DISZTRIBÚCIÓELMÉLET ÉS INTEGRÁLTRANSZFORMÁCIÓK

Székelyhidi László

Tartalom

1 FÜGGVÉNYTEREK

1.1 Folytonos függvények terei

Ha X topologikus tér, akkor $\mathcal{C}(X)$ jelöli az X-en értelmezett összes komplex értékű folytonos függvények halmazát. A $\mathcal{C}(X)$ tér a pontonkénti vektortér műveletekkel és a pontonkénti szorzással egységelemes komplex algebra.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor bármely X-beli K kompakt halmaz és $\mathcal{C}(X)$-beli f esetén legyen

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)| .$$

Ekkor a $\{p_K\}$ szeminorma-család a $\mathcal{C}(X)$ téren lokálisan konvex Haussdorff–féle vektor-topológiát indukál. Ebben egy $(f_i)_{i\in I}$ (általánosított) függvénysorozat pontosan akkor konvergál a $\mathcal{C}(X)$-beli f függvényhez, ha az $(f_i)_{i\in I}$ függvénysorozat az X minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ha X σ-kompakt, azaz megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése, akkor $\mathcal{C}(X)$ Fréchet–tér.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor a $\mathcal{C}(X)$ egy $\Lambda : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálja pontosan akkor folytonos, ha az X bármely K kompakt részhalmaza esetén van olyan C_K szám, hogy

$$|\Lambda(f)| \leq C_K\, p_K(f)$$

teljesül a $\mathcal{C}(X)$ minden f eleme esetén. Ez pontosan akkor teljesül, ha az X-en létezik olyan μ kompakt tartójú reguláris komplex Borel–mérték, hogy

$$\Lambda(f) = \int_X f\, d\mu$$

fennáll minden $\mathcal{C}(X)$-beli f függvényre. Ilyen módon $\mathcal{C}(X)$ duális tere azonosítható a $\mathcal{C}(X)$-en értelmezett összes kompakt tartójú reguláris komplex Borel–mértékek $\mathcal{M}_c(X)$ terével.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor $\mathcal{C}_0(X)$ jelöli a $\mathcal{C}(X)$ tér *végtelenben eltűnő függvényeinek* halmazát, tehát az olyan $f : X \to \mathbb{C}$ folytonos függvények halmazát, melyeknél bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan X-beli K kompakt részhalmaz, hogy $|f(x)| < \varepsilon$, ha x nem tartozik K-hoz.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor $\mathcal{C}_{00}(X)$ jelöli a $\mathcal{C}(X)$ tér *kompakt tartójú függvényeinek* halmazát, tehát az olyan $f : X \to \mathbb{C}$ folytonos függvények halmazát, melyeknek

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}^{cl}$$

tartója az X-nek kompakt részhalmaza.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, K pedig az X kompakt részhalmaza, akkor $\mathcal{C}_K(X)$ jelöli a $\mathcal{C}(X)$ tér mindazon kompakt tartójú függvényeinek halmazát, melyeknek tartója a K kompakt halmaz részhalmaza. Nyilván $\mathcal{C}_K(X)$ a $\mathcal{C}(X)$ tér zárt altere.

Mivel bármely végtelenben eltűnő, komplex értékű folytonos függvény korlátos, a $\mathcal{C}_0(X)$ tér f függvényeire a

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

kifejezés normát értelmez. Könnyű látni, hogy $\mathcal{C}_0(X)$ az $\|f\|_\infty$ normával Banach–tér. Ebben $\mathcal{C}_{00}(X)$ nem feltétlenül zárt altér, $\mathcal{C}_K(X)$ viszont zárt altér az X bármely K kompakt részhalmaza esetén.

Ha X kompakt Haussdorff–tér, akkor a $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_{00}(X) = \mathcal{C}_0(X)$ tér a pontonkénti vektortér műveletekkel, a pontonkénti szorzással, a konjugálással és az $\|f\|_\infty$ normával kommutatív, egységelemes C^*-algebra.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, K pedig az X kompakt részhalmaza, akkor a $\mathcal{C}_K(X)$ tér topologikusan izomorf a $\mathcal{C}(K)$ Banach–térrel.

1.2 Differenciálható függvények terei

Legyen n pozitív egész szám, Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, valamint p nem negatív egész. Ekkor $\mathcal{C}^p(\Omega)$ jelöli az Ω-n értelmezett összes komplex értékű, p-szer folytonosan differenciálható függvények halmazát. A $\mathcal{C}^p(\Omega)$ tér a pontonkénti vektortér műveletekkel és a

$$q_{s,K}(\varphi) = \sup_{|\alpha|\le s} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

szeminorma-család által indukált topológiával lokálisan konvex topologikus vektortér. Itt $s \le p$ egész, α egy $\mathbb{N}^n$-beli multi-index, melyre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ esetén $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, és K az Ω tetszőleges kompakt részhalmaza.

Vegyük észre, hogy a $p = 0$ esetben $\mathcal{C}^0(\Omega)$ jelentése ugyanaz, mint $\mathcal{C}(\Omega)$-é. A $\mathcal{C}^p(\Omega)$ tér elemeit szokás egyszerűen $\mathcal{C}^p$-függvényeknek nevezni Ω-n, természetesen $\mathcal{C}^0$-függvény helyett $\mathcal{C}$-függvényt írva.

Az $\mathbb{R}^n$ tér bármely Ω nem üres, nyílt részhalmaza esetén van az Ω kompakt részhalmazainak olyan $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozata, melynek egyesítése Ω, s melynél K_{m+1} része K_m belsejének. Egy ilyen sorozatot az Ω egy *kompakt kimerítésének* mondunk. Ha rögzítünk egy kompakt kimerítést, akkor legyen

$$q_{s,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha|\le s} \sup_{x\in K_m} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,$$

tehát a korábbi jelöléssel $q_{s,m} = q_{s,K_m}$. Könnyű látni, hogy a $(q_{s,m})_{s\le p, m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család ugyanazt a topológiát indukálja $\mathcal{C}^p(\Omega)$-n, mint az eredeti

$(q_{s,K})_{s\leq p}$ család, ahol K végigfutja Ω összes kompakt részhalmazait. Az ily módon értelmezett $(q_{s,m})_{s\leq p, m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család által indukált topológiával $\mathcal{C}^p(\Omega)$ szeparábilis Fréchet–tér. A $\mathcal{C}^p(\Omega)$ térben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál a $\mathcal{C}^p(\Omega)$-beli f függvényhez, ha a $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az Ω minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál a $\partial^\alpha f$ függvényhez, minden olyan α multi-index esetén, melyre $|\alpha| \leq p$.

1.3 Az $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ és $\mathcal{D}(\Omega)$ tér

Ebben a szakaszban n egy pozitív egész számot jelöl, Ω pedig az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza.

Az Ω-n értelmezett összes komplex értékű, végtelen sokszor differenciálható függvények $\mathcal{E}(\Omega)$ halmazán a fentiekben értelmezett $(q_{s,m})_{s\leq p, m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család lokálisan konvex Haussdorff–topológiát indukál. Az $\mathcal{E}(\Omega)$ tér Fréchet–tér, melyben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál az $\mathcal{E}(\Omega)$-beli f függvényhez, ha a $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az Ω minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál a $\partial^\alpha f$ függvényhez, minden α multi-index esetén. Az előző szakaszban használt jelölés analógiájára néha szokás $\mathcal{E}(\Omega)$ helyett $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-t írni, sőt, az $\mathcal{E}(\Omega)$-beli függvényeket szokás röviden $\mathcal{C}^\infty$-függvényeknek nevezni Ω-n.

Ha K az Ω kompakt részhalmaza, akkor jelölje $\mathcal{D}_K(\Omega)$ az Ω-n értelmezett összes komplex értékű, végtelen sokszor differenciálható, K-beli tartójú függvények halmazát. Nyilván $\mathcal{D}_K(\Omega)$ az $\mathcal{E}(\Omega)$ tér zárt altere. Mivel rögzített $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kompakt kimerítés esetén az Ω minden kompakt részhalmaza egyben részhalmaza valamely K_m-nek is, így az $\mathcal{E}(\Omega)$, továbbá bármely K kompakt halmaz esetén a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ topológiája független a $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kompakt kimerítés választásától. A $\mathcal{D}_K(\Omega)$ térben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál a $\mathcal{D}_K(\Omega)$-beli f függvényhez, ha a $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az Ω-n egyenletesen konvergál a $\partial^\alpha f$ függvényhez, minden α multi-index esetén.

Ha K végigfutja az Ω összes kompakt részhalmazait, akkor a megfelelő $\mathcal{D}_K(\Omega)$ terek egyesítését jelölje $\mathcal{D}(\Omega)$. Tehát $\mathcal{D}(\Omega)$ az Ω-n értelmezett összes komplex értékű, végtelen sokszor differenciálható, kompakt tartójú függvények halmaza, mely nyilván komplex lineáris tér. Elemeit *tesztfüggvényeknek* nevezzük. Az alábbiakban $\mathcal{D}(\Omega)$-n is lokálisan konvex vektortopológiát fogunk értelmezni. Egyáltalán nem nyilvánvaló az, hogy bármely nem üres, nyílt Ω halmaz esetén $\mathcal{D}(\Omega)$ nem csak az azonosan nulla függvényből áll.

1.3.1 Lemma. *Legyen $0 < a < b$. Ekkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény, hogy $g(x) = 0$, ha $x < a$, és $g(x) = 1$, ha $x > b$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan $\delta_0, \delta_1, \ldots$ pozitív számokat, hogy $\sum_{i=0}^\infty \delta_i = b-a$, továbbá legyen

$$m_n = \frac{2^n}{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Legyen f_0 olyan folytonos, monoton függvény, hogy $f_0(x) = 0$, ha $x < a$, és $f_0(x) = 1$, ha $x > a + \delta_0$; legyen továbbá

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(t)dt \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Differenciálással és indukcióval könnyű megmutatni, hogy f_n n-szer differenciálható, és $|f_n^{(n)}| \leq m_n$. Ha $n > r$, akkor

$$f_n^{(r)}(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_0^{\delta_n} f_{n-1}^{(r)}(x - t)dt,$$

melyből ismét indukcióval adódik, hogy

$$|f_n^{(r)}| \leq m_r \qquad (n \geq r).$$

A középértéktétel és a fentiek alapján

$$|f_n^{(r)} - f_{n-1}^{(r)}| \leq m_{r+1}\delta_n \qquad (n \geq r + 2).$$

Mivel $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_n < +\infty$, ezért tetszőleges r esetén az $(f_n^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens. Ezért az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál egy g függvényhez, mely végtelen sokszor differenciálható, $|g^{(r)}| \leq m_r$, ha $r = 1, 2, \ldots$, és $g(x) = 0$, ha $x < a$, valamint $g(x) = 1$, ha $x > b$. □

1.3.2 Lemma. *Legyen $0 < a < b$. Ekkor létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény, hogy $\varphi(x) = 1$, ha $\|x\| \leq a$, és $\varphi(x) = 0$, ha $\|x\| > b$.*

Bizonyítás. Az előző lemmában szereplő g függvénnyel legyen

$$\varphi(x) = 1 - g(\|x\|^2).$$

□

1.3.1 Tétel. *Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, Γ pedig az Ω nyílt lefedése. Ekkor létezik a $\mathcal{D}(\Omega)$ térben olyan $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozat, mely nem negatív függvényekből áll, és teljesülnek a következők:*

(i) minden ψ_i tartója része valamely Γ-beli halmaznak;

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$, ha x az Ω tetszőleges eleme;

(iii) az Ω minden K kompakt részhalmaza esetén van olyan m pozitív egész szám és K-t tartalmazó W nyílt halmaz, hogy

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \cdots + \psi_m(x) = 1,$$

ha x a W eleme.

