239. Az $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ teljesíti az előző feladat feltételeit, ezért a **238.** feladat eredményét is felhasználva:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\mathcal{G}} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

240. A szinguláris helyeket vegyük körül például olyan kis körökkel, amelyek $\mathcal{G}$ belsejében, de egymás külsejében haladnak; ekkor a reziduum definíciójából (**D 24.42**) és a **T 24.36** tételből közvetlenül adódik az állítás.

241. Az Euler-formulát (**T 24.6**) felhasználva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $\cos\dfrac{n\pi x}{p} = \dfrac{e^{\frac{in\pi x}{p}} + e^{-\frac{in\pi x}{p}}}{2}$ és $\sin\dfrac{n\pi x}{p} = \dfrac{e^{\frac{in\pi x}{p}} - e^{-\frac{in\pi x}{p}}}{2i}$. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{\frac{in\pi x}{p}} + \frac{a_n+ib_n}{2}e^{-\frac{in\pi x}{p}}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}},$$

ahol $n>0$ esetben **D 23.26** szerint: $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} =$

$$\frac{1}{2p}\left(\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx - i\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx\right) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx.$$

Hasonlóan: $c_{-n} = \dfrac{a_n+ib_n}{2} = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)e^{\frac{in\pi x}{p}}$, amiből $n \mapsto -n$ helyettesítéssel kapjuk az állítást negatív indexű c_n együtthatókra. Ha $n=0$, akkor $c_0 = a_0$.

242. Jelöljük $\mathcal{G}$-vel a $|z|=1$ egyenletű kört. A **T 24.36** és a **T 24.22** tételek szerint:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ix})}{e^{i(n+1)x}} ie^{ix}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ix})e^{-inx}\,dx$$

($n \in \mathbf{Z}$), amelyek **24.52** szerint éppen az $f(e^{ix})$ függvény komplex alakban felírt Fourier-sorának együtthatói.

25. Laplace-transzformáció (megoldások)

1. a) $\mathcal{L}\{te^{at};p\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-pt}\cdot te^{at}\,dt = \int_0^\infty te^{(a-p)t}\,dt$. A parciális integrálás módszerét (**D 12.10**) $f'(t) = e^{(a-p)t}$, $g(t) = t$ választással alkalmazva

$$\mathcal{L}\{te^{at};p\} = \left[\frac{t\cdot e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\,dt = \left[\frac{t\cdot e^{(a-p)t}}{a-p} - \frac{e^{(a-p)t}}{(a-p)^2}\right]_0^\infty = \tag{1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{te^{(a-p)t}}{a-p} - \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(a-p)t}}{(a-p)^2} + \frac{1}{(a-p)^2}.$$

Használjuk fel, hogy tetszőleges komplex számra $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left|\frac{e^{(a-p)t}}{(a-p)^2}\right| = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{|a-p|^2}e^{[\operatorname{Re}(a-p)]\cdot t} = 0$, ha $\operatorname{Re}(a-p) < 0$, azaz

$\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} p < 0$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left|te^{(a-p)t}\right| = \lim_{t\to\infty} te^{[\operatorname{Re}(a-p)]\cdot t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)t}} =$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)e^{(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)t}} = 0$ (az utolsó átalakításnál a **T 11.12** L'Hospital szabályt alkalmazva).

Minthogy $|f(t)| \to 0$-ból $f(t)\to 0$ következik, $\mathcal{L}\{te^{at};p\} = \dfrac{1}{(a-p)^2}$.

b) A parciális integrálás módszerét alkalmazva (a)-hoz hasonló számítással)

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at};p\} = \int_0^\infty e^{-pt}t^n e^{at}\,dt = \int_0^\infty t^n e^{(a-p)t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^n\cdot e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty - \frac{n}{a-p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{(a-p)t} = \frac{n}{p-a}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}e^{at};p\right\}.$$

Innen teljes indukcióval adódik

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at};p\} = \frac{n}{p-a}\cdot\frac{n-1}{p-a}\cdot\ldots\cdot\mathcal{L}\{e^{at};p\} = \frac{n}{p-a}\cdot\frac{n-1}{p-a}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p-a} =$$

$$= \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

2. $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta e^{-pt}\gamma\,dt = \frac{\gamma\left(e^{-\alpha p} - e^{-\beta p}\right)}{p}.$

3. Ennél és a következő néhány feladatnál a megoldáshoz jól használható az **1.** feladat **a)** részéhez hasonlóan bizonyítható alábbi összefüggés:

(*) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left|t^n\cdot e^{(at+b)}\right| = 0$; $n\in\mathbf{N}$, a és b komplex szám, $\operatorname{Re} a < 0$.

$$\mathcal{L}\{g(t);p\} = \int_a^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \lim_{B\to\infty}\int_a^B e^{-pt}\cdot e^{-b(t-a)}\,dt = \frac{e^{-ba}}{p+b}.$$

(Kihasználtuk, hogy a $(*)$ összefüggés miatt $\lim\limits_{B\to\infty}\left|\dfrac{e^{B(-p-b)+ba}}{-p-b}\right| = 0$, ha $\operatorname{Re} p > 0$ teljesül.)

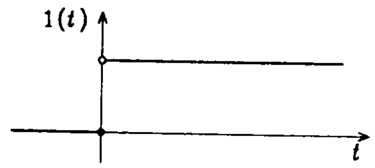
4. Az ábrából leolvashatjuk, hogy $f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a, \\ t-a, & \text{ha } a < t \le b, \\ b-a, & \text{ha } t > b, \end{cases}$ így az előző feladat megoldásában szereplő $(*)$ összefüggést felhasználva:

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \int_a^b e^{-pt}(t-a)\,dt + \int_b^\infty e^{-pt}(b-a)\,dt = \ldots = \left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)\frac{1}{p^2}.$$

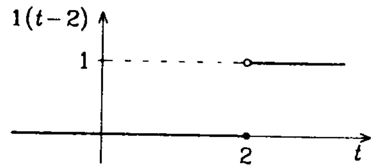
5. $\dfrac{2}{p^3}e^{-3p}$, kihasználva a **3**. feladat megoldásának $(*)$ képletét.

6. VIII. igazolása: A $\cos bt = \frac{1}{2}\left(e^{ibt} + e^{-ibt}\right)$ azonosság miatt $e^{at}\cos bt = \frac{1}{2}\left(e^{(a+ib)t} + e^{(a-ib)t}\right)$. A III. képlet alkalmazásával adódik a VIII.
IX. igazolása: Az előzőhöz hasonlóan.
XI. igazolása: $t\cos bt = \frac{1}{2}\left(te^{ibt} + te^{-ibt}\right)$. Az **1a)** feladat eredményét felhasználva adódik a bizonyítandó képlet.
XII. igazolása: Az előzőhöz hasonlóan.
XIII. igazolása: A XI.-hez hasonlóan.
XIV. igazolása: A XI.-hez hasonlóan.

7.



8.

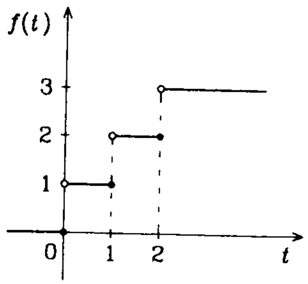


9. $1(t-2)\cdot 1(t-3) = 1(t-3)$.

10.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < t \le 1, \\ 2, & \text{ha } 1 < t \le 2, \\ 3, & \text{ha } t > 2. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)\,dt =$$
$$= \int_0^1 e^{-pt}\,dt + \int_1^2 e^{-pt}\cdot 2\,dt + \int_2^\infty e^{-pt}\cdot 3\,dt =$$
$$= \left(1 + e^{-p} + e^{-2p}\right)\cdot\frac{1}{p}.$$



11. Mivel $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, ezért $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}};p\right\} = \dfrac{15}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{p^5}}$.

