$ terekben, bizonyos martingál Hardy-terekben, VMO-terekben, stb. bázist alkot. A Haar-rendszer szerint vett Fourier-együtthatók segítségével jellemezhetők a szóban forgó terek. Minthogy a Haar-függvények nem folytonosak, azért fontos, sima függvényekből alkotott terek, mint pl. Lipschitz-, Hölder-, Soboljev-terek esetén ilyen típusú jellemzés nem lehetséges.

Megmutatjuk, hogy alkalmasan választott, sima ψ függvényekből kiindulva is lehet ortonormált wavelet-rendszereket konstruálni. Ezek a most említett, sima függvényekből álló terek jellemzésére is felhasználhatók. Ilyen ortonormált rendszerek szerkesztése — a Haar-rendszert kivéve — bonyolult feladatnak bizonyult. Ennek megoldásához felhasználjuk a Fourier-analízis eszköztárát, függvények helyett azok

$$\hat{f}(x) := (\mathcal{F}f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\epsilon_x(t)}\,dt \quad (\epsilon_x(t) := e^{2\pi ixt},\ x,t \in \mathbb{R}, f \in L^1(\mathbb{R})) \tag{3}$$

Fourier-transzformáltját vizsgálva. A Fourier-transzformált $L^2(\mathbb{R})$-re vonatkozó kiterjesztését is $\mathcal{F}$-fel fogjuk jelölni. Waveletek konstrulciójában jól használhatók a

$$\begin{aligned} (\tau_a f)(x) &:= f(x+a), \quad (\nu_a f)(x) = \epsilon_a(x) f(x), \\ (\delta_s f)(x) &:= f(sx) \quad (a, x \in \mathbb{R}, s > 0) \end{aligned} \tag{4}$$

transzláció, moduláció és dilatáció operátorok és a Fourier-transzformáció kapcsolatára vonatkozó alábbi azonosságok:

$$\begin{aligned} \tau_a \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \nu_{-a}, &\quad \mathcal{F} \circ \tau_a = \nu_a \circ \mathcal{F}, \\ \mathcal{F} \circ \delta_s = s^{-1}\delta_{s^{-1}} \circ \mathcal{F} &\quad (a \in \mathbb{R}, s > 0). \end{aligned} \tag{5}$$

Ismeretes továbbá, hogy $\mathcal{F} : X \to X$ unitér, azaz

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle \quad (f, g \in X). \tag{6}$$

Léteznek olyan $L^1(\mathbb{R})$-beli függvények, amelyek Fourier-transzformáltja nem tartozik $L^1(\mathbb{R})$-hez. Ilyen pl. a $[-1/2, 1/2]$ intervallum karakterisztikus függvénye, amelynek Fourier-transzformáltja a jelfeldolgozásban kitüntetett szerepet játszik. Ezt a függvényt a Si szimbólummal szokás jelölni:

$$Si(x) := (\mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]})(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{7}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]} \notin L^1(\mathbb{R})$. Abban az esetben, ha az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény Fourier-transzformáltja is $L^1(\mathbb{R})$-beli, akkor az f az $\hat{f}$-ból a (3)-hoz hasonló transzformációval rekonstruálható. Nevezetesen ilyenkor érvényes az ún. ***inverziós formula:***

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\epsilon_x(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R},\ f, \hat{f} \in L(\mathbb{R})). \tag{8}$$

A ψ_k^n rendszer az alapfüggvényből transzlációval és dilatációval származtatható. ***Az eredeti rendszerről áttérve a rendszert alkotó függvények Fourier-transzformáltjára, az (5) alatti összefüggések jól használhatók ortogonális és biortogonális waveletek szerkesztésére.*** A Fourier-transzformációval kapcsolatban utalunk az [x] jegyzetre. A legfontosabb, felhasználásra kerülő tulajdonságokat a Függelékben foglaltuk össze.

A további vizsgálatainkban fontos szerepet játszanak az ún. ***periodizáló*** operátorok. Rögzítsük a $T > 0$ és az $1 \leqq p \leqq \infty$ számokat és jelölje L_T^p azoknak az $\mathbb{R}$-en értelmezett, T***-szerint periodikus***, lokálisan integrálható f függvényeknek a halmazát, amelyekre $\chi_{[0,T)} f \in L^p[0,T]$. Itt $\chi_{[0,T)}$ jelöli a $[0,T)$ intervallum karakterisztikus függvényét. Nyilvánvaló, ezekre a terekre $L_T^p \subset L_{2T}^p$ teljesül, ha $1 \leqq p \leqq \infty$ és $T > 0$. Tetszőleges $f \in L^1(\mathbb{R})$ esetén vezessük be az

$$(9) \qquad (E_T f)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + kT) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tau_{kT} f)(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Minthogy

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^T |f(x + kT)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty,$$

azért a (9) sor m.m. $x \in \mathbb{R}$ pontban abszolút konvergens, továbbá az itt értelmezett $E_T : L^1(\mathbb{R}) \to L_T^1$ leképezés egy korlátos lineáris operátor, amelyre

$$(10) \qquad \int_0^T (E_T f)(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx, \qquad \int_0^T |(E_T f)(x)| \, dx \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx.$$

Az E_T operátort ***periodizáló operátornak*** nevezzük. Ez az operátor nemcsak a számokra, hanem a T-szerint periodikus függvényekre nézve is homogén. Nevezetesen, ha λ egy T-szerint periodikus, Lebesgue-mérhető függvény és $f, \lambda f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor

$$(11) \qquad E_T(\lambda f) = \lambda E_T f.$$

Az E_T operátor egy speciális feltételes várhatóérték operátor, amely sok vonatkozásban hasonló az integrál funkcionálhoz, s ezért mindazok az alapvető fogalmak, amelyek az integrállal kapcsolatosak, átvihetők erre az operátorra. Például a skaláris szorzat és az ortogonalitás fogalmát az

$$(f, g) \to E_T(f\overline{g}) \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}))$$

bilineáris operátorból kiindulva általánosíthatjuk. Minthogy $f\overline{g} \in L^1(\mathbb{R})$, azért ennek a szorzatnak a periodizáltja m.m. $x \in \mathbb{R}$ pontban véges, továbbá a sorozatokra vonatkozó Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\left| E_T(f\overline{g}) \right| \leqq \sqrt{|E_T(|f|^2)| E_T(|g|^2)} \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R})).$$

Akkor mondjuk, hogy az $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ függvények E_T***-ortogonálisak***, ha

$$E_T(f\overline{g}) = 0.$$

Minthogy

$$\int_0^T E_T(f\overline{g})(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \langle f, g\rangle \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R})),$$

azért az E_T ortogonalitásból következik az X-térbeli szokásos ortogonalitás.

Az E_T periodizáló operátorok mellett használni fogjuk még az

$$E_T^I f := \chi_I E_T f \quad (I := [a, a+T) \subset \mathbb{R}, T > 0, f \in L^1 := L^1(\mathbb{R})) \tag{12}$$

operátorokat. Egyszerűen belátható, hogy az E_T^I operátor az L^1 térnek egy projekciója a $\chi_I L^1 := \{\chi_I f : f \in L^1\}$ altérre, azaz

$$\begin{gathered} E_T^I(f) = f \quad (f \in \chi_I L^1), \\ \int_{\mathbb{R}} E_T^I f\,dx = \int_{\mathbb{R}} f\,dx, \quad \|E_T^I f\|_{L^1} \leqq \|f\|_{L^1} \quad (f \in L^1), \end{gathered} \tag{13}$$

továbbá bármely $f \in L^1$ függvényre $I := [a, a+T) \subset J := [b, b+2T)$ esetén

$$E_{2T}^J(E_T^I f) = E_T^I(E_{2T}^J f) = E_T^I f \quad (f \in L^1) \tag{14}$$

teljesül (lásd a Függeléket).

A továbbiakban felhasználjuk a Lebesgue-féle konvergencia tétel, következő E_T operátorokra vonatkozó megfelelőjét. Tegyük fel, hogy $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan m.m. f-hez konvergáló függvénysorozat, amelynek van közös, integrálható majoránsa:

$$|f_n| \leqq F \quad (n \in \mathbb{N}), \quad F \in L^1. \tag{15}$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} (E_T f_n)(x) = (E_T f)(x) \quad (m.m.\ x \in \mathbb{R}). \tag{16}$$

Az állítás bizonyítása a Függelékben található.

1. Multirezolúció

Ebben a pontban az $X := L^2(\mathbb{R})$ téren speciális projekciós operátorokat vezetünk be, kiindulva az operátorok X_n képtereiből. Ezeket az altereket transzláció invariáns ***Riesz-bázisok*** generálják. Emlékeztetve az ezzel kapcsolatos fogalmakra jelöljük ℓ_0^2-lal azoknak a ℓ^2-beli sorozatoknak a halmazát, amelyeknek csak véges sok tagja 0-tól különböző. Akkor mondjuk, hogy az $\varphi_k \in X$ $(k \in \mathbb{Z})$ rendszer egy Riesz-bázis, ha létezik olyan $0 < m \leqq M < \infty$ szám, hogy minden $c = (c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell_0^2$ sorozatra

$$m\|c\|_{\ell^2} \leqq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k\|_X \leqq M\|c\|_{\ell^2} \tag{1.1}$$

teljesül. Nyilvánvaló, hogy ha $(\varphi_k, k \in \mathbb{Z})$ rendszer ortonormált, akkor

$$\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k\|_X = \|c\|_{\ell^2} \quad (c \in \ell_0^2), \tag{1.1}$$

következésképpen a Riesz-bázis az ortonormált bázis fogalmának általánosítása. Az (1.1)-ben szóbajövő m számok szuprémumát, ill. M számok infimumát ***bázis konstansoknak*** nevezzük.

Könnyen igazolható, hogy Riesz-bázis esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k \quad (c = (c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2) \tag{1.2}$$

alakú végtelen sorok az X tér normájában konvergensek, és az (1.2) alakú összegek az X egy zárt alterét alkotják (lásd a 2.feladatot). Ennek a térnek a $(\varphi_k, k \in \mathbb{Z})$ függvényrendszer egy ***feltétlen bázisa.*** Ez a tény indokolja a most bevezetett szóhasználatot.

A továbbiakban olyan altereket vizsgálunk, amelyeket

$$\varphi_k := \tau_k\varphi \quad (\varphi \in X, \|\varphi\|_X = 1,\ k \in \mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

alakú, ***egész transzlációkkal szemben invariáns Riesz-bázisok*** generálnak. Könnyen igazolható, hogy ha a $(\varphi_k, k \in \mathbb{Z})$ függvénysorozat Riesz-bázis, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén a

$$\varphi_k^n(x) := 2^{n/2}\varphi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{X}, k \in \mathbb{Z}) \tag{1.4}$$

függvényrendszer is az. Speciálisan az (1.3) rendszer ortonormált, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az (1.4) is az.

Ezekkel összefüggésben szokás bevezetni a következő fogalmat:

Definíció. *Az $X_n \subseteq X$ $(n \in \mathbb{Z})$ zárt alterek sorozatát* **multirezolúciónak (MR-felbontásnak)** *nevezzük, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

i) $X_n \subseteq X_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
ii) $\cup_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ *mindenütt sűrű* X*-ben,*
iii) $\cap_{n\in\mathbb{Z}} X_n = \{0\}$,
iv) bármely $n \in \mathbb{Z}$ *esetén* $f \in X_n$*, akkor és csak akkor, ha* $\delta_2 f \in X_{n+1}$*, és*
v) az X_0 *teret egy (1.3) alakú Riesz-bázis generálja.*

Az i) feltételt ***monotonitási-***, a ii)-t ***sürűségi-***, a iii)-at ***szeparációs-*** a iv)-et ***skálázási*** feltételnek nevezzük. Bebizonyítható, hogy a szeparációs feltétel a többi feltételből következik [HW], ezért ezt az MR-felbontás definíciójából a továbbiakban elhagyjuk. A iv) és v) feltétel alapján egyszerűen belátható, hogy a φ_k^n $(k \in \mathbb{Z})$ rendszer az X_n-nek egy Riesz-bázisa, következésképpen az X_n altér a $\tau_{k2^{-n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alakú transzlációkkal szemben invariáns. A iv) feltétel alapján a δ_2 dilatációval bármely altérről áttérhetünk az eggyel magasabb indexű altérre, más szóhasználattal, a ***következő szintre.*** A mondottakból következik, hogy a φ függvény egyértelműen meghtatározza a fenti értelmezésben szereplő MR-felbontást.

Jelöljük X_n^φ-vel az (1.4) Riesz-bázis által genált alteret:

$$X_n^\varphi := \Big\{ f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k^n \ \Big| \ c = (c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2 \Big\}. \tag{1.5}$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan kell megválasztani φ függvényt ahhoz, hogy az X_n^φ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat az X tér egy MR-felbontása legyen. Nyilvánvaló, hogy ilyen választás esetén a iv) skálázási feltétel automatikusan teljesül. Az v) feltétellel kapcsolatban többek között meg fogjuk mutatni (lásd 1.3. pontot), hogy az X_n^φ altér Riesz-bázis helyett ***ortonormált bázissal is generálható.***

A legegyszerűbb MR felbontás a $[0, 1)$ intervallum $\varphi := \chi_{[0,1)}$ karakterisztikus függvényéből kiindulva szerkeszthetö. Ilyenkor X_n^φ olyan X-beli függvényekből áll, amelyek a $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ $(k \in \mathbb{Z})$ diadikus intervallumokon állandók. Nyilvánvaló, hogy $X_n^\varphi \subset X_{n+1}^\varphi$ és φ_k^n $(k \in \mathbb{Z})$ az X_n^φ-nek egy ortonormált bázisa.

A különböző szinten lévő bázis elemek azonban nem ortogonálisak egymásra. Jelölje Y_n^φ az X_n^φ altérnek az X_{n+1}^φ-re vonatkozó ortogonális komplementerét, azaz $X_{n+1}^\varphi = X_n^\varphi \oplus Y_n^\varphi$. Ekkor az Y_n^φ alterek páronként merőlegesek egymásra és ezek uniója mindenütt sűrű az X-ben. A most említett példánál maradva könnyen ellenőrizhető, hogy a h_k^n $(k \in \mathbb{Z})$ Haar-rendszer ortonormált bázis az Y_n térben.

Minden MR-felbontás egy ***approximációs eljárást*** generál. Nevezetesen jelölje $P_n : X \to X_n$ az X_n zárt altérre való ortogonális projekciót. Ekkor $\|P_n f\|_X \leqq \|f\|_X$ $(f \in X)$, továbbá az X-ben mindenütt sűrű $\cup_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ altér pontjaiban nyilván $P_n f = f$, minden elég nagy n indexre. Innen következik, hogy bármely MR felbontás által generált approximációs eljárásra

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n f - f\|_X = 0 \quad (f \in X).$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy elég általános feltételek mellett az X_n térben mindig létezik $(\varphi_k^n, k \in \mathbb{Z})$ alakú ortonormált wavelet bázis. Ezzel a P_n projekciós operátor felírható a

$$(P_n f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_k^n \rangle \varphi_k^n(x) = 2^n \int_{\mathbb{R}} f(t) K(2^n x, 2^n t)\, dt, \tag{1.6}$$

integráloperátor alakjában, amelynek magfüggvénye

$$K(x,t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k)\overline{\varphi(t-k)} \quad (x,t\in\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

A következő pontban megmutatjuk, hogy a φ-re vonatkozó igen általános feltételek mellett az (1.5)-sor konvergens, továbbá konvolúciós operátorral majorálható. Ennek folyományaként adódik például, hogy ezek az operátorok nemcsak L^2-, hanem L^p-normában, ill. egyenletesen is konvergálnak.

2. Konvergencia tételek

Jelöljük $\mathcal{M}_0$-lal a ***nem-negatív, páros, a*** $[0,\infty)$ ***intervallumban monoton fogyó*** $L^1(\mathbb{R})$***-beli függvények halmazát.*** Nyilvánvaló, hogy a

$$\gamma(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha} \quad (x\in\mathbb{R}, \alpha>1)$$

függvények $\mathcal{M}_0$-hoz tartoznak, továbbá $\mathcal{M}_0 \subset L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$.

A továbbiakban csak ***olyan MR-felbontásokkal foglalkozunk, amelyek generátor függvényeinek van*** $\mathcal{M}_0$***-beli majoránsa.*** Megmutatjuk, hogy ekkor a P_n projekciós operátorok $L^1(\mathbb{R})$-beli magfüggvényekkel rendelkező, egyenletesen korlátos konvolúciós operátorokkal majorálhatók, következésképpen maguk is a konvolúciós operátorokhoz hasonló konvergencia tulajdonságokkal rendelkeznek. Bebizonyítjuk, hogy ilyenkor létezik olyan $\gamma\in\mathcal{M}_0$, amellyel

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(x-k)\overline{\varphi}(t-k)| \leqq \gamma(x-t) \quad (x,t\in\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

teljesül. Valóban legyen a $\gamma_0 \in \mathcal{M}_0$ olyan függvény, amelyre $|\varphi(x)| \leqq \gamma_0(x)$. Tetszőleges $t,x\in\mathbb{R}$ esetén vezessük be a $d := |x-t|/2,\ s := (x+t)/2$ jelöléseket. Ekkor $t<x$ esetén

$$|t-k| \geq |d| \quad (k\geq s), \quad |x-k| \geq |d| \quad (k<s)$$

következésképpen

$$|\varphi(x-k)\overline{\varphi}(t-k)| \leqq \gamma_0(|x-k|)\gamma_0(|t-k|) \leqq \gamma_0(|x-t|/2)\Big(\gamma_0(|x-k|)+\gamma_0(|t-k|)\Big).$$

Ugyanúgy igazolható, hogy ez az egyenlőtlenség $t>x$ esetén is fennáll. Innen K-ra a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(x-k)\overline{\varphi}(t-k)| \leqq \gamma_0(|x-t|/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\gamma_0(|x-k|)+\gamma_0(|t-k|)\Big) \leqq$$
$$\leqq \gamma(|x-t|) \quad (x,t\in\mathbb{R})$$

becslést kapjuk, ahol

$$\gamma(s) := 2M\gamma_0(s/2) \quad (s \in \mathbb{R})$$

és M a γ_0 1-szerinti periodizáltjának szuprémumát jelöli. Minthogy

$$(E_1\gamma_0)(s) \leqq 2\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_0(k) \leqq 2\gamma_0(0) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_0(t)\,dt < \infty,$$

azért (2.1) a $\gamma \in \mathcal{M}_0$ függvénnyel valóban fennáll.

A (2.1) alapján közvetlenül adódik, hogy a

$$P_n : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}), \quad P_n : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

operátorok egyenletesen korlátosak és

$$\|P_n f\|_\infty \leqq A\|f\|_\infty, \quad \|P_n f\|_1 \leqq A\|f\|_1 \quad (A := \|\gamma\|_{L^1}). \tag{2.2}$$

Valóban, a (2.1)-ből adódó

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^n |K(2^n x, 2^n t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |K(2^n x, s)|\,ds \leqq \|\gamma\|_{L^1} =: A \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.3}$$

egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|P_n f(x)| \leqq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} 2^n |K(2^n x, 2^n t)|\,dt \leqq A\|f\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan a (2.2) első állítása következik.

A második rész igazolásához felhasználjuk a Fubini-tételt és a (2.3)-nak azt a változatát, amely (2.3)-ból az x és t változók felcserélésével adódik:

$$\begin{aligned} \|P_n f\|_1 &\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| 2^n |K(2^n x, 2^n t)|\,dt\,dx \leqq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} 2^n |K(2^n x, 2^n t)|\,dx\,dt \leqq A\|f\|_1. \end{aligned}$$

Bebizonyítható, hogy a P_n ($n \in \mathbb{N}$) operátorok $L^p(\mathbb{R})$-ből $L^p(\mathbb{R})$-be egyenletesen korlátosak (lásd a 3.feladatot). Ennek alapján a P_n operátorsorozatnak a szóban forgó tereken való konvergenciájához szükséges és elégséges, hogy egy zárt rendszeren konvergáljon.

A továbbiakban feltesszük, hogy az (1.7) alatt bevezetett K magfüggvény eleget tesz a következő feltételnek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\,dt = 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}_0$-beli majoránssal rendelkező függvények által generált MR-felbontás esetén a (2.4) feltétel ekvivalens a ***sürűségi feltétellel***. Ezen túlmenően a (2.4) feltétel az (1.6) alatt értelmezett $P_n f$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat norma- és pontonkénti konvergenciáját vonja maga után. Ezzel kapcsolatos az alábbi állítás.

1. Tétel *Tegyük fel, hogy φ-nek van $\mathcal{M}_0$-beli majoránsa.*
1. Ha minden $f \in X$ függvényre

$$\|P_n f - f\|_X \to 0 \ (n \to \infty),$$

akkor a K magfüggvény kielégíti a (2.4) feltételt.
2. Ha a K magfüggvényre teljesül a (2.4) feltétel, akkor
i) minden $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqq p < \infty)$ függvényre

$$\|P_n f - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ii) Ha az $f \in C(\mathbb{R})$ függvényre $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, akkor $P_n f \to f$ $(n \to \infty)$ egyenletesen az $\mathbb{R}$ halmazon.
iii) Ha az $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ függvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $(P_n f)(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$.

Bizonyítás. 1. Legyen $f = \chi_{[-1,1]}$. Ekkor a

$$(P_n f)(x) = \int_{-1}^{1} 2^n K(2^n x, 2^n t)\, dt$$

függvénysorozat X-normában tart f-hez. Bevezetve az

$$\alpha_n(x) := \int_{-\infty}^{\infty} 2^n K(2^n x, 2^n t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n x, t)\, dt,$$

$$\beta_n(x) := \int_{-\infty}^{-1} 2^n K(2^n x, 2^n t)\, dt + \int_{1}^{\infty} 2^n K(2^n x, 2^n t)\, dt$$

jelöléseket $(P_n f)(x)$ felírható

$$(P_n f)(x) = \alpha_n(x) - \beta_n(x)$$

alakban. Az integrál transzláció invarianciáját és a $c := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt$ jelölést felhasználva α_n felírható

$$\alpha_n(x) = \bar{c} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2^n x - k) = \bar{c}\alpha(2^n x)$$

alakban, ahol $\alpha = E_1\varphi$ a φ 1-szerinti periodizáltja. A $\beta_n(x)$ az $|x| < 1$ pontban (2.1) alapján a következőképpen becsülhető:

$$|\beta_n(x)| \leqq 2 \int_{1}^{\infty} 2^n \gamma(2^n(t - x))\, dt = 2 \int_{2^n(1-x)}^{\infty} \gamma(s)\, ds \to 0 \quad (n \to \infty),$$

ahol a jobb oldalon álló függvénysorozat monoton fogyólag tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. A Beppo-levi tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\int_{-1}^{1} |\beta_n(x)|^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty),$$

következésképpen

$$\|\alpha_n - 1\|_{L^2[-1,1]} \leqq \|P_n f - f\|_X + \|\beta_n\|_{L^2[-1,1]} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Minthogy α 1 szerint periodikus, azért az $\alpha_n(x) - 1 = \overline{c}\alpha(2^n x) - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény $L^2[-1,1]$-normája n-től független szám (lásd az x. feladatot), következésképpen a szóban forgó konstans sorozat minden tagja 0. Speciálisan azt kapjuk, hogy

$$1 = \alpha_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t) \, dt \quad (x \in \mathbb{R}),$$

s ezzel az állítás első részét igazoltuk.

2. A (2.4) feltételből $u = 2^n t$ helyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$2^n \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n x, 2^n t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n x, u) \, du = 1.$$

Ennek alapján a $P_n f - f$ különbség felírható

$$P_n f(x) - f(x) = 2^n \int_{\mathbb{R}} \Big(f(t) - f(x) \Big) K(2^n x, 2^n t) \, dt$$

alakban, ahonnan a (2.1) becslést és a $t - x = 2^{-n} u$ helyettesítést alkalmazva

$$\begin{aligned} |P_n f(x) - f(x)| &\leqq 2^n \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(x)| \gamma(2^n (t - x)) \, dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x + 2^{-n} u) - f(x)| \gamma(u) \, du \end{aligned} \tag{2.5}$$

következik. Innen az állítás a konvolúciós operátorokra jól ismert módszerrel igazolható.

i) Az általánosított Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \|P_n f - f\|_p &\leqq \int_{\mathbb{R}} \gamma(u) \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x + 2^{-n} u) - f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(u) \|\tau_{2^{-n} u} f - f\|_p \, du. \end{aligned}$$

A (2.5)-höz hasonlóan adódik a most igazolt egyenlőtlenség $p = \infty$ esetén. Bevezetve az

$$\omega_p(f;\delta) := \sup_{|u|\leqq\delta} \|\tau_u f - f\|_p$$

modulusokat

$$\|P_n f - f\|_p \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \omega_p(f; 2^{-n}t)\gamma(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.6}$$

becslés adódik. Ismeretes (lásd a Függeléket), hogy az $\omega_p(f;\cdot)$ függvény nő, tovább bá

$$\lim_{t\to+0} \omega_p(f;t) = 0, \quad \omega_p(f;t) \leqq 2\|f\|_p \ (t \geqq 0).$$

Ezt felhasználva a Lebesgue-téleből következik, hogy

$$\|P_n f - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ii) Folytonos függvény esetén a (2.6) egyenlőtlenséget $p = \infty$ esetben alkalmazva az előzőhöz hasonlóan adódik az állítás.

iii) Az f függvény x pontbeli folytonossgából következik, hogy minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x + u2^{-n}) - f(x)| < \epsilon$, ha $|u| < 2^n\delta$. Ezt és a (2.5) becslést felhasználva

$$\begin{aligned}|P_n f(x) - f(x)| &\leqq \Big(\int_{|u|<2^n\delta} + \int_{|u|\geq 2^n\delta}\Big)|f(x + 2^{-n}u) - f(x)|\gamma(u)\,du \\ &\leqq \epsilon \int_{\mathbb{R}} \gamma(u)\,du + 2\|f\|_\infty \int_{|u|\geq 2^n\delta} \gamma(u)\,du\end{aligned}$$

adódik. Innen az állítás már nyilvánvaló.

A sürűségi feltétellel ekvivalens (2.4) feltétel felírható

$$\overline{c}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k) = \overline{c}(E_1\varphi)(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt$. Integrálva 0 és 1 között (8) figyelembevételével

$$1 = \overline{c}\int_0^1 (E_1\varphi)(t)\,dt = \overline{c}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = |c|^2,$$

azaz $|c| = 1$ következik. A φ helyett a $c\varphi$ függvényt véve alapul adódik, hogy erre ***a sürűségi feltétel az***

$$(E_1\varphi)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.7}$$

feltétellel ekvivalens. A (2.7) — a differenciálgeometriában szokásos szóhasználattal élve — azt jelenti, hogy a φ függvény a számegyenesnek egy ***egységosztását*** generálja.

3. Riesz-bázisok jellemzése

Multirezolúció szerkesztéséhez első lépésként ***transzláció invariáns Riesz-bázisok jellemzésével foglalkozunk,*** az eredeti térről áttérve a Fourier-transzformáltak terére. Ortonormált rendszerek mellett biortogonális rendszereket is vizsgáluk. Akkor mondjuk, hogy a $(\varphi_k, k \in \mathbb{Z})$ $(\psi_k, k \in \mathbb{Z})$ $X = L^2(\mathbb{R})$-beli rendszerek biortogonálisak, ha

$$\langle \varphi_k, \psi_\ell \rangle = \delta_{k\ell} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Innen speciális esetként, amikor a két rendszer megegyezik, viszakapjuk az ortonormált rendszer értelmezését.

Minthogy a Fourier-transzformáció unitér, azért biortogonális rendszerek Fourier-transzformáltja is biortogonális.