Bizonyítás. Legyen S az Ω egy megszámlálható, sűrű részhalmaza. Legyen $\{B_1, B_2, \dots\}$ mindazon zárt gömbök sorozata, melyeknél a B_i gömb p_i középpontja S-beli, sugara az r_i racionális szám, s B_i része valamely Γ-beli halmaznak. Legyen V_i a p_i középpontú, $\frac{r_i}{2}$ sugarú nyílt gömb.

Az 1.3.2 lemma alapján létezik olyan φ_i a $\mathcal{D}(\Omega)$-ban, mely nem negatív, a V_i-ben 1, a B_i-n kívül pedig 0. Legyen $\psi_1 = \varphi_1$, és

$$\psi_{i+1} = (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2) \dots (1 - \varphi_i)\varphi_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Nyilván $\psi_i = 0$ a B_i-n kívül, ezért teljesül az első feltétel. Indukcióval könnyen igazolhatjuk a

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2) \dots (1 - \varphi_i)$$

összefüggést. Mivel $\varphi_i = 1$ a V_i-n, ezért

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m(x) = 1,$$

ha x a $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$ halmaz eleme, amiből a második tulajdonság következik. Végül, ha K az Ω kompakt részhalmaza, akkor valamely m-re K részhalmaza a $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$ halmaznak, amiből a harmadik feltétel következik. $\square$

A $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sorozatot a Γ *lefedés alá rendelt lokálisan véges egységfelbontásnak* nevezzük.

1.4 A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér topológiája

Ebben a szakaszban Ω az $\mathbb{R}^n$ tér egy nem üres, nyílt részhalmazát jelöli, ahol n rögzített, pozitív egész.

A $\mathcal{D}(\Omega)$ térben a következő módon értelmezünk lokálisan konvex vektortopológiát: a 0 környezetbázisát a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér mindazon nem üres, konvex, körszerű W részhalmazai alkotják, melyekre a $\mathcal{D}_K(\Omega) \cap W$ a $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ban nyílt, az Ω minden K kompakt részhalmaza esetén. Ez a topológia a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ terek topológiáinak *induktív limesze.* A $\mathcal{D}(\Omega)$ topológiájának bármely $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ra való szűkítése éppen $\mathcal{D}_K(\Omega)$ korábban értelmezett topológiája. A $\mathcal{D}(\Omega)$ térben a $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat akkor és csak akkor konvergál a $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ függvényhez, ha van az Ω-nak olyan K kompakt részhalmaza, hogy φ_k és φ a $\mathcal{D}_K(\Omega)$-hoz tartozik, hacsak $k = 1, 2, \dots$, és $\varphi_k \to \varphi$ a $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ban. A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér nem Fréchet–tér.

Röviden összefoglaljuk, hogy ha adott a $\mathcal{D}(\Omega)$ térben tesztfüggvények egy $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozata, akkor ez a sorozat mikor konvergál a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér topológiája értelmében a $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ tesztfüggvényhez. A fentiek alapján ez azt jelenti, hogy

(i) van olyan K kompakt részhalmaza Ω-nak, hogy a $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat és φ egyaránt a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ térhez tartozik, azaz, van olyan pozitív R szám, hogy $\|x\| > R$ esetén $\varphi_k(x) = 0$ és $\varphi(x) = 0$ teljesül $k = 0, 1, \dots$ esetén;

(ii) a $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ tér topológiája értelmében konvergál a φ függvényhez, azaz, a $(\partial^\alpha\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatok minden α multi-index esetén az Ω összes kompakt részhalmazán egyenletesen konvergálnak $\partial^\alpha\varphi$-hez. Ez utóbbi nyilván egyenértékű azzal, hogy ezek a függvénysorozatok az Ω halmazon egyenletesen konvergálnak a megfelelő deriválthoz, hiszen az összes szóbanforgó függvények eltűnnek K-n kívül. Ez a feltétel tehát még részletesebben kifejtve azt jelenti, hogy bármely α multi-index és bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan N, hogy

$$\left|\partial^\alpha\varphi_k(x) - \partial^\alpha\varphi(x)\right| < \varepsilon$$

teljesül az Ω halmaz minden x eleme, és minden $k \geq N$ esetén.

Megjegyezzük, hogy mivel a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér nem metrizálható, így topológiája nem írható le sorozatokkal; erre a célra általánosított sorozatokat kell használni. Az általánosított sorozatokkal kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat a Függelékben foglaltuk össze.

1.4.1 Példa. Legyen φ tetszőleges tesztfüggvény $\mathbb{R}^n$-en és tekintsük a következő sorozatokat: bármely $\mathbb{R}^n$-beli x és $k = 1, 2, \ldots$ esetén legyen

(i)
$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x)\,,$$

(ii)
$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx)\,,$$

(iii)
$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\Big(\frac{x}{k}\Big)\,.$$

Most megvizsgáljuk, hogy van-e ezek között olyan, amely a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ térben konvergens.

Az első esetben nyilván φ_k tartója része φ tartójának, továbbá bármely α multi-index esetén
$$\partial^\alpha\,\varphi_k = \frac{1}{k}\partial^\alpha\,\varphi\,,$$
ezért a $(\varphi_k)_{k=1,2,\ldots}$ sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben konvergál az azonosan nulla függvényhez.

A második esetben, ha φ tartója része az $\|x\| \leq r$ gömbnek, akkor φ_k tartója része az, $\|x\| \leq \frac{1}{k}r$ gömbnek, így a φ_k függvény tartója része az $\|x\| \leq r$ gömbnek $k = 1, 2, \ldots$ esetén. Másrészt, bármely α multi-index esetén

$$\partial^\alpha\,\varphi_k = k^{|\alpha|-1}\partial^\alpha\,\varphi\,,$$

ezért, ha φ nem azonosan nulla, akkor a $(\varphi_k)_{k=1,2,\ldots}$ sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben nem konvergens.

Végül a harmadik esetben, ha $\varphi(x_0) \neq 0$ valamely $x_0 \neq 0$ esetén, akkor $\varphi_k(kx_0) \neq 0$, ha $k = 1, 2, \ldots$, így a φ_k függvények tartói nem foglalhatók bele egy közös kompakt halmazba. Ezért, ha φ nem azonosan nulla, akkor a $(\varphi_k)_{k=1,2,\ldots}$ sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben nem konvergens.

1.5 Az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tér

Ebben a pontban n egy pozitív egész számot jelöl. Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ végtelen sokszor differenciálható függvény, és bármely s, m nem negatív egészek esetén

$$p_{s,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq s} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(1 + \|x\|^2\big)^m |\partial^\alpha \varphi(x)| < +\infty$$

teljesül, akkor φ-t *gyorsan csökkenő függvénynek* nevezzük. Az összes gyorsan csökkenő függvények $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ halmaza lineáris tér, s ezen a $\{p_{s,m} : s \geq 0,\, m \geq 0\}$ szeminorma-család lokálisan konvex Haussdorff–féle topológiát indukál, mellyel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Fréchet–tér. Könnyen belátható, hogy a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ végtelen sokszor differenciálható függvény pontosan akkor gyorsan csökkenő, ha bármely deriváltjának bármely polinommal való szorzata korlátos, és egy gyorsan csökkenő függvény bármely deriváltjának bármely polinommal való szorzata integrálható.

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ részhalmaza. Mivel bármely $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ, és s, m nem negatív egészek esetén $q_{s,m}(\varphi) \leq p_{s,0}(\varphi)$, és bármely nem negatív s, m esetén van olyan $C > 0$ állandó, valamint olyan m_0 nem negatív egész, hogy $p_{s,m}(\varphi) \leq C q_{s,m_0}(\varphi)$, ezért bármely $\mathbb{R}^n$-beli K kompakt halmaz esetén az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ topológiájának $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$-re való szűkítése megegyezik $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ topológiájával.

Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tér topológiája a következő szeminorma-családdal is indukálható:

$$q_N(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(1 + \|x\|^2\big)^N |\partial^\alpha \varphi(x)|\,, \tag{1}$$

ahol $N = 0, 1, 2, \ldots$. Az is világos, hogy q_N valójában minden N nem negatív egész esetén norma.

1.5.1 Lemma. *A $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben.*

Bizonyítás. Legyen φ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme, ψ pedig olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli függvény, mely 1-el egyenlő az egységgömbön. Legyen

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\psi\Big(\frac{x}{k}\Big) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Nyilván φ_k a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, ha $k = 1, 2, \ldots$. Megmutatjuk, hogy $\varphi_k \to \varphi$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ térben, ha $k \to \infty$. Legyen P tetszőleges polinom, α pedig tetszőleges multi-index. Ekkor

$$P(x)\partial^\alpha(\varphi - \varphi_k)(x) = P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} \partial^{\alpha-\beta} \varphi(x) \frac{1}{k^{|\beta|}} \partial^\beta \big(1 - \psi\big)\Big(\frac{x}{k}\Big).$$

Nyilvánvaló, hogy $\partial^\beta(1-\psi(\frac{x}{k}))=0$, ha $\|x\|\le k$. Másrészt,

$$\lim_{x\to\infty} P(x)\cdot\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)=0,$$

ha $\beta\le\alpha$, így a fenti összeg $k\to\infty$ esetén az $\mathbb{R}^n$-en egyenletesen konvergál 0-hoz. Ezért $\varphi_k\to\varphi$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ térben, ha $k\to\infty$. □

1.6 Az L^p tér

Ha $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, akkor $1\le p<+\infty$ esetén jelöli $L^p(X)$ mindazon $f:X\to\mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát, melyekre

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

teljesül. Azonosítva a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket, a vektortér-műveletekkel és a $\|,\|_p$ normával $L^p(X)$ Banach–tér. Továbbá, $L^\infty(X)$ jelenti a lényegében korlátos $f:X\to\mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát az

$$\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}|f|$$

normával. Az $L^\infty(X)$ tér ugyancsak Banach–tér.