12. Mivel $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$, így

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos 2t\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right) =$$
$$= \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

13. A $\sin t\cdot\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$ azonosság felhasználásával $\dfrac{1}{p^2+4}$.

14. Linearizálva $\sin^2 t$-t, és használva a $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$ összefüggést, a Laplace-transzformáltra $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$ adódik.

15. A **12**. feladat megoldásához hasonlóan adódik, hogy $f(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2a}{2}\cdot\cos 2t + \dfrac{\sin 2a}{2}\cdot\sin 2t$, $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \dfrac{1}{2p} + \dfrac{\cos 2a}{2}\cdot\dfrac{p}{(p^2+4)} + \dfrac{\sin 2a}{2}\cdot\dfrac{2}{p^2+4}$.

16. $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$. **17.** $\dfrac{2p^2 b}{(p^2+b^2)^2}$. **18.** $\dfrac{p^2}{p^3+1}$.

19. $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ helyettesítéssel az I., III. képletekből $\mathcal{L}\{e^t\operatorname{ch} t\} = \dfrac{p-1}{(p-1)^2-1}$.

20. $\operatorname{sh}(3t-5) = \frac{1}{2}\left(e^{3t-5} + e^{5-3t}\right)$ helyettesítéssel $\dfrac{e^{-5}}{2(p-3)} - \dfrac{e^5}{2(p+3)}$.

21. $\mathcal{L}\{te^t\} + \mathcal{L}\{t\operatorname{ch} t\} = 2\dfrac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$ a táblázat alapján.

22. $\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

23. A $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ definiáló azonosság felhasználásával $\dfrac{p^3}{p^4+1}$.

24. $\dfrac{p}{p^4+1}$. **25.** A **23**.-hoz hasonlóan $\dfrac{a}{p^2-4a^2}$.

26. A $\operatorname{ch} 3t = \dfrac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$ és a $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ azonosságok felhasználásával $\mathcal{L}\{\operatorname{ch} 3t\cdot\sin^2 t\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p}{p^2-9} + \dfrac{-p^3+5p}{p^4-10p^2+169}\right]$. (Felhasználhatjuk a **62**. feladat eredményét is; ekkor más alakban kapjuk a transzformáltat.)

27. **T 25.6** szerint megadhatók olyan K_1 és C_1 nemnegatív valós számok, hogy $|f_1(t)| \le K_1 e^{C_1 t}$; így $f(t) = a\cdot f_1(t)$-re $|f(t)| = |af_1(t)| = |a|\cdot|f_1(t)| \le |a|\cdot K_1\cdot e^{C_1 t}$, azaz

$$|f(t)| \le K\cdot e^{Ct}, \text{ ahol } K = |a|\cdot K_1,\ C = C_1.$$

30. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ Laplace-transzformálható, vagyis megadhatók olyan K és C nemnegatív valós számok, hogy

$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right| \le Ke^{Ct}$, ha $t > 0$. Az egyenlőtlenség szerint $1 \le Ke^{Ct}\sqrt{t}$ minden $t > 0$ esetén. A $t = 0$ helyen vett jobb oldali határértékre térve át az $1 \le 0$ ellentmondáshoz jutunk; tehát $\frac{1}{\sqrt{t}}$ nem Laplace-transzformálható.

31. $|f(t)| = \left|e^{3t+2}\right| = e^2 \cdot e^{3t} \le e^2 \cdot e^{3t}$, tehát $K = e^2$ és $C = 3$ választással $|f(t)| \le K \cdot e^{Ct}$ valóban teljesül.

32. $K = 1$, $C = 0$.

33. Legyen $f(t) = \frac{\ln(t+1)}{e^t}$. Ekkor $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = 0$, a L'Hospital szabályt alkalmazva pedig $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ adódik. Minthogy az f függvény a $(0,\infty)$ intervallumon folytonos és a végpontokban létezik határértéke, így f korlátos is a $(0,\infty)$-n. Ezek szerint létezik olyan $K \ge 0$ szám, hogy ha $t > 0$, akkor $|f(t)| \le K$, azaz $\frac{\ln(t+1)}{e^t} \le K$, ahonnan $\ln(t+1) \le K \cdot e^{1\cdot t}$; így $C = 1$.

34. Az előző feladathoz hasonlóan járhatunk el.

35.
$$\big(f*(g+h)\big)(t) = \int_0^t f(s)\big(g(t-s)+h(t-s)\big)\,ds =$$
$$= \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds + \int_0^t f(s)h(t-s)\,ds = (f*g)(t) + (f*h)(t),$$
illetve
$$\big(f*(kg)\big)(t) = \int_0^t f(s)kg(t-s)\,ds = k\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = k(f*g)(t)$$
tetszőleges t-re.

36. A kommutativitás miatt $f*(g*h) = f*(h*g)$. Vezessük be az $a(t)$ jelölést az alábbiak szerint:

$a(t) := (h*g)(t) = \int_0^t h(u)g(t-u)\,du$. Ekkor
$$(f*(h*g))(t) = (f*a)(t) = \int_0^t f(s)a(t-s)\,ds =$$
$$= \int_0^t f(s)\int_0^{t-s} h(u)g(t-s-u)\,du\,ds = \qquad (1)$$
$$= \int_0^t \int_0^{t-s} f(s)h(u)g(t-s-u)\,du\,ds.$$

A legutóbbi kifejezés rögzített t mellett a $0 \le s \le t$, $0 \le u \le t-s$ egyenlőtlenségek által leírt D háromszögtartományon vett kettős integrál; jelöljük ezt az integrált I-vel. Az integrálás sorrendjét megcserélve
$$I = \int_0^t \int_0^{t-u} f(s)h(u)g(t-s-u)\,ds\,du =$$
$$= \int_0^t h(u)\int_0^{t-u} f(s)g(t-s-u)\,ds\,du = (h*(f*g))(t)$$

((1)-ben f és h szerepe, és az u, s változóké is felcserélhető.)
Újra a kommutativitást használva ki $(h*(f*g))(t) = ((f*g)*h)(t)$.

37. $e^t * e^t = \int_0^t e^s \cdot e^{t-s}\,ds = [e^t s]_0^t = te^t$.

38. $t^2 * t^3 = \int_0^t s^2 \cdot (t-s)^3\,ds = t^3 * t^2 = \int_0^t s^3 \cdot (t-s)^2\,ds = \frac{1}{60}t^6$.

39. $-\cos t + 1$. **40.** $-t + \operatorname{sh} t$.

41. A $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$ azonosság alkalmazásával
$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin s\cdot\cos(t-s)\,ds = \int_0^t \frac{1}{2}[\sin t + \sin(2s-t)]\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\sin t)\cdot s - \frac{\cos(2s-t)}{2}\right]_{s=0}^t = \frac{1}{2}t\sin t.$$

42. A $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$ azonosság alkalmazásával
$$\cos t * \cos t = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t).$$

43. A $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$ azonosság alkalmazásával
$$\sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

44. A **39**. és **41**. feladatok eredményét felhasználva $-\frac{1}{2}t\sin t - \cos t + 1$.

45. $\operatorname{sh} t * \sin t = \int_0^t \operatorname{sh} s\cdot\sin(t-s)\,ds$.
A parciális integrálás módszerét először az $u(s) = \operatorname{sh} s$, $v'(s) = \sin(t-s)$ szereposztással alkalmazva (**D 12.10**, 3. típus) az
$$\int \operatorname{sh} s\cdot\sin(t-s)\,ds = \operatorname{sh} s\cdot\cos(t-s) - \int \operatorname{ch} s\cdot\cos(t-s)\,ds,$$
másodszor az $u(s) = \sin(t-s)$, $v'(s) = \operatorname{sh} s$ választást követve
$$\int \operatorname{sh} s\cdot\sin(t-s)\,ds = \operatorname{ch} s\cdot\sin(t-s) + \int \operatorname{ch} s\cdot\cos(t-s)\,ds$$
egyenleteket kapjuk. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva
$$\int \operatorname{sh} s\cdot\sin(t-s)\,ds = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sh} s\cdot\cos(t-s) + \operatorname{ch} s\cdot\sin(t-s)\big),$$
és ebből $\operatorname{sh} t * \sin t = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$ adódik.
Ez a megoldás mintául szolgálhat olyan $f*g$ konvolúciók kiszámítására is, ahol $f(t)$ az $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$, e^t, illetve $g(t)$ a $\sin t$, $\cos t$ típusú függvények egyike. (Megjegyezzük, hogy ugyanakkor ezzel a módszerrel például a hasonló alakúnak tűnő $\int \sin s\cdot\sin(t-s)\,ds$, vagy $\int \operatorname{sh} s\cdot\operatorname{sh}(t-s)\,ds$ integrálása nem vezet eredményre.)

