9. **Feladat:** Írjuk fel parciális törtek összegeként az alábbi racionális törtet:

$$\frac{12}{(x+3)x^2} =$$

Megoldás: A nevező elsőfokú tényezők szorzataként írható fel:

$$(x+3) \cdot x \cdot x$$

Ekkor a parciális törteket a következő alakban kell keresni:

$$\frac{12}{(x+3)x^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

Határozzuk meg A, B és C értékeit. Hozzunk közös nevezőre. Vegyük észre, hogy a közös nevező ebben az esetben is az eredeti nevezővel egyezik meg.

$$\frac{12}{(x+3)x^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+3) + C(x+3)}{(x+3)x^2}$$

Vizsgáljuk a számlálók egyenlőségét.

$$Ax^2 + Bx(x+3) + C(x+3) = 12$$

Rendezzük a polinomokat.

$$(A+B)x^2 + (3B+C)x + 3C = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 12$$

Írjuk fel az együtthatók egyenlőségét.

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 3B+C &= 0 \\ 3C &= 12 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert.

Az utolsó egyenlet alapján $C = 4$. Behelyettesítve a másodikba kapjuk, hogy $B = -\frac{4}{3}$. Az első egyenletbe helyettesítve $A = \frac{4}{3}$.

Tehát

$$\begin{aligned} C &= 4 \\ B &= -\frac{4}{3} \\ A &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

A racionális tört parciális tört alakja:

$$\frac{12}{(x+3)x^2} = \frac{\frac{4}{3}}{x+3} - \frac{\frac{4}{3}}{x} + \frac{4}{x^2}$$

10. **Feladat:** Írjuk fel parciális törtek összegeként az alábbi racionális törtet:

$$\frac{6x}{(x^2+5)(x+1)} =$$

Megoldás: Mivel $x^2 + 5 \geq 5$, ezért az első tényezőnek a nevezőben nincs gyöke, azaz egy tovább már nem bontható másodfokú polinom. Ekkor az egyik résztört nevezője $x^2 + 5$ és a hozzátartozó számlálót szigorúan elsőfokú polinom alakjában kell keresni.

$$\frac{6x}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+5)} + \frac{C}{x+1} =$$

Hozzunk közös nevezőre.

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+5)}{(x^2+5)(x+1)} =$$

Rendezzük a számlálót.

$$= \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B+5C}{(x^2+5)(x+1)} =$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$(A+C)x^2+(A+B)x+B+5C = 6x$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ A+B &= 6 \\ B+5C &= 0 \end{aligned}$$

Olvassuk le az egyenletrendszer megoldását.

Ha $A = -C$, akkor

$$\begin{aligned} -C+B &= 6 \\ B+5C &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat.

$$-6C = 6 \quad \Rightarrow C = -1$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} C &= -1 \\ B &= 5 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Tehát a racionális tört parciális törtekre bontása:

$$\frac{6x}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{x+5}{(x^2+5)} - \frac{1}{x+1} =$$

11. **Feladat:** Milyen típusú parciális törtek alakjában kell keresni az alábbi racionális törtet ?

$$\frac{1}{(x+3)^2(x^2+4)x^4} =$$

Megoldás:

$$\frac{1}{(x+3)^2(x^2+4)x^4} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)} + \frac{E}{x} + \frac{F}{x^2} + \frac{G}{x^3} + \frac{H}{x^4}$$

1.1.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:**

$$\int \frac{5x-6}{x^2-3x} dx =$$

Megoldás: Az integrandus egy valódi racionális tört, a számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú polinom. A nevezőben x kiemelésével szorzattá alakítható, tehát a tört felírható parciális törtek összegeként.

Végezzük el a parciális törtekre való bontást.

$$\frac{5x-6}{x^2-3x} = \frac{5x-6}{(x-3)x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x}$$

Hozzunk közös nevezőre.

$$\frac{5x-6}{x^2-3x} = \frac{5x-6}{(x-3)x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} = \frac{Ax+B(x-3)}{(x-3)x}$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$Ax + B(x-3) = 5x - 6$$

Rendezzük a jobboldali polinomot.

$$(A+B)x - 3B = 5x - 6$$

Írjuk fel a megfelelő együtthatók egyenlőségét.

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ -3B &= -6 \end{aligned}$$

Olvassuk le a megoldást.

$$B = 2 \qquad \text{és} \quad A = 3$$

Az integrandus parciális törtekre bontva:

$$\frac{5x-6}{x^2-3x} = \frac{5x-6}{(x-3)x} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x}$$