MAM112M - 1. gyakorló feladatsor

Laplace-transzformált

1. Számítsa ki a következő függvények Laplace-transzformáltját:

(a) $f(t) = 3(t-2)^3 - 2(t+1)^2 - 7t + 2$ (b) $f(t) = \operatorname{ch} 5t$

(c) $f(t) = e^{-2t} \sin 3t$ (d) $f(t) = \sin 5t \cos 2t$

(e) $f(t) = t^3 e^{7t}$ (f) $f(t) = t^2 e^{3t} \cos 8t$

(g) $f(t) = 2^{5t}$ (h) $f(t) = 5 - e^{4it}$

2. Számítsa ki a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

(a) $F(s) = \frac{3}{s^2+4}$ (b) $F(s) = \frac{4}{(s-1)^3}$

(c) $F(s) = \frac{2}{s^2+3s-4}$ (d) $F(s) = \frac{s+4}{s^2-s-6}$

(e) $F(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+5}$ (f) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2-2s+2}$

(g) $F(s) = \frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$ (h) $F(s) = \frac{s^2+2s-4}{s^3-5s^2+2s+8}$

3. Laplace-transzformált módszerrel oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat:

(a) $y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 3/2,$

(b) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$

(d) $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1,$

(e) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1,$

(f) $y'' - 2y' + 2y = \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$

(g) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1,$

(h) $y'' - 4y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

(i) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$

(j) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

4. Adja meg a következő függvények Laplace-transzformáltját:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ (t-3)^4, & t \geq 3, \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2, & 1 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \geq 3, \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^3 - t + 2, & t \geq 1, \end{cases}$ (d) $f(t) = H_1(t) + 2H_2(t) - 4H_5(t)$,

(e) $f(t) = \int_0^t (t-u)^2 \cos 2u \, du$, (f) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-u)} \sin u \, du$,

(g) $f(t) = \int_0^t (t-u)e^u \, du$, (h) $f(t) = \int_0^t \sin(t-u) \cos u \, du$.

5. Adja meg a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

(a) $F(s) = \frac{6}{(s-2)^4}$, (b) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$,

(c) $F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$, (d) $F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$,

(e) $F(s) = \frac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$, (f) $F(s) = \frac{1}{s^4(s^2+1)}$,

(g) $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$, (h) $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$.

6. Laplace-transzformált módszerrel oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat:

(a) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & t \geq \pi/2, \end{cases}$

(b) $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $f(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \text{ és } t < \pi, \end{cases}$

(c) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

(d) $y'' + 4y = \sin t - H_{2\pi}(t)\sin(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(e) $y^{iv} - y = H_1(t) - H_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$,

(f) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

(g) $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(h) $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(i) $y'' + 2y' + 2y = \sin 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(j) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - H_\pi(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.