46. Az integrálban az $\operatorname{sh} t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ és $\operatorname{ch} t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ definiáló azonosságokat felhasználva a keresett konvolúció: $2t\operatorname{sh} t$.

47. A konvolúcióképzés kommutatív és disztributív, tehát
$$(\cos^2 t) * t + t * (\sin^2 t) = t * (\cos^2 t) + t * (\sin^2 t) = t * (\cos^2 t + \sin^2 t) = t * 1.$$

A **D 25.7** -ben $f(t)=t$, $g(t)=1$ választással $f(s)g(t-s)=s$, és ezért

$$(t*1)(t)=\int_0^t s\,ds=\frac{t^2}{2}.$$

48. Megfelelő azonosságok és a definíció alkalmazásával a

$$\int_0^t(\sin s+\cos s)\cdot 2\,ds$$

integrálhoz jutunk, melynek értéke $2(-\cos t+\sin t+1)$.

49. A Laplace-transzformáltak táblázatának III. képlete alapján $\mathcal{L}\{e^t\}=\dfrac{1}{p-1}$.
A **T 25.10** konvolúciótétel alapján az $f(t)=e^t$, $g(t)=e^t$ függvényekre $\mathcal{L}\{e^t*e^t\}=\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{1}{(p-1)^2}$.

50. A transzformáltak táblázatának II. képlete szerint $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Tehát $\mathcal{L}\{t^2*t^3\}=\mathcal{L}\{t^2\}\cdot\mathcal{L}\{t^3\}=\dfrac{2!}{p^3}\cdot\dfrac{3!}{p^4}=\dfrac{12}{p^7}$.

51. A függvényt f-fel jelölve, a konvolúció **D 25.7** definíciója szerint $f(t)=(\sin t)*e^t$, és így a **T 25.10** konvolúciótétel szerint

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{e^t\}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{(p^2+1)\cdot(p-1)}.$$

52. Az előzőhöz hasonlóan $\dfrac{2}{(p^2-1)p^2}$. **53.** $\dfrac{2}{p^3(p-2)}$.

54. A $\cos t\cdot\cos s+\sin t\cdot\sin s=\cos(t-s)$ azonosság felhasználásával hozzuk a függvényt $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\displaystyle\int_0^t\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\cos(t-s)\,ds$ alakra, majd használjuk a **T 25.10** konvolúciótételt. A keresett transzformált: $\dfrac{p}{\sqrt{2p}(p^2+1)}$.

55. Az előzőhöz hasonlóan $\dfrac{1}{\sqrt{2p}(p^2+1)}$.

56. A III. képlet szerint $\mathcal{L}\{e^t\}=\dfrac{1}{p-1}$; így $\displaystyle\int_0^t e^s\,ds=\frac{1}{p}\mathcal{L}\{e^t\}=\frac{1}{p(p-1)}$.

57. $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. **58.** $\dfrac{p^2-1}{p(p^2+1)^2}$. **59.** $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

60. Mivel $e^{-t}\left(t^2*e^t\right)=e^{-t}\displaystyle\int_0^t s^2e^{t-s}\,ds$, ezért az előző feladat eredményét felhasználva a függvény Laplace-transzformáltja $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

61. $f'(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t$, így az V. képlet szerint

$$\mathcal{L}\{f'\}=\mathcal{L}\{-\sin 2t\}=-\mathcal{L}\{\sin 2t\}=-\frac{2}{p^2+4}.$$

Másrészt **T 25.12** miatt

$$\mathcal{L}\{f'\}=p\mathcal{L}\{f\}-\lim_{t\to+0}f(t)=p\mathcal{L}\{\cos^2 t\}-\lim_{t\to+0}\cos^2 t=p\mathcal{L}\{\cos^2 t\}-1.$$

Ezekből $p\mathcal{L}\{\cos^2 t\}-1=-\dfrac{2}{p^2+4}$, azaz $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}=\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

62. $\mathcal{L}\{\sin^2 t\}=\dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

63. A **T 25.12** tétel szerint $\mathcal{L}\{f'\}=p\mathcal{L}\{f\}-f(0)=p\mathcal{L}\{f\}$, és

$$\mathcal{L}\{f''\}=p^2\mathcal{L}\{f\}-pf(0)-f'(0)=p^2\mathcal{L}\{f\}.$$

Ezek szerint $\mathcal{L}\{f''-f'-f\}=(p^2-p-1)\mathcal{L}\{f\}$.

64. $(p^4-5p^3-4p^2+2p-1)\mathcal{L}\{f\}-5p^3+25p^2+21p-7+\dfrac{8}{p}$.

65. A tételt az $f(t)=\sin bt$ függvényre alkalmazva

$$\mathcal{L}\{t\sin bt\}=-\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{\sin bt\}=-\frac{d}{dp}\frac{b}{(p^2+b^2)}=\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}.$$

Hasonlóan adódnak a XI, XIII-XIV képletek.

66. $\mathcal{L}\{t^2\cos t\}=(-1)^2\dfrac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}\{\cos t\}=\dfrac{d^2}{dp^2}\left[\dfrac{p}{p^2+1}\right]=\dfrac{d}{dp}\left[\dfrac{-p^2+1}{(p^2+1)^2}\right]=\dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$.

67. A táblázat alapján $\mathcal{L}\{bt\sin bt\}=b\mathcal{L}\{t\sin bt\}=\dfrac{2b^2p}{(p^2+b^2)^2}$; az előző feladatnál látott módon $\mathcal{L}\{(b^2t^2\cos bt)\}=\dfrac{2p^3b^2-6pb^4)}{(p^2+b^2)^3}$. Tehát a keresett Laplace-transzformált: $\dfrac{8b^4p}{(p^2+b^2)^3}$.

68. $\dfrac{p^5-2p^4+4p^3-5p+2}{(p^2+1)^3}$.

69. $\mathcal{L}\{\operatorname{sh}t\sin t\}$ kiszámításához használjuk fel az $\operatorname{sh}t=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ definiáló azonosságot. Ily módon $\mathcal{L}\{\operatorname{sh}t\sin t\}=\dfrac{2p}{p^4+4}$ adódik. Ebből $\mathcal{L}\{t\operatorname{sh}t\sin t\}=-\dfrac{d}{dp}\dfrac{2p}{p^4+4}=\dfrac{6p^4-8}{(p^4+4)^2}$.

70. Az eredeti függvény **T 25.12** differenciálási tétele szerint

$$\mathcal{L}\{y'\}=p\mathcal{L}\{y\}-y(0)=p\cdot Y(p)-1,\quad \text{illetve}$$
$$\mathcal{L}\{y''\}=p^2\mathcal{L}\{y\}-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p-y'(0).$$

A Laplace-transzformált **T 25.13** differenciálási tételét $f(t)=y''(t)$-re alkalmazva

$$\mathcal{L}\{ty''\}=-\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{y''\}=-\frac{d}{dp}\left(p^2Y(p)-p-y'(0)\right)=-p^2Y'-2pY+1.$$

Az eredeti egyenlet transzformáltja

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p^2\frac{dY}{dp} + 4pY - 3 = 0.$$

Utóbbit csak $Y_1(p)$ elégíti ki, tehát $Y_1(p)$ lehet az $y(t)$ transzformáltja.