A későbbiekben leggyakrabban $X=\Omega$ az $\mathbb{R}^n$ tér egy nyílt részhalmaza lesz, μ pedig az n-dimenziós Lebesgue–mérték valamilyen pozitív konstansszorosa. Speciálisan, m_n fogja jelölni az n-dimenziós Lebesgue–mérték $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$-szeresét. Ha $1\le p\le+\infty$, és Ω az $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmaza, akkor $L^p_{loc}(\Omega)$ mindazon $f:\Omega\to\mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát jelenti, melyeknek az Ω minden K kompakt részhalmazára való szűkítése beletartozik $L^p(K)$-ba.

Az $L^p(X)$ tér valós értékű függvényeinek halmazát $L^p(X,\mathbb{R})$ jelöli.

1.7 Konvolúció

Ebben a szakaszban n egy pozitív egész számot jelöl.

1.7.1 Tétel. *(Általánosított Young–egyenlőtlenség) Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $1\le p\le+\infty$ és $C>0$. Ha $K:X\times X\to\mathbb{C}$ mérhető függvény, melyre*

$$\int|K(x,y)|d\mu(y)\le C\qquad\textit{majdnem minden } X\textit{-beli } x \textit{ esetén,}$$

és

$$\int|K(x,y)|d\mu(x)\le C\qquad\textit{majdnem minden } X\textit{-beli } y \textit{ esetén,}$$

akkor bármely $L^p(X)$-beli f esetén az X-beli x-re

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)d\mu(y)$$

módon értelmezett Tf függvény az $L^p(X)$-hez tartozik, és

$$\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha $p = +\infty$, akkor az állítás nyilvánvaló.

Legyen $1 \leq p < +\infty$, és q olyan, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Az 5.7.2 Hölder–egyenlőtlenség alapján

$$|Tf(x)| \leq \left(\int |K(x,y)|d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |K(x,y)||f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C^{\frac{1}{q}} \left(\int |K(x,y)||f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

teljesül minden X-beli x-re. Mindkét oldalt p-edik hatványra emelve és x szerint integrálva az 5.7.4 Fubini–tétel alapján a következőt kapjuk:

$$\int |Tf(x)|^p d\mu(x) \leq C^{\frac{p}{q}} \int \int |K(x,y)||f(y)|^p d\mu(y) d\mu(x) \leq$$

$$\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int |f(y)|^p d\mu(y),$$

majd p-edik gyököt vonva az adódik, hogy:

$$\|Tf\|_p \leq C^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|f\|_p = C \cdot \|f\|_p.$$

Ezért $Tf(x)$ majdnem minden X-beli x-re véges, így a tételt bebizonyítottuk. □

Legyenek f, g az $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tér elemei. Ha valamely $\mathbb{R}^n$-beli x esetén az $y \mapsto f(x-y)g(y)$ függvény integrálható, akkor az

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\, dm_n(y)$$

definícióval értelmezzük f és g *konvolúcióját* az x pontban. Ekkor nyilvánvalóan $f * g(x) = g * f(x)$.

1.7.2 Tétel. *(Young–egyenlőtlenség) Legyen $1 \leq p \leq +\infty$. Ha f az $L^1(\mathbb{R}^n)$-nek, g pedig az $L^p(\mathbb{R}^n)$-nek eleme, akkor majdnem minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén létezik $f * g(x)$, továbbá az $f * g : x \mapsto f * g(x)$ módon értelmezett $f * g$ függvény $L^p(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, és*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Bizonyítás. Az állítás az imént tárgyalt általánosított Young–egyenlőtlenségből a $K(x,y) = f(x-y)$ választással adódik. □

A tétel állítását szimbolikusan $L^1 * L^p \subseteq L^p$ alakban fejezhetjük ki. Speciálisan $L^1 * L^1 \subseteq L^1$, tehát az L^1 tér a konvolúcióra nézve zárt.

1.7.3 Tétel. *Az $L^1(\mathbb{R}^n)$ tér a vektortér-műveletekkel, a konvolúcióval, és a $\|,\|_1$ normával kommutatív Banach–algebra.*

Bizonyítás. A konvolúció asszociativitása az 5.7.4 Fubini–tétel következménye. □

Az 5.7.2 Hölder–egyenlőtlenség alapján, ha $1 \le p \le +\infty$, és q olyan, hogy $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, akkor bármely $L^p(\mathbb{R}^n)$-beli f és $L^q(\mathbb{R}^n)$-beli g esetén az $f*g$ függvény $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, és

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

1.8 Approximatív egységek

Ebben a szakaszban n egy pozitív egész számot jelöl.

Az $L^1(\mathbb{R}^n)$ konvolúcióalgebra nem egységelemes. Legyen ω a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben olyan nem negatív függvény, melyre $\int \omega = 1$, továbbá bármely $\mathbb{R}^n$-beli x esetén legyen

$$\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Ekkor az $\{\omega_\varepsilon\}$ függvényhalmazt *approximatív egységnek* nevezzük.

Ha ε helyett $j = 1, 2\dots$ esetén $\frac{1}{j}$-t írunk, akkor

$$\omega_j(x) = j^n\omega(jx),$$

és az $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot is approximatív egységnek szokás nevezni. Ez nem fog félreértést okozni, mert a szövegből mindig ki fog derülni, hogy melyik változatról van szó. Vegyük észre, hogy valójában az $\{\omega_\varepsilon\}$ függvényhalmaz is egy "sorozat": egy általánosított sorozat a pozitív valós számok olyan módon irányított halmazán, melynél a rendezést a "kisebb vagy egyenlő" reláció írja le. Ezért $\{\omega_\varepsilon\}$ helyett célszerűbb az $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ jelölést használni.

Ha y az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, akkor a τ_y *eltolásoperátort* a

$$\tau_y f(x) = f(x-y)$$

formulával értelmezzük tetszőleges $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvény és $\mathbb{R}^n$-beli x mellett. Ugyancsak értelmezzük az $\check{f}$ függvényt $\check{f}(x) = f(-x)$ módon.

1.8.1 Tétel. *Legyen $1 \le p < +\infty$, és f az $L^p(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme. Ekkor*

$$\lim_{x\to 0} \|\tau_x f - f\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Ha g kompakt tartójú, folytonos, komplex értékű függvény $\mathbb{R}^n$-en, akkor $x \to 0$ esetén $\tau_x g$ egyenletesen konvergál g-hez. Ha $\|x\| \le 1$, akkor $\tau_x g$ és g tartói egy közös kompakt halmazban vannak, így $\|\tau_x g - g\|_p \to 0$, ha $x \to 0$. Legyen most f az $L^p(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme, $\varepsilon > 0$, s válasszunk olyan g kompakt tartójú, folytonos függvényt, melyre $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor $\|\tau_x f - \tau_x g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, így

$$\|\tau_x f - f\|_p \le \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - g\|_p + \|g - f\|_p < \|\tau_x g - g\|_p + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ha $\|x\|$ elég kicsi, akkor $\|\tau_x g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, így

$$\|\tau_x f - g\|_p < \varepsilon.$$

□

A tétel $p = +\infty$ esetén nem érvényes, mert $\lim_{x\to 0} \|\tau_x f - f\|_\infty = 0$ ekvivalens f egyenletes folytonosságával.

1.8.2 Tétel. *Legyen $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ approximatív egység, s valamely $1 \le p < +\infty$ esetén legyen f az $L^p(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme. Ekkor*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|f * \omega_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Először legyen $p = 1$. Integráltranszformáció segítségével könnyű látni, hogy $\int \omega_\varepsilon = 1$, ha $\varepsilon > 0$. Ezért majdnem minden $\mathbb{R}^n$-beli x-re

$$(f * \omega_\varepsilon)(x) - f(x) = \int \big[f(x - y) - f(x)\big]\omega_\varepsilon(y)\, dm_n(y) =$$

$$= \int \big[f(x - \varepsilon y) - f(x)\big]\omega_1(y)\, dm_n(y),$$

amiből

$$\|f * \omega_\varepsilon - f\|_1 \le \int \|\tau_{\varepsilon y} f - f\|_1 \cdot \omega_1(y)\, dm_n(y)$$

következik. Mivel $\|\tau_{\varepsilon y} f - f\|_1 \le 2\|f\|_1$, és $\varepsilon \to 0+$ esetén $\|\tau_{\varepsilon y} f - f\|_1 \to 0$, így az állítás az 5.7.1 Lebesgue–tételből következik.

Legyen most $1 < p < +\infty$. Jegyezzük meg, hogy ha egy $L^p(\mathbb{R}^n)$-beli h függvényre $\|h\|_\infty \le M$ teljesül, akkor

$$\|h\|_p^p = \int |h|^p\, dm_n \le M^{p-1} \int |h|\, dm_n\,,$$

s ezért

$$\|h\|_p \le M^{\frac{p-1}{p}}\, \|h\|_1^{\frac{1}{p}}\,.$$

Visszatérve az állítás bizonyításához, legyen f az $L^p(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme és $\delta > 0$. Válasszunk egy olyan folytonos, kompakt tartójú g függvényt $\mathbb{R}^n$-en, melyer $\|f - g\|_p < \delta$ teljesül. Ez lehetséges, hiszen a kompakt tartójú folytonos függvények sűrűk $L^p(\mathbb{R}^n)$-ben. Legyen M olyan szám, melyre $\|g\|_\infty < M/2$. Ekkor $\|g * \omega_\varepsilon\|_\infty \le M/2$, így az előbbi észrevétel alkalmazható, s azt kapjuk, hogy

$$\|f * \omega_\varepsilon - f\|_p \le \|f * \omega_\varepsilon - g * \omega_\varepsilon\|_p + \|g * \omega_\varepsilon - g\|_p + \|g - f\|_p \le$$
$$\le \|f - g\|_p \, \|\omega_\varepsilon\|_1 + \|f - g\|_p + M^{\frac{p-1}{p}} \, \|g * \omega_\varepsilon - g\|_1^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le 2\delta + M^{\frac{p-1}{p}} |g * \omega_\varepsilon - g\|_1 \,,$$

ami 2δ-hoz tart $\varepsilon \to 0+$ esetén. Ebből állításunk következik, s a tételt bebizonyítottuk. □

A megfelelő tétel $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-ben a következőképpen hangzik:

1.8.3 Tétel. *Legyen $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ approximatív egység, és f az $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme, mely egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}^n$ tér valamely V részhalmazán. Ekkor $\varepsilon \to 0+$ esetén $f * \omega_\varepsilon$ a V-n egyenletesen konvergál f-hez.*

Bizonyítás. Legyen $\delta > 0$, és W az $\mathbb{R}^n$ olyan kompakt részhalmaza, hogy $\int_{\mathbb{R}^n \setminus W} |\omega_1| < \delta$. Ekkor

$$\sup_{x\in V} |f * \omega_\varepsilon(x) - f(x)| \le \sup_{x\in V, y\in W} |f(x - \varepsilon y) - f(x)| \int_W |\omega_1| + 2\|f\|_\infty \cdot \delta.$$

A jobboldal első tagja egyenletesen konvergál 0-hoz, ha $\varepsilon \to 0+$, míg a másodikban δ tetszőlegesen kicsi. □

1.8.4 Tétel. *Legyen $1 \le p \le +\infty$, és f az $L^p(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme. Ha φ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy eleme, akkor $f * \varphi$ az $\mathcal{E}$-hez tartozik, és bármely α multi-index esetén*

$$\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi.$$

Bizonyítás. Ha φ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, akkor bármely α multi-index esetén $\partial^\alpha \varphi$ az $L^q(\mathbb{R}^n)$ eleme, ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Az 5.7.2 Hölder–egyenlőtlenség miatt az

$$f * \partial^\alpha \varphi(x) = \int f(y) \partial^\alpha \varphi(x - y) dm_n(y)$$

integrál $\mathbb{R}^n$-en abszolút és egyenletesen konvergens, tehát az 5.7.1 Lebesgue–tétel alapján az integrálás a differenciálással felcserélhető. □

Ugyanez a tétel érvényes, ha f az $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ térhez, φ pedig $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik.