A

$$\varphi_k^n = 2^{n/2}\delta_{2^n}(\tau_k\varphi) = 2^{n/2}\tau_{k2^{-n}}(\delta_{2^n}\varphi) \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

függvények Fourier-transzformáltja (5) alapján felírható

$$\mathcal{F}\varphi_k^n = 2^{n/2}\epsilon_{k2^{-n}}\mathcal{F}(\delta_{2^n}\varphi)$$

alakban. Ezt felhasználva egyszerűen igazolható az alábbi

2. Tétel *Az alábbi három állítás egymással ekvivalens:*
i) Minden $n \in \mathbb{Z}$ számra a $(\varphi_k^n, k \in \mathbb{Z})$ Riesz-bázis.
ii) A $(\varphi_k^0, k \in \mathbb{Z})$ rendszer Riesz-bázis.
iii) Léteznek olyan $0 < m \leqq M < \infty$ állandók, hogy

$$m \leqq \sqrt{E_1(|\mathcal{F}\varphi|^2)} \leqq M. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Az i) és ii) állítások ekvivalenciája, az $\|\cdot\|_X$ definíciójában az $y = 2^n x$ helyettesítéssel, a következőképpen igazolható:

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi_k^n \Big\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}} 2^n \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(2^n x - k)\Big|^2 dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(y-k)\Big|^2 dy = \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi_k \Big\|_X^2.$$

A ii) és iii) állítás ekvivalenciájának igazolásához legyen $c = (c_n, n \in \mathbb{Z}) \in \ell^2$ és tegyük fel, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tau_k \varphi$ sor $L^2(\mathbb{R})$-normában konvergens. Legyen

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tau_k \varphi, \quad \lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \epsilon_k \ (c = (c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2),$$

ahol $\epsilon_k(x) := \exp(2\pi i k x)$ $(x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$ az 1-szerint periodikus komplex trigonometrikus rendszer.

Először megmutatjuk, hogy ezekre a függvényekre

$$\|f\|_X^2 = \int_0^1 |\lambda|^2 |E_1(\mathcal{F}\varphi)|^2 \, dx \tag{3.2}$$

teljesül. Valóban, minthogy az f függvényt definiáló sor az $\|\cdot\|_X$-normában konvergens, azért tagonként véve Fourier-transzformáltját (5) alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathcal{F}\varphi_k = \mathcal{F}\varphi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \epsilon_k = \lambda \mathcal{F}\varphi.$$

Nyilvánvaló, hogy $\lambda \in L_1^2$, továbbá a Parseval-formula alapján

$$\int_0^1 |\lambda(t)|^2 \, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2. \tag{3.3}$$

A (8) és (9) azonosságokat figyelembe véve

$$\|f\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f|^2 \, dx = \int_0^1 E_1(|\mathcal{F}f|^2) \, dx = \int_0^1 |\lambda|^2 E_1(|\mathcal{F}\varphi|^2) \, dx,$$

s ezzel a (3.2) egyenlőséget igazoltuk.

A tétel második részének igazolásához tegyük fel először, hogy fennáll a (3.1) egyenlőtlenség. Legyen $(c_n, n \in \mathbb{Z}) \in \ell_0^2$. Felhasználva a most bevezetett jelöléseket (3.1) alapján és (3.3) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$m^2 \|c\|_{\ell^2}^2 = m^2 \int_0^1 |\lambda|^2 \, dx \leqq \int_0^1 |\lambda|^2 E_1(|\mathcal{F}f|^2) \, dx \leqq M^2 \int_0^1 |\lambda|^2 \, dx = M^2 \|c\|_{\ell^2}^2.$$

Ezzel (3.2) alapján megmutattuk, hogy (3.1)-ből (1.1) következik, s ezért a szóban forgó rendszer valóban Riesz-bázis.

A forditott irányú implikáció igazolásához rögzítsük az $x \in [0,1)$ pontot és az $n \in \mathbb{N}^*$ számot és jelölje λ_n a $\sqrt{n}\chi_{[x,x+1/n)}$ függvény periodikus kiterjesztését az $[x, x+1)$ intervallumról a számegyenesre, 1 periódussal. Legyen továbbá

$$c_k^n := \int_0^1 \lambda_n(t) \overline{\epsilon_k}(t) \, dt \quad (k \in \mathbb{Z})$$

a λ_n függvény k-adik trigonometrikus Fourier-együtthatója. Ekkor a Parseval-formula és a λ_n értelmezése alapján

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^n|^2 = \int_0^1 |\lambda_n(x)|^2\,dx = 1. \tag{3.4}$$

Az $f_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^n \tau_k\varphi$ függvényre alkalmazva a (3.2) azonosságot az (1.1) feltétel és (3.4) figyelembevételével azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$m^2 \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_n|^2 E_1(|\mathcal{F}\varphi|^2)\,dt = n\int_x^{x+1/n} E_1(|\mathcal{F}\varphi|^2)(t)\,dt \leqq M^2.$$

Innen $n \to \infty$ határátmenettel, az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján (3.1) következik.$\square$

A továbbiakban $\mathcal{R}$***-rel jelöljük a (3.1) feltételnek elegettevő*** $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ ***függvények halmazát.*** A most igazolt tétel alapján az $\mathcal{R}$ halmazt azok a φ függvények alkotják, amelyekből (1) alapján képzett φ_k^n $(k \in \mathbb{Z})$ rendszerek minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén Riesz-bázist alkotnak.

Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{R}$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén jelölje X_n^φ a φ_k^n $(k \in \mathbb{Z})$ Riesz-bázis által generált alteret. Az alábbiakban ezeknek az altereknek egymáshoz való viszonyát vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatos a következő

3. Tétel *Legyen* $\varphi, \psi \in \mathcal{R}$.
i) Az X_n^φ *tér Fourier-transzformáltja előállítható*

$$\widehat{X_n^\varphi} := \{\mathcal{F}f : f \in X_n^\varphi\} = \{\lambda\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi) : \lambda \in L^2_{2^n}\} \tag{3.5}$$

alakban.
ii) A $(\tau_k\varphi, k \in \mathbb{Z})$ *és* $(\tau_k\psi, k \in \mathbb{Z})$ *rendszer akkor és csak biortogonális, ha*

$$E_1(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi}) = 1. \tag{3.6}$$

Speciálisan a $(\tau_k\varphi, k \in \mathbb{Z})$ *rendszer akkor és csak akkor ortonormált, ha*

$$E_1(|\mathcal{F}\varphi|^2) = 1. \tag{3.6'}$$

iii) Az X_n^φ, X_n^ψ *alterek akkor és csak akkor ortogonálisak, ha*

$$E_1(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi}) = 0. \tag{3.7}$$

Bizonyítás. i) Definíció szerint az X_n^φ $(\varphi \in \mathcal{R})$ altér az

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_k^n \quad ((c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2)$$

alakú elemek öszessége, ahol a szóban forgó végtelen sor $L^2(\mathbb{R})$-normában konvergens. Következésképpen ezek Fourier-transzformáltja (5) alapján

$$\mathcal{F}f = 2^{-n/2}\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi)\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \epsilon_{k2^{-n}} = \lambda\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi)$$

alakú, ahol $\lambda \in L^2_{2^n}$. Megfordítva, minden $\lambda\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi)$ $(\lambda \in L^2_{2^n})$ alakú függvény a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k^n$ sor összegfüggvényének Fourier-transzformáltja, ahol

$$c_k := 2^{-n/2}\int_0^{2^n} \lambda(t)\overline{\epsilon_{k2^{-n}}}(t)\, dt.$$

ii) Minthogy a Fourier-transzformált unitér, azért (5),(8)és (9) alapján

$$\begin{aligned}\delta_{k\ell} &= \langle \tau_k\varphi, \tau_\ell\psi\rangle = \langle \mathcal{F}(\tau_k\varphi), \mathcal{F}(\tau_\ell\psi)\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{k-\ell}\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi}\, dx = \int_0^1 \epsilon_{k-\ell}E_1(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi})\, dx,\end{aligned} \tag{3.8}$$

következésképpen az 1 szerint periódikus $f := E_1(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi}) \in L^1_1$ függvény valamennyi trigonometrikus Fourier-együtthatója, a 0-adikat kivéve, 0-val egyenlő. Innen következik, hogy az $g := f - \int_0^1 f(x)\, dx$ függvény minden trigonometrikus Fourier-együtthatója 0. A trigonometrikus rendszer teljessége alapján nyilvánvaló, hogy $g = 0$, s ezért f konstans függvény. Végül a biortogonalitás feltételét a $k = \ell$ esetre felírva, (3.8) alapján azt kapjuk, hogy $f = 1$.

iii) Az X_n^φ, X_n^ψ terek ortogonalitása azzal ekvivalens, hogy bármely $f \in X_n^\varphi, g \in X_n^\psi$ esetén

$$0 = \langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle.$$

Minthogy $\varphi, \psi \in \mathcal{R}$, (3.5) alapján az $X_n^\varphi \perp X_n^\psi$ feltétel azzal ekvivalens, hogy bármely $\lambda_1, \lambda_2 \in L^2_{2^n}$ függvénypárra

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1\overline{\lambda_2}\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi)\overline{\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\psi)}\, dx = \int_0^{2^n} \lambda_1\overline{\lambda_2}E_{2^n}(\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi}))\, dx.$$

Innen

$$\lambda_1 = \operatorname{sign}\big(E_{2^n}(\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi}))\big), \quad \lambda_2 = 1$$

választás mellett azt kapjuk, hogy

$$|E_{2^n}(\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi})| = 0.$$

Végül felhasználva a

$$E_{2^n}(\delta_{2^{-n}} f) = \delta_{2^{-n}}(E_1 f)$$

azonosságot a bizonyítandó (3.7) egyenlőség adódik. □

A most igazolt állítások alapján könnyen belátható, hogy minden transzláció invariáns Riesz-bázis által generált altér ortonormált bázissal is generálható. Nevezetesen fennáll az

1. Következmény. *Minden $\varphi \in \mathcal{R}$ esetén létezik olyan $\psi \in X$, hogy $(\tau_k\psi, k \in \mathbb{Z})$ ortonormált rendszer és*

$$X_n^\varphi = X_n^\psi \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{3.9}$$

Valóban, minthogy $\varphi \in \mathcal{R}$ esetén az

$$\eta := \frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{E_1(|\hat{\varphi}|^2)}}$$

függvény $L^2(\mathbb{R})$-beli, s ezért létezik olyan $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, hogy $\hat{\psi} = \eta$. Erre a ψ függvényre

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{E_1(|\hat{\varphi}|^2))}}\hat{\varphi} = \lambda\hat{\varphi}, \quad E_1(|\hat{\psi}|^2) = 1$$

teljesül, ahol $\lambda = 1/\sqrt{E_1(|\hat{\varphi}|^2)} \in L_1^2$. Innen a 3. Tétel alapján következik az állítás.

4. Skálázási egyenlet

Az MR felbontás $X_n^\varphi \subset X_{n+1}^\varphi$ ***monotonitási feltétele*** (3.5) alapján azzal ekvivalens, hogy alkalmas $\lambda \in L_{2^{n+1}}^2$ függvénnyel fennáll a

$$\delta_{2^{-n}}(\mathcal{F}\varphi) = \lambda\delta_{2^{-n-1}}(\mathcal{F}\varphi)$$

egyenlőség. Bevezetve az $\alpha := \delta_{2^{n+1}}\lambda$ jelölést és mindkét oldalra alkalmazva a $\delta_{2^{n+1}}$ operátort az alábbi, eredivel ekvivalens feltételt kapjuk:

$$(\mathcal{F}\varphi)(2x) = \alpha(x)(\mathcal{F}\varphi)(x) \ \ (x \in \mathbb{R}), \text{ ahol } \ \alpha \in L_1^2. \tag{4.1}$$

A monotonitási feltétellel ekvivalens (4.1) feltételt ***skálázási egyenletnek*** szokás nevezni. Az α függvényt a φ-hez tartozó ***alulvágó szűrőnek*** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy bármely függvénnyel együtt annak számszorosa is kielégíti a skálázási egyenletet. A mondottakból következik, hogy MR felbontások konstrukciójában olyan $\varphi \in \mathcal{R}$ függvények jöhetnek szóba, amelyek alkalmas $\alpha \in L_1^2$

függvénnyel kielégítik a (4.1) feltételt. A skálázási egyenlet azzal ekvivalens, hogy valamely $(a_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2$ sorozattal fennáll az

$$\frac{1}{2}\varphi(2^{-1}x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(x+k) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.2}$$

egyenlőség, ahol az $(a_k, k \in \mathbb{Z})$ az $\alpha \in L_1^2$ függvény trigonometrikus Fourier-együtthatóinak sorozata.

A továbbiakban a skálázási egyenletnek azokat a megoldásait vizsgáljuk, amelyek MR-felbontást generálnak. Ezzel összefüggésben ***jelölje $\mathcal{M}$ azoknak a $\varphi \in \mathcal{R}$ függvényeknek az összességét, amelyeknek van $\mathcal{M}_0$-beli majoránsa, továbbá eleget tesznek a***

$$(\mathcal{F}\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1 \tag{4.3}$$

feltételnek. A (4.3) feltétel a sürüségi feltétellel ekvivalens (2.6) feltétel következménye.

A skálázási egyenletet x helyett $2^{-1}x, 2^{-2}x, \cdots, 2^{-n-1}x$ esetén felírva azt kapjuk, hogy

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \alpha(2^{-1}x)(\mathcal{F}\varphi)(2^{-1}x) = \cdots = \alpha(2^{-1}x)\alpha(2^{-2}x)\cdots\alpha(2^{-n}x)(\mathcal{F}\varphi)(2^{-n}x).$$

Minthogy $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén $\mathcal{F}\varphi$ folytonos és $(\mathcal{F}\varphi)(0) = 1$, azért innen $\alpha(0) = 1$ következik, továbbá $n \to \infty$ határátmenettel az MR-felbontást generáló függvény Fourier-transzformáltjának következő szorzatelőállítását kapjuk:

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha(2^{-n}x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Ezzel megmutattuk, hogy ***a (4.1) skálázási egyenlet bármely $\mathcal{M}$-beli megoldásának Fourier-transzformáltja alkalmas $\alpha \in L_1^2$, $\alpha(0) = 1$ feltételnek eleget tevő függvénnyel előállítható (4.4) alakú konvergens végtelen szorzatként.*** Megfordítva, ha valamely $\alpha \in L_1^2$, $\alpha(0) = 1$ függvényből képzett

$$A(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \alpha(2^{-n}x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.5}$$

végtelen szorzat m.m. konvergens, akkor az A függvény nyilván m.m. $x \in \mathbb{R}$ pontban eleget tesz az $A(2x) = \alpha(x)A(x)$ egyenletnek és az $A(0) = 1$ feltételnek. Ha garantálni tudjuk, hogy $A \in L^2(\mathbb{R})$, akkor létezik olyan $\varphi \in X$, amelyre $\hat{\varphi} = A$, következésképpen erre fennáll a (4.1) skálázási egyenlet.

Egyszerűen igazolható, hogy ha az α 1-szerint periódikus, folytonos függvény a 0 pontban alkalmas $L > 0$ számmal eleget tesz az

$$|\alpha(x) - \alpha(0)| \leqq L|x| \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.6}$$

Lipschitz-féle feltételnek, akkor a (4.5) végtelen szorzat ***minden kompakt intervallumon egyenletesen konvergens,*** következésképpen az A ***függvény folytonos.*** Valóban, minthogy $\alpha(0) = 1$, azért

$$|\alpha(x)| \leqq 1 + |\alpha(x) - 1| \leqq 1 + L|x| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Felhasználva az

$$1 + u \leqq e^u \quad (u \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenséget a (4.5)

$$A_n(x) := \prod_{k=1}^{n} \alpha(2^{-k}x) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$$

részszorzataira az alábbi becslést kapjuk:

$$|A_n(x)| \leqq \prod_{k=1}^{n}(1 + L2^{-k}|x|) \leqq e^{L|x| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}} = e^{L|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezt felhasználva (4.6) alapján

$$|A_{n+1}(x) - A_n(x)| \leqq |A_n(x)|(|\alpha(2^{-n-1}x) - 1| \leqq e^{L|x|}L|x|2^{-n-1} \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*)$$

következik. Végezetül innen $n < m$ esetén

$$\begin{aligned}&|A_n(x) - A_m(x)| \leqq \\ &|A_n(x) - A_{n+1}(x)| + |A_{n+1}(x) - A_{n+2}(x)| + \cdots + |A_{m-1}(x) - A_m(x)| \leqq \\ &e^{L|x|}L|x|(2^{-n-1} + 2^{-n-2} + \cdots) \leqq e^{L|x|}L|x|2^{-n} \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

adódik. Innen nyilvánvaló, hogy a szóban forgó végtelen szorzat minden véges intervallumon egyenletesen konvergens, következésképpen hataárértéke folytonos függvény.

Korábban megmutattuk, hogy a $\varphi = \chi_{[0,1)} \in \mathcal{M}_0$ függvény egy MR-felbontást generál, következésképpen ennek

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = e^{-i\pi x}\frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.7}$$

Fourier-transzformáltja előállítható (4.4) alakban. Az ezzel ekvivalens (4.1)-ből kifejezve az α függvényt

$$\alpha(x) = \frac{(\mathcal{F}\varphi)(2x)}{(\mathcal{F}\varphi)(x)} = e^{-i\pi x}\cos \pi x \quad (x \in \mathbb{R})$$

adódik. Ezzel megmutattuk, hogy fennáll a következő azonosság:

$$e^{-\pi i x}\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} e^{-2^{-k}\pi i x}\cos 2^{-k}\pi x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.8}$$

Említésre méltó, hogy ennek a nevezetesen azonosságnak a segítsével *Viete* 1593-ban a π számnak egy szorzatelőállítását adta. A (4.8)-hoz a skálázási egyenlettel ekvivalens (4.2) egyenletből kiindulva is eljuthatunk.

5. Példák a skálázási egyenlet megoldására

Ebben a pontban — kiindulva a skálázási egyenlet (4.2) alakjából — megadjuk ennek néhány megoldását. Az alkalmazásokban elsősorban azok az MR-felbontásokat használják, amelyek φ ***generátor függvényei kompakt tartójúak.*** Megmutatjuk, hogy az ilyen φ generátorhoz tartozó α ***szűrő trigonometrikus polinomok.*** Tegyük fel, hogy

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \varphi(x) \neq 0\Big\} \subseteq \Big[a, a+N\Big],$$

legyen továbbá $\varphi_k^0 = \tau_k \varphi$ $(k \in \mathbb{Z})$ egy ortonormált rendszer. Ekkor az

$$\frac{1}{2}\varphi\big(\frac{x}{2}\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(x+k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

skálázási egyenletből az a_k együtthatókra

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)\overline{\varphi(t+k)}\,dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Minthogy

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad (t \notin (2a, 2a+2N)), \quad \varphi(t+k) = 0 \quad (t \notin (a-k, a-k+N)),$$

azért $k \notin (-a-2N, -a+N)$ esetén a szóban forgó két függvény szorzata azonosan 0. Innen adódik, hogy

$$a_k = 0 \quad (k \notin (-a-2N, -a+N)),$$

következésképpen

$$\alpha = \sum_{k=-a-2N}^{-a+N} a_k \epsilon_k$$

valóban egy trigonometrikus polinom.

Kiindulva az előző pontban említett $\varphi = \chi_{[0,1)}$ függvényből konvolúció segítségével a skálázási egyenletnek végtelen sok megoldását adhatjuk meg. Emlékeztetve az ezzel kapcsolatos fogalmakra jelölje

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt \quad (f, g \in L^1(\mathbb{R})) \tag{5.1}$$

az $L^1(\mathbb{R})$-beli f és g függvény konvolúcióját. Ismeretes, hogy ekkor $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, továbbá

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\,\mathcal{F}g. \tag{5.2}$$

Speciálisan $f^{[n]}$-nel jelölve az f függvény önmagával vett n-szeres konvolúcióját

$$\mathcal{F}(f^{[n]}) = (\mathcal{F}f)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{5.3}$$

teljesül.

Az

$$N_m := \chi_{[0,1)} * \chi_{[0,1)} * \cdots * \chi_{[0,1)} = \chi_{[0,1)}^{[m]} \quad (m \in \mathbb{N}^*) \tag{5.4}$$

függvények, az ún. ***B-splinok*** segítségével jól kezelhető MR-felbontásokat szerkeszthetünk. Ismeretes, hogy $N_m \in C^{m-2}(\mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; N_m(x) \neq 0\Big\} = \Big[0, m\Big],$$

továbbá az N_m-nek a $[k, k+1]$ $(k \in \mathbb{Z})$ egész intervallumokra vonatkozó leszűkítései $(m-1)$-edfokú polinomok.

Minthogy

$$(\mathcal{F}N_1)(x) = e^{-\pi i x}\frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{5.6}$$

azért

$$(\mathcal{F}N_m)(x) = e^{-\pi i m x}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^m \quad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*). \tag{5.7}$$

Az $N_1 := \chi_{[0,1)}$ függvényre nyilvánvalóan fennáll az

$$\frac{1}{2}N_1\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\big(N_1(x) + N_1(x-1)\big) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{5.8}$$

skálázási egyenlet. Innen áttérve a Fourier-transzformáltra

$$(\mathcal{F}N_1)(2x) = \frac{1}{2}(1 + \epsilon_{-1}(x))(\mathcal{F}N_1)(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

adódik. Mindkét oldalt m-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

$$(\mathcal{F}N_1)^m(2x) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\epsilon_{-k}(x)(\mathcal{F}N_1)^m(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Innen felhasználva az (5), (5.3) és (5.4) azonosságokat azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}(\delta_{1/2}N_m) = \delta_2(\mathcal{F}N_m) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathcal{F}(\tau_{-k}N_m).$$

Áttérve az invez Fourier-transzformáltra az N_m függvényre a ***következő skálázási egyenletet*** kapjuk:

$$(5.9)\qquad \frac{1}{2}N_m\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N_m(x-k)\quad (m\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R})$$

Alkalmazzuk a 3.Tétel (3.6') állítását a $\varphi_k := \tau_k\chi_{[0,1)}$ $(k\in\mathbb{Z})$ ortonormált rendszerre. Ekkor a következő azonosságot kapjuk:

$$(5.10)\qquad 1=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|(\mathcal{F}\varphi)(x+k)|^2=\frac{\sin^2\pi x}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+k)^2}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Ez az MR-felbontással kapcsolatos azonosság a Parseval-formula alapján közvetlenül is igazolható (lásd az x.feladatot).

Bebizonyítható, hogy az N_m $(m\in\mathbb{N}^*)$ ***B-splinok egész eltóltjai Riesz-bázist alkotnak***. Ehhez a 2.Tétel szerint azt kell megmutatnunk, hogy az

$$(5.11)\qquad E_1(|\mathcal{F}N_m|^2)(x)=\frac{\sin^{2m}\pi x}{\pi^{2m}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+k)^{2m}}\quad (x\in\mathbb{R})$$

függvény alulról és felülről becsülhető pozitív konstansokkal. Ehhez felhasználjuk a ctg πx $(x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$ következő előállítását (lásd az x feladatot):

$$(5.12)\qquad \text{ctg}\,\pi x=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+k}\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}).$$

Egyszerűen igazolható, hogy az 1-szerint periodikus függvény (5.12) sorfejtése és a szóban forgó sor deriváltjai az $[a,1-a]$ $(0<a<1/2)$ intervallumon egyenletesen konvergálnak. Ezt figyelembe véve tagonkénti deriválással

$$\frac{d^n}{dx^n}\text{ctg}\,\pi x=\frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n n!}{(x+k)^{n+1}}\quad (n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$$

adódik. Ezt felhasználva

$$(5.13)\qquad E_1(|\mathcal{F}N_m|^2)(x)=-\frac{1}{(2m-1)!}\frac{\sin^{2m}\pi x}{\pi^{2m-1}}\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}}\text{ctg}\,\pi x\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$$

zárt képletet kapjuk. Megmutatjuk, hogy

$$(5.14)\qquad \frac{1}{\pi^r}\frac{d^r}{dx^r}\text{ctg}\,\pi x=(-1)^r P_r(\text{ctg}\,\pi x)\quad (x\in\mathbb{R}),$$

ahol az $(r+1)$-edfokú P_r polinomok eleget tesz a következő rekurziónak:

$$P_0(z) = z, \quad P_{r+1}(z) = (1+z^2)P_r'(z) \quad (z \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{N}). \tag{5.15}$$

Nilvánvaló, hogy (5.14) $r = 0$ esetén fennáll. Értelmezzük a P_r polinomsorozatot (5.15) szerint és indukciót alkalmazva tegyük fel, hogy (5.14) az r indexre fennáll. Megmutatjuk, hogy ekkor (5.14) r helyett $r+1$ esetén is érvényes. Valóban

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi^{r+1}}\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\operatorname{ctg}\pi x = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi^r}\frac{d^r}{dx^r}\operatorname{ctg}\pi x\right) = (-1)^r\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}P_r(\operatorname{ctg}\pi x) = \\
&= (-1)^{r+1}\frac{1}{\sin^2\pi x}P_r'(\operatorname{ctg}\pi x) = (-1)^{r+1}(1+\operatorname{ctg}^2\pi x)P_r'(\operatorname{ctg}\pi x) = \\
&= (-1)^{r+1}P_{r+1}(\operatorname{ctg}\pi x).
\end{aligned}$$

Az (5.15) alapján a P_r sorozat első néhány tagjára a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= z\\
P_1(z) &= z^2+1\\
P_2(z) &= 2z(z^2+1)\\
P_3(z) &= 2(z^2+1)(1+3z^2) = 2(1+4z^2+3z^4)\\
P_4(z) &= 8(z^2+1)(2z+3z^3) = 8z(2+5z^2+3z^4)\\
P_5(z) &= 8(z^2+1)(2+15z^2+15z^4)
\end{aligned}$$

A most bevezetett polinomokat felhasználva (5.13) alapján

$$E_1(|\hat{N}_m|^2)(x) = \frac{1}{(2m-1)!}\sin^{2m}\pi x\, P_{2m-1}(\operatorname{ctg}\pi x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{5.16}$$

adódik. Speciálisan

$$\begin{aligned}
E_1(|\hat{N}_1|^2)(x) &= 1,\\
E_1(|\hat{N}_2|^2)(x) &= \frac{\sin^2\pi x}{3}(1+3\operatorname{ctg}^2\pi x) = \frac{1}{3}(1+2\cos^2\pi x),\\
E_1(|\hat{N}_3|^2)(x) &= \frac{\sin^4\pi x}{15}(1+15\operatorname{ctg}^2\pi x+15\operatorname{ctg}^4\pi x) =\\
&= \frac{1}{15}(2+11\cos^2\pi x+2\cos^4\pi x).
\end{aligned}$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$E_1(|\hat{N}_1|^2)(x) = 1, \quad \frac{1}{3} \leqq E_1(|\hat{N}_2|^2)(x) \leqq 1, \quad \frac{1}{15} \leqq E_1(|\hat{N}_3|^2)(x) \leqq 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

következésképpen a $(\tau_k N_m, k \in \mathbb{Z})$ rendszer $m = 1, 2, 3$ esetén Riesz-bázist alkot. Bebizonyítható [Chui], hogy minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik olyan $A_m > 0$, hogy

$$A_m \leqq \theta_m(x) := \sqrt{E_1(|\hat{N}_m|^2)(x)} \leqq 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{5.17}$$

következesképpen minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén a $(\tau_k N_m, k \in \mathbb{Z})$ ***spline rendszerek Riesz-bázist alkotnak.*** Könnyen igazolható továbbá, hogy ezekre érvényes az egységosztás:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_m(x+k) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*). \tag{5.18}$$

Végül mivel az N_m fügvvényekre fennáll az (5.9) skálázási egyenlet, azért ***minden*** $m \in \mathbb{N}^*$ ***indexre az*** N_m ***B-spline függvények egy MR-felbontást generálnak.*** Ertelmezzük az $M_m \in X$ függvényt Fourier-transzformáltjával:

$$\hat{M}_m := \frac{N_m}{\theta_m^2}(m \in \mathbb{N}^*).$$

Ekkor az x.Tétel alapján minden rögzített $n \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$N_{k,m}^n(x) = 2^{n/2} N_m(2^n x - k), \quad M_{k,m}^n(x) = 2^{n/2} M_m(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{Z})$$

rendszerek biortogonálisak:

$$\langle N_{k,m}^n, M_{\ell,m}^n \rangle = \delta_{k\ell} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Ezekkel az $X_n^{N_m}$ altérre való projekciót a következő alakban írhatjuk fel:

$$P_{n,m} f := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, M_{k,m}^n \rangle N_{k,m}^n \quad (f \in X, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*).$$

6. Ortonormált waveletek

Ebben a pontban, kiindulva valamely X_n^φ $(n \in \mathbb{Z})$ MR-felbontást generáló φ függvényből, megszerkesztjük az X térnek egy ortonormált wavelet bázisát. Más szóval olyan $\psi \in X$, $\|\psi\|_X = 1$ függvényt konstruálunk, hogy a

$$\psi_k^n(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - k) \quad (k, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}) \tag{6.1}$$

teljes ortonormált rendszer az X-ben, azaz

$$\langle \psi_k^n, \psi_\ell^m \rangle = \delta_{k\ell} \delta_{mn} \quad (k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}). \tag{6.2}$$

A ψ függvényt az MR-felbontás ***anyawaveletének*** nevezzük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az eddig vizsgált MR-felbontások esetében a $(\varphi_k^n, k \in \mathbb{Z})$ rendszerek rögzített n-re — más szóval szintenként — alkotnak ortonormált rendszert, ám a különböző szinteken lévő függvények nem ortogonálisak egymásra. Ezzel szemben a ψ_k^n $(k, n \in \mathbb{Z})$ rendszer bármely két különböző tagja ortogonális.