71. $-p(ap+b)Y' + (ap+2b)Y - 2a = 0.$

72. Az $f(t)$ függvényre a **T 25.13** Laplace-transzformált differenciálási tétele alkalmazható, így a $g(t) = t^m f(t)$ jelöléssel

$$\mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{t^m f(t)\} = (-1)^m \frac{d^m \mathcal{L}\{f\}}{dp^m}.$$

A g függvényre most az eredeti függvény **T 25.12** differenciálási tételét alkalmazva

$$\mathcal{L}\left\{\left(t^m f(t)\right)^{(n)}\right\} = \mathcal{L}\left\{g^{(n)}\right\} =$$
$$= p^n\mathcal{L}\{g\} - p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0) =$$
$$= p^n(-1)^m\frac{d^m\mathcal{L}\{f\}}{dp^m} - p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0).$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor egyezik meg $(-1)^m\dfrac{d^m\mathcal{L}\{f\}}{dp^m}$-mel, ha

$$p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0) = 0. \tag{1}$$

$g(t) = t^m f(t)$, $g'(t) = mt^{m-1}f(t) + t^m f'(t) = t^{m-1}(mf(t) + tf'(t)) = t^{m-1}f_1(t)$ alakú, ahonnan következik, hogy $g'' = t^{(m-1)-1}f_2(t) = t^{m-2}f_2(t)$ alakú, és így tovább; azaz, valamely f_k-val $g^{(k)}(t) = t^{m-k}f_k(t)$ teljesül $1 \le k \le m$-re. Ebből következően $m \ge n$ miatt nyilván $1 \le k \le (n-1)$-re is érvényes $g^{(k)}(0) = 0^{m-k}f_k(0) = 0$, így $g(0) = 0$ miatt (1) nyilvánvalóan fennáll.

73. Minthogy $f(t) = e^{-t}\sin t$ Laplace-transzformálható és

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{e^{-t}\sin t}{t} = 1, \quad \text{valamint} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0,$$

így $\dfrac{f(t)}{t}$ is Laplace-transzformálható. (L. a **33**. feladat megoldását.)

Mivel $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin t; p\} = \dfrac{1}{(p+1)^2+1^2}$ (l. IX), így a **T 25.14** tétel szerint

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}e^{-t}\sin t; p\right\} = \int_p^\infty \frac{1}{(q+1)^2+1^2}\,dq = [\operatorname{arctg}(q+1)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+1).$$

74. $$\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{at}}{te^t}; p\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{(a-1)t}}{t}; p\right\} = \int_p^\infty\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{q-a+1}\right)dq =$$
$$= \left[\ln\frac{q+1}{q-a+1}\right]_p^\infty = \ln\frac{p-a+1}{p+1}.$$

75. Az előző feladat megoldásához hasonló számítással, felhasználva, hogy $\displaystyle\int\frac{h'(q)}{h(q)}\,dq = \ln h(q) + C$, a keresett Laplace-transzformált: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$.

76. $\mathcal{L}\{\operatorname{sh}^2 t\}$ meghatározásánál induljunk ki $\operatorname{sh} t$ definíciójából. A keresett Laplace-transzformált: $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2}{p^2-4}$.

77. Az előző feladat szerint $\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{t}$ Laplace-transzformáltja $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2}{p^2-4}$. Az eredeti függvény **T 25.11** integrálási tételét alkalmazva

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t\frac{\operatorname{sh}^2 s}{s}\,ds\right\} = \frac{1}{4p}\ln\frac{p^2}{p^2-4}.$$

78. **T 25.14**, majd **T 25.11** egymás utáni alkalmazásával: $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{p-\beta}{p-\alpha}$.

79. Induljunk ki $1-\cos t$ transzformáltjából, majd számítsuk ki rendre $\dfrac{1-\cos t}{t}$, $e^{-t}\dfrac{1-\cos t}{t}$, $\displaystyle\int_0^t e^{-s}\frac{1-\cos s}{s}\,ds$ transzformáltját! $F(p) = \dfrac{-1}{p}\ln\dfrac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+1}}$.

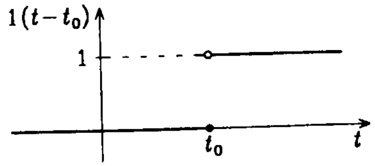
80. Az $f(t) = e^{-t} - 1 + t$ és $F(p) = \mathcal{L}\{f(t); p\} = \dfrac{1}{p^2(p+1)}$ jelölésekkel **T 25.15** szerint

$$\mathcal{L}\{e^{-at} - 1 + at; p\} = \mathcal{L}\{f(at); p\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2\left(\frac{p}{a}+1\right)} =$$
$$= \frac{a^2}{p^2(p+a)}.$$

81. $\dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{a^2}{p^2}\right)$.

82. $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} bt\} = \dfrac{b}{p^2-b^2}$.

83. Az általánosított egységfüggvény grafikonja az ábrán látható. A táblázatunk



I. képlete szerint $\mathcal{L}\{1(t); p\} = \dfrac{1}{p}$,

T 25.16-ból $\mathcal{L}\{1_{t_0}(t); p\} = \mathcal{L}\{1(t-t_0); p\}$
$= e^{-t_0 p}\mathcal{L}\{1(t); p\} = \dfrac{1}{p}e^{-t_0 p}$.

84. $f(t) := 1(t) - 1(t-\tau)$; az előző feladat megoldását felhasználva

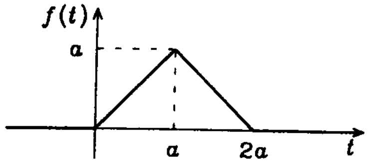
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\} - \mathcal{L}\{1(t-\tau)\} = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p} = \frac{1-e^{-p\tau}}{p}.$$

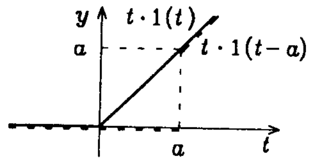
Megjegyzés. A definíció alapján történő megoldás:

$$\mathcal{L}\{f(t); p\} = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^\tau e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\tau = \frac{-e^{-p\tau}+1}{p}.$$

85. $f(t) := \gamma\cdot 1(t-\alpha) - \gamma\cdot 1(t-\beta)$ miatt $\mathcal{L}\{f(t)\} = \gamma\dfrac{e^{-\alpha p} - e^{-\beta p}}{p}$, (l. **83.**)

86. $f(t) = [t\cdot 1(t-0) - t\cdot 1(t-a)] + [(2a-t)\cdot 1(t-a) - (2a-t)\cdot 1(t-2a)]$. (**Lásd a baloldali ábra.**) A felírás helyessége az első két tagra vonatkozóan a jobboldali ábrából is kiolvasható.





Átalakítással $f(t) = t\cdot 1(t) + (2a-t-t)1(t-a) + (t-2a)1(t-2a)$, tehát $f(t) = t\cdot 1(t) - 2(t-a)\cdot 1(t-a) + (t-2a)\cdot 1(t-2a)$. A táblázat II. képlete szerint $f_2(t) = t\cdot 1(t)$-re $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \dfrac{1}{p^2}$, így a **T 25.16** eltolási tétel szerint

$\mathcal{L}\{f_2(t-t_0)\} = \mathcal{L}\{(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\} = e^{-t_0p}\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \dfrac{1}{p^2}e^{-t_0p}$. Az utóbbi összefüggést alkalmazva

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\cdot 1(t)\} - 2\cdot\mathcal{L}\{(t-a)\cdot 1(t-a)\} + \mathcal{L}\{(t-2a)\cdot 1(t-2a)\} =$$
$$= \frac{1}{p^2} - 2e^{-ap}\frac{1}{p^2} + e^{-2ap}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left(1 - 2e^{-ap} + e^{-2ap}\right) = \frac{1}{p^2}\left(1-e^{-ap}\right)^2.$$

(A definíció szerint is számolhatunk, az $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \int_0^{2a} e^{-pt}\cdot f(t)\,dt =$ $= \int_0^a e^{-pt}\cdot t\,dt + \int_a^{2a} e^{-pt}(2a-t)\,dt$ integráljai parciálisan kiszámíthatóak.)