A konvolúció tartójára nyilván érvényes a következő:

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

1.8.5 Tétel. *Ha Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, és $1 \le p < +\infty$, akkor $\mathcal{D}(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban.*

Bizonyítás. Legyen f egy kompakt tartójú függvény $L^p(\Omega)$ -ban, melynek tartója K. Tegyük fel, hogy f az egész $\mathbb{R}^n$-en értelmezve van úgy, hogy Ω-n kívül eltűnik. Legyen

$$d = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0,$$

és $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ olyan approximatív egység, melyre az ω_1 tartója az origó nyílt, d sugarú gömbjében van. Ekkor $f * \omega_\varepsilon$ tartója az Ω kompakt részhalmaza, így ez a függvény $\mathcal{D}(\Omega)$-hoz tartozik minden $0 < \varepsilon \leq 1$ esetén, ha ω_1 végtelen sokszor differenciálható. Nyilván $f * \omega_\varepsilon \to f$ az $L^p(\Omega)$-ban, ha $\varepsilon \to 0+$, másrészt, a kompakt tartójú függvények sűrűk $L^p(\Omega)$-ban, s ezzel a tételt igazoltuk. □

1.8.6 Tétel. *(DuBois–Reymond–lemma) Legyen f az $L^1_{loc}(\Omega)$ tetszőleges eleme. Ha $\int_\Omega f\varphi = 0$ minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ esetén, akkor f majdnem mindenütt* 0.

Bizonyítás. Mivel Ω σ-kompakt, így elég megmutatni, hogy f az Ω minden kompakt részhalmazán majdnem mindenütt 0. Ez viszont az előző tétel következménye. □

1.9 Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha X topologikus tér, akkor $\mathcal{C}(X)$ a pontonkénti vektortér műveletekkel és a pontonkénti szorzással egységelemes komplex algebra.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor az 1.1 szakaszban értelmezett $\{p_K\}$ szeminorma-család a $\mathcal{C}(X)$ téren lokálisan konvex, Haussdorff–féle vektor-topológiát indukál, mellyel $\mathcal{C}(X)$ Fréchet–tér.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor a $\mathcal{C}(X)$ térben egy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál a $\mathcal{C}(X)$-beli f függvényhez, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az X minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál az f függvényhez.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor $\mathcal{C}(X)$ duális tere topologikusan izomorf az $\mathcal{C}(X)$-en értelmezett összes kompakt tartójú reguláris komplex Borel–mértékek $\mathcal{M}_c(X)$ terével.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, K pedig az X kompakt részhalmaza, akkor $\mathcal{C}_K(X)$ a $\mathcal{C}(X)$ tér zárt altere.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, akkor $\mathcal{C}_0(X)$ az $\|f\|_\infty$ normával Banach–tér, melyben $\mathcal{C}_{00}(X)$ nem feltétlenül zárt altér, viszont $\mathcal{C}_K(X)$ zárt altér, az X bármely K kompakt részhalmaza esetén.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha X kompakt Haussdorff–tér, akkor a $\mathcal{C}(X)$ tér a pontonkénti vektortér műveletekkel, a pontonkénti szorzással, a konjugálással és a $\|f\|_\infty$ normával kommutatív, egységelemes C^*-algebra.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, K pedig az X kompakt részhalmaza, akkor a $\mathcal{C}_K(X)$ tér izomorf a $\mathcal{C}(K)$ Banach–térrel.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, p pedig nem negatív egész, akkor a $\mathcal{C}^p(\Omega)$ tér a pontonkénti vektortér műveletekkel és a 1.2 szakaszban definiált $q_{s,K}$ szeminorma-család által indukált topológiával lokálisan konvex topologikus vektortér.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, akkor Ω-nak létezik kompakt kimerítése.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pedig az Ω egy kompakt kimerítése, akkor az Ω bármely kompakt részhalmaza része valamelyik K_m halmaznak.

12. Bizonyítsuk be, hogy a $(q_{s,m})_{s\leq p,m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család ugyanazt a topológiát indukálja $\mathcal{C}^p(\Omega)$-n, mint a $(q_{s,K})_{s\leq p}$ család, ahol K végigfutja Ω összes kompakt részhalmazait.

13. Bizonyítsuk be, hogy a $(q_{s,m})_{s\leq p,m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család által indukált topológiával $\mathcal{C}^p(\Omega)$ szeparábilis Fréchet–tér.

14. Bizonyítsuk be, hogy a $(q_{s,m})_{s\leq p,m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család által indukált topológiával $\mathcal{C}^p(\Omega)$ nem lokálisan korlátos, így nem normálható.

15. Bizonyítsuk be, hogy a $(q_{s,m})_{s\leq p,m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család által indukált topológiával a $\mathcal{C}^p(\Omega)$ térben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál az $\mathcal{C}^p(\Omega)$-beli f függvényhez, ha a $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az Ω minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál a $\partial^\alpha f$ függvényhez, minden olyan α multi-index esetén, melyre $|\alpha|\leq p$.

16. Bizonyítsuk be, hogy $(q_{s,m})_{s\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család által indukált topológiával $\mathcal{E}(\Omega)$ szeparábilis Fréchet–tér.

17. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, akkor $\mathcal{D}(\Omega)$ egy részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha valamely Ω-beli K kompakt halmaz esetén része $\mathcal{D}_K(\Omega)$-nak, és abban korlátos.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, akkor $\mathcal{D}(\Omega)$ nem metrizálható, így nem Fréchet–tér.

19. Bizonyítsuk be, hogy a $(p_{s,m})_{s\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}}$ szeminorma-család által indukált topológiával $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ szeparábilis Fréchet–tér.

20. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-en egy végtelen sokszor differenciálható függvény pontosan akkor gyorsan csökkenő, ha bármely deriváltjának bármely polinommal való szorzata korlátos.

21. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-en egy gyorsan csökkenő függvény bármely deriváltjának bármely polinommal való szorzata integrálható.

22. Bizonyítsuk be, hogy a $(p_{s,m})_{s\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}}$ és a $(q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ szeminorma-családok ugyanazt a topológiát indukálják $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en.

23. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér x elemén

$$\omega(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{ha} \quad \|x\| < 1, \\ 0 & \text{ha} \quad \|x\| > 1 \end{cases}$$

módon értelmezett ω függvény végtelen sokszor differenciálható.

24. Legyen $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ approximatív egység $\mathbb{R}^n$-en, Ω pedig az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza. Bizonyítsuk be a következőket:

   (i) ha f lokálisan integrálható $\mathbb{R}^n$-en, akkor $f*\omega_\varepsilon$ végtelen sokszor differenciálható;

   (ii) ha f tartója Ω-ban van, akkor elég kis ε esetén $f*\omega_\varepsilon$ a $\mathcal{D}(\Omega)$-hoz tartozik;

   (iii) ha f az $L^p(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik $(1 \le p < +\infty)$, akkor $f*\omega_\varepsilon$ is, és

   $$\|f*\omega_\varepsilon\|_p \le \|f\|_p, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \|f*\omega_\varepsilon - f\|_p = 0\,;$$

   (iv) ha f folytonos, akkor

   $$\lim_{\varepsilon\to 0+} f*\omega_\varepsilon = f$$

   az $\mathbb{R}^n$ minden kompakt részhalmazán egyenletesen.

25. Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza, K pedig az Ω kompakt részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ végtelen sokszor differenciálható függvény, mely a K-n azonosan 1, Ω-n kívül pedig eltűnik.

2 DISZTRIBÚCIÓK

2.1 A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér lineáris leképezései

Ebben a szakaszban Ω az $\mathbb{R}^n$ egy nem üres, nyílt halmazát jelöli, ahol n rögzített, pozitív egész.

2.1.1 Tétel. *Legyen Y lokálisan konvex topologikus vektortér, $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ lineáris leképezés. Ekkor a következő feltételek egyenértékűek:*

(i) *Λ folytonos;*

(ii) *Λ korlátos;*

(iii) *ha $\mathcal{D}(\Omega)$-ban $\varphi_i \to 0$, akkor Y-ban $\Lambda\varphi_i \to 0$;*

(iv) *ha K az Ω kompakt részhalmaza, akkor Λ-nak $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ra való szűkítése folytonos.*

Bizonyítás. Ismeretes (ld. 5.6 szakasz), hogy lokálisan konvex topologikus vektorterek közti folytonos lineáris leképezések korlátosak, így az első feltételből következik a második.

Tegyük fel, hogy Λ korlátos, és $\varphi_i \to 0$ a $\mathcal{D}(\Omega)$-ban. Ekkor $\varphi_i \to 0$ valamely $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ban, ahol K az Ω kompakt részhalmaza, továbbá Λ-nak $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ra való szűkítése korlátos. Ezért Λ-nak $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ra való szűkítése folytonos, így $\Lambda\varphi_i \to 0$ az Y-ban, azaz, a második feltételből következik a harmadik.

Tegyük fel most, hogy teljesül (iii), és legyen $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ egy sorozat $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ban, ahol K az Ω egy kompakt részhalmaza, továbbá $\varphi_i \to 0$ a $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ban. Ekkor $\varphi_i \to 0$ a $\mathcal{D}(\Omega)$-ban, így (iii) miatt $\Lambda\varphi_i \to 0$ az Y-ban. Mivel $\mathcal{D}_K(\Omega)$ metrizálható, így (iv) következik.