A továbbiakban feltesszük, hogy a ϕ és a ψ kielégíti a

$$E_1(|\hat{\varphi}|^2) = 1, \quad E_1(|\hat{\psi}|^2) = 1 \tag{6.3}$$

normálási feltételt. Ez a 3.Tétel alapján (6.3) azzal ekvivalens, hogy a $(\varphi_k^n,\ k \in \mathbb{Z})$és a $(\psi_k^n,\ k \in \mathbb{Z})$ rendszerek minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén külön-külön ortonormáltak. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\beta \in L_1^2$ szűrő, hogy a $\delta_2(\hat{\psi}) := \beta\hat{\varphi}$ alapján értelmezett $\psi \in X$ függvényel fennáll az X_0^φ tér

$$X_0^\varphi = X_{-1}^\varphi \oplus X_{-1}^\psi \tag{6.4}$$

ortogonális felbontása. Innen következik, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ indexre

$$X_{n+1}^\varphi = X_n^\varphi \oplus X_n^\psi.$$

Ezt egymás után n-szer alklalmazva az X_{n+1}^φ terek következő ortogonális felbontását kapjuk:

$$X_{n+1}^\varphi = X_0^\varphi \oplus X_0^\psi \oplus X_1^\psi \oplus \cdots \oplus X_n^\psi \tag{6.5}$$

Innen nyilvánvaló, hogy ***a (6.3) és (6.4) feltételt kielégítő ψ függvényből képzett ψ_k^n $(k, n \in \mathbb{Z})$ rendszer ortonormált.*** A (6.5) felbontást figyelembe véve ehelyett gyakran az

$$\varphi_k^0, \psi_k^n \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

ortonormált rendszert használjuk. A (6.5) alapján nyilvánvaló, hogy ha a φ függvény egy MR-felbontást generál, akkor ez a rendszer is teljes.

Bebizonyítjuk, hogy a (6.4) felbontás azzal ekvivalens, hogy a φ-t és ψ-t generáló $\alpha, \beta \in L_1^2$ függvényekre egy speciális ortogonalitási reláció áll fenn. Ennek értelmezéséhez vezessük be a következő jelölést:

$$[f, g] := f\overline{g} + \tau_{1/2}(f\overline{g}) \quad (f, g \in L_1^2). \tag{6.6}$$

Ezzel egy olyan leképezést értelmeztünk, amellyel L_1^2-beli függvénypároknak egy 1/2-szerint periódikus függvényt feleltettünk meg, továbbá $[\cdot, \cdot]$ rendelkezik a skaláris szorzat szokásos tulajdonságaival. Az egyetlen különbség, hogy a szóban forgó leképezés értékei nem számok, hanem 1/2 szerint periodikus függvények. Erre vonatkozóan bevezethető az ortogonalitás és a Fourier-együttható fogalma. Akkor mondjuk, hogy a $\gamma_1, \gamma_2 \in L_1^2$ ***függvények []-ortonormáltak,*** ha

$$[\gamma_i, \gamma_j] = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \tag{6.7}$$

Az $[f,\gamma_i]$ $(i=1,2)$ 1/2-szerint periodikus függvényeket az $f\in L_1^2$ függvény szóban forgó rendszer szerinti []***-Fourier-együtthatóinak*** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a

$$\gamma_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_2 := \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

rendszer []-ortonormált. Általában a $\gamma\in L_1^2$ []-normált függvényből képzett

$$\gamma_1 := \gamma, \quad \gamma_2 := \epsilon\ \tau_{1/2}(\overline{\gamma}) \tag{6.8}$$

függvénypár []-ortonormált. Valóban, minthogy $\tau_{1/2}(\epsilon)=-\epsilon, \tau_1(\gamma)=\gamma$, azért

$$[\gamma_1,\gamma_2] = \epsilon(\gamma\ \tau_{1/2}(\gamma) - \tau_{1/2}(\gamma)\ \tau_1(\gamma)) = 0.$$

Megmutatjuk, hogy bármel $\gamma_1,\gamma_2\in L_1^2$ []-ortonormált függvénypárral az L_1^2 tér elemei előállíthatók

$$f = [f,\gamma_1]\gamma_1 + [f,\gamma_2]\gamma_2 \quad (f\in L_1^2) \tag{6.9}$$

alakban. A Fourier-sorok elméletében szokásos szóhasználattal élve a (6.9) jobb oldalán álló összeget a f függvény γ_1,γ_2 rendszer szerinti []-Fourier-sorának nevezzük. A (6.9) egyenlőség úgy interpetálható, hogy az f szóban forgó []-Fourier-sora előállítja a függvényt.

Az []-Fourier-együtthatók értelmezése alapján

$$\begin{pmatrix} [f,\gamma_1] \\ [f,\gamma_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma}_1 & \tau_{1/2}(\overline{\gamma}_1) \\ \overline{\gamma}_2 & \tau_{1/2}(\overline{\gamma}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \tau_{1/2}(f) \end{pmatrix}.$$

A (6.7) ortogonalitási reláció azzal ekvivalens, hogy az itt felírt egyenletrendszernek a mátrixa unitér, következésképpen inverze a transzponáltjával egyenlő. Ezt felhasználva

$$\begin{pmatrix} f \\ \tau_{1/2}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \tau_{1/2}(\gamma_1) & \tau_{1/2}(\gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f,\gamma_1] \\ [f,\gamma_2] \end{pmatrix}$$

adódik, amelynek első egyenlete a bizonyítandó állítást adja.

A továbbiakban többször felhaszáljuk az alábbi azonosságot.

1.Lemma. *Legyen $\gamma_1,\gamma_2\in L_1^2, c\in X$ és tegyük fel, hogy*

$$a(2x) = \gamma_1(x)c(x), \quad b(2x) = \gamma_2(x)c(x), \quad E_1(|c|^2) = 1. \tag{6.10}$$

Ekkor

$$\delta_2 E_1(a\bar{b}) = [\gamma_1,\gamma_2]. \tag{6.11}$$

Bizonyítás. Az E_1 periodizáló operátor értelmezése alapján

$$E_1(a\bar{b})(2x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(2x+k)\bar{b}(2x+k) =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(2x+2k)\bar{b}(2x+2k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(2x+2k+1)\bar{b}(2x+1+1).$$

Innen a (6.10) egyenlőségeket és a γ_1, γ_2 periodicitását figyelmebe véve

$$E_1(a\bar{b})(2x) = (\gamma_1\overline{\gamma}_2)(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c(x+k)|^2 + (\gamma_1\overline{\gamma}_2)(x+1/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c(x+k+1/2)|^2 =$$
$$= (\gamma_1\overline{\gamma}_2)(x)E_1(|c|^2)(x) + (\gamma_1\overline{\gamma}_2)(x+1/2)E_1(|c|^2)(x+1/2).$$

Innen az $E_1(|c|^2) = 1$ feltétel alapján a bizonyítandó (6.11) állítást kapjuk.□

A (6.4) reláció egy jól használható átfogalmazását adjuk meg a következő állításban.

4.Tétel. *i) Tegyük fel, hogy a (6.3) feltételt kielégítő φ és ψ függvényekkel fennáll a (6.4) felbontás. Ekkor létezik olyan $\alpha, \beta \in L_1^2$ függvénypár, hogy*

$$\text{(6.12)} \qquad \begin{aligned} &i) \quad \delta_2\hat{\varphi} = \alpha\hat{\varphi}, \quad \delta_2\hat{\psi} = \beta\hat{\varphi} \\ &ii) \quad [\alpha,\alpha] = [\beta,\beta] = 1, \quad [\alpha,\beta] = 0 \end{aligned}$$

ii) Megfordítva, ha $E_1(|\hat{\varphi}|^2) = 1$ és fennállnak (6.12) feltételek, akkor a (6.12) i) szerint definiált ψ függvényre $E_1(|\hat{\psi}|^2) = 1$, továbbá érvényes a (6.4) felbontás.

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy fennáll a (6.4) felbontás. Ekkor $\delta_{1/2}\varphi, \delta_{1/2}\psi \in X_0^\varphi$, következésképpen

$$\delta_2\hat{\varphi}, \delta_2\hat{\psi} \in \hat{X}_0^\varphi.$$

A 3.Tétel alapján létezik olyan $\alpha, \beta \in L_1^2$, amellyel fennáll (6.12)i). Alkalmazzuk az 1.Lemmát $c = \hat{\varphi}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$, ill. $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta$ szereposztásban. Ekkor (6.3) alapján $[\alpha,\alpha] = [\beta,\beta] = 1$ következik.

A (6.4) feltételből a 3.Tétel iii) alapján $E_1(\hat{\varphi}\,\overline{\hat{\psi}}) = 0$ következik. Ismét alkalmazva az 1.Lemmát a $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \beta$ szereposztásban az $[\alpha,\beta] = 0$ egyenlőséget kapjuk.

ii) Most induljunk ki egy $E_1(|\hat{\varphi}|^2) = 1$ feltételt kielégítő $\varphi \in X$ és a (6.11) feltételt kielégítő α, β, ψ függvényekből. Ekkor a $c = \hat{\varphi}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta$, ill. $\gamma_1 = \alpha, \gamma_2 = \beta$ szereposztással alkalmazva az 1.Lemmát $E_1(|\hat{\psi}|^2) = 1$, ill. $E_1(\hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}) = 0$ adódik. Innen a 3.Tétel alapján következik, hogy $(\psi_k^n, k \in \mathbb{N})$ minden $n \in \mathbb{Z}$ estén ortonormált rendszer, továbbá $X_{-1}^{\varphi} \perp X_{-1}^{\psi}$. A (6.12) i) feltétel és a 3.Tétel i) alapján nyilvánvaló, hogy $X_{-1}^{\varphi}, X_{-1}^{\psi} \subset X_0^{\varphi}$.

Az egyenlőség igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy $\hat{X}_0^{\varphi} \subset \hat{X}_{-1}^{\varphi} \oplus \hat{X}_{-1}^{\psi}$. Bármely $\eta \in \hat{X}_0^{\varphi}$ függvény felírható $\eta = \gamma\hat{\varphi}$ alakban, ahol $\gamma \in L_1^2$. Felhasználva a γ függvény α, β rendszer szerinti []-Fourier-sorát:

$$\gamma = [\gamma, \alpha]\alpha + [\gamma, \beta]\beta$$

adódik. Innen (6.12) alapján az $\eta \in \hat{X}_0^{\varphi}$ függvényre a következő előállítást kapjuk:

$$\eta = \gamma\hat{\varphi} = [\gamma, \alpha]\alpha\hat{\varphi} + [\gamma, \beta]\beta\hat{\varphi} = [\gamma, \alpha]\delta_2(\hat{\varphi}) + [\gamma, \beta]\delta_2(\hat{\psi}).$$

Minthogy $[\gamma, \alpha], [\gamma, \beta] \in L_1^2$ azért a 3.Tétel i) alapján a felbontásban szereplő tagok a $\hat{X}_{-1}^{\varphi}$, ill. $\hat{X}_{-1}^{\psi}$ alterekhez tartoznak. Ezzel a tételt igazoltuk. □

A most igazolt tétel alapján bármely X_n^{φ} $(n \in \mathbb{N})$ MR-felbontást generáló φ függvény ismeretében (6.8) alapján megszerkeszthetjük egy teljes ortonormált wavelet rendszer anyawaveletét. Az ezzel kapcsolatos eredményeket foglaltuk össze a következő állításban.

5.Tétel. *Legyen $\varphi \in X$ olyan függvény, amelyre*

$$E_1(|\hat{\varphi}|^2) = 1, \quad \delta_2(\hat{\varphi}) = \alpha\varphi \tag{6.13}$$

teljesül. Értelmezzük a β és ψ függvényeket a következőképpen:

$$\beta := \epsilon\tau_{1/2}(\overline{\alpha}), \quad \delta_2\hat{\psi} := \beta\hat{\varphi}. \tag{6.14}$$

Ekkor $(X_n^{\varphi}, n \in \mathbb{X})$ az X tér egy MR-felbontása, továbbá ψ_k^n $(k, n \in \mathbb{Z})$ egy teljes ortonormált rendszer.

Bizonyítás. Valóban a (6.8)-hoz fűzött megjegyzés szerint $[\alpha, \beta] = 0$, s így a 4.Tétel ii) része alapján fennáll a (6.4) felbontás. Ebből — amint azt már korábban beláttuk — a szóban forgó rendszer ortogonalitása és teljessége következik. □

A (6.14) alatt értelmezett $\beta \in L_1^2$ függvény Fourier együtthatói kifejezhetők az α Fourier-együtthatóival. Nevezetesen, ha

$$\alpha = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\epsilon_k, \tag{6.15}$$

akkor

$$\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{a}_{1-k}\epsilon_k. \tag{6.16}$$

Valóban

$$\int_0^1 \beta(t)\overline{\epsilon}_k(t)\,dt = \int_0^1 \overline{\alpha}(t)\overline{\epsilon}_{k-1}(t)\,dt = \overline{\int_0^1 \alpha(t)\overline{\epsilon}_{1-k}(t)\,dt}.$$

7. Elégséges feltételek multirezolúcióra

Ebben a pontban olyan MR-felbontásokkal foglalkozunk, amelyek generátor függvénye $\mathcal{M}$-beli és amelyekre $(\varphi_k^0, k \in \mathbb{Z})$ ortonormált rendszer. Ezek halmazát $\mathcal{M}_1$-gyel jelöljük:

$$\mathcal{M}_1 := \Big\{\varphi \in \mathcal{M} : E_1(|\hat{\varphi}|^2) = 1\Big\}. \tag{7.1}$$

A 4. pontban megmutattuk, hogy az $X_n^\varphi \subset X_{n+1}^\varphi$ feltétel azzal ekvivalens, hogy valamely $\alpha \in L_1^2$ függvénnyel fennáll a

$$\hat{\varphi}(2x) = \alpha(x)\widehat{\varphi}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{7.2}$$

skálázási egyenlet. Innen

$$\widehat{\varphi}(x) = \alpha(2^{-1}x)\alpha(2^{-2}x)\cdots\alpha(2^{-n}x)\widehat{\varphi}(2^{-n}x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik. Minthogy $\varphi \in \mathcal{M}_1$ esetén $\hat{\varphi}$ folytonos, azért minden olyan $\varphi \in \mathcal{M}_1$ függvény, amely MR-felbontást generál előállítható végtelen szorzat formájában:

$$\widehat{\varphi}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha(2^{-n}x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{7.3}$$

Innen következik, hogy a φ függvényt az α szűrő egyertelműen meghatározza.

Ebben a pontban — kiindulva az α függvényből — azt vizsgáljuk, hogy ***milyen α szűrők generálna MR-felbontást.***

Az alábbi tételben ezzel összefüggésben egy szükséges és egy elégséges feltételt adunk meg.

6. Tétel *i) Ha a $\varphi \in \mathcal{M}_1$ függvény egy MR felbontást generál, akkor fennáll a (7.2) skálázási egyenlet, továbbá az az 1-szerint periódikus $\alpha \in L_1^2$ függvényre*

$$\alpha(0) = 1, \quad |\alpha(x)|^2 + |\alpha(x + 2^{-1})|^2 = 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{7.4}$$

teljesül.

ii) Megfordítva, tegyük fel, hogy a folytonosan differenciálható, 1-szerint periódikus α függvény eleget tesz a (7.4) feltételeknek. Ekkor a (7.3) végtelen szorzat konvergens és

$$A(x) := \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \alpha(2^{-n}x) \tag{7.5}$$

határfüggvénye X-beli.

iii) Ha ezen túlmenően az

$$A_m := \chi_{I_m} \prod_{n=1}^{m} \delta_{2^{-m}}\alpha \quad (I_m := [-2^{m-1}, 2^{m-1}),\ m \in \mathbb{N}^*)$$

részszorzatoknak van egy kösös X-beli majoránsa, akkor a (7.5) alatt értelmezett A függvényre $E(|A|^2) = 1$, következésképpen a $\hat{\varphi} = A$ alapján értelmezett φ függvény egy MR-felbontást generál.

Bizonyítás. i) Az $\alpha(0) = 1$ egyenlőség a (7.2) és $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ alapján nyilvánvalóan fennáll. Az állítás második része egyszerűen következik az 1.Lemmából a $c = \hat{\varphi}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$ szereposztást alkalmazva.

ii) A 4.pontban megmutattuk, hogy a folytonosan differenciálható függvény esetén a (7.5) végtelen szorzat konvergens és az A függvény folytonos. Annak igazolásához, hogy $A \in L^2(\mathbb{R})$ felhasználjuk a bevezető rész E_T^I oparátorokra vonatkozó azonosságait. Bevezetve az

$$\mathcal{E}_n := E_{2^n}^{I_n} := \chi_{I_n} E_{2^n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

operátorokat (11), (13) és (14) alapján minden $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvényre fennáll a következő:

$$\begin{aligned} &i) && \int_{\mathbb{R}} (E_n f)(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt, \\ &ii) && \mathcal{E}_n(\lambda f) = \lambda(E_n f) \quad (\lambda f \in L^1(\mathbb{R})), \\ &iii) && \mathcal{E}_n(\mathcal{E}_m f) = \mathcal{E}_m(\mathcal{E}_n f) = \mathcal{E}_n f \quad (n \leqq m). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Legyen $\alpha_n(x) := \alpha(2^{-n}x)$ $(n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R})$. Először megmutatjuk, hogy az $\alpha_n \in L^2_{2^n}$ függvényre

$$\mathcal{E}_{n-1}(\chi_{I_n}|\alpha_n|^2) = \chi_{I_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{7.7}$$

teljesül. A (7.7) egyenlőség mindkét oldala 0 az I_{n-1} intervallumon kívül. Ha $x \in I_{n-1}$, akkor

$$\chi_{I_n}(x + k2^{n-1}) = 0, \text{ ha } k \notin \{0, -\operatorname{sgn}(x)\},$$

következésképpen ebben az esetben a (7.4) feltétel alapján

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{n-1}(\chi_{I_n}|\alpha_n|^2)(x) = |\alpha(2^{-n}x)|^2 + |\alpha(2^{-n}(x - \operatorname{sgn}(x)2^{n-1}))|^2 = \\ &= |\alpha(2^{-n}x)|^2 + |\alpha(2^{-n}x - \operatorname{sgn}(x)2^{-1})|^2 = 1\end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy (7.7) a második esetben is fennáll.

A (7.7) alapján felhasználva a (7.6) ii),iii) egyenlőségeket

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_0(|A_n|^2) = \mathcal{E}_0(\mathcal{E}_{n-1}(\prod_{k=1}^{n-1}|\alpha_k|^2\chi_{I_n}|\alpha_n|^2)) = \mathcal{E}_0(\prod_{k=1}^{n-1}|\alpha_k|^2\mathcal{E}_{n-1}(\chi_{I_n}|\alpha_n|^2)) = \\ &= \mathcal{E}_0(\prod_{k=1}^{n-1}|\alpha_k|^2\chi_{I_{n-1}}) = \mathcal{E}_0(|A_{n-1}|^2)\end{aligned}$$

Ezt egymás után alkalmazva (7.7) alapján

$$\mathcal{E}_0(|A_n|^2) = \mathcal{E}_0(|A_1|^2) = \chi_{I_0} \tag{7.8}$$

következik. Innen (7.6) i) figyelembevételével

$$\int_{\mathbb{R}} |A_n(t)|^2\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_0(|A_n|^2)(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_0}(t)\,dt = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

adódik. Minthogy $\lim_{n\to\infty}|A_n|^2 = |A|^2$, azért a Fatou-lemma alapján

$$\int_{\mathbb{R}} |A(t)|^2\,dt \leqq 1,$$

s így valóban $A \in X$.

iii) Ha létezik olyan $F \in X$ függvény, amelyre $|A_n| \leqq F$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a beveztőben részben említett, E_T-re vonatkozó Lebesgue-tétel, valamint (7.8) alapján

$$\mathcal{E}_0(|A|^2) = \lim_{n\to\infty} E_0(|A_n|^2) = \chi_{I_0}$$

következik. Minthogy az $E_1(|A|^2)$ függvény 1 szerint periodikus, azért innen a

$$E_1(|A|^2) = 1$$

bizonyítandó állítást kapjuk. □

A most igazolt tétel egyszerű következménye az alábbi állítás.

1.Következmény. *Tegyük fel, hogy a folytonosan differenciálható $\alpha \in L_1^2$ függvény eleget tesz a (7.4) feltételnek, továbbá*

$$|\alpha(x)| > 0, \quad \text{ha} \quad |x| \leqq \frac{1}{4}. \tag{7.9}$$

Ekkor a (7.5) alatt értelmezett $A \in X$ függvényre

$$E_1(|A|^2) = 1,$$

következésképpen a $\hat{\varphi} = A$ alapján értelmezett φ függvény az X egy MR-felbontását generálja.

Bizonyítás. A Következmény igazolásához megmutatjuk, hogy létezik olyan $C > 0$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra fennáll a

$$\prod_{j=1}^{n} |\alpha(2^{-j}x)| \leqq C|A(x)|, \quad \text{ha} \quad |x| \leqq 2^{n-1}. \tag{7.10}$$

Innen következik, hogy a 6.Tételben szereplő A_n $(n \in \mathbb{N})$ függvényeknek a CA egy közös majoránsa, és a szóban forgó tétel ii) része alapján ez a majoráns függvény X-hez tartozik. Végül a 6.Tétel iii) alapján adódik az állítás.

A (7.10) igazolásához először megmutatjuk, hogy az $|A|$ függvény a $[-1/2, 1/2]$ intervallumban egy pozitív korlát fölött marad, azaz létezik olyan $p > 0$ szám, hogy

$$|A(x)| \geq p \quad \text{ha} \quad |x| \leqq \frac{1}{2}. \tag{7.11}$$

Valóban az A folytonosságából és az $A(0) = 1$ feltételből következik, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $|A(x)| > 1/2$, ha $|x| \leqq 2^{-N}$. A (7.9) feltétel alapján létezik olyan $a > 0$ szám, $|\alpha(x)| > a$, ha $|x| < 2^{-2}$. Ezt felhasználva $|x| \leqq 1/2$ esetén a következő alsó becslást kapjuk:

$$|A(x)| = |\alpha(2^{-1}x) \cdots \alpha(2^{-N}x)| A(2^{-N}x)| \geq \frac{a^N}{2}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy (7.11) a $p = a^N/2$ állandóval valóban fennáll. Ezt felhasználva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $|x| \leqq 2^{n-1}$ esetén

$$|A(x)| = |A(2^{-n}x)| \prod_{j=1}^{n} |\alpha(2^{-j}x)| \geq p \prod_{j=1}^{n} |\alpha(2^{-j}x)|,$$

s ezzel a (7.10) egyenlőtlenséget a $C = 1/p$ állandóval igazoltuk.

Önmagában a (7.4) feltétel nem garantálja, hogy a (7.5) alatt értelmezett A függvényre $E_1(|A|^2) = 1$ teljesüljön. Ezt a következő példával mutatjuk meg.

Legyen

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \epsilon_{-3}).$$

Ekkor $\alpha(0) = 1$ és

$$|\alpha(x)|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 6\pi x), \quad |\alpha(x)|^2 + |\alpha(x + 1/2)|^2 = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

vagyis az α függvény kielégíti (7.4) feltételt. A (4.8) azonosság alapján

$$A(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \alpha(2^{-n}x) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{-3\pi i 2^{-n}x} \cos(3\pi 2^{-n}x) = e^{-3\pi i x} \frac{\sin 3\pi x}{3\pi x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy A a $\varphi := \chi_{[0,3]}/3$ függvény Fourier-transzformáltja. Minthogy $\langle \varphi_0^0, \varphi_1^0 \rangle \neq 0$, azért a $(\varphi_k^0, k \in \mathbb{Z})$ rendszer ***nem ortogonális.***

8. Kompakt tartójú waveletek

Ebben a pontban olyan MR-felbontásokkal foglalkozunk, amelyek generátor függvényei kompakt tartójúak. Az 5.pontban megmutattuk, hogy ***ezek szűrője trigonometrikus polinom.*** Ezen tűlmenően arra is törekszünk, hogy a generátor függvény minél simább legyen. Minthogy a skálázási egyenlet megoldása során a generátor függvény Fourier-transzformáltját állítjuk elő, szükségünk lesz olyan eredményekre, amelyek alapján a Fourier-transzformált tulajdonságaiból az eredeti függvény simaságára tudunk következtetni. Ezzel a kapcsolatos a következő állítas. Tegyük fel, hogy a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ és a $t^r \hat{\varphi}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ függvény integrálható. Ekkor a φ függvény r-szer differenciálható és

$$\varphi^{(r)}(x) = (2\pi i)^r \int_{\mathbb{R}} t^r \hat{\varphi}(t) \epsilon_x(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}).$$

Speciálisan, ha van olyan $C > 0, \gamma > 0$, hogy

$$(8.1) \qquad |\hat{\varphi}(t)| \leqq \frac{C}{1 + |t|^{r+1+\gamma}} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor a φ függvény r-szer folytonosan differenciálható.

A továbbiakban az α szűrőt

$$\alpha = \left(\frac{1+\epsilon_{-1}}{2}\right)^N T \tag{8.2}$$

alakban vesszük fel, ahol T trigonometrikus polinom. Ekkor az α maga is trigonometrikus polinom és a (7.5) sorozat mindenütt konvergens, ha teljesül az $\alpha(0) = 1$ feltétel.

Az

$$A(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \alpha(2^{-n}x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{8.3}$$

végtelen szorzat abszolut értéke a

$$\left|\frac{1+\epsilon_{-1}(x)}{2}\right| = |\cos \pi x|, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos 2^{-n}\pi x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságok figyelembevételével az

$$|A(x)| \leqq \frac{C}{1+|x|^N} \prod_{n=1}^{\infty} |T(2^{-n}x)| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

becslést kapjuk, ahol C állandó. Innen látható, hogy a $\hat{\varphi} = A$ alapján értelmezett φ függvény simasága az N paraméter alkalmas megválasztásával elérhető. Ez indokolja az α trigonometrikus polinom (8.2) alakban való felvételét.