87. $\dfrac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p}$.

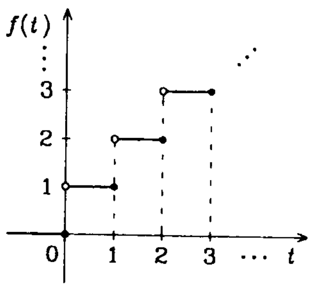
88. $e^{-ap}\dfrac{1}{p+b}$.

89. Felírhatjuk, hogy $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$, ahol $f_1(t) = t\cdot 1(t) - t\cdot 1(t-a)$, $f_2(t) = a\cdot 1(t-a)$, ahonnan **T 25.16** alkalmazásával Laplace-transzformáltként $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$ adódik.

90. $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \big((t-a)\cdot 1(t-a) - (t-a)\cdot 1(t-b)\big) + (b-a)\cdot 1(t-b) =$ $(t-a)\cdot 1(t-a) - (t-b)\cdot 1(t-b)$.

A Laplace-transzformált: $\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)\dfrac{1}{p^2}$.

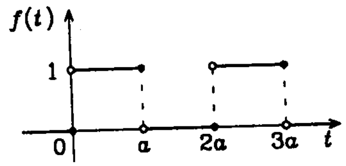
91. $f(t) = [1\cdot 1(t) - 1\cdot 1(t-1)] + [2\cdot 1(t-1) - 2\cdot 1(t-2)] + [3\cdot 1(t-2) - 3\cdot 1(t-3)] + \ldots = 1(t) + 1(t-1) + 1(t-2) + \ldots =$ $\sum_{n=0}^{\infty} 1(t-n)$, ezért $\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np}\dfrac{1}{p} =$ $\dfrac{1}{p(1-e^{-p})}$, ha $\left|e^{-p}\right| = e^{-\operatorname{Re}p} < 1$, így $\operatorname{Re}p > 0$.



92. $\dfrac{2}{p^3}e^{-3p}$.

93. Alkalmazzuk a **T 25.15** hasonlósági, majd az eredeti függvényre vonatkozó **T 25.16** eltolási tételt. $\mathcal{L}\{g(t);p\} = \dfrac{1}{a}e^{\frac{-bp}{a}}\cdot F\left(\dfrac{p}{a}\right)$.

94. **1. megoldás.** A felső ábra szerint f periódusa $h = 2a$, így **T 25.17** (1) képlete szerint



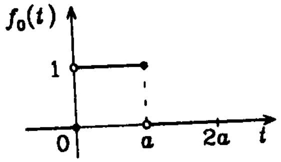
$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2ap}}\int_0^{2a} e^{-pt}f(t)\,dt,$$

$$\int_0^{2a} e^{-pt}f(t)dt = \int_0^a e^{-pt}\cdot 1dt + \int_a^{2a} e^{-pt}\cdot 0dt = \frac{-e^{-pa}+1}{p},$$

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2ap}}\frac{1-e^{-ap}}{p} = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}.$$

2. megoldás. **T 25.17** (2) képlete szerint $\mathcal{L}\{f;p\} = \dfrac{1}{1-e^{-2ap}}\mathcal{L}\{f_0;p\}$, ahol

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > a. \end{cases}$$



Esetünkben a periódus: $h = 2a$, és $f_0(t)$ ábráját lásd oldalt. A **84.** feladat eredménye szerint $\mathcal{L}\{f_0(t);p\} = \dfrac{1-e^{-pa}}{p}$. A megoldás innen azonos az előzővel.

95. **1. megoldás.** Az f függvény 2π szerint periodikus, így **T 25.17** (1) szerint

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin t\,dt =$$
$$= \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi p}}.$$

2. megoldás. Táblázatunk V. képlete szerint $\mathcal{L}\{\sin t\cdot 1(t)\} = \dfrac{1}{p^2+1}$, így **T 25.16** (az eredeti függvény eltolási tétele) miatt

$\mathcal{L}\{\sin(t-\pi)\cdot 1(t-\pi)\} = e^{-\pi p}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$, tehát

$$\mathcal{L}\{f_0\} = \mathcal{L}\{\sin t\cdot 1(t)\} + \mathcal{L}\{\sin(t-\pi)\cdot 1(t-\pi)\} = \left(e^{-\pi p}+1\right)\frac{1}{p^2+1}.$$

A periódus $h = 2\pi$, így **T 25.17** (2) képlete szerint

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\,\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

96. $\mathcal{L}\{f\} = \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}}$. **97.** $\dfrac{b-(b+ap)e^{\frac{-ap}{b}}}{ap^2(1-e^{-ap})}$.

98. **1. megoldás**. A függvény Laplace-transzformáltja **T 25.17** (1) szerint:

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\sin t\,dt = \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{1+p^2}.$$

2. megoldás. A **T 25.17** (2) szerint: $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f_0(t;p\}}{1-e^{-\pi p}}$, ahol

$$f_0(t) = \begin{cases}\sin t, & \text{ha } 0 < t \le \pi,\\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > \pi.\end{cases}$$

Felhasználva, hogy $f_0(t) = \sin t\cdot 1(t) + \sin(t-\pi)1(t-\pi)$, a **T 25.17** tétel (2) és a **T 25.16** alkalmazásával $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\cdot\dfrac{1}{1+p^2}$.

99. A táblázat VII. képlete szerint $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} bt;p\} = \dfrac{b}{p^2-b^2}$. Így a **T 25.18** eltolási tétel szerint $\mathcal{L}\{e^{-at}\operatorname{sh} bt;p\} = \dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$.

100. Az $\operatorname{sh} bt = \frac{1}{2}\left(e^{bt}-e^{-bt}\right)$ definíció és a II. képlet felhasználásával a keresett Laplace-transzformált

$$\frac{(p+b)^{n+1}-(p-b)^{n+1}}{2(p^2-b^2)^{n+1}}.$$

101. Az előző feladat eredményének felhasználásával vagy megoldási menetének megismétlésével

$$\frac{1}{2}\frac{(p-a+b)^{n+1}-(p-a-b)^{n+1}}{[(p-a)^2-b^2]^{n+1}}.$$

102. Induljunk ki a $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ azonosságból.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}};p\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2i}\left(\mathcal{L}\left\{e^{it}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}};p\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-it}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}};p\right\}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2i}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}};p-i\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}};p+i\right\}\right).$$

Ebből a transzformáltak táblázatának XV képlete alapján

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}};p\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2i}\left(\sqrt{\frac{\pi}{p-i}}-\sqrt{\frac{\pi}{p+i}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}i}\cdot\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{-1}}\frac{\sqrt{(\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i})^2}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

103. **T 25.21** szerint és a táblázat V., IV., XII. képleteinek felhasználásával

$$\sin t * \cos t = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{\cos t\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\right\} =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t.$$

104. Az előzőhöz hasonló számítással te^t.

105. **T 25.21** és VII. szerint $\operatorname{sh} t * \operatorname{sh} t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p^2-1)^2}\right\}$. **P 25.30** többszöri alkalmazásával

$$\frac{1}{(p^2-1)^2} = \left[\frac{1}{(p-1)(p+1)}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)(p+1)} =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+1}.$$

(Ezt azt eredményt úgy is megkaphatjuk, ha a racionális törtfüggvények integrálásánál megszokott módon a résztörteket az alábbi alakban keressük meg.

$$\frac{1}{(p^2-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)^2} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p-1}.)$$

Az előállításnak megfelelően

$$\operatorname{sh} t * \operatorname{sh} t = \frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}\cdot t = (\operatorname{sh}^2 t)\cdot t = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}.$$

106. Az elemi törtekre bontás szokott módszerével, vagy a **P 25.30** azonosságot $x = p^2$-re, $\alpha = 0$-ra és $\beta = -1$-re alkalmazva

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

A táblázat felhasználásával

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} = t - \sin t.$$

Megjegyezzük, hogy ezt az inverzet megkaphatjuk konvolúcióképzéssel is (lásd Szász G., Matematika II., 408. o. 3. példájának megoldását).