Végül legyen U az Y-ban a 0 egy konvex, körszerű környezete, és legyen $V = \Lambda^{-1}(U)$. Ekkor V konvex és körszerű. A V akkor és csak akkor nyílt $\mathcal{D}(\Omega)$-ban, ha $\mathcal{D}_K(\Omega) \cap V$ nyílt $\mathcal{D}_K(\Omega)$-ban az Ω minden K kompakt részhalmaza esetén. Ezért (iv)-ből következik (i), s a tételt igazoltuk. $\square$

2.1.2 Tétel. *Legyen $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál. Ekkor a következő feltételek egyenértékűek:*

(i) *Λ folytonos;*

(ii) *az Ω bármely K kompakt részhalmaza esetén van olyan s nem negatív egész, és C valós konstans, hogy*

$$|\Lambda\varphi| \le C q_{s,K}(\varphi)$$

teljesül a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ minden φ eleme esetén.

Bizonyítás. Az állítás pontosan az előbbi tételben szereplő (i) és (iv) feltételek ekvivalenciájával egyenértékű, ha figyelembe vesszük a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ tereken a $q_{s,K}$ szeminormák által indukált topológia definícióját. □

2.2 Disztribúciók fogalma, jelölések

Legyen n pozitív egész, Ω pedig az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza. A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér folytonos lineáris funkcionáljait *disztribúcióknak*, vagy *általánosított függvényeknek* nevezzük Ω-n, illetve egyszerűen disztribúcióknak. A 2.1.1 tétel alapján a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér egy lineáris funkcionálja pontosan akkor disztribúció, ha az Ω bármely K kompakt részhalmaza esetén a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ térre való szűkítése folytonos. Ez az $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál esetén akkor és csak akkor teljesül, ha az Ω bármely K kompakt részhalmazához van olyan N nem negatív egész, és C valós szám, hogy

$$|u(\varphi)| \leq C q_{N,K}(\varphi)$$

teljesül bármely $\mathcal{D}_K(\Omega)$-beli φ mellett. Ha létezik olyan N nem negatív egész, hogy az előbbi egyenlőtlenség ezzel az N-el minden Ω-beli K kompakt halmaz esetén fennáll (esetleg más és más C konstansokkal), akkor azt mondjuk, hogy u *véges rendű*, s a legkisebb ilyen N-t az u disztribúció *rendjének* nevezzük. Az Ω összes disztribúcióinak halmazát $\mathcal{D}'(\Omega)$ jelöli. Az u disztribúció φ tesztfüggvényen felvett értékét szokás $\langle u, \varphi \rangle$, illetve $\langle u(x), \varphi(x) \rangle$ módon is jelölni.

Legyen f lokálisan integrálható függvény Ω-n, és bármely φ tesztfüggvény esetén legyen

$$u_f(\varphi) = \int f\,\varphi.$$

Ekkor

$$|u_f(\varphi)| \leq \int |f| \cdot q_{0,K}(\varphi)$$

teljesül a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ minden φ elemére az Ω minden K kompakt részhalmaza esetén. Ezért u_f 0-adrendű disztribúció. Az 1.8.6 DuBois–Reymond–lemmából következik, hogy ha g is lokálisan integrálható függvény Ω-n, akkor $u_f = u_g$ pontosan akkor teljesül, ha f majdnem mindenütt egyenlő g-vel. Ezért - a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva - az u_f disztribúciót azonosítjuk f-el. Ha u olyan disztribúció, melyhez létezik lokálisan integrálható f úgy, hogy $u = u_f$, akkor u-t *reguláris disztribúciónak* nevezzük. Ilyenkor szokás azt is mondani, hogy az u disztribúció *függvény.* Ellenkező esetben u-t *szinguláris disztribúciónak* nevezzük.

A reguláris disztribúció fogalmához kapcsolódik disztribúciók egy további lehetséges jelölése. Ha u egy disztribúció, akkor u helyett szokás néha $u(x)$-et írni, különösen az olyan kifejezésekben, amikor valamilyen formulával adjuk meg az $x \mapsto \varphi(x)$ tesztfüggvényt, melyben az x változót jelölő szimbólum is szerepel. Ilyenkor az $u(\varphi)$, illetve $\langle u, \varphi \rangle$ jelölések mellett használatos az $\langle u(x), \varphi(x) \rangle$ írásmód is. Ez olyankor különösen hasznos, amikor φ egynél több változótól függ, s változóit valamilyen szempont szerint megkülönböztetjük. Ha például φ egy tesztfüggvény $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$-en, u pedig egy disztribúció $\mathbb{R}^n$-en, akkor $\langle u(x), \varphi(x, y) \rangle$ azt jelenti, hogy az u disztribúciót az $y \mapsto \varphi(x, y)$ tesztfüggvényre alkalmaztuk valamely rögzített $\mathbb{R}^m$-beli x mellett. Ez a jelölés különösen gyakori olyankor, amikor $u = u_f$ reguláris disztribúció, s ilyenkor $u(x)$ valójában $f(x)$ helyett áll.

A 0-adrendű disztribúciókat *Radon–mértékeknek* nevezzük Ω-n. Könnyen látható, hogy a Radon–mértékek egyértelműen kiterjeszthetők az Ω-n értelmezett, komplex értékű, kompakt tartójú, folytonos függvények $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ terének folytonos, lineáris funkcionáljaivá. Másszóval, a $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ tér μ lineáris funkcionálja pontosan akkor Radon–mérték, ha az Ω bármely K kompakt részhalmaza esetén van olyan C valós szám, hogy ha φ a K-n értelmezett, komplex értékű, folytonos függvény, akkor

$$|\mu(\varphi)| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

Radon–mértékre példa az Ω halmaz bármely x pontja esetén az x ponthoz tartozó δ_x *Dirac–disztribúció*, mely a φ tesztfüggvényen a

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$$

értéket veszi fel. A δ_0 disztribúciót δ-val jelöljük. Könnyű belátni, hogy bármely Ω-beli x esetén a δ_x disztribúció szinguláris. Az előbbieket figyelembe véve gyakori a $\delta(x)$ jelölés használata is. Ha u Radon–mérték, akkor az előző szakaszban alkalmazott jelölés következő változata is használatos: $\langle u, \varphi \rangle$ helyett szokás a

$$\int \varphi \, du = \int \varphi(x) \, du(x)$$

írásmódok bármelyikét alkalmazni.

2.2.1 Példa. Tekintsük $\mathbb{R}$-en az $f(x) = \frac{1}{x}$ módon (majdnem mindenütt) értelmezett mérhető függvényt. Ez a függvény nem lokálisan integrálható, így nem definiál reguláris disztribúciót. Tekintsük ugyanakkor a következő módon értelmezett u funkcionált:

$$u(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \right), \tag{2}$$

hacsak φ a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ eleme. A jobboldalon álló kifejezést - az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ szorzó nélkül - szokás *a φ függvény Cauchy–féle főérték-értelemben vett integráljának* nevezni, s a következő módon jelölni:

$$Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \, .$$

A "Vp" a francia "valeur principale" kifejezés rövidítése, melynek jelentése: főérték.

Először megmutatjuk, hogy a (2)-ben szereplő határérték minden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli φ esetén létezik. Tegyük fel, hogy $\varphi(x) = 0$, ha $|x| > R$. Helyettesítéssel könnyen kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx\,. \tag{3}$$

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú nullsorozat, ekkor

$$\left| \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx - \int_{\varepsilon_m}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_m} \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x}\, dx \right| \leq |\varepsilon_n - \varepsilon_m|\, 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|\,,$$

amiből a (3)-ban, s így a (2)-ben szereplő határérték létezése nyilván következik.

Most azt mutatjuk meg, hogy a (2) formulával értelmezett u disztribúció. Mivel linearitása nyilvánvaló, elég a folytonosságot igazolni. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nullsorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-ben, ekkor van olyan $R > 0$ szám, hogy $\varphi_n(x) = 0$, ha $|x| > R$ $(n = 0, 1, \ldots)$, továbbá a $(\varphi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatok egyenletesen konvergálnak 0-hoz $\mathbb{R}$-en. Ebből a fentiekhez hasonló számítással azt kapjuk, hogy

$$\left| \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x}\, dx \right| \leq (R - \varepsilon)\, 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |{\varphi_n}'(x)|\,,$$

s a jobboldal minden $\varepsilon > 0$ esetén egyenletesen 0-hoz konvergál, amiből u folytonossága következik.

Az ilyen módon értelmezett u disztribúciót a következő módon szokás jelölni: $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Tehát bármely φ tesztfüggvény esetén

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, Vp \int \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\,.$$

2.2.2 Példa. A δ disztribúció általánosítása a felületi δ disztribúció. Legyen S szakaszonként sima felület $\mathbb{R}^n$-ben, $\mu : S \to \mathbb{C}$ pedig folytonos függvény. A $\mu\, \delta_S$ disztribúciót $\mathbb{R}^n$-en a következő módon értelmezzük: minden $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ tesztfüggvény esetén legyen

$$\langle \mu\, \delta_S, \varphi \rangle = \int_S \mu(x)\varphi(x)\, dS(x)\,,$$

ahol az integrálás a felszín szerinti integrált jelenti az S felületen. A $\mu\, \delta_S$ disztribúciót μ *sűrűségű egyszerű rétegnek* nevezzük az S felületen. Könnyű látni, hogy $\operatorname{supp} \mu\, \delta_S \subseteq S$.

Egy fontos speciális eset a következő: jelöljük $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$-ben a pontok koordinátáit $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ módon, és legyen S a $t = 0$ sík. Az S felületen adott, μ sűrűségű egyszerű réteget, tehát a $\mu\,\delta_S$ disztribúciót szokás $\mu(x)\delta(t)$ módon is jelölni, azaz bármely $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$-beli φ tesztfüggvény esetén

$$\langle \mu(x)\delta(t), \varphi(t,x)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x)\varphi(0,x)\,dx\,.$$

Az $n = 1$ esetben az $|x| = R$ egyenlőséggel jellemzett S_R "gömbfelületen " definiált δ_{S_R} disztribúciót szokás $\delta(R - |x|)$ módon jelölni, azaz bármely $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli φ tesztfüggvény esetén

$$\langle \delta(R - |x|), \varphi(x)\rangle = \varphi(R) + \varphi(-R)\,.$$

2.3 Disztribúciók differenciálása

Ha α egy multi-index, u pedig egy disztribúció $\mathcal{D}'(\Omega)$-ban, akkor a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér φ elemén a

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$$

formula egy $\partial^\alpha u$ lineáris funkcionált értelmez. Ha az Ω halmaz K kompakt részhalmaza esetén minden $\mathcal{D}_K(\Omega)$-beli φ mellett

$$|u(\varphi)| \leq C q_{N,K}(\varphi)$$

teljesül, akkor ugyanezen φ-re

$$|(\partial^\alpha u)(\varphi)| \leq C q_{N,K}(\partial^\alpha \varphi) \leq C q_{N+|\alpha|,K}(\varphi)$$

is fennáll, így ∂^α disztribúció.

Vegyük észre, hogy a

$$\partial^\alpha \partial^\beta u = \partial^{\alpha+\beta} u = \partial^\beta \partial^\alpha u$$

egyenlőség minden u disztribúció és bármely α, β multi-indexek esetén fennáll, hiszen a ∂^α és ∂^β differenciáloperátorok felcserélhetők $\mathcal{D}(\Omega)$-n.