A továbbiakban olyan (8.2) alakú trigonometrikus polinomokat keresünk, amelyek eleget tesznek az

$$\alpha(0) = 1, \quad |\alpha(x)|^2 + |\alpha(x+1/2)|^2 = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{8.4}$$

feltételeknek. Az $|\alpha|^2$ függvény felírható

$$|\alpha(x)|^2 = \cos^{2N}(\pi x)\ |T(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban. A

$$T := \sum_{k=-n}^{n} a_k \epsilon_k$$

trigonometrikus polinom négyzetére

$$|T|^2 = \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k \epsilon_k\right)\left(\sum_{k=-n}^{n} \overline{a}_{-k} \epsilon_k\right) = \sum_{k=-2n}^{2n} b_k \epsilon_k$$

adódik, ahol $b_k = \sum_{r+s=k} a_r \overline{a}_{-s}$. Következésképpen $|T|^2$ maga is egy trigonometrikus polinom. Az alábbiakban ***a (8.4)-nek csak azokat a megoldásait határozzuk meg, amelyekre*** $|T|^2$ ***páros trigonometrikus polinom.*** Ismeretes, hogy ezek a trigonometrikus polinomok előállíthatók

$$|T(x)|^2 = P(\cos 2\pi x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol P egy algebrai polinom. Felhasználva a

$$\cos 2\pi x = 1 - 2\sin^2 \pi x \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságot $|T|^2$ felírható

$$|T(x)|^2 = Q(\sin^2 \pi x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{alakban, ahol} \quad Q(x) := P(1-2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezzel összhangban a (8.4)

$$|\alpha(x)|^2 = \cos^{2N}(\pi x) Q(\sin^2 \pi x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{8.5}$$

alakú megoldásait keressük. Bevezetve az $y = \sin^2 \pi x$ jelölést (8.4) ekvivalens az

$$(1-y)^N Q(y) + y^N Q(1-y) = 1 \quad (0 \leqq y \leqq 1) \tag{8.6}$$

egyenlettel, ahol Q algebrai polinom. Minthogy a $p(y) := (1-y)^N, q(y) := y^N$ $(y \in \mathbb{R})$ együtthatók relatív prímek, azért a $pQ_1 + qQ_2 = 1$ polinomokra vonatkozó diofantikus egyenletnek pontosan egy Q_1, Q_2 megoldása létezik a legfeljebb $(N-1)$-edfokú polinomok körében. Ismeretes továbbá, hogy a Q_1, Q_2 megoldások euklideszi algoritmussal határozhatók meg. Felírva az egyenletet az y majd az $1-y$ helyen azt kapjuk, hogy

$$(1-y)^N Q_1(y) + y^N Q_2(y) = 1, \quad (1-y)^N Q_2(1-y) + y^N Q_1(1-y) = 1 \quad (0 \leqq y \leqq 1).$$

A szóban forgó egyenlet megoldhatóságának unicitásából következik, hogy

$$Q_1(y) = Q_2(1-y).$$

Ezt figyelembe véve azt kapjuk, hogy a $Q = Q_1$ polinom kielégíti a (8.6) egyenletet.

Kiindulva a (8.6) egyenletből Q polinom explicit alakban is megadható. A (8.6)-ból

$$Q(y) = (1-y)^{-N}(1 - y^N Q(1-y)) \quad (y \neq 1)$$

következik. Az első tényező binomiális sorfejtését felírva azt kapjuk, hogy az $|y| < 1$ intervallumban fennáll a

$$Q(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} y^k \right) (1 - y^N Q(1-y))$$

egyenlőség. A jobb oldalon elvégezve a végtelen sorok szorzását $Q(y)$ felírható a $(-1,1)$ intervallumban konvergens hatványsor összegeként:

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + \sum_{k=N}^{\infty} c_k y^k \quad (|y| < 1).$$

Minthogy Q egy $(N-1)$-edfokú polinom, azért a hatványsorok unicitására vonatkozó tétel alapján a (8.6) egyenlet $Q_N := Q$ megoldására

$$Q_N(y) := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (y \in \mathbb{R}) \tag{8.7}$$

adódik. Ennek segítségével végtelen sok megoldás írható fel. Legyen R olyan polinom, amelyre

$$R(y) + R(1-y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R})$$

teljesül. Ekkor — amint arról közvetlenül meggyőződhetünk — a

$$Q(y) = Q_N(y) + y^N R(y) \quad (y \in \mathbb{R})$$

polinom is megoldása (8.6)-nak. Megfordítva könnyen igazolható, hogy a (8.6) minden megoldása ilyen alakú (lásd az x Feledatot). Az eredeti (8.4) egyenlet (8.5) alakú megoldásaiban csak a nem-negatív Q függvények jöhetnek szóba.

A φ felírásához most már a $|T(x)|^2 = P(\cos 2\pi x)$ ismeretében a T trigonometrikus polinomot kell rekonstruálni. Ennek a feladatnak a megoldhatósága ***Riesz Frigyes*** alábbi tételéből következik.

> Riesz-lemma. *Tegyük fel, hogy az S valós együtthatós, páros trigonometrikus polinom nem-negatív. Ekkor van olyan T trigonometrikus polinom, amelyre*
>
> $$S(x) = |T(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Az S páros trigonometrikus polinom alkalmasan választott, valós együtthatós P algebrai polinommal felírható $S(x) = P(\cos 2\pi x)$ $(x \in \mathbb{R})$ alakban. Legyen

$$\begin{aligned} P(z) =& c \prod_{k=1}^{r} (z - x_j)^{m_j} \prod_{\ell=1}^{s} (z - z_\ell)^{n_\ell} (z - \overline{z}_\ell)^{n_\ell} = \\ &= c \prod_{k=1}^{r} (z - x_j)^{m_j} \prod_{\ell=1}^{s} (z^2 + p_\ell z + q_\ell)^{n_\ell} \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

a P gyöktényezős felbontása, ahol az x_j számok a páronként különböző valós gyököket,a $z_j, \overline{z}_j$ számok a komplex gyökpárokat, m_j a x_j, n_j a z_j multiplicitását jelöli, továbbá $m := m_1 + \cdots m_r + 2(n_1 + \cdots + n_s)$ a P fokszáma. A másodfokú gyöktényezők az $\mathbb{R}$ halmazon állandó előjelűek. A $z - x_j$ gyöktényező szintén állandó előjelű a $\{z = \cos 2\pi x : x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$ halmazon, ha $|x_j| ge 1$. Végül $z - x_j$ elsőfokú gyöktényező biztosan előjelet vált, ha $|x_j| < 1$. Ilyenkor a $\cos 2\pi t_j = x_j$ alapján értelmezett t_j pontnak van olyan környezete, amelben a $\cos 2\pi x - x_j$ előjelet vált, de a többi tényező állandó előjelű. Minthogy $P(\cos 2\pi x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, azért az $|x_j| < 1$ esetben az x_j gyök m_j multiplicitása szükségképpen páros: $m_j = 2\nu_j$.

Vezessük be a

$$F(z) := z^m P\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) \quad (z \in \mathbb{C})$$

$2m$-edfokú polinomot. Az F polinom a P gyöktényezős felbontását felhasználva a $z \in \mathbb{C}$ helyen felírható

$$F(z) = c2^{-m} \prod_{k=1}^{r} \left(z^2 - 2x_j z + 1\right)^{m_j} \prod_{\ell=1}^{s} \left((z^2 - 2z_\ell z + 1)(z^2 - 2\overline{z}_\ell z + 1)\right)^{n_\ell}$$

alakban. Másrészt az F értelmezése és az $S \geq 0$ feltétel alapján

$$|F(\epsilon(x))| = |P(\cos 2\pi x)| = P(\cos 2\pi x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebből kiindulva megmutatjuk, hogy a gyöktényezők megfelelő csoportosításával P a kívánt alakban írható fel.

Ha $|x_j| \geq 1$, akkor a $a_j(z) := z^2 - 2x_j z + 1$ $(z \in \mathbb{C})$ másodfokú polinom gyökei valósak és szorzatuk 1. Az egyik gyököt v_j-vel jelölve a_j felírható a

$$a_j(z) := (z - \overline{v}_j)(z - 1/v_j) \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakban.

A

$$b_\ell(z) := z^2 - 2z_\ell z + 1, \; \tilde{b}_\ell(z) := z^2 - 2\overline{z}_\ell z + 1 \quad (x \in \mathbb{C})$$

polinomok gyökei szoros kapcsolatban vannak egymással. Nevezetesen, ha w_ℓ jelöli az b_ℓ egyik gyökét, akkor a másik gyöke $1/w_\ell$, a $\tilde{b}_\ell$ gyökei pedig $\overline{w}_\ell$ és $1/\overline{w}_\ell$. Ennek alapján a két függvény szorzata felírható

$$b_\ell(z)\tilde{b}_\ell(z) = (z - \overline{w}_\ell)(z - 1/w_\ell)(z - w_\ell)(z - 1/\overline{w}_\ell) \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakban.

Mindkét esetben $\gamma(z) := (z - \overline{v})(z - 1/v)$ alakú másodfokú polinomok fordulnak elő. A c polinom a komplex egységkörön felírható

$$|\gamma(\epsilon(x))| = |(\epsilon(x) - \overline{v})(1 - \overline{\epsilon}(x)/v)| = \frac{1}{|v|}|(\epsilon(x) - \overline{v})(v - \overline{\epsilon}(x))| = \frac{1}{|v|}|\epsilon(x) - \overline{v}|^2$$

alakban. Ezt és a

$$J_1 := \{j : 0 \leqq j \leqq r, |x_j| < 1\}, \quad J_2 := \{j : 0 \leqq j \leqq r, |x_j| \geq 1\}$$

jelöléseket felhasználva az S trigonometrikus polinom

$$\begin{aligned} S(x) &= P(\cos 2\pi x) = |F(\epsilon(x))| = \\ &= |c|2^{-n} \prod_{j\in J_1} |a_j(\epsilon(x))|^{2\nu_j} \prod_{j\in J_2} |a_j(\epsilon(x))|^{m_j} \prod_{1\leqq \ell \leqq r} |b_\ell(\epsilon(x))|^{n_\ell} = \\ &= c_1 \prod_{j\in J_1} |a_j(\epsilon(x))|^{2\nu_j} \prod_{j\in J_2} |\epsilon(x) - v_j|^{2m_j} \prod_{1\leqq \ell \leqq r} |(\epsilon(x) - w_\ell)(\epsilon(x) - \overline{w}_\ell)|^{2n_\ell}, \end{aligned}$$

előállítását kapjuk, ahol

$$c_1 = c2^{-n} \prod_{j\in J_2} \frac{1}{|v|_j} \prod_{1\leqq \ell \leqq s} \frac{1}{|w_\ell|^2}.$$

Innen nyilvánvaló, hogy a

$$T(x) := \sqrt{c_1} \prod_{j\in J_1} a_j(\epsilon(x))^{\nu_j} \prod_{j\in J_2} (\epsilon(x) - v_j)^{m_j} \prod_{1\leqq \ell \leqq r} ((\epsilon(x) - w_\ell)(\epsilon(x) - \overline{w}_\ell))^{n_\ell}$$

trigonometrikus polinomra valóban $|T(x)|^2 = S(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ teljesül. $\square$

2. Periodikus waveletek

1. Bevezetés

Ebben a fejezetben 1***-szerint periodikus függvények sorfejtésével*** foglalkozunk. Ezek a függvények kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az $\mathbb{I} := [0,1)$ intervallumon értelmezett függvényeknek, véve a periodikus függvények $\mathbb{I}$-re vonatkozó leszűkítéseit. Megfordítva, minden $\mathbb{I}$ intervallumon értelmezett függvény egyértelműen terjeszthető ki a számegyenesre 1-szerint periodikus függvénnyé. Az $\mathbb{I}$ intervallum a $\dot{+}$ ***szimbólummal jelölt mod*** 1 ***össszeadásra nézve csoportot alkot.***

Az 1-szerint periodikus, folytonos függvények halmazát a C_1, az $f \in C_1$ függvény maximum normáját az $\|f\|$ szimbólummal fogjuk jelölni. Az 1-szerint periodikus, mérhető és lokálisan L^p-beli függvények halmazát L_1^p-vel fogjuk jelölni, ahol $1 \leqq p \leqq \infty$. Az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-térben bevezetett skaláris szorzat mellett használni fogjuk az L_1^2 térben szokásos

$$[f,g] := \int_{\mathbb{I}} f(t)\overline{g}(t)\,dt \quad (f,g \in L_1^2) \tag{1.1}$$

skaláris szorzatot. Az 1 szerint periodikus

$$\epsilon_n(x) := e^{2\pi i n x} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

komplex trigonometrikus rendszer ortonormált erre a skaláris szorzatra nézve:

$$[\epsilon_n, \epsilon_m] = \delta_{mn} \quad (m,n \in \mathbb{Z}). \tag{1.3}$$

Az $f \in L_1^1$ vagy $f \in L^1(\mathbb{I})$ ***függvény trigonometrikus Fourier-együtthatóit,*** ill. a $g \in L^1(\mathbb{R})$ Fourier-transzformáltját az

$$(\mathcal{F}^\diamond f)(n) := f^\diamond(n) := \int_{\mathbb{I}} f(t)\overline{\epsilon}_n(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1.4}$$

$$(\mathcal{F} f)(s) := \hat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\epsilon}_s(t)\,dt \quad (s \in \mathbb{R})$$

szimbólumokkal jelöljük. Az $\mathcal{F}^\diamond$ és az $\mathcal{F}$ operátorok szoros kapcsolatban állnak egymással. Nevezetesen

$$(\mathcal{F}^\diamond Ef)(n) = (\mathcal{F}f)(n) \quad (n \in \mathbb{Z}, f \in L^1(\mathbb{R}), \tag{1.5}$$

ahol $E := E_1$ az 1-szerinti periodizálás operátora. Az L_1^1-beli függvények körében szokásos konvolúcióra az

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{I}} f(t)g(x-t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}, f, g \in L_1^1) \tag{1.6}$$

jelölést használjuk. Ismeretes, hogy $f \in L_1^p, g \in L_1^{p'}$ $(1 \leqq p, p' \leqq \infty,\ 1/p+1/p' = 1)$ esetén $f \star g \in C_1$ továbbá

$$\mathcal{F}^\diamond(f \star g) = \mathcal{F}^\diamond f\, \mathcal{F}^\diamond g \quad (f, g \in L_1^1). \tag{1.7}$$

A most bevezetett két Fourier-transzformált mellett használni fogjuk a ***diszkrét Fourier-transzformációt*** is. Ennek értelmezéséhez vezessük be az

$$\mathbb{N}_n := \{0, 1, \cdots, n-1\}, \quad \mathbb{I}_n := \left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{N}_n\right\} \quad (n = 2, 3, \cdots) \tag{1.8}$$

halmazokat. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{I}_n$ az $\mathbb{I}$-nek egy, a $\dot{+}$ műveletre nézve n-edrendű részcsoportja. Az $\mathbb{I}_n$ halmazon értelmezett függvények körében vezessük be az

$$[f, g]_n := \frac{1}{n} \sum_{t \in \mathbb{I}_n} f(t)\overline{g}(t) \tag{1.9}$$

skaláris szorzatot. Ismeretes, hogy az ϵ_k $(k \in \mathbb{N}_n)$ trigonometrikus rendszer $\mathbb{I}_n$-re vett leszűkítése, az ún. ***diszkrét trigonometrikus rendszer ortonormált*** erre a skaláris szorzatra nézve:

$$[\epsilon_k, \epsilon_\ell]_n = \delta_{k\ell} \quad (k, \ell \in \mathbb{N}_n). \tag{1.10}$$

Az

$$(\mathcal{F}_n^\diamond f)(k) := f_n^\diamond(k) := [f, \epsilon_k]_n \quad (k \in \mathbb{Z},\ f \in C_1) \tag{1.11}$$

számokat az f függvény ***diszkrét Fourier-együtthatóinak*** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $f_n^\diamond : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diszkrét Fourier-együttható n-szerint periodikus:

$$f_n^\diamond(k+n) = f_n^\diamond(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az eddig értelmezett két konvolúció mellett használni fogjuk az alábbi diszkrét konvolúciót:

$$(f \overset{n}{\diamond} g)(s) := \frac{1}{n} \sum_{t \in \mathbb{I}_n} f(t)g(s-t) \quad (f, g \in C_1, s \in \mathbb{R}). \tag{1.12}$$

Könnyen igazolható, hogy

$$(f \overset{n}{\diamond} g)^{\diamond}(k) = f_n^{\diamond}(k)\, g_n^{\diamond}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1.13}$$

Felhasználva az $\epsilon_k(s-t) = \epsilon_k(s)\overline{\epsilon}_k(t)$ függvényegyenletet, valamint a most bevezetet konvolúciót azt kapjuk, hogy

$$f \overset{n}{\diamond} \epsilon_k = f_n^{\diamond}(k)\epsilon_k \quad (k \in \mathbb{N}_n). \tag{1.14}$$

Ez egyenlőség úgy interpretálható, hogy az

$$A_f := f \overset{n}{\diamond} g \quad (g \in C_1) \tag{1.15}$$

konvolúciós operátornak az $\epsilon_k \ \ (k \in \mathbb{N}_n)$ függvények a saját függvényei és $f_n^{\diamond}(k)$ a hozzájuk tartozó saját értékek.

Ismeretes, hogy bármely $f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{C}$ függvény diszkrét Fourier-együtthatóiból rekonstruálható. Nevezetesen fennáll az

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} f_n^{\diamond}(k)\epsilon_k(t) \quad (t \in \mathbb{I}_n). \tag{1.16}$$

Az első fejezetben az $L^2(\mathbb{R})$ tér egész transzlációval szemben invariáns altereit vizsgáltuk. Ebben a fejezetben a C_1 térnek azokat az altereit vizsgáljuk, amelyek a $\tau_t \ (t \in \mathbb{I}_n)$ transzlációval szemben invariánsak.

Kiindulva a $\varphi \in C_1$ függvényből képezzük a C_1 térnek a $\varphi_t := \tau_t\varphi \ (t \in \mathbb{I}_n)$ függvények által generált alterét, azaz legyen

$$X_n := X_n^{\varphi} := \mathrm{Span}\{\tau_t\varphi : t \in \mathbb{I}_n\}. \tag{1.17}$$

Nyilvánvaló, hogy X_n invariáns altér az $\mathbb{I}_n$-beli transzlációkra nézve.

A 2. pontban azt vizsgáljuk, hogy milyen feltétel mellett lesz a $\varphi_t \ (t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer az X_n^{φ} tér bázisa. Ez azzal ekvivalens, hogy a szóban forgó rendszer lineárisan független. A φ autokorrelációs függvényét és annak diszkrét Fourier-transzformáltját felhasználva a lineáris függetlenségre szükséges és elégséges feltételt adunk. Emellett olyan $\psi \in X_n^{\varphi}$ függvényt szerkesztünk, emely $\psi_t \ (t \in \mathbb{I}_n)$ ***eltóltjai biortogonálisak a teret kifeszítő rendszerre*** a $[\cdot,\cdot]$ skaláris szorzatra nézve, azaz

$$[\varphi_s, \psi_t] = \delta_{st} \quad (s, t \in \mathbb{I}_n). \tag{1.18}$$

Ezen túlmenően megadjuk az X_n^{φ} tér egy $\mathbb{I}_n$-beli transzlációkkal szemben invariáns ortonormált bázisát.

A 3.pontban az említett biortogonális rendszer segítségevel előállítjuk a X_n térre való projekciós operátorokat és megvizsgáljuk ezek normáit különböző terek esetében.

2. Periodikus ortogonális és biortogonális rendszerek

Az (1.17) alatt bevezetett X_n^φ tér vizsgálatában fontos szerepet játszik a $\varphi \in L_1^2$ függvény

$$\Phi(t) := [\varphi_t, \varphi] = \int_{\mathbb{I}} \varphi(s+t)\overline{\varphi}(s)\, ds = (\varphi \star \varphi_-)(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

autókorrelációs függvénye, ahol $\varphi_-(t) := \overline{\varphi}(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Nyilvánvaló, hogy $\Phi \in C_1$, továbbá $\varphi_-^\diamond(k) = \overline{\varphi^\diamond}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ alapján

$$\Phi^\diamond(k) = |\varphi^\diamond(k)|^2 \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{2.2}$$

A φ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer lineáris függetlemsége kapcsolatba hozható a φ függvény diszkrét Fourier-együtthatóival, nevezetesen érvényes a következő állítás:

> **1.Tétel.** *A $\varphi \in C_1$ függvény által generált $\varphi_t := \tau_t\varphi$ $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a φ függvény Φ autokorrelációs függvényének diszkrét Fourier-együtthatóira*
>
> $$\Phi_n^\diamond(k) \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N}_n) \tag{2.3}$$
>
> *teljesül.*

Bizonyítás. Ismeretes (lásd pl. [..]), hogy a φ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha ennek

$$G_n := \Big[[\varphi_r, \varphi_s]\Big]_{(r,s)\in\mathbb{N}_n^2}$$

Gramm-mátrixa nem szinguláris. A skaláris szorzat transzláció invarianciája alapján

$$[\varphi_r, \varphi_s] = [\varphi_{r-s}, \varphi] = \Phi(r-s) \quad (r, s \in \mathbb{I}_n), \tag{2.4}$$

azért a Gramm-mátrixa ciklikus, továbbá a G_n/n által létesített lineáris leképezés azonos az Φ függvény által generált konvolúciós operátorral:

$$\frac{1}{n}(G_n x)_s = (\Phi \overset{n}{\diamond} g)(s/n), \quad x^T := (g(0/n), g(1/n), \cdots, g((n-1)/n)) \in \mathbb{C}^n, \tag{2.5}$$

ahol x a g értékeiből alkotott n-dimenziós oszlopvektort, x^T pedig ennek transzponáltját jelöli.

Az előző pont végén tett megjegyzés alapján (lásd (1.13) és (1.14)) a G_n/n sajátértékei a $\Phi_n^\diamond(k)$ $(k \in \mathbb{N}_n)$ számok. Innen

$$\det\left(\frac{1}{n}G_n\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \Phi_n^\diamond(k).$$

alapján nyilvánvaló, hogy G_n pontosan akkor reguráлis, ha fennáll (2.3). □

A tételben szereplő diszkrét Fourier-együtthatók kifejezhetők a $\varphi \in C_1$ függvény Fourier-együtthatóival. A $\varphi \in C_1$ feltételből (2.2) és a Parseval-formula alapján következik, hogy a Φ Fourier-sora abszolut konvergens és

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi^{\diamond}(k)|^2 \epsilon_k(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Az ϵ_k függvényekre az $\mathbb{I}_n$ halmaz pontjaiban

$$\epsilon_k(t) = \epsilon_{k+n}(t) \quad (t \in \mathbb{I}_n, k \in \mathbb{Z})$$

teljesül. Ezt felhasználva a Φ függvény az $\mathbb{I}_n$ pontjaiban felírható

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k(t) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\varphi^{\diamond}(\ell n + k)|^2 \quad (t \in \mathbb{I}_n) \tag{2.5}$$

alakban. Innen a Φ függvény k-adik diszkrét Fourier-együtthatóira

$$\Phi_n^{\diamond}(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\varphi^{\diamond}(\ell n + k)|^2 \quad (k \in \mathbb{N}_n) \tag{2.6}$$

adódik.

Ezek után az X_n^{φ} altérre való ***ortogonális projekciókat*** vizsgáljuk kiindulva a tér egy $\tau_t\varphi\,(t \in \mathbb{I}_n)$ alakú bázisából. A Fourier analízis eszközeit használva előállitunk egy X_n^{φ}-beli elemekből álló $\psi_t\,(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszert, amelyre

$$\langle \varphi_r, \psi_s \rangle = \delta_{rs} \quad (r, s \in \mathbb{I}_n) \tag{2.7}$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy a ψ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer alkalmasan választott $\psi \in X_n$ függvényből transzlációval származtatható, azaz

$$\psi_t = \tau_t\psi \quad (t \in \mathbb{I}_n). \tag{2.8}$$

A ψ függvény explicit alakban állítható elő a φ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ bázisban, nevezetesen

$$\psi = \frac{1}{n^2} \sum_{t \in \mathbb{I}_n} \gamma(t)\varphi_t, \tag{2.9}$$

ahol a lineáris kombináció együtthatóit leíró $\gamma : \mathbb{I}_n \to \mathbb{C}$ függvény diszkrét Fourier-transzformáltja egyszerűen adható meg:

$$\gamma_n^{\diamond}(k) = \frac{1}{\Phi_n^{\diamond}(-k)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{2.10}$$

Ezzel összefüggésben bebizonyítjuk a következő állítást.