107. A nevező másodfokú és nincs valós gyöke. Ilyenkor legcélszerűbb azonos átalakításokkal a táblázat VIII. és IX. képletéből adódó képletekre visszavezetni az inverz Laplace-transzformált képzését. A jelen esetben

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2-2p+5} = \frac{2p+1}{(p-1)^2+4} = \frac{2(p-1)+3}{(p-1)^2+2^2} =$$
$$= 2\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + 3\frac{1}{(p-1)^2+2^2} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2},$$

tehát

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\right\} + \frac{3}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2+2^2}\right\} =$$
$$= 2e^t\cos 2t + \frac{3}{2}e^t\sin 2t.$$

108.1. megoldás (elemi törtekre bontással).

$$\frac{p}{(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3}\right\} = te^t + \frac{t^2}{2}e^t.$$

2. megoldás (a kifejtési tétel **T 25.31** általános alakjából).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3};t\right\} = \frac{1}{(3-1)!}\cdot\lim_{p\to1}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}e^{pt}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to1} te^{pt}(2+pt) = te^t\left(1+\frac{t}{2}\right).$$

3. megoldás. (a kifejtési tétel **T 25.32** speciális alakjából).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3};t\right\} = \frac{1}{0!}\lim_{p\to1}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}\right]\cdot\frac{t^2}{2!}\cdot e^{1\cdot t}+$$
$$+\frac{1}{1!}\cdot\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}\right]\cdot\frac{t^1}{1!}\cdot e^{1\cdot t}+$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot\lim_{p\to1}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}\right]\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^{1\cdot t} = \frac{t^2}{2}e^t + te^t.$$

109.1. megoldás. $\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{p}{p^2+1}$ miatt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)};t\right\} = -e^t + te^t + \cos t.$$

2. megoldás. A számlálót $F_1(p)$-vel, a nevezőt $F_2(p)$-vel jelölve

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}.$$

A **T 25.31** kifejtési tételt alkalmazva:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\} = \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}e^{pt}\right] +$$
$$+\frac{1}{(1-1)!}\cdot\lim_{p\to i}\left[(p-i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}e^{pt}\right] +$$
$$+\frac{1}{(1-1)!}\cdot\lim_{p\to -i}\left[(p+i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}e^{pt}\right];$$

és a három határérték rendre $te^t - e^t$, $\frac{1}{2}e^{it}$, $\frac{1}{2}e^{-it}$.

3. megoldás (a T 25.32 speciális alak szerint:) A $p_1 = 1$ gyöknek megfelelő tagok

$$\frac{1}{0!}\cdot\lim_{p\to1}\left[(p-1)^2\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}\right]^{(0)}\cdot\frac{t^1}{1!}\cdot e^t+$$
$$+\frac{1}{1!}\cdot\lim_{p\to1}\left[(p-1)^2\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}\right]'\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^t =$$
$$= \frac{2}{2}te^t + \lim_{p\to1}\left(\frac{2}{p^2+1}\right)'\cdot e^t = te^t - e^t.$$

A $p_2 = i$ és $p_3 = -i$ gyököknek megfelelő tagok összegének kiszámításánál használjuk a $z+\overline{z} = 2\cdot\operatorname{Re} z$ azonosságot:

$$\frac{1}{0!}\cdot\lim_{p\to i}\left[(p-i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}\right]^{(0)}\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^{it}+$$
$$\frac{1}{0!}\cdot\lim_{p\to -i}\left[(p+i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}\right]^{(0)}\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^{-it} =$$
$$= 2\operatorname{Re}\left[\left(\lim_{p\to i}\frac{2}{(p-1)^2(p+i)}\right)e^{it}\right] = 2\cdot\operatorname{Re}\left[\frac{2}{-4i\cdot 2i}e^{it}\right] = \operatorname{Re}(e^{it}) =$$
$$= \operatorname{Re}(\cos t + i\sin t) = \cos t.$$

A tagok összege $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\} = te^t - e^t + \cos t.$

110. $1 - e^t + 2e^{-2t}$.

111. $\frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$.

112. $\frac{1}{2}(e^t + \cos t + \sin t)$.

113. Mivel $\frac{1}{p^2+4}$, $\frac{p}{p^2+4}$, $\frac{1}{p^2-1}$, $\frac{p}{p^2-1}$ inverz Laplace-transzformáltja is kiolvasható a táblázatból, az elemi törtek összegeként való előállítás helyett a

$$\frac{-5p}{(p^2+4)(p^2-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{Cp+D}{p^2-1}$$

előállítással is dolgozhatunk. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5p}{(p^2+4)(p^2+1)};t\right\} = \cos 2t - \operatorname{ch} t.$

114. $e^t + e^{-t}\left(-\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)$.

115. $\frac{1}{p^3-8} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4} =$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2++(\sqrt{3})^2}\text{-ból}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^3-8}\right\} = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t}\sin\sqrt{3}t.$$

116. $e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$. **117.** $te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$.

118. Elemi törtekre bontással, vagy a **106**. feladat megoldásához hasonlóan,
$$\frac{p}{p^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+1}\right)$$ átalakítással: $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$.

119. A $\frac{p^3}{p^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1}\right)$ azonosság alapján:
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^3}{p^4-1}\right\} = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t).$$

120. $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3} = \frac{1}{(p-2)^3} + \frac{-2}{(p-2)^2} + \frac{3}{p-2} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{-3}{p-1}$ miatt
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - 2te^{2t} + 3e^{2t} - te^t - 3e^t.$$

121. **T 25.21** szerint
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\};$$
így a táblázat V. képlete és a **42**. feladat eredménye szerint
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2};t\right\} = \sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

122. Használjuk fel az előző feladat eredményét!
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) * \sin t;$$
ebből, parciális integrálással,
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}(\sin s - s\cos s)\sin(t-s)\,ds = \frac{1}{8}(3-t^2)\sin t - \frac{3}{8}t\cos t.$$

123. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+9}\cdot\frac{p}{p^2+4};t\right\} = (\cos 3t) * (\cos 2t) = \frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$.

124. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\cdot\frac{1}{p+1};t\right\} = (te^{-2t}) * (e^{-t}) = -(t+1)e^{-2t} + e^{-t}$.

125. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-1};t\right\} = (\sin t) * (e^t) = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t)$. (A konvolúciós integrál kiszámításához lásd a **51**. feladat megoldását.)

126. Az előző feladat eredményét felhasználva
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}\cdot\frac{1}{p}\right\} = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t) * 1(t) =$$
$$= \int_0^t \frac{1}{2}(-\sin s - \cos s + e^s)\cdot 1\,ds = \frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t - 2).$$

127. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p^2+1};t\right\} = \operatorname{ch} t * \sin t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$. (Az integrálást illetően l. a **45**. feladat megoldását.)

128. Az előző feladat eredményét felhasználva
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^4-1}\cdot\frac{1}{p^2}\right\} = \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2} * t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2).$$

129. $\frac{p}{(p-1)^3} = p\cdot F(p)$ alakú, ahol $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}$ és a X képlet szerint $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{t^2}{2}e^t$. Így **T 25.23** szerint
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{p\cdot F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f'\} + f(0)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f'\}\} =$$
$$= f' = \left(\frac{t^2}{2}e^t\right)' = e^t\left(\frac{t^2}{2} + t\right).$$

130. Az előző feladatra visszavezetve, vagy a **T 25.23**-ból adódó $\mathcal{L}^{-1}\{p^2\cdot\mathcal{L}\{f\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f''\} - p\cdot f(0) - f'(0)\}$ összefüggést felhasználva $e^t\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)$ adódik. (Lásd még a **116**. feladat megoldását.)