Ha P tetszőleges, n-változós, komplex együtthatós polinom, u pedig egy disztribúció, akkor a $P(\partial)u$ disztribúciót értelemszerűen, az u különböző rendű deriváltjainak a P együtthatóival vett lineáris kombinációjaként értelmezzük. Ugyanilyen módon kapjuk a $P(D)u$ disztribúció jelentését.

Ha f lokálisan integrálható függvény Ω-n, akkor tetszőleges α multi-index esetén a $\partial^\alpha u_f$ disztribúciót az f *disztribúció-értelemben vett* α*-adik deriváltjának* nevezzük. Ezt szokás $\partial^\alpha f$-el is jelölni.

2.3.1 Tétel. *Legyenek n, N pozitív egészek, Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény, melynek legfeljebb N-edrendű parciális deriváltjai folytonosak, P pedig N-edfokú, n-változós, komplex együtthatós polinom. Ekkor $P(\partial)u_f = u_{P(\partial)f}$.*

Bizonyítás. Elegendő a $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ esettel foglalkozni, ekkor azonban az állítás parciális integrálással következik. □

2.3.1 Példa. Legyen

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha}\, x \geq 0, \\ 0 & \text{ha}\, x < 0. \end{cases}$$

A H függvényt *Heaviside–féle függvénynek* nevezzük. A H nyilván lokálisan integrálható. Most kiszámítjuk a disztribúció-értelemben vett deriváltját. Legyen φ tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, melyre $\varphi(x) = 0$, ha $x \geq K$. Ekkor

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dm_1(x) = -\int_0^K \varphi'(x)dm_1(x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\varphi(x)]_0^K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(\varphi).$$

Így a Heaviside–függvény disztribúció-értelemben vett deriváltja a Dirac–disztribúció $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-szerese.

2.4 Disztribúciók szorzása függvénnyel

Legyen n pozitív egész, Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, u egy disztribúció Ω-n, f pedig végtelen sokszor differenciálható, komplex értékű függvény Ω-n, tehát $\mathcal{E}(\Omega)$ egy eleme. Ha φ egy tesztfüggvény Ω-n, akkor $f\varphi$ is az, s az

$$(fu)(\varphi) = u(f\varphi)$$

egyenlőség egy lineáris funkcionált értelmez $\mathcal{D}(\Omega)$-n. Annak igazolásához, hogy fu disztribúció Ω-n, szükségünk van a Leibniz–formulára.

2.4.1 Tétel. *(Leibniz–formula) Legyen n pozitív egész, Ω az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza, α egy multi-index, f, g pedig $\mathcal{E}(\Omega)$ beli függvények. Ekkor*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta}(\partial^{\alpha-\beta}f)(\partial^\beta g),$$

ahol a $c_{\alpha,\beta}$ számok f-től és g-től független, pozitív egészek.

Bizonyítás. A bizonyítás a jól ismert

$$(fg)' = f'g + fg'$$

azonosság iterálásával adódik. □

Visszatérve annak igazolásához, hogy fu disztribúció Ω-n, ha tehát K az Ω egy kompakt részhalmaza, akkor van olyan N nem negatív egész, és C valós szám, hogy

$$|u(\varphi)| \leq Cq_{N,K}(\varphi)$$

teljesül a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ minden φ eleme mellett. A Leibniz–formula szerint van olyan f-től, K-tól és N-től függő C' valós szám, hogy

$$q_{N,K}(f\varphi) \leq C' q_{N,K}(\varphi)$$

is fennáll, minden $\mathcal{D}_K(\Omega)$-beli φ mellett. Ezért az ilyen φ-k esetén

$$|(fu)(\varphi)| \leq CC' q_{N,K}(\varphi).$$

Ez azt jelenti, hogy fu disztribúció az Ω-n.

A következő tétel a 2.4.1 tétel analógja.

2.4.2 Tétel. *(Leibniz–formula) Legyen n pozitív egész, Ω az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza, α egy multi-index, f egy $\mathcal{E}(\Omega)$ beli függvény, u pedig egy disztribúció Ω-n. Ekkor*

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta u),$$

ahol a $c_{\alpha,\beta}$ számok f-től és u-tól független, pozitív egészek.

Bizonyítás. A bizonyítás pusztán formális számolás. Az $\mathbb{R}^n$ bármely y eleme esetén legyen h_y a

$$h_y(x) = \exp(y \cdot x)$$

egyenlőséggel definiált függvény. Itt x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, $(\,\cdot\,)$ pedig a belső szorzat $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor $\partial^\alpha h_y = y^\alpha h_y$. Ha a 2.4.1 tételben szereplő Leibniz–formulát $f = h_y$ és $g = h_z$ választással alkalmazzuk, akkor bármely $\mathbb{R}^n$-beli y, z esetén kapjuk az

$$(y+z)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} y^{\alpha-\beta} z^\beta$$

azonosságot. Itt a $c_{\alpha,\beta}$ számok f-től és u-tól független, pozitív egészek. Speciálisan,

$$y^\alpha = [z + (-z+y)]^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha-\beta} \sum_{\gamma \leq \beta} c_{\beta,\gamma} (-1)^{|\beta-\gamma|} z^{\beta-\gamma} y^\gamma =$$

$$= \sum_{\gamma \leq \alpha} (-1)^{\gamma|} z^{\alpha-\gamma} y^\gamma \sum_{\gamma \leq \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha,\beta} c_{\beta,\gamma}.$$

Ezért

$$\sum_{\gamma \leq \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha,\beta} c_{\beta,\gamma} = \begin{cases} (-1)^{|\alpha|} & \text{ha } \gamma = \alpha, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{4}$$

Alkalmazzuk a 2.4.1 tételben szereplő Leibniz–formulát $\alpha \sim \beta$, $f \sim \varphi$ valamint $g \sim \partial^{\alpha-\beta} f$ választással, majd használjuk fel (4)-et, ekkor a

$$\sum_{\beta \le \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha,\beta} \partial^\beta (\varphi \partial^{\alpha-\beta} f) = (-1)^{|\alpha|} f \partial^\alpha \varphi$$

azonosságot kapjuk. Ebből az állítás adódik, hiszen

$$\partial^\alpha (fu)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} (fu)(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(f \partial^\alpha \varphi) =$$

$$= \sum_{\beta \le \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha,\beta} u\big(\partial^\beta (\varphi \partial^{\alpha-\beta} f)\big) =$$

$$= \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta} (\partial^\beta u)(\varphi \partial^{\alpha-\beta} f) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta} \big[(\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta u)\big](\varphi).$$

□

2.4.1 Példa. Legyen x_0 tetszőleges valós szám, és tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény folytonosan differenciálható a $]-\infty, x_0]$ és az $[x_0, +\infty[$ intervallumokon, továbbá legyen

$$[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

az f függvény *ugrása* az x_0 pontban. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$u_f{}' = u_{f'} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f]_{x_0} \, \delta_{x_0} \, .$$

Valóban, ha φ tetszőleges tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, melynek tartója a $]-R, R[$ intervallumban van, ahol $|x_0| < R$, akkor

$$\langle u_f{}', \varphi \rangle = -\langle u_f, \varphi' \rangle = -\int_{-R}^{R} f(x) \varphi'(x) \, dm_1(x) =$$

$$= -\int_{-R}^{x_0} f(x) \varphi'(x) \, dm_1(x) - \int_{x_0}^{R} f(x) \varphi'(x) \, dm_1(x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x)\varphi(x)]_{-R}^{x_0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x)\varphi(x)]_{x_0}^{R} + \int_{-R}^{R} f'(x) \varphi(x) \, dm_1(x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x_0 - 0) \varphi(x_0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x_0 + 0) \varphi(x_0) + \int_{-R}^{R} f'(x) \varphi(x) \, dm_1(x) =$$

$$= \langle u_{f'}, \varphi \rangle + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f]_{x_0} \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle u_{f'} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f]_{x_0} \, \delta_{x_0}, \varphi \rangle \, .$$

2.5 Differenciáloperátorok

Legyen n pozitív egész, Ω pedig az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza. A ∂_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ parciális differenciáloperátorok nyilván a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér korlátos lineáris operátorai, csakúgy, mint ezek $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ szorzatai, tetszőleges $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ multi-index esetén. A ∂ vektor-differenciáloperátor definíciója: $\partial = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$. Ha P tetszőleges, n változós, komplex együtthatós polinom, akkor a $P(\partial)$ operátor jelentése világos: a P polinomban az

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

monomot formálisan a

$$\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$$

operátorral helyettesítjük. A ∂_k operátorok mellett bevezetjük a

$$D_k = \frac{1}{i} \partial_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

differenciáloperátorokat, melyek használata esetenként áttekinthetőbb formulákhoz vezet. Ekkor $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$. Ha P tetszőleges n-változós, komplex együtthatós polinom, akkor a $P(D)$ operátor jelentése hasonló a $P(\partial)$ operátoréhoz.

Legyen N pozitív egész, és minden olyan α multi-index esetén, melyre $|\alpha| \leq N$ legyen f_α az $\mathcal{E}(\Omega)$ tetszőleges eleme, tehát Ω-n N-szer folytonosan differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik legalább egy olyan α, melyre $|\alpha| = N$ és f_α nem azonosan nulla. Tekintsük ezek után $\mathcal{D}'(\Omega)$-n a következő lineáris differenciáloperátort: legyen minden $\mathcal{D}'(\Omega)$-beli u disztribúció és Ω-beli x esetén

$$P(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha(x)\, D^\alpha u\,,$$

illetve, szimbolikusan

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha(x)\, D^\alpha\,.$$

Az N számot *a $P(x, D)$ operátor rendjének* nevezzük. A

$$\sum_{|\alpha| = N} f_\alpha(x)\, D^\alpha$$

operátor a *$P(x, D)$ operátor főrésze*, az Ω-beli x és $\mathbb{R}^n$-beli y esetén

$$p(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha(x)\, y^\alpha$$

módon értelmezett $p : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvény pedig *a $P(x, D)$ operátor karakterisztikus polinomja.* Ez egy N-edfokú homogén polinom az $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

változókban, melynek együtthatói $\mathcal{E}(\Omega)$-beli függvények. A p függvényt szokás a $P(x, D)$ *operátor főszimbólumának* nevezni.

A $P(x, D)$ operátort *elliptikusnak* nevezzük, ha $p(x, y) \neq 0$ hacsak x az Ω tetszőleges eleme, y pedig az $\mathbb{R}^n$ nullától különböző eleme. Ezek szerint a $P(x, D)$ operátor ellipticitása csupán a főrésztől függ.