2.Tétel. *Tegyük fel, hogy a Φ autokorrelációs függvény diszkrét Fourier-transzformáltjára fennáll az (2.3) feltétel. Ekkor a (2.10) alapján értelmezett $\gamma(t)$ $(t \in \mathbb{I}_n)$ együtthatókkal (2.9) szerint képzett $\psi \in \mathbb{X}_n^{\varphi}$ függvény $\psi_t := \tau_t\psi$ $(t \in \mathbb{I}_n)$***eltóltjai és a** φ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ **rendszer biortogonálisak.**

Bizonyítás. A skaláris szorzat transzláció invarianciája és a Φ definíciója alapján

$$[\psi_r, \varphi_s] = \frac{1}{n^2}\sum_{t\in\mathbb{I}_n}\gamma(t)[\varphi_{t+r}, \varphi_s] = \frac{1}{n^2}\sum_{t\in\mathbb{I}_n}\gamma(t)\Phi(t+r-s).$$

Minthogy $\Phi(-t) = \overline{\Phi}(t)$, azért a szóban forgó skaláris szorzat kifejezhető γ és $\overline{\Phi}$ függvények diszkrét konvolúciójaként:

$$[\psi_r, \varphi_s] = \frac{1}{n}(\gamma \overset{n}{\diamond} \overline{\Phi})(s-r) \quad (r, s \in \mathbb{I}_n).$$

Egyszerűen belátható (lásd pl. a (2.5) és (2.6) összefüggéseket), hogy a $\overline{\Phi}$ függvény k-adik diszkrét Fourier-együtthatójára

$$(\mathcal{F}_n^{\diamond}\overline{\Phi})(k) = (\mathcal{F}_n^{\diamond}\Phi)(-k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

teljesül. Ezt, az (1.16) inverziós formulát és (2.10)-et felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(\gamma \overset{n}{\diamond} \overline{\Phi})(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}_n}\gamma_n^{\diamond}(k)\Phi_n^{\diamond}(-k)\epsilon_k(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}_n}\epsilon_k(t)$$

adódik. Minthogy

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_n}\epsilon_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq 0, \\ n, & \text{ha } t = 0, \end{cases}$$

azért a

$$[\psi_r, \varphi_s] = \delta_{rs} \quad (r, s \in \mathbb{I}_n)$$

bizontítandó állítás valóban fennáll . □

3. Projekciós operátorok

Az X_n altér φ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ bázisára biortogonális ψ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer segítségével az X_n altérre vett $P_n = P_n^{\varphi}$ ***ortogonális projekció*** az alábbi explicit alakban adható meg:

$$P_n^{\varphi}f := \sum_{t\in\mathbb{I}_n}[f, \psi_t]\varphi_t \quad (f \in L_1^1). \tag{3.1}$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$P_n f = f \quad (f \in X_n), \qquad \langle [g - P_n g, h] = 0 \quad (g \in L_1^1, h \in X_n), \tag{3.2}$$

s ez azt jelenti, hogy a $P_n : L_1^1 \to X_n$ operátor valóban projekció. Mivel lináriasan független φ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer esetén az erre biortogonális ψ_t $(t \in \mathbb{I}_n)$ rendszer is lineárisan független, azért a szóban forgó rendszerek az X_n tér egy-egy bázisát alkotják. Elegendő tehát a (3.2) első azonosságát az $f = \varphi_s \in X_n$ $(s \in \mathbb{I}_n)$, a másodikat pedig a $h = \psi_s \in X_n$ $(s \in \mathbb{I}_n)$ függvényekre verifikálni. A biortogonalitást figyelembe véve adódik (3.2):

$$P_n\varphi_s = \sum_{t\in\mathbb{I}_n} [\varphi_s, \psi_t]\varphi_t = \varphi_s,$$

$$[P_n g - g, \psi_s] = \sum_{t\in\mathbb{I}_n} [g, \psi_t][\psi_t, \psi_s] - [g, \psi_s] = [g, \psi_s] - [g, \psi_s] = 0.$$

A P_n projekciós operátor (2.9) felhasználásával felírható olyan alakban, amelyben csak φ_t rendszer szerepel:

$$\begin{aligned} P_n f &= \sum_{s\in\mathbb{I}_n} [f, \psi_s]\varphi_s = \frac{1}{n^2} \sum_{s\in\mathbb{I}_n} \sum_{t\in\mathbb{I}_n} [f, \gamma(t)\varphi_{t+s}]\varphi_s = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{s\in\mathbb{I}_n} \sum_{t\in\mathbb{I}_n} [\overline{\gamma}(t)\tau_{-t} f, \varphi_s]\varphi_s = \frac{1}{n^2} \sum_{s\in\mathbb{I}_n} \Big[\sum_{t\in\mathbb{I}_n} \overline{\gamma}(t)\tau_{-t} f, \varphi_s \Big]\varphi_s. \end{aligned}$$

Vezessük be az

$$(L_n f)(x) := (L_n^\varphi f)(x) := \frac{1}{n^2} \sum_{t\in\mathbb{I}_n} \overline{\gamma(t)} f(x - t) \quad (f \in L_1^1, x \in \mathbb{R}) \tag{3.3}$$

n-edrendű differencia-operátort. Ezzel a P_n operátort felírhatjuk

$$P_n f = \sum_{s\in\mathbb{I}_n} [L_n f, \varphi_s]\varphi_s \quad (f \in L_1^1) \tag{3.4}$$

alakban. Fontosak és jól kezelhetők azok az X_n^φ alterek, amelyek a φ generátora az N_ν B-spline függvényekből dilatációval és periodizálással származtatható:

$$\varphi := \varphi^{n,\nu} = E(\delta_n N_\nu) \quad (n, \nu \in \mathbb{N}^*). \tag{3.7}$$

Ekkor az 1-szerint periodikus φ függvény trigonometrikus Fourier-együtthatói a 2. fejezet (1.5), valamint az 1. fejezet (7) összefüggése alapján kifejezhető az N_ν Fourier-transzformáltjával:

$$(\mathcal{F}^\diamond \varphi^{n,\nu})(k) = \mathcal{F}^\diamond(E(\delta_n N_\nu)(k) = \mathcal{F}(\delta_n N_\nu)(k) = \frac{1}{n}\widehat{N}_\nu\left(\frac{k}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*).$$

Ebben az esetben a $\varphi^{n,\nu}$ függvény $\Phi^{n,\nu}$ autokorrelációs függvényének diszkrét Fourier-együtthatói (2.6) alapján kifejezhetők az N_ν Fourier-transzformáltjával:

$$(\mathcal{F}_n^\diamond \Phi^{n,\nu})(k) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{F}^\diamond \varphi^{n,\nu})(\ell n + k)|^2 = \frac{1}{n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{N}_\nu\Big(\ell + \frac{k}{n}\Big)\Big|^2.$$

Felhasználva az E periodizáló operátort a Φ diszkrét Fourier-együtthatóira

$$(\mathcal{F}_n^\diamond \Phi^{n,\nu})(k) = \frac{1}{n}\Big(E|\widehat{N}_\nu|^2\Big)\Big(\frac{k}{n}\Big) \quad (k\in\mathbb{Z}) \tag{3.8}$$

adódik. Az 1.fejezet (5.17) alapján létezik olyan, csak ν-től függő A_ν konstans, hogy

$$\frac{A_\nu}{n} \leqq (\mathcal{F}_n^\diamond \Phi^{n,\nu})(k) \leqq \frac{1}{n} \quad (n,\nu\in\mathbb{N}^*). \tag{3.9}$$

Az 1.Tétel alapján adódik, hogy a $\varphi_s^{n,\nu} := \tau_s\varphi^{n,\nu}$ $(s\in\mathbb{I}_n)$ rendszerek lineárisan függetlenek és az általuk kifeszített $X_n := X_n^{\varphi^{n,\nu}}$ altérre való projekció operátora a (3.3) alatt értelmezett L_n operátorral előállítható (3.4) alakban. A (3.3)-ban előforduló γ függvény a diszkrét inverziós formula alpján előállítható

$$\gamma(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}_n} \gamma_n^\diamond(k)\epsilon_k(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}_n} \frac{1}{(\mathcal{F}_n^\diamond \Phi^{n,\nu})(k)}\epsilon_k(t) \quad (t\in\mathbb{I}_n)$$

alakban. Innen (3.9) figyelembevételével a

$$|\gamma(t)| \leqq \frac{n^2}{A_\nu^2} \quad (t\in\mathbb{I}_n)$$

becslés adódik. Ennek alapján az $L_n^\nu := L_n^{\varphi^{n,\nu}}$ differencia operátor normájára fennáll az

$$\|L_n^\nu f\| \leqq \frac{\|f\|}{n^2}\sum_{t\in\mathbb{I}_n}|\gamma(t)| \leqq \frac{n}{A_\nu^2}\|f\| \tag{3.10}$$

becslés.

A

$$P_n^\nu f := \sum_{t\in\mathbb{I}_n}[L_n^\nu f, \varphi_t^{n,\nu}]\varphi_t^{n,\nu} \quad (f\in L_1^1) \tag{3.11}$$

projekciós operátorok számos térben (n-re vonatkozóan) egyenletesen korlátosak. A P_n^ν operátor L_2^2 normájára $P_n f$ és $f - P_n f$ ortogonalitása alapján

$$\|P_n^\nu f\|_2^2 \leqq \|P_n^\nu f\|_2^2 + \|f - P_n^\nu f\|_2^2 = \|f\|_2^2, \quad \text{azaz} \quad \|P_n^\nu f\|_2 \leqq \|f\|_2 \quad (f\in L_2^2).$$

A $P_n^\nu f$ maximum normájára vonatkozik t a következő állítás.

3.Tétel. *A (3.7) alatt értelmezett B-spline függvényekből kiindulva képezzük az $X_n := X_n^{\varphi^{n,\nu}}$ alterket és jelölje $P_n^\nu : C_1 \to X_n$ az ortogonális projekciót a $[\cdot,\cdot]$ skaláris szorzatot véve alapul. Ekkor*

$$\|P_n^\nu f\| \leqq \frac{1}{A_\nu^2}\|f\| \quad (f \in C_1, n \in \mathbb{N}^*), \tag{3.12}$$

ahol A_ν egy csak ν-től függő konstans.

Bizonyítás. A (3.11) definíció alapján

$$\|P_n f\| \leqq \max_{s\in\mathbb{I}_n} |[L_n f, \varphi_s^{n,\nu}]| \Big\| \sum_{s\in\mathbb{I}_n} |\varphi_s^{n,\nu}| \Big\| \leqq \|L_n f\| \|\varphi^{n,\nu}\|_{L_1^1} \Big\| \sum_{s\in\mathbb{I}_n} |\varphi_s^{n,\nu}| \Big\|. \tag{3.13}$$

Minthogy (lásd ...)

$$N_\nu(t) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} N_\nu(t)\,dt = 1, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} N_\nu(t+k) = 1 \quad (s \in \mathbb{R}),$$

azért a $\varphi^{n,\nu} = E(\delta_n N_\nu)$ függvényre

$$\begin{aligned}
&\|\varphi^{n,\nu}\|_{L_1^1} = \int_{\mathbb{R}} (\delta_n N_\nu)(s)\,ds = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} N_\nu(s)\,ds = \frac{1}{n},\\
&\sum_{s\in\mathbb{I}_n} |\varphi_s^{n,\nu}(t)| = \sum_{s\in\mathbb{I}_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_\nu(n(t+s+k) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_\nu(nt+\ell+kn) =\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} N_\nu(nt+j) = 1
\end{aligned}$$

Ennek alapján (3.13)-ból (3.10) figyelembevételével a

$$\|P_n^\nu f\| \leqq \frac{1}{A_\nu^2}\|f\|$$

bizonyítandó állítást kapjuk. □

3. Gábor waveletek

1. Bevezetés

Az 1.fejezetben olyan ortonormált rendszerekkel foglalkoztunk, amelyek valamely függvényvből kiindulva transzlációval és dilatációval származtathatók. Mivel ezekben a konstrukciókba az argumentum affin transzformációit használjuk, szokás a szóban forgó ortonormált rendszereket ***affin waveleteknek*** nevezni. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy valamely függvényből ***transzlációval és modulációval*** képzett rendszer mikor lesz ortonormalt, ill. mikor létezik egy erre biortogonális rendszer. Az $\phi \in X := L^2(\mathbb{R})$, $\|\phi\|_2 = 1$ függvényből kiindulva képezzük a

$$\phi_k^n(x) := \phi(x-k)\epsilon_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

függvényeket. Az ilyen alakú ortonormált rendszereket ***Gábor-waveleteknek*** szokás nevezni.

Az elnevezés ***Gábor Dénes*** [] munkájával van kapcsolatban, ahol bevezette az ún. ***ablakos Fourier-transzformációt.*** Nevezetesen az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény helyett a ϕ eltóltjaival súlyozott f függvény Fourier-transzformáltját vizsgálta. Az így értelmezett

$$(\mathcal{G}_\phi f)(s,t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi}(x-s)\overline{\epsilon}_t(x)\,dx \qquad ((s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

leképezést, amely az egyváltozós f függvényhez a kétváltozós $\mathcal{G}_\phi f$ függvént rendeli ***Gábor-transzformációnak*** nevezük. Kompakt tartóju vagy a végtelenben gyorsan nullához tartó ϕ függvény (más szóval ablak) alkalmazásával az integrál numerikusan jobban kezelhetővé válik, mint a Fourier-transzformáció esetében. Gábor Dénes az [] dolgozatban a $\phi(x) := \exp(-x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ Gauss-ablakot alkalmazta.

Felvetődik a kérdés, hogy az f függvény Gábor-transzformáltjának a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pontrácson felvett értékeiből rekonstruálható-e? Mivel ezek az értékek

$$(\mathcal{G}_\phi f)(k,n) = \langle f, \phi_k^n \rangle \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

alapján az (1.1) rendszer szerinti Fourier-együtthatókkal egyenlők, ezért erre a kérdésre a válasz jól ismert, ha pl. az (1.1) alatt bevezetett rendszer ortonormált. Ez a háttere annak, hogy az (1.1) alakú ortonormált rendszereket Gábor-waveleteknek nevezik.

Az (1.2) transzformáció szoros kapcsolatban áll a kvantumfizikában alapvető szerepet játszó ***Heisenberg-féle csoporttal.*** Erre a kapcsolatra utalva szokták a szóban forgó rendszereket ***Heisenberg-féle waveleteknek*** is nevezni.

Az affin waveletek konstrukciójában alapvető szerepet játszott a Fourier-transzformáció. A Gábor-waveletek konstrukciójának egyik alapvető eszköze az ún. ***Zak-transzformáció,*** amelyet a második pontban vezetünk be. Ugyanebben a pontban leírjuk a Zak-transzformáció tulajdonságait, foglalkozunk az unicitás és az invertálás kérdésével, valamint a transzformáció unitér kiterjesztésével.

A 3.pontban bevezetünk egy konvolúciót, amely hasonló kapcsolatban áll a Zak-transzformálttal, mint az előző fejezetben használt konvolúciók a megfelelő Fourier-transzformálttal.

A 4. pontban a Zak-transzformáció segítségével Gábor-waveleteket és Gábor-frameket konstruálunk.

2. A Zak-transzformáció

Ebben a pontban bevezetjük a ***Zak-transzformációt,*** amelynek számos alkalmazása van mind elméleti mind gyakorlati vonatkozásban. A transzformáció szisztematikusan először ***J. Zak*** alkalmazta szilárdtest-fizikai vizsgálataiban [13]. A szóban forgó transzformációt , amelyet ***Weil-Brezin-leképezésnek*** is nevezik, már Gauss-nál is előfordult. További részleteket és témakör tórténetét illetően a [16] dolgozatra utalunk.

Ebben a pontban célszerű az $\mathbb{R}$ számegyenest az $\mathbb{I} \times \mathbb{Z}$, ill. a $\mathbb{Z} \times \mathbb{I}$ Descartes-szorzatokkal azonosítani, kiindulva a

$$\mathbb{I} \times \mathbb{Z} \ni (t, k) \to t + k \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \ \ \mathbb{Z} \times \mathbb{I} \ni (k, t) \to k + t \in \mathbb{R}$$

kölcsönösen egyértelmű leképezésekből.

Ezzel a megfeleltetéssel összhangban a $g : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ függvény azonosítható a

$$(\tau_k \chi g)(t) \ \ \big((k, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{I}\big), \ \ \text{ill.} \ \ (\tau_k \chi g)(t) \ \ \big((t, k) \in \mathbb{I} \times \mathbb{Z}\big)$$

függvényekkel, ahol $\chi := \chi_{\mathbb{I}}$ az $\mathbb{I}$ intervallum karakterisztikus függvénye. Ezeket az azonosításokat és az $L^{pq}(\mathbb{I}, \mathbb{Z})$, $L^{pq}(\mathbb{Z}, \mathbb{I})$ kevert normájú tereket felhasználva bevezetjük az $\mathbb{R}$-en értelmezett függvények körében az ezeknek megfelelő $L^{pq}(\mathbb{R})$ és $L^{\langle pq\rangle}(\mathbb{R})$ tereket.

Például $p, q \in \{1, \infty\}$, $p \neq q$ esetben ezzel az eljárással négy különböző normát definiálhatunk az $\mathbb{R}$-en értelmezett függvények körében:

$$\|g\|_{1\infty} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\chi\tau_k g\|_1, \qquad \|g\|_{\infty 1} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\chi\tau_k g\|_\infty,$$
$$\|g\|_{\langle 1\infty\rangle} := \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\chi\tau_k g|\,\|_\infty, \quad \|g\|_{\langle\infty 1\rangle} := \|\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\chi\tau_k g|\,\|_1,$$

ahol $\|\cdot\|_p$ az $L^p(\mathbb{I})$ normát jelöli.

Könnyen igazolható, hogy

$$\|g\|_{1\infty} \leqq \|g\|_{\langle\infty 1\rangle} \leqq \|g\|_{11} = \|g\|_1 \leqq \|g\|_{\langle 1\infty\rangle} \leqq \|g\|_{\infty 1}. \tag{2.1}$$

Az itt bevezetett $L^{pq}(\mathbb{R})$ tereket ***amalgan-***, vagy ***Wiener-tereknek*** is nevezik, és gyakran a $W(L^p, L^q)$ szimbólummal jelölik. Ezeket a tereket a $p = \infty$, $q = 1$ speciális estben Wiener vezette be (lásd Feichtinger [4]).

Tetszőleges $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvényre vezessük be a

$$(\mathcal{Z}f)(t,s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)u_k(s) \qquad (t, s \in \mathbb{F}) \tag{2.2}$$

kétváltozós függvényt. Mivel minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} |f(t+k)|\,dt = \|f\|_1 < \infty$$

azért a (2.2) sor minden $s \in \mathbb{R}$ és m.m. $t \in \mathbb{R}$ esetén konvergens. Ezen túlmenően könnyen igazolható, hogy $\mathcal{Z} : L^1(\mathbb{R}) \to L^{1\infty}(\mathbb{I}^2)$ korlátos lineáris operátor és

$$\|\mathcal{Z}f\|_{L^{1\infty}(\mathbb{I}^2)} \leqq \|f\|_1. \tag{2.3}$$

A $\mathcal{Z}f$ értékeit az $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ négyzeten felvett értékei egyértelműen meghatározzák. Valóban, minthogy $\epsilon_k(s+m) = \epsilon_k(s)$, ha $s \in \mathbb{R}$ és $k, m \in \mathbb{Z}$, azért

$$(\mathcal{Z}f)(t, s+m) = (\mathcal{Z}f)(t,s) \qquad (s, t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}).$$

Az első változót az $n \in \mathbb{Z}$ számmal eltólva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}f)(t+n, s) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+n+k)\epsilon_k(s) = \overline{\epsilon}_n(s) \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+n+k)\epsilon_{n+k}(s)\\ &= \overline{\epsilon}_n(s) \sum_{\ell\in\mathbb{F}^\sharp} f(t+\ell)\epsilon_\ell(s) = \overline{\epsilon}_n(s)(\mathcal{Z}f)(t,s).\end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy minden $t, s \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(2.4)\qquad (\mathcal{Z}f)(t, s+m) = (\mathcal{Z}f)(t,s), \quad (\mathcal{Z}f)(t+n, s) = \overline{\epsilon}_n(s)(\mathcal{Z}f)(t,s).$$

Ennek alapján a $\mathcal{Z}f$ függvényeket az $\mathbb{I}^2$ intervallumokon vizsgáljuk.

A $\mathcal{Z}$ transzformáció természetes módon kiterjeszthető az $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ térre. Valóban minthogy $f \in L^2(\mathbb{R})$ esetén

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} |f(t+k)|^2\, dt = \|f\|_2^2 < \infty,$$

azért

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+k)|^2 < \infty$$

m.m $t \in \mathbb{I}$ pontban. Az $(\epsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ rendszer ortonormált az $L^2(\mathbb{I})$ Hilbert-térben. Innen következik, hogy (2.2) sor minden ilyen $t \in \mathbb{I}$ pont esetén $L^2(\mathbb{I})$-normában konvergens. Mivel minden L^2-normában konvergens sorozatnak van egy m.m. konvergens részsorozata, azért a (2.2) sor m.m. konvergincia és a norma konvergencia értelmében vett összege az $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ függvények esetén ugyanaz. Ezzel összhangban a (2.2) sor $L^2(\mathbb{I})$-normában vett összegét is az $\mathcal{Z}f$ szimbólummal jelöltük. Ezzel a $\mathcal{Z}f$ leképezést kiterjesztettük az $L^1(\mathbb{F}) \cup L^2(\mathbb{F})$ térre.

A $\mathcal{Z}$ transzformáció unitér az $L^2(\mathbb{F})$ térben. Valóban a Parseval-formula alapján

$$\|(\mathcal{Z}f)(t, \cdot)\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+k)|^2$$

m.m. $t \in \mathbb{I}$ pontban. Következésképpen minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre

$$\|\mathcal{Z}f\|_2 = \|f\|_2.$$

A most értelmezet $\mathcal{Z}$ leképezést ***Zak-transzformációnak*** nevezzük. Az alábbi állításban összefoglaljuk a Zak-transzformáció legfontosabb tulajdonságait.

1. Tétel. *A $\mathcal{Z}$ Zak-transzformáció*

i) korlátos, lineáris és injektív leképezés az $L^1(\mathbb{R})$ térből az $L^{1\infty}(\mathbb{I}^2)$ térbe, amelyre

$$(2.5)\qquad \|\mathcal{Z}f\|_{1\infty} \leqq \|f\|_1,$$

teljesül.

ii) A $\mathcal{Z}$ operátor egy bijekció az $L^2(\mathbb{F})$ és $L^2(\mathbb{I}^2)$ Hilbert-terek között, továbbá

$$(2.6)\qquad \langle \mathcal{Z}f, \mathcal{Z}g\rangle = \langle f, g\rangle \qquad (f, g \in L^2(\mathbb{R})),$$

ahol (2.6) jobb oldalán álló szinbólum az $L^2(\mathbb{I}^2)$ Hilbert-tér skaláris szorzatát jelöli.

Bizonyítás. Az állítás i) részét — az injektivitás kivételével — már bebizonyítottuk. Az injektivitás igazolásához tegyük fel, hogy valamely $f \in L^1(\mathbb{F})$ függvényre $\mathcal{Z}f = 0$. Mivel a (2.2) sor m.m. $t \in \mathbb{I}$ esetén az s változóban egyenletesen konvergens, továbbá az $(\epsilon_k, k \in \mathbb{Z})$ rendszer ortonormált, azért

$$0 = \langle (\mathcal{Z}f)(t,\cdot), u_k \rangle = f(t+k)$$

minden $k \in \mathbb{Z}$ és m.m. $t \in \mathbb{I}$ esetén. Következésképpen $f = 0$ majdnem mindenütt az $\mathbb{R}$-en.

Az állítás ii) részének igazolásához induljunk ki az m.m. $t \in \mathbb{I}$ pontban fennálló

$$\int_{\mathbb{I}} (\mathcal{Z}f)(t,s)(\overline{\mathcal{Z}}g(t,s))\,ds = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)\overline{g}(t+k),$$

amely az $(\epsilon_k, k \in \mathbb{Z})$ ortonormált tulajdonságából következik. A t változó szerint integrálva

$$\langle \mathcal{Z}f, \mathcal{Z}g \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} f(t+k)\overline{g}(t+k)\,dt$$

a (2.6) bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

Most mutassuk meg, hogy $\mathcal{Z}$ az $L^2(\mathbb{R})$ teret az $L^2(\mathbb{I}^2)$-térre képezi. Legyen $F \in L^2(\mathbb{I}^2)$ és jelölje $\tilde{I}$ azoknak a $t \in \mathbb{I}$ pontoknak a halmazát, amelyekre $F(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{I})$. Az $F \in L^2(\mathbb{I}^2)$ feltételből következik, hogy a $\tilde{I}$ halmaz mértéke 1. Az $F(t,\cdot)$ függvény minden $t \in \tilde{I}$ esetén előállítható az alábbi, $L^2(\mathbb{I})$-normában konvergens sor összegeként:

$$F(t,\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(t)\epsilon_k,$$

ahol

$$c_k(t) := \int_{\mathbb{I}} F(t,s)\overline{u}_k(s)\,ds \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Értelmezzük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt a következőképpen:

$$f(t+k) := c_k(t) \qquad (t \in \tilde{I}, k \in \mathbb{Z})$$

és legyen $f = 0$ különben. A Parseval-formula alapján

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{F}} |f(s)|^2\,ds &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} |f(t+k)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} |c_k(t)|^2\,dt \\ &= \int_{\mathbb{I}}\int_{\mathbb{I}} |F(t,s)|^2\,dsdt = \|F\|_2^2 < \infty.\end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy $f \in L^2(\mathbb{R})$ és a f értelmezése alapján

$$(\mathcal{Z}f)(t,\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)\epsilon_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(t)\epsilon_k = F(t,\cdot)$$

minden $t \in \tilde{I}$ pontban, ahol a fenti sor $L^2(\mathbb{I})$-normában konvergens. Következésképpen $\mathcal{Z}f = F$ és ezzel atételt igazoltuk. $\square$

3. Konvolúció

Ebben a pontban bevezetünk egy konvolúciót, amely hasonló kapcsolatban áll a Zak-transzformálttal mint a szokásos konvolúció a Fourier-transzformálttal. Tetszőleges $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $g \in L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{R})$ függvényekre vezessük be az

$$(f \odot g)(t+n) := \sum_{k\in\mathbb{F}^\sharp} f(t+k)g(t+n-k) \qquad (t \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}).$$

Megmutatjuk, hogy az f és g függvényekre tett feltételekből következik, hogy a szóban forgó sor m.m. $t \in \mathbb{I}$ pontban abszolut konvergens. Valóban, mivel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} |f(t+k)g(t+n-k)|\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |(\chi\tau_k f)(t)|\,|(\chi\tau_{n-k} g)(t)|\,dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\chi\tau_k f)(t)|\right)\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |(\chi\tau_\ell g)(t)|\right) dt.$$

Innen a $\|\cdot\|_{\langle 1\infty\rangle}$ norma értelmezése alapján a $g \in L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{R})$ feltételből következik, hogy $f \odot g \in L^1(\mathbb{F})$, további

$$\|f \odot g\|_1 \leqq \|g\|_{\langle 1\infty\rangle} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\chi\tau_k f|\right) = \|g\|_{\langle 1\infty\rangle}\|f\|_1.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $g \in L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{R})$ esetén az $f \to f \odot g$ leképezés olyan korlátos lineáris operátor, amely az $L^1(\mathbb{R})$ teret az $L^1(\mathbb{R})$ térbe képezi. A szóban forgó operátor normája a $\|g\|_{\langle 1\infty\rangle}$ számmal becsülhető.

Hasonló meggondolással adódik, hogy

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+k)g(t+n-k)| < \infty \tag{3.1}$$

m.m. $t \in \mathbb{I}$ pontban. Ezt felhasználva igazoljuk a szokásos konvolúció és a Fourier-transzformáció kapcsolatára vonatkozó állítás alábbi analogonját.

2.Tétel. *Ha* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *és* $g \in L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{R})$, *akkor* $f \odot g \in L^1(\mathbb{F})$ *továbbá*

$$\mathcal{Z}(f \odot g) = \mathcal{Z}f\,\mathcal{Z}g. \tag{3.2}$$

Bizonyítás. Minthogy (1.x) alapján $L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{F}) \subset L^1(\mathbb{F})$, azért az () Zak-transzformált létezik. Legyen $t \in \mathbb{I}$ egy olyan pont, amelyben (..) teljesül és $s \in \mathbb{I}$ tetszőleges pont. Ekkor az $\mathcal{Z}$ értelmezése alapján

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}(f \odot g))(t,s) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \odot g)(t+n)\epsilon_n(s)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)g(t+n-k)\epsilon_n(s)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)\epsilon_k(s)\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(t+n-k)\epsilon_{n-k}(s)\\ &= (\mathcal{Z}f)(t,s)(\mathcal{Z}g)(t,s).\end{aligned}$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

Könnyen igazolható, hogy a $\odot$ konvolúció kommutatív, azaz $f \in L^1(\mathbb{F})$ és $g \in L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{F})$ esetén

$$f \odot g = g \odot f.$$

A fent említett megjegyzés szerint tehát $\odot$ egy kommutatív bilineáris leképezés továbbá minden rögzített $g \in L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{R})$ esetén az $f \to g \odot f$ leképezés az $L^1(\mathbb{R})$ teret önmagába képező korlátos lineáris operátor.

Ha g függvényről az elöbbieknél többet teszünk fel, nevezetesen ha $g \in L^{\infty 1}(\mathbb{R})$ $(\subset L^{\langle 1\infty\rangle}(\mathbb{R}))$, akkor az $f \to g \odot f$ leképezés korlátos az $L^p(\mathbb{R})$ téren, amelyre

$$\|f \odot g\|_p \leqq \|f\|_p \|g\|_{\infty 1} \qquad (1 \leqq p \leqq \infty). \tag{3.3}$$

Valóban, a konvolúció kommutativitása és az általánosított Minkowski egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
\|g \odot f\|_p = \|f \odot g\|_p &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\tau_k g)(t)(\tau_{n-k} f)(t)\ \Big|^p \, dt \right)^{1/p} \\
&\leqq \sum_{k\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{I}} \left(\sum_{n\in\mathbb{R}} |(\tau_k g)(t)(\tau_{n-k} f)(t)|^p \right) dt \right)^{1/p} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{I}} |(\tau_k g)(t)|^p \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |(\tau_\ell f)(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \\
&\leqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|(\chi\tau_k g)(t)\|_\infty \left(\int_{\mathbb{I}} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |(\tau_\ell f)(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \\
&= \|g\|_{\infty 1} \|f\|_p .
\end{aligned}$$

Ezzel a (3.3) egyenlőtlenséget igazoltuk.

A 2.Tétel akkor is fennáll, ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ és $g \in L^{\infty 1}(\mathbb{R})$. Valóba, minthogy minden $g \in L^{\infty 1}(\mathbb{F})$ függvényre (2.1) alapján

$$\|\mathcal{Z}g\|_\infty \leqq \|g\|_{\infty 1},$$

következésképpen a

$$f \to \mathcal{Z}(f \odot g) \quad \text{and} \quad f \to (\mathcal{Z}f)(\mathcal{Z}g)$$

leképezések $L^2(\mathbb{R})$-ből $L^2(\mathbb{R})$-be korlátosak.

Ezek az operátorok (3.2) alapjan ezek az $L^2(\mathbb{R})$ térben mindenütt sűrű $L^1(\mathbb{F}) \cap L^2(\mathbb{F})$ halmazon megegyeznek, azért az egész $L^2(\mathbb{R})$ téren is azonosak, következésképpen (3.3) minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ és $g \in L^{\infty 1}(\mathbb{R})$ esetén fennáll.