131. **1. megoldás.** $\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)$ miatt az inverz transzformált: $\frac{1}{2}(1-\cos 2t) = \sin^2 t$.

2. megoldás. $\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{p}F(p)$, ahol $F(p) = \frac{2}{p^2+4}$.

Az V. szerint $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sin 2t$. **T 25.22** szerint
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p(p^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t \sin 2s\,ds =$$
$$= (-\cos 2t + 1)\cdot\frac{1}{2} = \sin^2 t.$$

132. A $\frac{2b}{(p^2+b^2)^2} = \frac{1}{p}\cdot\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2} = \frac{1}{p}\cdot F(p)$ egyenlőségből $F(p) = \frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}$.

A keresett inverz Laplace-transzformált: $\frac{-t\cos bt}{b} + \frac{\sin bt}{b^2}$.

133. Legyen $F(p) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2+1}$. Ekkor $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = -\sin t$. **T 25.25**-t alkalmazva
$$-\frac{\sin t}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{q}\right]_p^\infty\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\right\}.$$ Így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\right\} = \frac{\sin t}{t}$.

134. Legyen $F(p) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right]' = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}$. Ekkor

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = \cos t - 1.$$

T 25.25-t alkalmazva

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{\cos t - 1}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty F(q)\,dq\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\right]_p^\infty\right\} =$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\}.$$

Így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\} = \frac{1-\cos t}{t}$.

135. $\frac{e^t - t - 1}{t}$.

136. $\frac{2e^{-p}}{p^3} = e^{-p}\cdot\frac{2}{p^3} = e^{-p}\cdot F(p)$, ahol $F(p) = \frac{2}{p^3}$. A II.-ből $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = t^2$, így **T 25.27** révén

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-p}}{p^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-1\cdot p}\cdot F(p)\right\} = f(t-1)\cdot 1(t-1) =$$

$$= (t-1)^2\cdot 1(t-1) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{ha } t > 1, \\ 0, & \text{ha } t \le 1. \end{cases}$$

137. Használjuk fel a **131**. feladat megoldását $\frac{2}{p(p^2+4)}$ inverzének meghatározására. A keresett inverz:

$$\cos^2 t\cdot 1\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos^2 t, & \text{ha } t > \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

138. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\} = \operatorname{sh} t$. A **136**. feladat megoldásához hasonlóan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-p}}{p^2}\right\} = (t-1)\cdot 1(t-1), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2p}}{p^2-1}\right\} = \operatorname{sh}(t-2)\cdot 1(t-2), \text{ így}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & \text{ha } 0 \le t < 1, \\ (\cos 2t) - t + 1, & \text{ha } 1 \le t < 2, \\ (\cos 2t) - t + 1 - \operatorname{sh}(t-2), & \text{ha } 2 \le t. \end{cases}$$

139. Hozzuk az $F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}$ kifejezését $\frac{F_0(p)}{1-e^{-hp}}$ alakúra (l. **T 25.28**).

$$F(p) = \frac{1-e^{-ap}}{p\cdot(1+e^{-ap})\cdot(1-e^{-ap})} = \frac{1-e^{-ap}}{p(1-e^{-2ap})} = \frac{(1-e^{-ap})/p}{1-e^{-2ap}},$$

tehát a periódus $h = 2a$, és

$$F_0(p) = \frac{1}{p} - e^{-ap}\frac{1}{p}, \quad f_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\cdot\frac{1}{p}\right\}.$$

$F_1(p) = \frac{1}{p}$-re $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = 1(t)$. **T 25.27** szerint

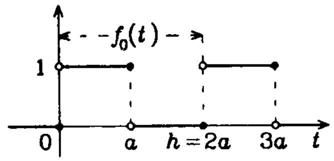
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\cdot\frac{1}{p}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\cdot F_1(p)\right\} = f_1(t-a)\cdot 1(t-a) = 1(t-a).$$

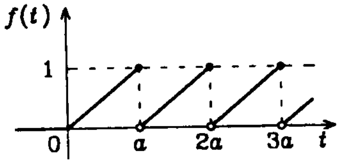
$$f_0(t) = 1(t) - 1(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 0, & \text{ha } t > a, \end{cases}$$

és **T 25.28** szerint

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{ha } 0 < t \le h = 2a, \\ f(t-2a), & \text{ha } t > h = 2a, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases}$$

Az $f(t)$ fv. grafikonját a következő baloldali ábra tartalmazza. Megjegyezzük, hogy eredményünk összhangban áll (sőt ekvivalens) a **94**. feladat eredményével.





140. A tört számlálóját és nevezőjét $-e^{-ap}$-vel megszorozva hozzuk ezt az $F(p)$ kifejezést $\frac{F_0(p)}{1-e^{-hp}}$ alakúra, majd állítsuk elő $F_0(p)$ inverz Laplace-transzformáltját.

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > a, \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{ha } t \le a, \\ f(t-a), & \text{ha } t > a. \end{cases}$$

Az f görbéje az előző jobboldali ábrán látható.

141. **T 22.5** szerint $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$, ha $|q| < 1$.

Így $\frac{p^5}{p^6-1} = \frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p^6}} = \frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^6}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{6n+1}}$ és

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^5}{p^6-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{6n+1}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{6n+1}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{6n}}{(6n)!}. \text{ (L. X.)}$$

142. e^z definícióját (**D 24.5**) felhasználva $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{k!(2k)!}$.

143. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)^2} \cdot t^{2k}$.

144. $\frac{ap^2}{p^4+4a^4}$.

145. Linearizáljuk $\cos^2 t$-t. A keresett Laplace-transzformált:

$$\frac{3}{8p} + \frac{p}{2(p^2+4)} + \frac{p}{8(p^2+16)}.$$

146. A $\sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2}$ azonosság felhasználásával: $\frac{1}{8p} - \frac{p}{8(p^2+16)}$.

147. Használjuk az indirekt bizonyítási módszert. Ha lenne olyan K és C valós szám, hogy $e^{t^2} \le Ke^{Ct}$ a $(0,\infty)$ intervallumon, akkor $e^{t^2-Ct} \le K$ is teljesülne, ellentmondásban azzal, hogy e^{t^2-Ct} felülről nem korlátos.

148.

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\} = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt-\frac{t^2}{2}}\,dt = e^{\frac{p^2}{2}}\int_0^\infty e^{\frac{-(p+t)^2}{2}}\,dt.$$

Az utóbbi integrálban vezessünk be új változót a $p+t=\tau$ összefüggés alapján. A τ integrálási változó határai p és ∞ lesznek,

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\} = e^{\frac{p^2}{2}}\int_p^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau, \quad \text{de} \quad \int_0^p e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(p), \quad \text{és}$$

$$\int_p^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau - \int_0^p e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau = \lim_{u\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(u) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(p).$$

Így adódik $\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{p^2}{2}}[1-\Phi(p)]$.

149. **T 25.11** révén $\mathcal{L}\{\Phi(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right\} = \frac{1}{p}e^{p^2/2}\big(1-\Phi(p)\big)$.

150. Legyen f és g Laplace-transzformálható. Ekkor léteznek olyan K_1, C_1 és K_2, C_2 nemnegatív konstansok, hogy

$$|f(t)| \le K_1e^{C_1t} \quad \text{és} \quad |g(t)| \le K_2e^{C_2t}.$$

Ezért, ha $C \ge C_1 + C_2$, akkor

$$|(f*g)(t)| = \left|\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds\right| \le \int_0^t |f(s)||g(t-s)|\,ds \le K_1K_2\int_0^t e^{Ct}\,ds =$$
$$= K_1K_2te^{Ct} \le K_1K_2e^{(C+1)t},$$

mert a $(0,\infty)$ intervallumon $t \le e^t$.