A $P(x, D)$ operátort *állandó együtthatósnak* nevezzük, ha az f_α függvények minden α esetén állandók. Ilyenkor $P(x, D)$ helyett a fentiekben már alkalmazott $P(D)$ írásmódot alkalmazzuk.

2.5.1 Példa. Legyen $n = 1$, a komplex szám, és jelölje L a $\frac{d}{dx} - a$ *közönséges, elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciáloperátort.* A megfelelő $P(x, D)$ operátor: $P(x, D) = iD - a$. Az L operátor karakterisztikus polinomja $p(x, y) = iy$, hacsak x, y az R elemei. Az L operátor tehát elliptikus.

Ha m pozitív egész, $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ pedig komplex számok, akkor az

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0$$

differenciáloperátor elnevezése: *közönséges, m-edrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciáloperátor.* A megfelelő P operátor

$$P(x, D) = i^m D^m + a_{m-1}i^{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 iD + a_0\,,$$

a karakterisztikus polinom pedig

$$p(x, y) = i^m y^m\,,$$

azaz, az L operátor elliptikus.

Tekintsük most $\mathbb{R}^2$-en a $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ differenciáloperátort. Ezt *Cauchy–Riemann–operátornak* nevezzük. A megfelelő $P(x, D)$ operátor a következő alakú: $P(x_1, x_2) = iD_1 - D_2$, míg az operátorhoz tartozó karakterisztikus polinom $p(x_1, x_2, y_1, y_2) = iy_1 - y_2$, hacsak x_1, x_2, y_1, y_2 az $\mathbb{R}$ tetszőleges elemei. A Cauchy–Riemann–operátor tehát elliptikus. Természetesen a Cauchy–Riemann–operátor értelmezhető $\mathbb{R}^2$ bármely nem üres, nyílt részhalmazán, s azon is elliptikus.

Legyen most n pozitív egész. Az $\mathbb{R}^n$ tér Ω nem üres, nyílt részhalmazán értelmezett

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciáloperátort Laplace–operátornak nevezzük Ω-n. A megfelelő $P(x, D)$ differenciáloperátor alakja tehát $P(x, D) = -(D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2)$. A Laplace–operátor karakterisztikus polinomja

$$p(x, y) = -\|y\|^2\,,$$

hacsak x az Ω-nak, y az $\mathbb{R}^n$-nek tetszőleges eleme. A Laplace–operátor tehát az $\mathbb{R}^n$ tér bármely Ω nem üres, nyílt részhalmazán elliptikus.

Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tér elemeit $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ módon jelölve a

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$$

másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciáloperátort az $\mathbb{R}^n$ bármely Ω, nem üres, nyílt részhalmazán *hővezetési operátornak* nevezzük. Itt Δ_x a

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

operátort jelöli. A hővezetési operátornak megfelelő $P(t, x, D_t, D_x)$ operátor

$$P(t, x, D_t, D_x) = iD_t + D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2\,,$$

a karakterisztikus polinom pedig

$$p(t, x, s, y) = \|y\|^2\,.$$

A hővezetési operátor tehát nem elliptikus.

Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ téren az

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$$

másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciáloperátort *Schrödinger–operátornak* nevezzük, a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$$

ugyancsak másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciáloperátort pedig *hullámoperátornak*. Ezek egyike sem elliptikus.

2.6 Topológia a disztribúciók terén

Legyen n pozitív egész, Ω pedig az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza. A $\mathcal{D}'(\Omega)$ teret a gyenge*-topológiával látjuk el, melyet rajta, mint a $\mathbb{C}^{\mathcal{D}(\Omega)}$ alterén a szorzattopológia indukál. Így például, ha $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disztribúciók egy sorozata Ω-n, akkor ez a sorozat pontosan akkor konvergál az u disztribúcióhoz, ha bármely $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ tesztfüggvény esetén az $\big(u_k(\varphi)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ komplex számsorozat $u(\varphi)$-hez konvergál. Érvényes a következő tétel:

2.6.1 Tétel. *Legyen α multi-index, f pedig az $\mathcal{E}(\Omega)$ egy eleme. Ekkor az*

$$u \mapsto \partial^\alpha u \quad \text{és} \quad u \mapsto fu$$

leképezések a $\mathcal{D}'(\Omega)$ tér folytonos lineáris operátorai.

Bizonyítás. A linearitás mindkét esetben nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}'(\Omega)$-beli disztribúciók $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozata az u disztribúcióhoz konvergál. Ekkor bármely φ tesztfüggvény esetén a $\big(u_k(\partial^\alpha\varphi)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozat $u(\partial^\alpha\varphi)$-hez konvergál, így

$$\partial^\alpha u_k(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u_k(\partial^\alpha\varphi) \to (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi) = \partial^\alpha u(\varphi),$$

tehát $u \mapsto \partial^\alpha u$ folytonos leképezés.

Ugyancsak bármely φ tesztfüggvény esetén az $\big(u_k(f\varphi)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozat $u(f\varphi)$-hez konvergál, így

$$fu_k(\varphi) = u_k(f\varphi) \to u(f\varphi) = fu(\varphi),$$

tehát az $u \mapsto fu$ leképezés folytonos. □

2.7 Disztribúciók lokális egyenlősége

Legyen n pozitív egész, Ω pedig az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza. Legyenek u_1, u_2 disztribúciók Ω-n, Ω_0 pedig az Ω egy nem üres, nyílt részhalmaza. Akkor mondjuk, hogy *az u_1 és u_2 disztribúciók az Ω_0 halmazon egyenlők*, ha bármely $\mathcal{D}(\Omega_0)$-hoz tartozó φ tesztfüggvényen $u_1(\varphi) = u_2(\varphi)$. Ha az u disztribúció az Ω_0-on 0, akkor azt mondjuk, hogy *eltűnik* Ω_0-on. Ha például f egy lokálisan integrálható függvény Ω-n, akkor u_f akkor és csak akkor tűnik el Ω_0-on, ha f az Ω_0-on majdnem mindenütt nulla.

2.7.1 Tétel. *Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, Γ pedig az Ω egy nyílt lefedése. Legyen minden Γ-beli ω esetén u_ω egy disztribúció ω-n úgy, hogy ha a Γ-beli ω_1, ω_2 esetén $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset$, akkor $u_1 = u_2$ az $\omega_1 \cap \omega_2$ halmazon. Ekkor egyértelműen létezik olyan u disztribúció az Ω-n, hogy $u = u_\omega$ teljesül az ω-n, minden Γ-beli ω esetén.*

Bizonyítás. Legyen $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a Γ lefedés alá rendelt lokálisan véges egységfelbontás, ami az 1.3.1 tétel alapján létezik. Minden i-re legyen ω_i a Γ-nak egy olyan eleme, mely tartalmazza ψ_i tartóját.

Ha φ tesztfüggvény Ω-n, akkor $\varphi = \sum_{i=0}^\infty \psi_i\varphi$. Ebben az összegben csak véges sok tag különbözik 0-tól, mert φ tartója kompakt. Világos, hogy az

$$u(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\omega_i}(\psi\varphi) \tag{5}$$

módon értelmezett u függvény lineáris funkcionál $\mathcal{D}(\Omega)$-n.

Tegyük fel, hogy $\varphi_j \to 0$ a $\mathcal{D}(\Omega)$-ban. Ekkor van olyan K kompakt halmaz Ω-ban, mely tartalmazza minden φ_j tartóját. Az 1.3.1 tétel alapján van olyan m pozitív egész szám, hogy

$$u(\varphi_j) = \sum_{i=1}^{m} u_{\omega_i}(\psi\varphi_j) \tag{6}$$

teljesül egy K-t tartalmazó nyílt halmazon, ha $j = 1, 2, \ldots$. Mivel $\psi_i \varphi_j \to 0$ a $\mathcal{D}(\omega_i)$-ben, ha $j \to \infty$, ezért (5) miatt $u(\varphi_j) \to 0$. Tehát a 2.1.1 tétel alapján u disztribúció Ω-n.

A második állítás bizonyításához legyen φ egy tesztfüggvény ω-n. Ekkor $\psi_i \varphi$ tesztfüggvény $\omega_i \cap \omega$-n, így a tétel feltétele miatt $u_{\omega_i}(\psi_i \varphi) = u_\omega(\psi_i \varphi)$. Tehát

$$u(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} u_\omega(\psi_i \varphi) = u\big(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varphi\big) = u_\omega(\varphi),$$

és ezért $u = u_\omega$ az ω-n.

A most bizonyítottakból az egyértelműség is következik, hiszen u-nak teljesítenie kell (4)-et. $\square$

2.8 Disztribúció tartója

Legyen n pozitív egész, Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, u pedig egy disztribúció az Ω-n. Az u *tartójának* nevezzük az Ω mindazon nyílt részhalmazai egyesítésének Ω-ra vonatkozó komplementerét, melyeken az u eltűnik. Ezt a halmazt $\operatorname{supp} u$-val jelöljük. Az 1.3.1 tétel alapján minden disztribúció eltűnik tartója komplementerén.

2.8.1 Tétel. *Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt részhalmaza, u pedig egy disztribúció Ω-n. Ekkor*

(i) Ha az Ω valamely φ tesztfüggvényének tartója nem metszi az u tartóját, akkor $u(\varphi) = 0$.

(ii) Ha u tartója üres, akkor $u = 0$.

(iii) Ha az $\mathcal{E}(\Omega)$-beli ψ függvény 1-el egyenlő valamely, az u tartóját tartalmazó nyílt halmazon, akkor $\psi u = u$.

(iv) Ha u tartója kompakt, akkor u véges rendű: létezik olyan $C > 0$ szám és N nem negatív egész, hogy

$$|u(\varphi)| \le C q_{N,K}(\varphi)$$

teljesül minden Ω-beli K kompakt halmaz, és minden $\mathcal{D}_K(\Omega)$-beli φ esetén. Továbbá, az u egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{E}(\Omega)$ folytonos lineáris funkcionáljává.

Bizonyítás. Az első két állítás nyilvánvaló. A harmadik állításban, ha φ egy tesztfüggvény Ω-n, akkor a $\varphi - \psi\varphi$ függvény tartója nem metszi u tartóját, így az első állítás alapján készen vagyunk. Végül az (*iv*) bizonyításához legyen u tartója kompakt. Az 1.3.1 tétel alapján van olyan ψ tesztfüggvény Ω-n, melyre teljesül (*iii*). Rögzítsünk egy ilyen ψ-t, melynek tartója legyen K. Ekkor van olyan C_1 konstans és N nem negatív egész, hogy

$$|u(\varphi)| \leq C_1 q_{N,K}(\varphi)$$

teljesül minden $\mathcal{D}_K(\Omega)$-beli φ-re. A Leibniz–formula szerint van olyan C_2 szám, hogy

$$q_{N,K}(\psi\varphi) \leq C_2 q_{N,K}(\varphi)$$

fennáll minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ-re. Ezért

$$|u(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| \leq C_1 q_{N,K}(\psi\varphi) \leq C_1 C_2 q_{N,K}(\varphi)$$

érvényes minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ mellett. Mivel $u(\varphi) = u(\psi\varphi)$ teljesül minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ esetén, ezért az $\mathcal{E}(\Omega)$-beli f-ekre

$$u(f) = u(\psi f) \tag{7}$$

módon adott formula nyilván az u egy kiterjesztését értelmezi $\mathcal{E}(\Omega)$-ra. Ez a kiterjesztés folytonos, mert ha $f_i \to 0$ az $\mathcal{E}(\Omega)$-ban, akkor az f_i-k deriváltjai az Ω kompakt részhalmazain egyenletesen konvergálnak 0-hoz $i \to \infty$ esetén, ezért a Leibniz–formula alapján $\psi f_i \to 0$ a $\mathcal{D}(\Omega)$-ban, így $u(f_i) \to 0$.