4. Gábor waveletek konstrukciója

Az első fejezetben az affin waveleteket a Fourier-transzformáció segítségével szerkesztettük. Ebben a ponban a Zak-transzformáció segítségével ***Gábor-waveleteket és Gábor-frameket konstruálunk.*** A $\mathcal{Z}$ leképezéssel az $L^2(\mathbb{R})$ téren megfogalmazott feltételeket átírhatjuk $L^2(\mathbb{I}^2)$-beli feltételekké.

A következő állításban megfogalmazott egyenlőség képezi az alapját az említett konstrukcióknak. Ezzel az (1.1) rendszer szerinti Fourier-együtthatók az

$$(\epsilon_m \otimes \epsilon_n)(s,t) := \epsilon_m(s)\epsilon_n(t) \quad ((s,t) \in \mathbb{I}^2,\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$$

a kétváltozós trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-együtthatókba transzformálhatók.

3.Tétel. *Legyen* $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. *Ekkor a*

$$\phi_{mn}(x) := \epsilon_m(x)\phi(x-n) \qquad (x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z})$$

rendszerre

$$\mathcal{Z}\phi_{mn} = \epsilon_m \otimes \epsilon_n \, \mathcal{Z}\phi. \tag{4.1}$$

Speciálisan minden $m, n \in \mathbb{Z}$ *és* $f, \phi \in L^2(\mathbb{R})$ *esetén*

$$\langle f, \phi_{mn} \rangle = \left\langle \mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi, \epsilon_m \otimes \epsilon_n \right\rangle$$

Bizonyítás. Minthogy minden $n, k \in \mathbb{Z}$ indexpárra $\epsilon_n(k) = 1$, azért a $\mathcal{Z}$ leképezés értelmezése alapján minden $s, t \in \mathbb{I}$ pontban

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}\phi_{mn})(t,s) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_m(t+k)\phi(t+k-n)\epsilon_k(s) \\ &= \epsilon_m(t)\epsilon_n(s)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(t+k-n)\epsilon_{k-n}(s) \\ &= \epsilon_m(t)\epsilon_n(s)\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \epsilon(t+\ell)\epsilon_\ell(s) = \epsilon_m(t)\epsilon_n(s)(\mathcal{Z}\phi)(t,s)\end{aligned}$$

Ezzel a (4.1) egyenlőséget igazoltuk. Mivel a $\mathcal{Z}$ operátor unitér, azért

$$\langle f, \phi_{mn} \rangle = \langle \mathcal{Z}f, \mathcal{Z}\phi_{mn} \rangle = \left\langle \mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi, \epsilon_m \otimes \epsilon_n \right\rangle. \tag{4.2}$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

Mivel a $\mathcal{Z}$ leképezés unitér és bijekt´ iv, azért teljes rendszert teljes rendszerbe visz át. Ismeretes, hogy az $(\epsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ rendszer teljes az $L^2(\mathbb{I})$ térben, az $(\epsilon_m \otimes \epsilon_n, (m,n) \in \mathcal{Z}^2)$ kétváltozós trigonometrikus rendszer pedig teljes az $L^2(\mathbb{I}^2)$ térben. Ezeket felhasználva szükséges és elégséges feltételt adhatunk az (1.1) rendszer teljességére vonatkozóan.

1.Következmény. *A* $(\phi_{mn}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$ *rendszer akkor és csak akkor teljes az* $L^2(\mathbb{R})$ *térben, ha*

$$|\mathcal{Z}\phi| > 0 \qquad \textit{majdnem mindenütt az } \mathbb{I}^2 \textit{ intervallumon.} \tag{4.3}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy fennáll (4.2), és mutassuk meg, hogy a (ϕ_{mn} $((m,n) \in \mathbb{Z}^2)$ rendszer teljes . Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$ olyan függvény, amelynek a $(\phi_{mn}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$ rendszer szerint vett valamennyi Fourier-együtthatója 0. Ekkor (4.2) alapján a $\mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi \in L^2(\mathbb{I}^2)$ függvénynek a kétváltozós Fourier-együtthatói 0-val egyenlők, következésképpen a rendszer teljessége miatt $\mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi = 0$ m.m., ahonnan (4.3) alapján adódik, hogy $\mathcal{Z}f = 0$ m.m. Mivel $\mathcal{Z}$ unitér bijekció , azért $f = 0$ m.m.

Megfordítva tegyük fel, hogy a

$$H := \{(s,t) \in \mathbb{I}^2 \big| \ (\mathcal{Z}\phi)(s,t) = 0\}$$

halmaz mértéke pozitív. Legyen $f_0 \in L^2(\mathbb{R})$ az a függvény, amelynek Zak-transzformáltjára

$$\mathcal{Z}f_0 = \chi_H$$

teljesül. Ekkor (4.3) alapján minden $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ indexpárra

$$\langle f_0, \phi_{mn}\rangle = \left\langle \mathcal{Z}f_0\overline{\mathcal{Z}}\phi, \epsilon_m \otimes \epsilon_n \right\rangle = \left\langle \chi_H\overline{\mathcal{Z}}\phi, \epsilon_m \otimes \epsilon_n \right\rangle = 0,$$

következésképpen a szóban forgó rendszer nem teljes. □

Visszatérve a bevezetőben felvetett kérdésre azt vizsgáljuk, hogy milyen ϕ függvény esetén lehet a Gábor-transzformált

$$(\mathcal{G}_\phi f)(m,n) = \langle f, \phi_{mn}\rangle \quad ((m,n) \in \mathbb{Z}^2) \tag{4.4}$$

diszkrét értékeiből az f függggvényt rekonstruálni. Ezzel kapcsolatban általános feltételek adhatók a ***keret*** (angolul:***frame***) fogalmának felhasználásával. Emlékeztetve az ezzel kapcsolatos fogalmakra legyen $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ egy Hilbert-tér és $f_n \in X$ $(n \in \mathcal{N})$ egy megszámláltató vektorrendszer. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n,\ n \in \mathcal{N})$ rendszer ***keretet alkot***, ha ha léteznek olyan $0 < A \leqq B < \infty$ állandók, hogy minden $f \in X$ elemre

$$A\|f\|_X \leqq \Big(\sum_{n\in\mathcal{N}} |\langle f, f_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \leqq B\|f\|_X \tag{4.5}$$

teljesül. A (4.5) feltételben szereplő A számok felső határát ***alsó-***, a B számok alsó határát ***felső keret állandónak***, az $\langle f, f_n\rangle$ $(n \in \mathcal{N})$ számokat az f vektor ***keretegyütthatóinak*** nevezzük. Ismeretes, hogy bármely keret teljes rendszert alkot, továbbá minden vektor keretegyütthatóiból rekonstruálható. Bebizonyítható (lásd a Függeléket), hogy minden $F = (f_n, n \in \mathcal{N})$ kerethez létezik olyan $F' = (f'_n, n \in \mathcal{N})$ keret, amellyel bármely $f \in X$ vektor előállítható az alábbi, $\|\cdot\|_X$-normában konvergens végtelen sor összegeként:

$$f = \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle f, f_n\rangle f'_n. \tag{4.6}$$

Az F' keretet az F ***keret inverzének***, a (4.6) sort az f vektor (F, F') rendszerek szerinti ***keretsorfejtésének*** nevezzük. (a fogalmakat illetően lásd a Függeléket.)

A Zak-transzformáció segítségével jellemezhetők azok az (1.1) alakú rendszerek, amelyek keretet alkotnak. Ezzel kapcsolatos az alábbi

4.Tétel. *A*

$$\Phi = (\epsilon_m \tau_{-n}\phi, (m, n) \in \mathbb{Z}^2)$$

rendszer akkor és csak akkor alkot kerete az $0 < A \leqq B < \infty$ *keret állandókkal, ha a* ϕ *függvény* Z*-transzformjára az* $\mathbb{I}^2$ *m.m. pontjában*

$$A \leqq |\mathcal{Z}\phi| \leqq B \tag{4.7}$$

teljesül .

Bizonyítás. Az állítás igazolásához felhasználjuk azt a tényt, hogy a $\mathcal{Z} : L^2(\mathbb{F}) \to L^2(\mathbb{I}^2)$ bijekció unitér, továbbá

$$\mathcal{Z}(\epsilon_m \tau_{-n}\phi) = \epsilon_m \otimes \epsilon_n \mathcal{Z}\phi.$$

Mivel az $(\epsilon_m \otimes \epsilon_n, (m, n) \in \mathbb{Z})$ rendszer teljes az $L^2(\mathbb{I}^2)$ térben, azért a keret értelmezésében szereplő kifejezés felírható

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, \phi_{mn} \rangle \right|^2 &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}} \left| \langle \mathcal{Z}f, \mathcal{Z}\phi_{mn} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle \mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi, \epsilon_m \otimes \epsilon_n \right\rangle \right|^2 = \|\mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi\|_2^2.\end{aligned}$$

Innen következik, hogy a Φ rendszer akkor és csak keret az $0 < A \leqq B < \infty$ keret állandókkal, ha minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre

$$A\|f\|_2 \leqq \|\mathcal{Z}f\overline{\mathcal{Z}}\phi\|_2 \leqq B\|f\|_2 \tag{4.8}$$

teljesül.

A tétel igazolásához először induljunk ki abból, hogy fennáll a (4.7) egyenlőtlenség. A (4.7) egyenlőtlenséget $|\mathcal{Z}f|$-fel szorozva és véve az $L^2(\mathbb{I}^2)$-nornát, a $\|\mathcal{Z}f\|_2 = \|f\|_2$ egyenlőség figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$A\|f\|_2 \leqq \Big(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, \phi_{mn} \rangle \right|^2 \Big)^{1/2} \leqq B\|f\|_2.$$

Ezzel megmutattuk, hogy a Φ rendszer valóban keret az A és B keretállandókkal.

Megfordítva tegyük fel, hogy Φ keret, következésképpen minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre fennáll a (4.8) egyenlőtlenség. Értelmezzük az f függvény $F := \mathcal{Z}f$ Zak-transzformáltjával:

$$F := \mathcal{Z}f =: 2^n \chi_{I_n(t)} \otimes \chi_{I_n(s)},$$

ahol $(t, s) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont, $n \in \mathbb{N}$ és $I_n(s)$ a 2^{-n} hosszúságú, s-et tartalmazó diadikus intervallumot jelöli. Mivel $\|F\|_2 = \|f\|_2 = 1$, (4.8) alapján azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $(t, s) \in \mathbb{I}^2$ esetén fennáll az

$$A^2 \leqq 2^{2n} \int_{I_n(t)\times I_n(s)} \big| \, \mathcal{Z}\phi(u, v) \, \big|^2 \, du \, dv \leqq B^2$$

egyenlőtlenség. Innen $n \to \infty$ határátmenettel az integrálfüggvént differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján (4.7) következik. $\square$

Könnyű megmutatni, hogy ha a ϕ függvény Zak-transzformáltja eleget tesz a (4.8) feltételnek, akkor van Φ' (1.1) alakú rendszer, amely biortogonális a Φ-re. Valóban értelmezzük a $\phi' \in L^2(\mathbb{R})$ Zak-transzformáltja segítségével:

$$\mathcal{Z}\phi' := \frac{1}{\overline{\mathcal{Z}\phi}}, \tag{4.9}$$

és ezzel vezessük be a

$$\phi'_{mn} := \epsilon_m \tau_n \phi \quad ((m, n) \in \mathbb{Z}^2) \tag{4.10}$$

rendszert.

Minthogy $\mathcal{Z}$ leképezés bijekció az $L^2(\mathbb{R})$ és $L^2(\mathbb{I}^2)$ terek között, azért a (4.9) feltétel egyértelműen meghatározza az $L^2(\mathbb{R})$-beli ϕ' függvényt. A $\mathcal{Z} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{I}^2)$ leképezés unitér, következésképpen a 3.Tétel alapján bármely (m_1, n_1), $(m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ esetén

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi_{m_1,n_1}, \phi'_{m_2,n_2} \right\rangle &= \left\langle \mathcal{Z}\phi_{m_1,n_1}, \mathcal{Z}\phi'_{m_2,n_2} \right\rangle \\
&= \langle \epsilon_{n_1} \otimes \epsilon_{m_1} \mathcal{Z}\phi, \epsilon_{m_2} \otimes \epsilon_{n_2} \mathcal{Z}\phi' \rangle \\
&= \langle \epsilon_{m_1} \otimes \epsilon_{n_1}, \epsilon_{m_2} \otimes \epsilon_{n_2} \rangle = \delta_{(m_1,n_1),(m_2,n_2)}
\end{aligned}$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\Phi' := (\phi'_{mn}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2)$ és Φ rendszerek biortogonálisak.

Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást.

5.Tétel. *Tegyük fel, hogy a Φ rendszer keretet alkot. Ekkor a (4.9) és (4.10) alapján értelmezett Φ' rendszer is keretet alkot, amely biortogonális a Φ-re. Minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvény a*

$$f = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \langle f, \phi_{m,n} \rangle \, \phi'_{m,n} \tag{4.11}$$

biortogonális sorfejtés segítségével rekonstruálható az f keret-együtthatóibol.

Megmutatható, hogy a (4.7) feltétlnek eleget tevő ϕ függvényből származtatott Φ rendszer ***egzakt keret.***, amelynek a Φ' rendszer az inverz kerete, következésképpen (4.11) az f keret sorfejtése. Speciálisan a $\Phi = \Phi'$ esetben adódik az

2.Következmény. *A $(\psi_{mn} = \epsilon_m \tau_{-n} \psi, (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$ keret akkor és csak akkor alkot ortonormált rendszert, ha m.m. $\mathbb{I}^2$ pontban*

$$\mid \mathcal{Z}\psi \mid = 1$$

teljesül. Speciálisan ha a ϕ függvény eleget tesz a (4.7) feltételnek, akkor

$$\mathcal{Z}\psi := \frac{\mathcal{Z}\phi}{|\mathcal{Z}\phi|}$$

alapján értelmezett $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ függvényvből képzett $(\psi_{mn}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$ (1.1) alakú rendszer ortonormált.

Megjegyezzük, az

$$\phi^b_{mn}(x) := \epsilon_m(b \cdot x)\phi(x-n) \qquad (x \in \mathbb{R}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$$

rendszer $b > 1$ esetén sohasem teljes. Az ilyen alakú rendszerek tulajdonságaival kapcsolatban n az [S-W] és a [H-W] munkákra utalunk.

4. Gábor és wavelet transzformációk

1. Bevezetés

Ebben a fejezetben az első és negyedik fejezetben tárgyalt diszkrét tanszformációk folytonos változatával foglalkozunk. Az előző fejezetekben bevezetett speciális alakú ortogonolális rendszerekből kiindulva — függvényekhez e rendszerek szerint vett Fourier-együtthatóinak sorazatát rendelve — vizsgáltuk e leképezések tulajdonaságait: a rendszer teljességét, amely a leképezés injektivitásával van kapcsolatba, a leképezés normatartó tulajdonságát és az együtthatókból való rekonstrukció kérdését.

Ebben a fejezetben két olyan transzformációt vizsgálunk, amelyek (egyváltozós) függvényekhez (kétváltozós) függvényeket rendelnek. Ez a két transzformácó olyan lineáris integráloperátorral írható le, amelyek magfüggvénye az egyik esteben egyváltozós függvényből transzlációval és dilatációval, a második esetben transzlációval és modulációval származtatható. Más szóval a magfüggvények hasonlóak az affin-, ill. a Gábor-waveletekhez. A folytonos és az előző fejezetekben tárgyalt diszkrét transzformáció viszonya hasonló, mint a Fourier-transzformáció és a Fourier-sorfejtésé.

Jelölje $L^p(\mathbb{R}^2)$ a szokásos L^p-teret az $\mathbb{R}^2$ síkon a $dx := dx_1\, dx_2$ síkbeli Lebesgue-mértékkel. Az $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett folytonos, korlátos függvények halmazát a $C(\mathbb{R}^2)$ szimbólummal jelöljük. Az $\mathbb{R}$-en értelmezett folytonos, végtelenben eltűnő függvények halmazát $C_0(\mathbb{R})$-lel jelöljük. A $C(\mathbb{R}^2)$ tér $C_0(\mathbb{R}^2)$ alteréhez azok az $f \in C(\mathbb{R}^2)$ függvények tartoznak, amelyekre $F(s,\cdot), F(\cdot,t) \in C_0(\mathbb{R})\ \ (s,t \in \mathbb{R})$ teljesül. A szokásos, dx Lebesgue-mérték szerint vett $L^p(\mathbb{R}^2)$ terek mellett a $d\lambda(s,t) := \dfrac{ds\,dt}{s^2}$ $(s \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R})$ mértéket és az ezzel képzett $L^p_\lambda(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ teret is használni fogjuk. Ennek megfelelően az $L^2_\lambda(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ téren a skaláris szorzat

$$\langle\langle F, G\rangle\rangle := \int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}} F(s,t)\overline{G(s,t)}\,\frac{ds\,dt}{s^2} \quad (F, G \in L^2_\lambda(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})) \tag{1.1}$$

alakú.

A bevezetésre kerűlő operárorok egy $\rho \in L^\infty(\mathbb{F})$ $\rho \neq 0$ paramétertől függnek. A második pontban a Gábor-transzformációval foglalkozunk, a harmadik pontban a wavelet transzformációt vizsgáljuk.

Ahhoz, hogy a szóban forgó transzformációkat minden $(1 \leqq p \leqq \infty)$ esetén az $L^p(\mathbb{R})$ tereken értelmezhessük, a

$$\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad \rho \neq 0 \tag{1.2}$$

feltétellel élünk. Ebből a feltételből következik, hogy $\rho \in L^p(\mathbb{R})$ minden $1 < p < \infty$ paraméter esetén. Valóban, minthogy $p > 1$ esetén

$$\begin{aligned} \|\rho\|_p^p &= \int_{\{|\rho| \leqq 1\}} |\rho(s)|^p \, ds + \int_{\{|\rho|>1\}} |\rho(s)|^p \, ds \leqq \\ &\leqq \int_{\{|\rho| \leqq \}1} |\rho(s)| \, ds + \|\rho\|_\infty^{p-1} \int_{\{|\rho|>1\}} |\rho(s)| \, ds \leqq \\ &\leqq \|f\|_1 (1 + \|\rho\|_\infty^{p-1}), \end{aligned} \tag{1.3}$$

azért (1.2)-ből valóban $\rho \in L^p(\mathbb{R})$ következik.

2. Gábor-transzformáció

Ebben a pontban olyan leképezést vizsgálunk, amely $\mathbb{R}$-en értelmezett függvényeket $\mathbb{R}^2$-en értelmezett függvényekbe visz át. Először az $L^1(\mathbb{R})$ téren értelmezzük a transzformációt majd kiterjesztjük az $L^p(\mathbb{R})$ térre. A gyakorlatban olyan ρ paramétert szoktak használni, emelyek a végtelenben gyorsan tartanak 0-hoz. Az értelmezéshez és a leképezés tulajdonságinak igazolásshoz erre feltételre nincs szükség.

Tegyük fel, hogy a ρ függvény eleget tesz az (1.2) feltételnek. Az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény ***Gábor transzformáltját*** a

$$(\mathcal{G}_\rho f)(s,t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\epsilon}_s(x) \overline{\rho}(x-t) \, dx \qquad ((s,t) \in \mathbb{R}^2) \tag{2.1}$$

integrál operátorral értelmezzük. Ezt a transzformációt ***Gábor Dénes*** 1946-ban vezette be a jelfeldolgozásban, olyan transzformációt konstruálva, amely egyszerre tartalmaz idővel és frekvenciával kapcsolatos információkat. Utalva a leképezés és a Fourier-transzformáció kapcsolatára szokás (2.1)-et ***rövididejű*** vagy ***ablakos Fourier-transzformációnak*** nevezni.

Az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény Gábor-transzformáltja $L^\infty(\mathbb{R}^2)$-beli függvény, amelyre

$$\|\mathcal{G}_\rho f\|_\infty \leqq \|\rho\|_\infty \|f\|_1 \tag{2.2}$$

teljesül. Nyilvánvaló továbbá, hogy a $\mathcal{G}_\rho : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}^2)$ operátor lineáris. A $\rho(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$ speciális esetben a Gábor-transzformáció egybeesik a Fourier-transzformációval.

Mivel a (2.1) értelmezésben a ρ függvény dilatációja és transzlációja szerepel, azért a Gábor transzformáció kifejezhető a Fourier-transzformáció és konvolúciós operátor segítségével. Nevezetesen, bevezetve a $\rho\_(x) := \overline{\rho}(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$ jelölést minden $s, t \in \mathbb{R}$ pontban fennállnak a

$$(\mathcal{G}_\rho f)(s,t) = (\mathcal{F}(f\tau_{-t}\overline{\rho}))(s) = (\nu_{-s} f * \rho\_)(t) \qquad ((s,t) \in \mathbb{R}^2). \tag{2.3}$$

összefüggések.

A Lebesgue-féle konvergencia tételből következik, hogy $\rho \in C_0(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathcal{G}_\rho f \in C(\mathbb{R}^2).$$

Ezen túlmenően a Gábor-transzformált mindkét változójában a végtelenben eltűnik, azaz $\mathcal{G}_\rho f \in C_0(\mathbb{R}^2)$, ha $\rho \in C_0(\mathbb{R})$.

A továbbiakban feltesszük, hogy a Gábor-transzformáció esetén a ρ függvényre az (1.2) mellett fennáll még a

$$\|\rho\|_2 = 1 \tag{2.4}$$

normálási feltétel. Megmutatjuk, hogy a (2.4) normálási feltétel teljesülése esetén a Gábor-transzformáció egy ***unitér leképezés*** az $L^2(\mathbb{R})$ térről az $L^2(\mathbb{R}^2)$ térbe.

> 1.Tétel. *Tegyük fel, hogy a ρ függvény eleget tesz a (2.4) normálási feltételnek. Ekkor bármely $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ függvénypárra*
>
> $$[\mathcal{G}_\rho f, \mathcal{G}_\rho g] = \langle f, g \rangle \,, \tag{2.5}$$
>
> *ahol a (2.5) bal oldalán az $L^2(\mathbb{R}^2)$-beli, a jobb oldalán az $L^2(\mathbb{R})$-beli skaláris szorzat áll.*

Bizonyítás. A (2.5) igazolásához felhasználjuk a Fubini-tételt, a (2.3) formulát és azt a tényt, hogy $\mathcal{F}$ Fourier-transzformáció unitér az $L^2(\mathbb{R})$ téren. Ennek alapján

$$\begin{aligned}[\mathcal{G}_\rho f, \mathcal{G}_\rho g] &= \int_{\mathbb{R}} \langle \mathcal{F}(f\tau_{-t}\overline{\rho}), \mathcal{F}(g\tau_{-t}\overline{\rho})\rangle \, dt = \int_{\mathbb{R}} \langle f\tau_{-t}\overline{\rho}, g\tau_{-t}\overline{\rho}\rangle \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\overline{g}(s) \left(\int_{\mathbb{R}} |\rho(s-t)|^2 \, dt \right) ds = \|\rho\|_2^2 \langle f, g\rangle = \langle f, g \rangle \,.\end{aligned}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

A ρ-ra vonatkozó további feltétel mellett a Gábor-transzformáció ***injektív.*** Ezzel kapcsolatos az alábbi

2.Tétel. *Tegyük fel, hogy $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\rho \neq 0$, és $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Ha $\mathcal{G}_\rho f = 0$, akkor $f = 0$ az $\mathbb{R}$ m.m. pontjában.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{G}_\rho f)(s,t) = 0$ m.m. $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ pontban. Ekkor létezik olyan $T \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelynek komplementere nullmértékű továbbá minden $t \in \mathbb{R}$ esetén (2.3) alapján

$$(\mathcal{G}_\rho f)(.,t) = \mathcal{F}(f\tau_t\rho) = 0 \quad \text{m.m.}$$

Innen a Fourier-transzformáció injektivitása alapján következik, hogy $(f\tau_t\rho)(s) = 0$ m.m. $s \in \mathbb{R}$ és minden $t \in T$ pontban. Mivel $\rho \neq 0$, azért innen $f = 0$ adódik. □

Az $\mathcal{F}$ Fourier-transzformáció

$$(\mathcal{F}'f)(x) := (\mathcal{F}f)(-x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

inverzét felhasználva inverziós képletet adhatunk a Gábor-transzformációra. Ismeretes, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $F := \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor az F-ből az f eredeti függvény az

$$f = \mathcal{F}'f \tag{2.6}$$

inverziós formulával rekonstruálható. Ez a formula minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre — további feltételek nélkul is — fennáll. Ezeket alkalmazva bebizonyítjuk a következő állítást.

3.Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$, $\rho \in L^\infty(\mathbb{R})$ eleget tesz a (2.4) normálási feltételnek, legyen továbbá*

$$F = \mathcal{G}_\rho f.$$

i) Ha $f, \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ és $\rho, \mathcal{F}\rho \in L^1(\mathbb{R})$, akkor

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}'(F(\cdot,t))\right)(x)\rho(x-t)\,dt \tag{2.7}$$

m.m. $x \in \mathbb{R}$ pontban.

ii) Ha $f \in L^2(\mathbb{R})$, akkor a (2.7) m.m. $x \in \mathbb{R}$ ponban.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy mind az i), mind a ii) esetben

$$\mathcal{F}'(F(\cdot,t)) = f\tau_{-t}\overline{\rho} \tag{2.8}$$

teljesül, majd ezt felhasználva igazoljuk (2.7)-et.

Valóban a ii) esetben $f\tau_{-t}\overline{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$, s ezért felhasználva a (2.6) inverziós képlet L^2-beli változatát (2.3)-ból (2.8) következik.

Ahhoz, hogy az első esetben is alkalmazhassuk az inverziós formulát meg kell mutatnunk, hogy $\mathcal{F}(f\tau_{-t}\overline{\rho}) \in L^1(\mathbb{R})$. Alkalmazzuk az 1. fejezet () konvolúcióra vonatkozó formuláját a $\mathcal{F}'f$ és $\mathcal{F}'(\tau_{-t}\overline{\rho})$ $L^1(\mathbb{R})$-beli függvényekre:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}'f * \mathcal{F}'(\tau_{-t}\overline{\rho})) = f\tau_{-t}\overline{\rho}. \tag{2.9}$$

Mivel $\rho \in L^\infty(\mathbb{R})$, azért $f\tau_{-t}\overline{\rho} \in L^1(\mathbb{R})$. Másrészt mivel $L^1(\mathbb{R})$-beli függvények konvolúciója is $L^1(\mathbb{R})$-beli, azért $\mathcal{F}'f * \mathcal{F}'(\tau_{-t}\overline{\rho}) \in L^1(\mathbb{F})$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. A (2.9)-ből alkalmazva az inverz Fourier-transzformációt

$$\mathcal{F}'f * \mathcal{F}'(\tau_{-t}\overline{\rho}) = \mathcal{F}'(f\tau_{-t}\overline{\rho})$$

adódik. Innen következik, hogy $\mathcal{F}'(f\tau_{-t}\overline{\rho}) \in L^1(\mathbb{R})$ es ezzel együtt $\mathcal{F}(f\tau_{-t}\overline{\rho}) \in L^1(\mathbb{R})$ is teljesül. A (2.6) inverziós formula tehát ebben az esetben is alkalmazható, s ennek alapján (2.3)-ból adódik, hogy (2.8) az i) esetben is fennáll.

A (2.8) alapján a tétel állítás már egyszerűem igazolható. Valóban a normálási feltételt figyelembe véve

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}'(F(\cdot,t))\right)(x)\rho(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)(\tau_{-t}\rho)(x)\overline{\rho}(x-t)\,dt$$
$$= f(x)\int_{\mathbb{F}} |\rho(x-t)|^2\,dt = f(x)\|\rho\|_2^2 = f(x).$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

3. Wavelet-transzformáció

A wavelet transzformáció értelmezéséhez rögzítsünk egy $\rho \in C_0(\mathbb{R})$, $\rho \neq 0$ függvényt és az integráloperátor magfüggvényére vezessük be a

$$\rho^{st}(x) := \frac{\overline{\rho}\left(\dfrac{x-t}{s}\right)}{\sqrt{|s|}} \qquad (x \in \mathbb{R}, (s,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

jelölést, ahol $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény ***wavelet transzformáltját*** a

$$(\mathcal{W}_\rho f)(s,t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho^{st}(x)\,dx \qquad ((s,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

utasítással értelmezzük. A ρ függvényt ***anyawaveletnek*** nevezik.