151. $\mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}\cdot\mathcal{L}\{h\}$.

152. $\mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{g_1\}\mathcal{L}\{f_2\}\mathcal{L}\{g_2\}$.

153. Elég belátni, hogy a két oldal Laplace-transzformáltjai egyenlőek. Ezek kiszámításához támaszkodjunk a **T 25.10**, illetve **T 25.11** tételekre.

154. Térjünk át a Laplace-transzformáltakra. A bal oldalon alkalmazzuk $(n+1)$-szer a **T 25.11** tételt, a jobb oldalon pedig alkalmazzuk a **T 25.10** tételt. A **T 25.19** következménye alapján következik az állítás helyessége.

155. **T 25.11** és **T 25.14** miatt

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 7t\cdot\sin 3t}{t};p\right\} = \frac{1}{p}\int_p^\infty \mathcal{L}\{\sin 7t\cdot\sin 3t;q\}\,dq.$$

A $\sin u\cdot\sin v = \frac{1}{2}\big(\cos(u-v)-\cos(u+v)\big)$ azonosságot és a IV. képletet felhasználva

$$\mathcal{L}\{\sin 7t\cdot\sin 3t;p\} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+16} - \frac{p}{p^2+100}\right).$$

Ezekből

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{4p}\left[\ln\frac{q^2+16}{q^2+100}\right]_p^\infty = \frac{1}{4p}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}.$$

156. Vezessük be a $g(t) = f^{(n)}(t)$ jelölést. Fejezzük ki $t^mg(t)$ Laplace-transzformáltját a **T 25.13** tétel szerint, majd g-re alkalmazzuk az **T 25.12** tételt. Végül vegyük figyelembe, hogy $\frac{d^mp^k}{dp^m} = 0$, ha $0 \le k \le n-1$.

157. A definiáló $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_{a_1}^{a_2} e^{-pt}m(t-a_0)\,dt$ integrált kiszámítva, vagy a **86**. feladat megoldásához hasonló

$$f(t) = m(t-a_0)1(t-a_1) - m(t-a_0)1(t-a_2) = \cdots$$
$$= m\big[(t-a_1)+(a_1-a_0)\big]1(t-a_1) - m\big[(t-a_2)+(a_2-a_0)\big]1(t-a_2) =$$
$$- m(a_2-a_0)1(t-a_2)$$

átalakításokkal a keresett transzformált:

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = m\frac{1}{p^2}\left(e^{-a_1p}-e^{-a_2p}\right) + m\frac{1}{p}\left[(a_1-a_0)e^{-a_1p} - (a_2-a_0)e^{-a_2p}\right].$$

158. Legyen

$$f_1(t) := \begin{cases} \sin at, & \text{ha } \frac{2n\pi}{a} < t \le \frac{(2n+1)\pi}{a}, \\ 0, & \text{ha } \frac{(2n+1)\pi}{a} < t \le \frac{(2n+2)\pi}{a}, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{L}\{f_1(t);p\} = \mathcal{L}\{f(at);p\}$, ahol f az **95**. feladatbeli függvény. A **T 25.16** tétel szerint pedig $\mathcal{L}\{g(t);p\} = e^{-\frac{\pi p}{a}}\mathcal{L}\{f_1(t);p\}$. Ezekből, **T 25.15** figyelembevételével

$$\mathcal{L}\{g(t);p\} = e^{\frac{-\pi}{a}p}\frac{a}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{a}p}} = \frac{a}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{a}p}-1}.$$

159. A $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$ azonosság felhasználásával a keresett Laplace-transzformált $\frac{p}{p^4+4} + \frac{5p}{p^4+48p^2+676}$.

160. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5p}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5p}{p^2+4}\right\}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\} =$

$$= (-5\cos 2t) * (\operatorname{sh} t) = -5\cdot\int_0^t \cos 2s\cdot \operatorname{sh}(t-s)\,ds = \cos 2t - \operatorname{ch} t.$$

161. $\mathcal{L}\{\operatorname{ch} t * \sin t\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sh} t * \cos t\}$; így a **T 25.19** tétel következménye szerint $\operatorname{ch} t * \sin t = \operatorname{sh} t * \cos t$, ha $t \geq 0$.

162. $t\sin t$. Megjegyezzük, hogy az inverz Laplace-transzformált közvetlenül kiolvasható a transzformáltak XII. képletéből, hiszen $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}\right\} = t\sin bt$.

163. $(t^2e^{3t}) * e^{-4t} = \left(\frac{t^2}{7} - \frac{2t}{49} + \frac{2}{343}\right)e^{3t} + \left(\frac{-2}{343}\right)e^{-4t}$.

164. $\frac{1}{3}(\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} t)$, mert pl. $F(p) = \frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)} = \left(\frac{p}{p^2-4} - \frac{p}{p^2-1}\right)\cdot\frac{1}{3}$.

165. Célszerűen **T 25.30** felhasználásával $\frac{1}{p^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+1}\right)$ adódik, ezért $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^4-1}\right\} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$. Így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^4-1)^2}\right\} = \left(\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)\right) * \left(\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)\right)$, ami **T 25.9** szerint a **43.** és **45.** feladat és $\operatorname{sh} t * \operatorname{sh} t$ konvolúcióira vezet.

166. Vegyük észre, hogy a megadott $F(p)$ könnyen integrálható, és alkalmazzuk a Laplace-transzformált integrálási tételét, **T 25.25**-t:

$$f(t) = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty \frac{q^3}{(q^4-1)^2}\,dq\right\} = t\cdot\frac{1}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^4-1};t\right\} = \frac{1}{8}\cdot t(\operatorname{sh} t - \sin t)$$

az előző feladat egyik részeredményének felhasználásával.

167.

$$\frac{1}{p^3\cdot(p+1)^3} = \left(\frac{1}{p(p+1)}\right)^3 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)^3.$$

Végezzük el a kijelölt hatványozást és ismételten $\frac{1}{p(p+1)}$-nek $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$-gyel történő helyettesítését mindenhol.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = e^{-t}\left(\frac{-t^2}{2} - 3t - 6\right) + \left(\frac{t^2}{2} - 3t + 6\right).$$

168. $Q(p)$-t szorzatként deriválva $\frac{Q'(p)}{Q(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p-p_i}$, így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q'(p)}{Q(p)};t\right\} = \sum_{i=1}^n e^{p_i t}$.

169. $\frac{t^2-1}{8}\operatorname{sh} t + \frac{t}{8}\operatorname{ch} t$.

170. Határozzuk meg először $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)}\right\}$-t.

$$\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{p} - \frac{1}{5}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{20}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4}.$$

Az inverz Laplace-transzformált:

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-(t-1/2)} - \frac{1}{20}\cos 2(t-\frac{1}{2}) - \frac{1}{10}\sin 2(t-\frac{1}{2})\right), & \text{ha } t > \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

171. $e^t\cdot\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot t^k$.

172. 1. megoldás. A **T 25.21** konvolúciótétel szerint $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(p^2+4)}\right\} =$

$$e^{-t} * \sin 2t = \sin 2t * e^{-t} = \int_0^t (\sin 2s)\cdot e^{-(t-s)}\,ds = e^{-t}\int_0^t e^s \sin 2s\,ds.$$

2. megoldás. Alkalmazzuk **T 25.29**-t $k = -1$ választással, majd **T 25.22**-t.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(p^2+4)}\right\} = e^{-t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1+1)[(p-1)^2+4]}\right\} =$$

$$e^{-t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{(p-1)^2+4}}{p}\right\} = e^{-t}\cdot\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2+4};s\right\}ds =$$

$$\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2+2^2};s\right\}ds = \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t e^{1\cdot s}\cdot\sin 2s\,ds.$$

173. $\frac{1}{a}e^{\frac{-b}{a}t}f\left(\frac{t}{a}\right)$.