Nyilvánvaló, hogy (3.2) leképezés egy lineáris transzformáció az $L^1(\mathbb{R})$ téren, amelyre

$$\sup_{(s,t)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} \sqrt{|s|}\,\big|(\mathcal{W}_\rho f)(s,t)\big| \leqq \|\rho\|_\infty \|f\|_1 \tag{3.3}$$

teljesül.

A Lebesgue-féle konvergencia tételből következik, hogy $\rho \in C_0(\mathbb{R})$ és $f \in L^1(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathcal{W}_\rho f \in C_0(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}).$$

Definíció szerint minden $(s,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ esetén

$$(\mathcal{W}_\rho f)(s,t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\rho}\Big(\frac{x-t}{s}\Big)\,dx = \frac{1}{\sqrt{|s|}}(f * \delta_{s^{-1}}\rho_{\_})(t). \tag{3.4}$$

Az 1. fejzet () formula alapján $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ és $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ esetén a $\mathcal{W}_\rho f$ második változó szerinti függvényének Fourier-transzformáltja egyszerű alakban írható fel:

$$\mathcal{F}((\mathcal{W}_\rho f)(s,\cdot)) = \sqrt{|s|}\,\mathcal{F}f \cdot \delta_s(\mathcal{F}\rho_{\_}) \qquad (s \in \mathbb{R}^*). \tag{3.5}$$

A wavelet-transzformáció esetében feltesszük, hogy a ρ az (1.2) feltétel mellett eleget tesz az alábbi normálási feltételnek:

$$\int_{\mathbb{R}^*} \big|\ (\mathcal{F}\rho)(t)\ \big|^2 \frac{dt}{|t|} = 1. \tag{3.6}$$

A (3.6) feltétel minden olyan ρ függvény esetén kielégíthető, amelyre alkalmasan választott $\eta, a > 0$ és $C > 0$ számokkal fennállnak a

$$(\mathcal{F}\rho)(0) = \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\,ds = 0,$$
$$|(\mathcal{F}\rho)(t)| \leqq C|t|^\eta \quad (|t| \leqq a), \qquad |(\mathcal{F}\rho)(t)| \leqq C|t|^{-\eta} \quad (|t| > a)$$

egyenlőtlenségek.

Most bebizonyítjuk az 1.Tétel analogonját a wavelet-transzformáltra megmutatva, hogy a

$$\mathcal{W}_\rho : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_\lambda(\mathbb{R}^2)$$

operáror unitér, ha a ρ függvény kielégíti a (3.6) normálási feltételt.

4.Tétel. *Tegyük fel, hogy a ρ függvény eleget tesz a (3.6) normálási feltételnek. Ekkor bármely $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ függvénypárra*

$$\langle\langle \mathcal{W}_\rho f, \mathcal{W}_\rho g \rangle\rangle = \langle f, g \rangle \,, \tag{3.7}$$

ahol a (3.7) bal oldalán az (1.1) alatt bevezett $L^2_\lambda(\mathbb{R}^2)$ térbeli, a jobb oldalon pedig az $L^2(\mathbb{R})$-beli skaláris szorzat áll.

Bizonyítás. A (3.7) igazolásához felhasználjuk a Fubini-tételt, a (3.5) formulát és azt a tényt, hogy $\mathcal{F}$ unitér. Ennek alapján

$$\begin{aligned}
\langle\langle \mathcal{W}_\rho f, \mathcal{W}_\rho g \rangle\rangle &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle (\mathcal{W}_\rho f)(s,\cdot), (\mathcal{W}_\rho)(s,\cdot) \rangle \, \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^*} \langle \mathcal{F}((\mathcal{W}_\rho f)(s,\cdot)), \mathcal{F}((\mathcal{W}_\rho)(s,\cdot)) \rangle \, \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^*} |s| \, \langle \delta_s(\mathcal{F}\rho__)\mathcal{F}f, \delta_s(\mathcal{F}\rho__)\mathcal{F}g \rangle \, \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(t)\overline{(\mathcal{F}g)(t)} \left(\int_{\mathbb{R}^*} \frac{|(\mathcal{F}\rho__)(s\cdot t)|^2}{|s|} \, ds \right) dt.
\end{aligned}$$

A belső integrálra az $u = st$ transzformációt alkalmazva és a (3.6) normálási feltételt figyelembe véve

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|(\mathcal{F}\rho_\_)(s\cdot t)|^2}{|s|} \, ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{|(\mathcal{F}\rho_\_)(u)|^2}{|u|} \, du = \int_{\mathbb{R}} \frac{|(\mathcal{F}\rho)(u)|^2}{|u|} \, du = 1$$

követlezik. Innen, ismét felhasználva, hogy $\mathcal{F}$ unitér, a bizonyítandó

$$\langle\langle \mathcal{W}_\rho f, \mathcal{W}_\rho g \rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(t)\overline{(\mathcal{F}g)(t)} \, dt = \langle f, g \rangle$$

állítást kapjuk. □

Most bebizonyítjuk, hogy ***a Wavelet-transzformáció injektív.*** Ezzel kapcsolatos az alábbi

5.Tétel. *Tegyük fel, hogy $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\rho \neq 0$, és $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Ha $\mathcal{W}_\rho f = 0$, akkor $f = 0$ az $\mathbb{R}$ m.m. pontjában.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{W}_\rho f)(s,t) = 0$ m.m. $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ pontban. Ekkor létezik olyan $S \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelynek komplementere nullmértékű továbbá minden $s \in \mathbb{R}$ esetén (3.6) alapján

$$\mathcal{F}f\delta_s(\mathcal{F}\rho_\_) = 0$$

minden $s \in S$ esetén majdnem mindenütt. Mivel a $\rho \neq 0$ feltételből $\mathcal{F}\rho_- \neq 0$ következik, azért $\mathcal{F}f = 0$, s innenn az $f = 0$ bizonyítandó állítást kapjuk. □

Mivel (3.5) szerint a wavelet-transzformált kifejezhető az $\mathcal{F}$ Fourier-transzformációval, azért a $\mathcal{W}_\rho$ inverze kifejezhető a Foourier-transzformáció inverzével. Ezzel kapcsolatos az alábbi tétel.

6.Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ kielégíti a (3.6) normálási feltételt. Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$ és*

$$F := \mathcal{W}_\rho f.$$

Ha $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor m.m. $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^*} \left(\int_{\mathbb{R}} F(s,t)\overline{\rho}^{st}(x)\, dt \right) \frac{ds}{|s|^2}. \tag{3.8}$$

Bizonyítás. A feltételekből (3.4) és (3.5) alapján következik, hogy minden $s \in \mathbb{R}$ számra $F(s,\cdot)$ és $\mathcal{F}(F(s,\cdot))$ $L^1(\mathbb{F})$-beli függvények. Az (2.6) inverziós formula alapján (3.5)-ből azt kapjuk, hogy

$$F(s,\cdot) = \mathcal{F}'(\delta_s(\mathcal{F}\rho_\_)\mathcal{F}f)|s|^{1/2} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Ismeretes (lásd ...), hogy bármely $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ függvénypárra

$$\langle \mathcal{F}'g, h\rangle = \langle g, \mathcal{F}h\rangle.$$

Ezt felhasználva (3.1) és (3.8) alapján a belső integrálra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}} F(s,t)\overline{\rho}^{st}(x)\, dt &= |s|^{-1/2} \langle F(s,\cdot), \tau_{-x}(\delta_{s^{-1}}\rho_\_)\rangle \\ &= \langle \delta_s(\mathcal{F}\rho_\_)\mathcal{F}f, \mathcal{F}(\tau_{-x}(\delta_{s^{-1}}\rho_\_))\rangle \end{aligned}$$

adódik. Minthogy az első fejezet (1.5) formulák alapján

$$\mathcal{F}(\tau_{-x}(\delta_{s^{-1}}\rho_\_)) = \epsilon_{-x}\mathcal{F}(\delta_{s^{-1}}\rho_\_) = s\epsilon_{-x}\delta_s(\mathcal{F}\rho_\_),$$

azért a skaláris szorzat felírható

$$\begin{aligned} &\langle \delta_s(\mathcal{F}\rho_\_)\mathcal{F}f, \mathcal{F}(\tau_{-x}(\delta_{s^{-1}}\rho_\_))\rangle = \\ &= s\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(t)|(\mathcal{F}\rho_\_)(t\cdot s)|^2 \epsilon_x(t)\, dt. \end{aligned}$$

alakban.

A belső integrálban véve az integrandus abszolut értékét és az $s = tu$ változó transzformációt alkalmazva a normálási feltétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} |(\mathcal{F}f)(t)|\, |(\mathcal{F}\rho_{_})(t \cdot s)|^2 \frac{ds}{|s|}\, dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f)(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^*} |\mathcal{F}\rho_{_}(t \cdot s)|^2 \frac{ds}{|s|} \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f)(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^*} |\mathcal{F}\rho_{_}(u)|^2 \frac{du}{|u|} \right) dt = \|\mathcal{F}f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

következésképpen $\mathcal{F}f(t)|(\mathcal{F}\rho^*)(t \cdot s)|^2$ abszolut integrálható a $\dfrac{ds\, dt}{|s|}$ mérték szerint. A (2.6) inverziós formula és a Fubini tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^*} \left(\int_{\mathbb{R}} F(s,t) \overline{\rho}^{st}(x)\, dt \right) \frac{ds}{|s|^2} \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(t) \epsilon_x(t) \left(\int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\mathcal{F}\rho_{_}(t \cdot s)|^2}{|s|}\, ds \right) dt \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(t) \epsilon_x(t)\, dt = (\mathcal{F}'(\mathcal{F}f))(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Itt is mint az előző lépesben felhassználtuk azt a tényt, hogy a $\dfrac{ds}{|s|}$ mérték dilatáció invariáns. Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

5. Bázisok és keretek

Ebben a fejezetben a koordináta rendszer fogalmának általánosításaival foglalkozunk. Véges dimenziós vektor terekben véve egy bázist, bármely vektor egyértelműen állítható elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. A lineáris kombináció együtthatóit a szóban forgó vektor koordinátáinak nevezzük az adott bázisban. Az ilyen bázisokat — utalva ezek geometriai jelentésére a 2 és 3 dimenziós euklideszi terekben — szokás ferdeszögű koordináta rendszereknek nevezni. n-dimenziós terek esetén a tér vektorait valamely bázisra vonatkozó koordinátáival, azaz rendezett szám n-esekkel jellemezhetjük. Ez a reprezentáció egyrészt lehetővé teszi, hogy a lineáris tér vektorait (pl. komputerekben) ábrázoljuk. Másrészt felhasználva a vektorok geometriai jelentését, számos fogalomnak és eljárásnak szemléletes geometriai tartalmat tulajdoníthatunk.

Sok olyan probléma van a természettudományokban és a gazdasági életben is, amelyek matematikai leírásához végtelen dimenziós terek szükségesek. Ilyen terekben is — amennyiben lehetséges — célszerű koordináta rendszereket használni. Az 5.1. pontban — bevezetve a bázis fogalmát — a koordináta rendszer egy végtelen dimenziós terekre vonatkozó általánosításával foglalkozunk.

Az utóbbi évtizedben — elsősorban jel- és képfeldolgozással összefüggésben — egy újabb általánosítást id bevezettek, amely igen hasznosnak bizonyult jelek reprezentációjával kapcsolatban. Ezzel az 5.2. pontban foglalkozunk.

1. Bázisok Banach terekben

Szeparábilis Hilbert-térben már korábban bevezettük a derékszögű koordináta rendszer megfelelőjét. Megmutattuk, hogy ilyen terekben mindig létezik páronként merőleges, 1-normájú vektoroknak egy olyan $(e_n, n \in \mathbb{N})$ rendszere, amellyel minden x vektor egyértelműen írható fel

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_k e_k$$

alakban, ahol a szóban forgó végtelen sor normában konvergens. Az $x_k \in \mathbb{K}$ $(k \in \mathbb{N})$ együtthatók, — más szóval az x koordinátái — a skaláris szorzatot felhasználva kiszámíthatók:

$$(1.1) \qquad x_k = \langle x, e_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A továbbiakban azzal foglakozunk, hogy hogyan vihetők át ezek a fogalmak Banach-terekre, ahol — mint tudjuk — nem létezik a merőlegesség fogalmának megfelelője. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy Banach-tér és jelölje $(X^*, \|\cdot\|)$ az X tér duálisát. Emlékeztetve az ezzel kapcsolatos fogalmakra megjegyezzük, hogy az $\mathbb{X}^*$ elemei a $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ alakú korlátos lineáris funkcionálok. A $\varphi \in \mathbb{X}^*$ függvénynek az $x \in X$ pontban felvett helyettesítési értékét a

$$(1.2) \qquad \varphi(x) := \langle x, \varphi \rangle \quad (x \in \mathbb{X}, \varphi \in \mathbb{X}^*)$$

szimbólummal jelöljük.

Az ortonormált rendszer fogalmát általánosítva bevezetjük a következő fogalmat.

Definíció. *Legyen $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}$-beli vektoroknak $\mathfrak{F} = (f_n, n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}^*$-beli finkcionáloknak egy-egy sorozata. Akkor mondjuk, hogy az $\mathfrak{F}$* **rendszerek biortogonális az** *$\mathfrak{E}$-re, ha*

$$(1.3) \qquad \langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{N}),$$

ahol δ_{ij} a Kronecker-féle szimbólumot jelöli.

Hilbert-tér esetén a duális tér az eredetivel azonosítható, összhangban azzal a ténnyel, hogy ilyenkor minden funkcionál — alkalmas $y \in \mathbb{X}$ elemmel — $\mathbb{X} \ni x \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ alakban adható meg. Ennek megfelelően, ha az $\mathbb{X}$ Hilbert-térbeli vektorokból álló $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{F}$ rendszerre fennáll az (1.3) feltétel, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó ***két vektorrendszert biortogonális.*** Innen az $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ speciális esetben visszakapjuk az ortonormált rendszer definícióját.

Visszatérve a Banach-terekhez most először azt vizsgáljuk, hogy milyen esetben létezik az $\mathfrak{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}$-beli vektorokból álló sorozathoz biortogonális rendszer. Ez a kérdés kapcsolatban áll következő fogalommal.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $e_n \in \mathbb{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ rendszer* **minimális**, *ha bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre*

$$e_n \notin X_n := \overline{Span\{e_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}}$$

teljesül, ahol felülvonással a szóban forgó lineáris burok lezárását jelöltük.

Könnyű belátni, hogy az $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha minden $n \in \mathbb{N}$ indexre az

$$e_n \notin \mathrm{Span}\{e_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}$$

feltétel teljesül. Innen nyilvánvaló, hogy ***minden minimális rendszer lineárisan független.***

Az alábbi állítás minimális rendszerek egy jellemzését adja.

1.Tétel. *Az $\mathfrak{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ rendszer akkor és csak akkor minimális, ha létezik olyan $\mathfrak{F} = (f_k, k \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}^*$-beli rendszer, amely biortogonális $\mathfrak{E}$-re. Ha az $\mathfrak{E}$ rendszer zárt, akkor egyetlen $\mathfrak{E}$-re biortogonális rendszer létezik.*

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{E}$ rendszer minimális. Ekkor az

$$Y_n := \{y = x + \lambda e_n : x \in X_n, \lambda \in \mathbb{K}\} \tag{1.4}$$

halmaz a $\mathbb{X}$-nek egy lineáris altere, továbbá minden $y \in Y_n$ vektor (1.4) alatti előállítása egyértelmű. Bebizonyítottuk (lásd x. fejezet, y. tételét), hogy az Y_n téren értelmezett

$$f_n(y) := \lambda \quad (y = x + \lambda e_n : x \in X_n, \lambda \in \mathbb{K})$$

funkcionál lineáris és korlátos. Az f_n értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy f_n az X_n téren eltűnik, továbbá $f_n(e_n) = 1$. A Banach-Hahn-tétel alapján ezeket a funkcionálokat kiterjesztve az $\mathbb{X}$-térre egy $\mathfrak{E}$-re biortogonális rendszert kapunk.

ii) Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $\mathfrak{E}$-hez létezik $\mathfrak{F}$ biortogonális rendszer, de $\mathfrak{E}$ nem minimális. Ekkor lenne olyan n index, hogy $e_n \in X_n$, következésképpen van olyan $\mathrm{Span}\{e_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}$-beli $(y_k, k \in \mathbb{N})$ sorozat, amely e_n-hez konvergál. Az (1.3) feltételből következik, hogy $f_n(y_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, s ezért az f_n folytonossága alapján

$$f_n(e_n) = \lim_{k\to\infty} f_n(y_k) = 0.$$

Ez ellentmond a biortogonalitás definíciójának.

iii) Az unicitás igazolásához tegyük fel, hogy az $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ rendszerek mindegyike biortogonális az $\mathfrak{E}$-re. Ekkor a $\varphi_n = f_n - f'_n$ $(n \in \mathbb{N})$ rendszerre nyilvánvalóan $\varphi_n(e_k) = 0$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Mivel az $(e_k, k \in \mathbb{N})$ rendszer zárt, azért innen az következik, hogy a φ_n funkcionálok az egész $\mathbb{X}$ téren eltünnek, azaz $f_n = f'_n$ $(n \in \mathbb{N})$. □

A zárt és minimális $\mathfrak{E}$ rendszer esetén létező egyetlen $\mathfrak{F}$ rendszert az $\mathfrak{E}$ ***biortogonális rendszerének*** nevezzük. A Fourier sort általánosítva bevezetjük az alábbi fogalmat.

Definíció. *Legyen $\mathfrak{E}$ egy zárt, minimális rendszer és jelölje $\mathfrak{F}$ az $\mathfrak{E}$ biortogonális rendszerét. Ekkor a*

$$x \sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, f_k \rangle e_k$$

végtelen sort az x vektor **biortogonális sorfejtésének**, *az $\langle x, f_k \rangle$ $(k \in \mathbb{N})$ számokat az x vektor biortogonális Fourier-együtthatóinak nevezzük.*

A koordináta rendszer fogalmát általánosítva bevezetjük a következő fogalmat.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$-beli vektorok $\mathfrak{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ sorozata az $\mathbb{X}$ tér bázisa, ha minden $x \in \mathbb{X}$ vektor egyértelműen állítható elő*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \tag{1.5}$$

alakban, ahol $x_k \in \mathbb{K}$ $(k \in \mathbb{N})$ és az (1.5) sor normában konvergens.

Az x_k $(k \in \mathbb{N})$ számokat az x vektor $\mathfrak{E}$ ***bázisra vonatkozó koordinátáinak*** nevezzük. Az x koordináta sorozatának jelölésére az

$$\hat{x} := (x_k, k \in \mathbb{N}) \tag{1.6}$$

szimbólumot használjuk. Rögzítve az $\mathfrak{E}$ bázist a tér x veltorait $\hat{x}$ koordináta sorozataikkal jellemezhetjük. Jelöljük ℓ-lel a $\mathbb{K}$-beli sorozatok halmazát. Könnyen igazolható, hogy az $\mathbb{X} \ni x \to \hat{x} \in \ell$ leképezés lineáris és injektív, amelynek értékkészlete

$$\widehat{X} := \{\hat{x} : x \in \mathbb{X}\}$$

lineáris altér ℓ-ben. Ezen a téren vezessük be az

$$\|\hat{x}\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\| \quad (\hat{x} = (x_k, k \in \mathbb{N}) \in \widehat{X}) \tag{1.7}$$

fukcionált. Könnyen igazolható (lásd a x.feladatot), hogy ezzel egy normát értelmeztünk az $\widehat{X}$ téren, továbbá ez a tér ezzel a normával teljes. Minthogy az (1.1) sor normában konvergens, azért

$$\|x\| = \lim_{n \to \infty} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\| \leqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\| = \|\hat{x}\| \quad (x \in \mathbb{X}).$$

Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy az $\mathbb{X} \ni x \to \hat{x} \in \widehat{X}$ bijekció inverze korlátos. Ezért a Banach-féle homeomorfia tétel alapján a szóban forgó leképezés maga is korlátos, azaz létezik olyan $K > 0$ szám, hogy mindern $x \in \mathbb{X}$ elemre

$$(1.8) \qquad \|\hat{x}\| \leqq K\|x\| \quad (x \in \mathbb{X})$$

teljesül.

Minden $x \in \mathbb{X}$ vektorhoz az $\mathfrak{E}$ bázisban vett x_n n-edik koordinátáját rendelve egy

$$e_n^*(x) := x_n \quad (x \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$$

funkcionálsorozatot értelmezünk. Ezeket ***koordináta funkcionáloknak*** nevezzük.

Az (1.5) értelmezés alapján az x vektor n-edik koordinátájára érvényes az

$$|x_n|\|e_n\| = \|x_n e_n\| = \|\sum_{k=0}^{n} x_k e_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k\| \leqq 2\|\hat{x}\| \leqq 2K\|x\|$$

becslés. Innen következik, hogy

$$|e_n^*(x)| \leqq \frac{2K}{\|e_n\|}\|x\| \quad (x \in \mathbb{X}),$$

azaz e_n^* funkcionálok korlátosak. Az $\mathbb{X}$-beli vektorok (1.5) alakú előállításának egyértelműségéből következik, hogy a koordináta funkcionálok lineárisak, továbbá

$$(1.10) \qquad e_n^*(e_k) = \langle e_k, e_n^* \rangle = \delta_{kn} \quad (k, n \in \mathbb{N}).$$

Ezzel megmutattuk, hogy az $\mathfrak{E}^* := (e_k^*, k \in \mathbb{N})$ ***koordináta funkcionálok biortogonálisak az $\mathfrak{E}$ bázisra.*** Ezt felhasználva (1.4)-ből az együtthatókra az

$$(1.10) \qquad x_k = \langle x, e_k^* \rangle \quad (k \in \mathbb{N})$$

előállítást kapjuk, következésképpen az (1.5) sorfejtés az x vektor biortogonális sorfejtésével azonos. Speciálisan Hilbert-térben az $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^*$ ortonormált bázist véve visz-szakapjuk az x vektor $\mathfrak{E}$-szerinti Fourier-együtthatóit, ill. Fourier sorát.

Jelölje

$$(1.10) \qquad S_n x := \sum_{k=0}^{n} x_k e_k = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k^* \rangle e_k \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

az (1.5) sor n-edik részletösszegét. Minthogy

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n x - x\| = 0 \quad (x \in \mathbb{X}),$$

azért minden $x \in \mathbb{X}$ elem tetszőleges pontossággal approximálható az e_k $(k \in \mathbb{N})$ vektorok lineáris kombinációival, azaz $\mathfrak{E}$ ***zárt rendszer***.

Összefoglalva és kiegészítve a mondottakat bebizonyítjuk a bázisok jellemzésével kapcsolatos alábbi állítást.

2.Tétel. *Az $\mathfrak{E}$ vektorrendszer akkor és csak akkor bázis a $\mathbb{X}$ térben, ha az alábbi három feltétel teljesül:*
i) Az $\mathfrak{E}$ rendszer zárt,
ii) Az $\mathfrak{E}$ rendszer minimális,
iii) Az (1.1) sorfejtés részletöszeg operátoraira
$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| < \infty$ *teljesül.*

Bizonyítás. i) Legyen $\mathfrak{E}$ bázis. Ekkor — amint azt már korábban beláttuk — $\mathfrak{E}$ zárt rendszer. Mivel a koordináta funkcionálok erre biortogonálisak, az 1.tétel alapján $\mathfrak{E}$ minimális. Végül mivel $(S_n x, n \in \mathbb{N})$ minden $x \in \mathbb{X}$ vektora normában tart x-hez, azért a Banach-Steinhaus-tétel szerint fennáll a iii) állítás.

i) Most induljunk ki abból, hogy az $\mathfrak{E}$ rendszerre teljesülnek az i)-iii) feltételek. Ekkor tekinthetjuk az $\mathfrak{E}$-rendszer szerinti biotogonális sorfejtést. Ennek

$$S_n x := \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k^* \rangle e_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

részletösszegeire nyilván

$$S_n(e_k) = e_k \quad (n \geq k)$$

teljesül, azért az $(S_n(x), n \in \mathbb{N})$ sorozat az $\mathfrak{E}$ zárt rendszer vektorain konvergál x-hez. A Banach-Steinhaus tétel alapján a iii) feltétel figyelembevételével következik, a szóban forgó sorozat minden $x \in \mathbb{X}$ pontban x-hez tart. Ezzel megmutattuk, hogy minden $x \in \mathbb{X}$ pontban fennáll az

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k^* \rangle e_k$$

egyenlőség, következésképpen az $\mathbb{X}$ tér elemei előállíthatók (1.4) alakú sorban. Az előállítás egyértülműsége egyszerűen igazolható. A ii) feltétel alapján — felhasználva az 1.tételt — létezik az $\mathfrak{E}$ rendszerre biortogonális $\mathfrak{E}^*$ biortogonális rendszer. Ha valamely $x\mathbb{X}$ elem előállítható (1.4) alakban, akkor a biortogonalitás alapján a (1.4) együtthatóira (1.6) adódik.$\square$

2. Frame sorfejtések

Ebben a pontban a biortogonális sorfejtések egy általánosításával foglalkozunk. Az újabb fogalmak ismertetése előtt kiemeljük azokat a szempontokat, amelyek ezek bevezetését motiválták.

Az $\mathbb{X}$ tér valamely $\mathfrak{F} = (f_n, n \in \mathbb{N})$ funkcionál sorozata akkor használható az $\mathbb{X}$ tér pontjainak jellemzésére, ha bármely $x, y \in \mathbb{X}$ elempárra $f_n(x) = f_n(y)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $x = y$ teljesül. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{F}$ ***rendszer teljes***. Minthogy az f_n funkcionálok lineárisak, az $\mathfrak{F}$ rendszer teljessége a következő állítással ekvivalens:

$$f_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad x = \theta. \tag{2.1}$$

Más szóval az $\mathfrak{F}$ rendszer pontosan akkor teljes, ha az $\mathfrak{F} : \mathbb{X} \to \ell$ lineáris leképezés ***injektív***.

Gyakorlati feladatokban — alkalmas $\mathfrak{F}$ funkcionál sorozatot véve — az $f_n(x)$ függvényértékekből az x elem, ill. a neki megfelelő jel (folyamat) fontos tulajdonságaira tudunk következtetni. Ezért az ilyen funkcionálokat ***jelek analízisére*** használhatjuk.

Általában jóval bonyolultabb a ***szintézis*** feladata, azaz az $x \in X$ elemnek az $\mathfrak{F}x = (f_n(x), n \in \mathbb{N})$ sorozatból való rekonstrukciójának kérdése.

Ezzel kapcsolatos a következő fogalom, amelynek bevezetéséhez legyen $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ egy $\mathbb{X}$-beli, $\mathfrak{F} = (f_n, n \in \mathcal{N})$ egy $\mathbb{X}^*$-beli sorozat. Akkor mondjuk, hogy az $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ rendezett pár egy ***frame*** (vagy magyarul ***keret***) az X téren, ha minden $x \in X$ elemre a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n\rangle e_n$ sor konvergens és — Fx-szel jelölve a sor összegét — az $x \to Fx$ lineáris leképezés az X-térnek egy ***korlátos bijekciója***. Az

$$Fx := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n\rangle e_n \quad (x \in X) \tag{2.2}$$

utasítással értelmezett korlátos lineáris leképezést ***frame operátornak***, az $\langle x, f_n\rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ számokat pedig ***frame együtthatóknak*** nevezzük.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ frame, akkor az e_n $(n \in \mathbb{N})$ elemek lineáris burka mindenütt sűrű az $\mathbb{X}$ térben. Ez más szóval azt jelenti, hogy $\mathfrak{E}$ az X tér egy ***zárt vagy totális rendszere***. Ha $\langle x, f_n\rangle = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $Fx = \theta$, és mivel $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ lineáris bijekció, azért innen $x = \theta$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy ha $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ frame, akkor $\mathfrak{F}$ ***teljes rendszer***.

Kiindulva az $\mathbb{X}$ tér valamely $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ keretéből — az $\mathfrak{E}$ rendszer teljessége miatt — az $\mathbb{X}$ tér elemei jellemezhetők a frame együtthatókkal. A Banach-féle homeomorfia tétel alapján az F frame operátor F^{-1} inverze is folytonos és a (2.2) alapján minden $x \in X$ elemre érvényes az

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n\rangle \tilde{e}_n, \quad \tilde{e}_n := F^{-1} e_n \ (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3}$$

előállítás. Az x elem (2.3) előállítását ***frame sorfejtésnek*** nevezzük. Ennek alapján az x elem ***rekonstruálható frame együtthatóiból***.

Az $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ keretből kiindulva természetes módon értelmezhető egy másik frame, az ún. ***inverz frame***. Nevezetesen jelölje $F^\circ : \mathbb{X}^* \to \mathbb{X}^*$ az F^{-1} inverz operátor adjungáltját. Ismeretes, hogy $F^\circ : X^* \to X^*$ korlátos lineáris operátor, amelyre

$$\langle F^{-1}x, f\rangle = \langle x, F^\circ f\rangle \quad (x \in \mathbb{X}, f \in \mathbb{X}^*),$$

továbbá $\|F^{-1}\| = \|F^\circ\|$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$\tilde{e}_n := F^{-1}e_n \in \mathbb{X},\ \tilde{f}_n := F^\circ f_n \in \mathbb{X}^* \quad (n \in \mathbb{N})$$

elemekből képzett $(\tilde{\mathfrak{E}}, \tilde{\mathfrak{F}})$ kettős is frame az $\mathbb{X}$ téren, amelyet az $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ keret inverz keretének nevezzük.

Az (2.3) előállítást az $x := F^{-1}(y)$ $(y \in \mathbb{X})$ elemre felírva

$$F^{-1}y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle F^{-1}y, f_n\rangle \tilde{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y, \tilde{f}_n\rangle \tilde{e}_n \quad (y \in \mathbb{X}) \tag{2.4}$$

következik, s ezért $(\tilde{\mathfrak{E}}, \tilde{\mathfrak{F}})$ is frame az $\mathbb{X}$ téren, amelynek frame operátora F^{-1}. A (2.2) definícióból $y = Fx$ helyettesítéssel adódik az inverz kereteknek megfelelő sorfejtés:

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle F^{-1}y, f_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y, \tilde{f}_n\rangle e_n \quad (y \in \mathbb{X}). \tag{2.5}$$

A F frame operátor és inverzének a korlátosságából következik, hogy léteznek olyan $0 < m \leqq M$ számok, hogy minden $x \in X$ elemre

$$m\|x\| \leqq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=0}^{n} \langle x, f_k\rangle e_k\| \leqq M\|x\| \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{2.6}$$

teljesül. A $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=0}^{n} \langle x, f_k\rangle e_k\| : x \in \mathbb{X}, \|x\| \leqq 1\}$ halmaz alsó- és felső határát ***frame konstansoknak*** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a két szóban forgó konstan azzal a legkisebb M számmal, ill. azzal a legnagyobb m számmal egyenlő, amelyekkel az (2.6) egyenlőtlenség minden $x \in X$ elemre fennáll. Ha a két frame konstans megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy a frame ***szoros*** (angolul:***tight***).

A framek egy fontos osztályával kapcsolatos az alábbi

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$* **frame egzakt**, *ha az $\mathfrak{E}$ bármely tagját elhagyva a maradék rendszer már nem frame.*

A frame definiciójában szereplő feltételek általában nehezen ellenőrizhetők. ***Hilbert-tér*** esetén azonban létezik egy jól kezelhető szükséges és elégséges feltétel. Ekkor az $\mathbb{X}$ tér azonosítható $\mathbb{X}^*$ duálisával az $e \in X$ elemeknek megfeleltetve az $f_e(x) := \langle x, e\rangle$ $(x \in \mathbb{X})$ korlátos lineáris funkcionálokat. Itt és a továbbiakban is — összhangban a korábbiakkal — $\langle \cdot, \cdot\rangle$ az $\mathbb{X}$ Hilbert-tér skaláris szorzatát jelöli. Ennek alapján az $\mathbb{X}$-beli elemekből álló $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat egyúttal funkcionálok sorozataként is felfogható, következésképpen felvethető a kérdés, hogy az $(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ pár keretet alkot-e.

Erre ad választ az alábbi

1.Tétel. *Az* $(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ *pár akkor és csak akkor frame az* $\mathbb{X}$ **Hilbert téren**, *ha léteznek olyan* $0 < m \leqq M < \infty$ *konstansok, hogy minden* $x \in \mathbb{X}$ *elemre*

$$m\|x\|^2 \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqq M\|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{2.7}$$

teljesül. Az

$$Fx := \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle x, e_n\rangle e_n \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{2.8}$$

frame operátor önadjungált és pozitív definit, továbbá

$$\langle Fx, x\rangle := \sum_{n\in\mathcal{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \quad (x \in \mathbb{X}). \tag{2.9}$$

Bizonyítás. i) Először tegyük fel, hogy $(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ frame az $\mathbb{X}$ Hilbert téren. Ekkor a (2.8) sor normában konvergens és a skaláris szorzat folytonossága alapján bármely $y \in \mathbb{X}$ elemre

$$\langle Fx, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle = \langle x, Fy\rangle \quad (x, y \in X), \tag{2.10}$$

következésképpen F valóban önadjungált. Az utóbbi azonosságban y helyébe x-et írva adódik (2.9). Ismeretes, hogy az F szimmetrikus operátor normájára

$$\|F\| = \sup_{\|x\|\leqq 1} |\langle Fx, x\rangle|. \tag{2.11}$$

Innen következik, hogy fennáll az (2.7) egyenlőtlenség jobb oldala az $M := \|F\|$ frame konstanssal. Az (2.7) bal oldala az F inverzének korlátosságából következik. Valóban (2.10)-ből a Schwarz-egyenlőtlenség és (2.9) alapján

$$\begin{aligned} |\langle Fx, y\rangle| &\leqq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle y, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} = \\ &= (\langle Fx, x\rangle\langle Fy, y\rangle)^{1/2} \end{aligned}$$

adódik.

Innen (2.9) és (2.11) alapján következik, hogy

$$\|Fx\| = \sup_{\|y\|\leqq 1} |\langle Fx, y\rangle| \leqq (\|F\|\langle Fx, x\rangle)^{1/2} \quad (x \in \mathbb{X}).$$

Ezt és az inverz operátor korlátosságát felhasználva az

$$\|x\| = \|F^{-1}(Fx)\| \leqq \|F^{-1}\| \, \|Fx\| \leqq \|F^{-1}\|(\|F\|\langle Fx, x\rangle)^{1/2} \quad (x \in \mathbb{X})$$

bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk az $m = 1/(\|F^{-1}\|^2\|F\|)$ konstanssal.

ii) Megfordítva most tegyük fel, hogy teljesül a (2.7) feltétel. A frame operátor értelmezéséhez először megmutatjuk, hogy a (2.8) jobb oldalán álló sor normában konvergens. Jelölje

$$S_r x := \sum_{n\in\mathcal{N}, |n|<r} \langle x, e_n\rangle e_n \quad (r \in \mathbb{N})$$

a (2.8) sor részletösszegeit. Ismeretes, hogy

$$\|S_r x - S_s x\| = \sup\{|\langle S_r x - S_s x, y\rangle| : \|y\| \leqq 1\}.$$

A jobb oldalon lévő skaláris szorzat a Cauchy-egyenlőtlenség és (2.7) alapján a következőképpen becsülhető:

$$\begin{aligned} |\langle S_r x - S_s x, y\rangle|^2 &= \Big| \sum_{r\leqq|n|<s} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle \Big|^2 \leqq \Big(\sum_{r\leqq n\leqq s} |\langle x, e_n\rangle|^2\Big)\Big(\sum_{r\leqq n\leqq s} |\langle e_n, y\rangle|^2\Big) \\ &\leqq M \sum_{r<n\leqq s} |\langle x, e_n\rangle|^2 \qquad (\|y\| \leqq 1). \end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\|S_r x - S_s x\|^2 \leqq M \sum_{r<n\leqq s} |\langle x, e_n\rangle|^2 \quad (x \in X).$$

Innen (2.7) figyelembevételével következik, hogy létezik a (2.8) sor részletöszegeinek a $\|\cdot\|$ normában vett

$$Fx := \lim_{r\to\infty} S_r x \quad (x \in \mathbb{X})$$

határértéke, $F : X \to X$ lineáris operátor, továbbá (2.7) alapján

$$\|Fx\| = \lim_{r\to\infty} \|S_r x\| \leqq M^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \right)^{1/2} \leqq M\|x\|^2 \quad (x \in X)$$

teljesül. Következésképpen az $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ leképezés korlátos és $\|F\| \leqq M$, továbbá fennáll a (2.9) egyenlőség.

Az

$$\langle Fx, x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq m\|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{X})$$

egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy az F leképezés injektív. Végül megmutatjuk, hogy az F értékkészlete az egész $\mathbb{X}$ tér. Ehhez rögzítsünk egy $y \in \mathbb{X}$ elemet.
A fixpont-tétel alkalmazásával megmutatjuk, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{X}$ elem, amelyre $Fx = y$.
Legyen
$$G_t z := z - tFz + ty \quad (z \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}).$$
Bebizonyítjuk, hogy alkalmas $t > 0$ paraméter mellett a $G_t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ leképezés kontrakció. Ennek $x \in \mathbb{X}$ ***fixpontjára***
$$G_t x = x - tFx + ty = x, \quad \text{azaz} \quad Fx = y$$
teljesül. Minthogy
$$\|G_t v - G_t w\| \leqq \|I - tF\| \, \|v - w\| \quad (v, w \in \mathbb{X}, t > 0),$$
elég azt megmutatni, hogy alkalmas $t > 0$ számra az $F_t := I - tF$ operátor normájára $\|F_t\| < 1$ teljesül.
Valóban $m\|z\|^2 \leqq \langle Fz, z\rangle \leqq M\|z\|^2$ $(z \in X)$ alapján minden $z \in X$ elemre
$$(1 - tM)\|z\|^2 \leqq \langle F_t z, z\rangle = \langle z, z\rangle - t\langle Fz, z\rangle \leqq (1 - tm)\|z\|^2.$$
Minthogy F_t is önadjungált, azért innen $t = 1/M$ esetén
$$\|F_t\| = \sup_{\|z\| \leqq 1} |\langle F_t z, z\rangle| \leqq \frac{M - m}{M} < 1.$$
Ezzel a tételt bebizonyítottuk $\square$.

3. Egzakt framek

A frame sorfejtések egy speciális esetét kapjuk, ha $\mathfrak{E}$ az $\mathbb{X}$ tér egy bázisa és $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}^*$ az $\mathfrak{E}$-re biortogonális rendszer. Ilyenkor minden $x \in \mathbb{X}$ vektorra

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k^* \rangle e_k \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{3.1}$$

teljesül, következésképpen az $\mathfrak{E}$ olyan keret, amelynek frame operátora az identikus leképezés.
Ebben a pontban megmutatjuk, hogy az ilyen framek azonosak az egzakt framekkel. Emlékeztetve a definícióra akkor mondjuk, hogy az $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ ***frame egzakt***, ha az $\mathfrak{E}$ bármely tagját elhagyva a maradék rendszer már nem frame.

A frame és a bázis közötti különbség szemléltetésére tekintsük a következő példákat (szeparábilis) Hilbert-térre szorítkozva.

Ha $e_n \in \mathbb{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ egy teljes ortonormált rendszer, akkor a ***Parseval-formula*** szerint minden $x \in \mathbb{X}$ elemre

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

teljesül, következésképpen a szóban forgó rendszer ***szoros, egzakt frame*** az $\mathbb{X}$ Hilbert-téren a $m = M = 1$ frame konstansokkal.

Legyen $\mathfrak{E}_1 = (e_0, e_0, e_1, e_1, e_2, e_2, \cdots)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy erre a rendszerre is fennáll az (2.7) egyenlőtlenség a $m = 1, M = 2$ konstansokkal, következésképpen $\mathfrak{E}_1$ is frame. Nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{E}_1$ bármely tagját elhagyva továbbra is frame marad, ezért $\mathfrak{E}_1$ nem egzakt. Az $\mathfrak{E}_2 = (2e_0, e_1, e_2, e_3, \cdots)$ rendszer egzakt frame a $m = 1, M = 2$ frame konstansokkal.

A most bemutatott példák alapján is nyilvánvaló, hogy a frame tagjai lehetnek lineárisan összefüggők. Ebből adódóan előfordulhat, hogy a (2.3) alatt bevezetett

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle \tilde{e}_n \quad (\tilde{e}_n := F^{-1}e_n,\ n \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

frame sorfejtés mellett az x elem $\hat{x} := (\langle x, e_n\rangle, n \in \mathbb{N})$ frame együtthatóktól különböző $a = (a_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell$ együtthatókkal is előállítható

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \tilde{e}_n \quad (a = (a_n, n \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

alakban. Az összes ilyen együttható sorozat közül a frame együtthatók ℓ^2-normája minimális. Érvényes ugyanis az alábbi

2. Tétel. *Bármely (3.3) feltételnek eleget tevő a sorozatra*

$$\|a\|_{\ell^2}^2 = \|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 + \|\hat{x} - a\|_{\ell^2}^2, \tag{3.4}$$

következésképpen

$$\|a\|_{\ell^2} \geq \|\hat{x}\|_{\ell^2}.$$

Bizonyítás. A (2.9) egyenlőség alapján

$$\langle x, Fx\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|\hat{x}\|_{\ell^2}^2.$$

Mivel F önadjungált, azért

$$\langle \tilde{e}_n, Fx\rangle = \langle F^{-1}e_n, Fx\rangle = \langle e_n, x\rangle,$$

következésképpen (3.3) alapján

$$\langle x, Fx\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\langle \tilde{e}_n, Fx\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\langle e_n, x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\overline{\langle x, e_n\rangle} = \|\hat{x}\|_{\ell^2}^2,$$

továbbá az itt szereplő sor összege nyilván valós. Ezt felhasználva

$$\|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 + \|\hat{x}-a\|_{\ell^2}^2 = 2\|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 + \|a\|_{\ell^2}^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}}(\langle x, e_n\rangle\bar{a}_n + a_n\overline{\langle x, e_n\rangle}) = \|a\|_{\ell^2}^2.$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

Az egzakt keretek egy jellemzését fogalmaztuk meg a következő állításban.

3.Tétel. *Legyen $\mathfrak{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ egy frame az $\mathbb{X}$ Hilbert téren és jelölje $\tilde{\mathfrak{E}} = (\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N})$ az $\mathfrak{E}$ frame inverzét. Az $\mathfrak{E}$ frame akkor és csak akkor egzakt, ha*

$$\langle e_n, \tilde{e}_n\rangle = 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.5}$$

Speciálisan minden egzakt frame minimális, továbbá $\mathfrak{E}$ és $\tilde{\mathfrak{E}}$ biortogonális.

Bizonyítás. i) Legyen először $\mathfrak{E}$ egzakt frame. Kiindulva a (2.7) egyenlőtlenségből jelölje m és M az $\mathfrak{E}$ frame konstansait. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy van olyan $s \in \mathbb{N}$ index, amelyre $a := \langle e_s, \tilde{e}_s\rangle \neq 1$ teljesül. Megmutatjuk, hogy alkalmasan választott $0 < q < 1$ számmal minden $x \in \mathbb{X}$ elemre fennáll az

$$qm\|x\|^2 \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqq M\|x\|^2 \tag{3.6}$$

egyenlőtlenség. Innen következik, hogy az $(e_n, n \in \mathbb{N}\setminus\{s\})$ rendszer is frame, s ez ellentmond annak, hogy $\mathfrak{E}$ egzakt.

A (3.6) jobb oldala nyilvánvalóan fennáll. A bal oldali egyenlőtlenség igazolásához írjuk fel az $y = e_s$ elelemre a (2.5) frame sorfejtést. Ekkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$e_s = (1-a)^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} \langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle e_n.$$

A Cauchy–egyenlőtlenség alapján tetszőleges $x \in X$ elemre adódik az

$$|\langle x, e_\ell\rangle|^2 = |1-a|^{-2}|\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} \langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle\langle x, e_n\rangle|^2 \leqq C \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle x, e_n\rangle|^2,$$

becslés, ahol
$$C := |1-a|^{-2} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle|^2 < \infty.$$
Innen (3.4) alapján következik, hogy
$$m\|x\|^2 \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqq (1+C) \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle x, e_n\rangle|^2$$
s ezzel megmutattuk, hogy a (3.6) egyenlőtlenség a $q = (1+C)^{-1}$ konstanssal valóban fennáll. A kapott ellentmondással igazoltuk, hogy egzakt frame esetén minden $n \in \mathbb{N}$ indexre fennáll a (3.6) egyenlőség.

ii) Megfordítva most induljunk ki abból, hogy fennáll (3.6). Legyen $s \in \mathbb{N}$ és induljunk ki az e_s elem következő két előállításából:
$$e_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{sn} e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_s, \tilde{e}_n\rangle e_n.$$
Erre a két előállításra és az $x_n = \delta_{sn}$ $(n \in \mathbb{N})$ együttható sorozatra és $\mathfrak{E}$ helyett a $\tilde{\mathfrak{E}}$ rendszerre felírva a (3.6) egyenlőtlenséget
$$1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle e_s, \tilde{e}_n\rangle|^2 + |1-1|^2$$
adódik. Innen $\langle e_s, \tilde{e}_s\rangle = 1$ alapján
$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle e_s, \tilde{e}_n\rangle|^2 = 0$$
következik. Ezzel megmutattuk, hogy a (3.6) feltétel az $\langle e_s, \tilde{e}_n\rangle = \delta_{sn}$ $(n \in \mathbb{N})$ biortogonalitási feltétel teljesülését vonja maga után. Innen már következik, hogy $\mathfrak{E}$ minimális rendszer. A minimális rendszer értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy belőle bármely elem elhagyásával kapott részrendszer már nem lehet zárt rendszer, következésképpen frame sem lehet. Ezzel megmutattuk, hogy a (3.6) feltételnek eleget tevő frame egzakt. □

A fenti meggondolás alapján már egyszerűen adódik az egzakt framekre vonatkozó alábbi normálási feltétel.

1.Következmény. *Bármely egzakt frame esetén*

(3.7) $$m \leqq \|e_n\|^2 \leqq M \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül.

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk a (2.7) egyenlőtlenséget az $x = \tilde{e}_k := F^{-1}e_k$ elemre és vegyük figyelembe, hogy $\mathfrak{E}$ és $\tilde{\mathfrak{E}}$ biortogonális. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$m\|\tilde{e}_k\|^2 \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \tilde{e}_k, e_n\rangle|^2 = |\langle \tilde{e}_k, e_k\rangle|^2 \leqq \|\tilde{e}_k\|^2\|e_k\|^2,$$

ahonnan a (3.7) bal oldala már következik.

Megjegyezzük, hogy a (3.6) jobb oldala nemcsak egzakt, hanem bármely keretre fennáll. Ennek igazolásához alkalmazzuk a (2.7) egyenlőtlenséget az $x = e_k$ elemre. Ekkor

$$\|e_k\|^4 \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_k, e_n\rangle|^2 \leqq M\|e_k\|^2,$$

s ezzel az állítás második részét is igazoltuk. □

Felhasználva a feltétlen bázis fogalmát a most bizonyított 1. Következmény és a 3.Tétel alapján az egzakt framek egy újabb jellemzését kapjuk. Akkor mondjuk, hogy egy vektorrendszer ***feltétlen bázis*** egy Banach-térben, ha vármely átrendezése bázis.

2. Következmény. *Az $\mathfrak{E}$ rendszer akkor és csak akkor egzakt frame az $\mathbb{X}$ Hilbert téren, ha $\mathfrak{E}$ feltétlen bázis, amelyre teljesül a (3.7) feltétel.*

6. Függelék

1. Fourier-transzformáció

Ebben a pontban összefoglaljuk a legfontosabb, Fourier-transzformációval kapcsolatas fogalmakat és tételeket.

Jelölje $L^p = L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ azoknak a számegyenesen értelmezett, Lebesgue-mérhető függvényekenek az ekvivalencia osztályát, amelyekre $\|f\|_p < \infty$, ahol

$$(1)\quad \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \inf\Big\{K \geq 0 \,|\, |f(t)| \leqq K \ \text{ m.m. } \ t \in \mathbb{R}\Big\}$$

a szokásos L^p normát jelöli. Két függvény akkor tartozik egy ekvivalencia osztályba, ha majdem mindenütt (röviden: m.m.) megegyeznek. Az L^p-tér az $\|\cdot\|_p$ normával ***Banach-teret*** alkot. Speciálisan L^2 az

$$(2)\qquad \langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\, dt \quad (f, g \in L^2)$$

skaláris szorzattal ***Hilbert-tér.***

Az $\mathbb{R}$-en értelmezett fólytonos függvények halmazát a $C(\mathbb{R})$, a végtelenben eltűnő folytonos függvényeket a $C_0(\mathbb{R})$ szimbólummal jelöljük:

$$(3)\qquad C_0(\mathbb{R}) := \Big\{f \in C)\mathbb{R}) \,\Big|\, \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0\Big\}.$$

A Fourier-transzformáció értelmezéséhez az

$$(4)\qquad \epsilon(t) := \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t \quad (t \in \mathbb{R})$$

1-szerint periodikus komplex trigonometrikus függvényből, az $\mathbb{R}$ ***alapkarakteréből*** indulunk ki. Az

$$(5)\qquad \epsilon_x(t) := \epsilon(x \cdot t) \quad (x, t \in \mathbb{R})$$

függvénsereget komplex trigonometrikus rendszernek nevezzük. Az ϵ_x $(x \in \mathbb{R})$ eleget tesznek az

$$\text{(6)} \qquad i)\ \epsilon_x(t_1+t_2)=\epsilon_x(t_1)\epsilon_x(t_2),\quad ii)\ \epsilon_{x_1+x_2}(t)=\epsilon_{x_1}(t)\epsilon_{x_2}(t)$$
$$(x,x_1,x_2,t,t_1,t_2\in\mathbb{R})$$

függvényegyenleteknek. Megfordítva megmutatható, hogy folytonos, 1 abszolút értékű függvények esetén az (5) i) tulajdonság jellemzi az ϵ_x $(x \in \mathbb{R})$ rendszert. Nevezetesen, ha valamely $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ folytonos függvényre $\phi(t_1+t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$ teljesül , akkor egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $\phi(t) = \epsilon_x(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Az absztrakt harmonikus analízisben szokásos szóhasználattal élve ennek alapján azt mondjuk, az $(\epsilon_x, x \in \mathbb{R})$ trigonometrikus rendszer az $\mathbb{R}$ additív csoportjának ***karakter rendszere.***

Az L^1 téren értelmezett

$$\text{(7)} \qquad \widehat{f}(x) := (\mathcal{F}f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\epsilon}_x(t)\,dt \quad (f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R})$$

leképezést ***Fourier-transzformációnak***, az $\widehat{f}$ függvényt az f ***Fourier-transzformáltjának*** nevezzük. Ismertes, hogy $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ korlátos lineáris operátor, amelyre

$$\text{(8)} \qquad \|\mathcal{F}f\|_\infty \leqq \|f\|_1 \quad (f \in L^1(\mathbb{R})).$$

A Fourier-transzformáció, amely a (7) képlet alapján csak L^1-beli függvényekre értelmezhető, kiterjeszthető az $L^2(\mathbb{R})$ térre. A kiterjesztett operétor, amelyet szintén $\mathcal{F}$-fel fogunk jelölni, az L^2-nek egy ***önmagára való lineáris bijekciója.*** Ezen túlmenően $\mathcal{F}$ ***unitér az L^2-ön,***

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle = \langle f, g\rangle \quad (f, g \in L^2).$$

A Fourier-transzformáció szoros kapcsolatban áll az alábbi

$$\text{(9)} \qquad (\tau_a f)(x) : = f(x+a),\quad (\nu_a f)(x) = \epsilon_a(x)f(x),$$
$$(\delta_s f)(x) : = f(sx) \quad (a, x \in \mathbb{R}, s > 0)$$

transzláció, moduláció és dilatáció operátorokkal.

Nevezetesen

$$\text{(10)} \qquad \tau_a \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \nu_{-a}, \quad \mathcal{F} \circ \tau_a = \nu_a \circ \mathcal{F},$$
$$\mathcal{F} \circ \delta_s = s^{-1}\delta_{s^{-1}} \circ \mathcal{F} \quad (a \in \mathbb{R}, s > 0).$$

Az

$$\text{(11)} \qquad (\mathcal{F}'f)(x) := (\mathcal{F}f)(-x) \quad (x \in \mathbb{R}, f \in L^2 \cup L^1)$$

operátort a ***Fourier-transzformáció inverzének*** nevezzük. Az elnevezés jogosultságát a következő tény támasztja alá :

Bármely $f \in L^2$ függvényre

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}'f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}'f) = f \quad (f \in L^2). \tag{12}$$

Az $\mathcal{F}$ adjungáltja az $\mathcal{F}'$. Nevezetesen

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}'g\rangle \quad (f, g \in L^2). \tag{13}$$

Ez az azonosság minden L^1-beli f, g függvénypárra is fennáll.

Irodalomjegyzék

[1] G.Bachman, L. Narici, E. Beckenstein *Fourier and Wavelet Analysis.* Universitext, Springer-Verlag New York, Inc. (2000).

[2] Charles K. Chui *An Introduction to Wavelets.* Academic Press, Inc. (1991).

[3] I. Daubechies *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis.* IEEE Trans. Inform. Theory, 36 (1990), 961–1005.

[4] I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992).

[5] H. Feichtinger and K. Gröchenig *A unified approach to atomic decompositions through integrable group representations.* Function Spaces and Applications, M. Cwikel et al., eds, Lecture Notes in Math. 1302, Springer–Verlag, Berlin, New York, (1988), 52–73

[6] H. Feichtinger *Banach convolution algebras of Weiner type.* Functions, Series, Operators, Proc. Conf. Budapest, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 38 (1980), 509–524.

[7] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul *Transforms associates to square group representations, I, General results.* J. Math. Phys., 26 (1985), 2473–2479.

[8] A.J.E.M. Janssen *Bargmann transform, Zak transform, and coherent states.* J. Math. Phys., 23 (1982), 720–731.

[9] S. Mallat *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, (1998).

[10] Y. Meyer *Wavelets: Algorithms and Applicationa.* SIAM,(1993).

[11] M. Rieffel *Von Neumann algebras associated with pairs of lattices in Lie groups.* Math. Ann., 257 (1981), 403–418.

[12] W. Rudin *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Pub. Wiley and Sons, New York, London, (1967)

[13] W. Rudin *Real and Complex Analysis.* 2nd Ed., McGraw–Hill, Inc., New York, (1974)

[14] Schipp F. *Fourier analízis.* ELTE Jegyzet, (2000). (1990).

[15] F. Schipp, W.R. Wade, and P. Simon, with assistance from J. Pál *Walsh Series, An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis.* Adam Hilger, Ltd., Bristol and New York, (1990).

[16] F. Schipp, W.R. Wade *Transforms on Normed Fields.* Leaflets in Mathematics, Janus Pannonius University, Pécs,(1995).

[17] E. Stein and G. Weiss *An Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1971).

[18] M.H. Taibleson *Fourier Analysis on Local Fields.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1975).

[19] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, and E.I. Zelonov *p-adic Analysis and Mathematical Physics.* Series in Soviet and East European Mathematics, Vol. 10, World Scientific Publishers, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, (1994).

[20] D. F. Walnut *An Introduction to Wavelet Analysis.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, (2004).

[21] J. Zak *Finite translations in solid state physics.* Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1385–1397.

[22 A. Zygmund *Trigonometric Series.* Cambridge Univ. Press, New York, (1959).