Ha f az $\mathcal{E}(\Omega)$ tetszőleges eleme, K_0 pedig az Ω egy kompakt részhalmaza, akkor van olyan φ tesztfüggvény Ω-n, mely f-el egyenlő K_0-on. Ezért $\mathcal{D}(\Omega)$ sűrű $\mathcal{E}(\Omega)$-ban, s így u-nak legfeljebb egy folytonos kiterjesztése lehet $\mathcal{E}(\Omega)$-ra. □

Megjegyezzük, hogy *(i)*-ben lényeges, hogy φ nem csak u tartóján, hanem egy u tartóját tartalmazó nyílt halmazon is eltűnik.

Az *(ii)*-t figyelembe véve a második legegyszerűbb eset az, amikor egy disztribúció tartója egyetlen pontból áll. Az ilyen disztribúciók teljesen leírhatók.

2.8.1 Lemma. *Legyen n pozitív egész, X komplex vektortér, továbbá legyenek $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \Lambda$ lineáris funkcionálok X-en. Jelölje N a $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ funkcionálok nullteireinek metszetét. Ekkor a következő feltételek egyenértékűek:*

(i) Vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ komplex számok, hogy

$$\Lambda = \alpha_1\Lambda_1 + \alpha_2\Lambda_2 + \cdots + \alpha_n\Lambda_n.$$

(ii) Van olyan $\gamma < +\infty$, hogy minden X-beli x esetén

$$|\Lambda(x)| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} |\Lambda_i(x)|.$$

(iii) $\Lambda(x) = 0$ minden N-beli x esetén.

Bizonyítás. Világos, hogy (*i*)-ból következik (*ii*), és (*ii*)-ből következik (*iii*). Tegyük fel, hogy teljesül (*iii*). Legyen $\pi : X \to \mathbb{C}^n$ a

$$\pi(x) = \big(\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \dots, \Lambda_n(x)\big)$$

módon értelmezve, hacsak x az X eleme. Ha $\pi(x) = \pi(x')$, akkor (*iii*) miatt $\Lambda(x) = \Lambda(x')$. Ezért $\Lambda = F \circ \pi$, valamely $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ függvénnyel. Ez az F lineáris funkcionál $\mathbb{C}^n$-en, így léteznek olyan α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ komplex számok, hogy

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n$$

teljesül minden $\mathbb{C}^n$-beli $z_1, z_2, \dots, z_n$ esetén. Ezért

$$\Lambda(x) = F\big(\pi(x)\big) = F\big(\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \dots, \Lambda_n(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Lambda_i(x)$$

hacsak x az X eleme, s ez éppen (*i*). □

2.8.2 Tétel. *Legyen n pozitív egész, Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, u pedig egy disztribúció Ω-n, melynek tartója az Ω-beli p pontból álló egypontos halmaz. Ha u rendje N, akkor vannak olyan c_α $(|\alpha| \le N)$ kostansok, hogy*

$$u = \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha \, \partial^\alpha \delta_p. \tag{8}$$

Megfordítva, minden (8) típusú disztribúció tartója a $\{p\}$ halmaz, ha nem minden c_α nulla.

Bizonyítás. Világos, hogy minden (8) alakú disztribúció tartója $\{p\}$, feltéve, hogy a c_α számok nem mindegyike nulla.

A tétel nem triviális részének igazolásához tegyük fel, hogy $p = 0$. Ezzel nem korlátozzuk az általánosságot. Legyen φ egy tesztfüggvény Ω-n, melyre minden $|\alpha| \le N$ estén teljesül, hogy

$$(\partial^\alpha \varphi)(0) = 0. \tag{9}$$

Először azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor $u(\varphi) = 0$.

Ha $\eta > 0$, akkor van olyan K kompakt gömb az Ω-ban, melynek az origó a középpontja, hogy

$$|\partial^\alpha \varphi| \le \eta \tag{10}$$

a K-n, ha $|\alpha| = N$. Azt állítjuk, hogy

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \le \eta n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|}, \tag{11}$$

hacsak x a K eleme és $|\alpha| \le N$.

Ha $|\alpha| = N$, akkor ez éppen (10). Legyen $1 \leq i \leq N$, és tegyük fel, hogy (11)-et igazoltuk már minden olyan α-ra, melynél $|\alpha| = i$. Legyen β olyan multi-index, hogy $|\beta| = i - 1$. A $\partial^\beta \varphi$ gradiense a

$$\operatorname{grad} \partial^\beta \varphi = (\partial_1 \partial^\beta \varphi, \partial_2 \partial^\beta \varphi, \ldots, \partial_n \partial^\beta \varphi) \tag{12}$$

vektor. Az indukciós feltevésből következően

$$|\operatorname{grad} \partial^\beta \varphi)(x)| \leq n \cdot \eta n^{N-i} |x|^{N-i}, \tag{13}$$

hacsak x a K eleme, és mivel $\partial^\beta \varphi(0) = 0$, a középérték–tétel alapján (11) érvényes β-val α helyett. Ezzel (11)-et igazoltuk.

Most válasszunk egy olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli ψ függvényt, mely 1-el egyenlő a 0 valamely környezetében, s melynek tartója az $\mathbb{R}^n$ tér B zárt egységgömbjében van. Legyen

$$\psi_r(x) = \psi\left(\frac{x}{r}\right), \tag{14}$$

hacsak $r > 0$ és x az $\mathbb{R}^n$ eleme. A ψ_r tartója rB-ben van, mely elég kis r esetén része K-nak. A Leibniz–formula alapján

$$\partial^\alpha (\psi_r \varphi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} (\partial^{\alpha-\beta} \psi)\left(\frac{x}{r}\right) (\partial^\beta \varphi)(x) r^{|\beta|-|\alpha|}. \tag{15}$$

A (11)-ből következik, hogy elég kis r esetén

$$q_{N,K}(\psi_r \varphi) \leq \eta C q_{N,K}(\psi), \tag{16}$$

ahol C az n-től és N-től függő állandó.

Mivel u rendje N, ezért van olyan C_1 konstans, hogy $|u(\varphi)| \leq C_1 q_{N,K}(\psi)$ minden $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$-beli ψ tesztfüggvény mellett. Mivel $\psi_r = 1$ az u tartójának egy környezetében, ezért (16), és a 2.8.1. Tétel (*iii*) állítása következtében

$$|u(\varphi)| = |u(\psi_r \varphi)| \leq C_1 q_{N,K}(\psi_r \varphi) \leq \eta C C_1 q_{N,K}(\psi).$$

Mivel η tetszőleges volt, ezért $u(\varphi) = 0$, ha (9) teljesül. Másrészt, a

$$(\partial^\alpha \delta)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \delta(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(0) \tag{17}$$

egyenlőség alapján ez azt jelenti, hogy u eltűnik a $\partial^\alpha \delta$ ($|\alpha| \leq N$) funkcionálok nulltereinek metszetén, s ezért tételünk állítása következik a 2.8.1. tételből. $\square$

2.9 Disztribúciók konvolúciója

Az 1.7 szakaszban már bevezettük a konvolúciót függvényekre. Ha tehát f, g olyan komplex értékű függvények $\mathbb{R}^n$-en, amelyeknek létezik a konvolúciója, akkor

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$$

érvényes minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén. Vegyük észre, hogy

$$f * g = \int f \cdot \tau_x \check{g}.$$

Ennek alapján célszerű bármely $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli u disztribúció, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ tesztfüggvény, és $\mathbb{R}^n$-beli x esetén az u és φ konvolúcióját

$$(u * \varphi)(x) = u(\tau_x \check{\varphi}) \tag{18}$$

módon értelmezni, hiszen ekkor bármely f lokálisan integrálható függvény esetén $u_f * \varphi = u_{f*\varphi}$ teljesül.

Ugyancsak célszerű értelmezni bármely $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli u disztribúció és $\mathbb{R}^n$-beli x esetén a $\tau_x u$ disztribúciót

$$(\tau_x u)(\varphi) = u(\tau_{-x}\varphi) \tag{19}$$

módon bármely $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ-re, illetve az $\check{u}$ disztribúciót

$$\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi}) \tag{20}$$

módon, ugyancsak tetszőleges φ tesztfüggvény esetén. Könnyű látni, hogy $\tau_x u$ és $\check{u}$ valóban folytonos lineáris funkcionálok a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ téren.

2.9.1 Tétel. *Legyen n pozitív egész, u egy disztribúció, φ, ψ pedig tesztfüggvények $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor*

(i) minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén

$$\tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi);$$

(ii) az $u * \varphi$ az $\mathcal{E}$-hez tartozik, és

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$$

teljesül minden α multi-index esetén;

(iii)

$$u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi.$$

Bizonyítás. Minden $\mathbb{R}^n$-beli y esetén

$$\begin{aligned}
\big(\tau_x(u*\varphi)\big)(y) &= (u*\varphi)(y-x) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}), && (21)\\
\big((\tau_x u)*\varphi\big)(y) &= (\tau_x u)(\tau_y\check{\varphi}) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}), && (22)\\
\big(u*(\tau_x u)\big)(y) &= u(\tau_y(\tau_x\varphi)\check{}) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}) && (23)
\end{aligned}$$

teljesül, ami (i)-t adja.

Ha u-t a

$$\tau_x\big((\partial^\alpha\varphi)\check{}\big) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\tau_x\check{\varphi}) \tag{24}$$

azonosság mindkét oldalára alkalmazzuk, akkor az (ii) egy részét kapjuk, nevezetesen

$$\big(u*(\partial^\alpha\varphi)\big)(x) = \big((\partial^\alpha u)*\varphi\big)(x).$$

Az (ii) további részének bizonyításához legyen e egy egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben, és bármely $r>0$ szám esetén legyen

$$\eta_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re}). \tag{25}$$

Ekkor (i)-ből

$$\eta_r(u*\varphi) = u*(\eta_r\varphi). \tag{26}$$

Ha $r\to 0$, akkor $\eta_r\varphi \to \partial_e\varphi$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, ahol ∂_e az e irányban vett iránymenti deriváltat jelöli. Ezért bármely $\mathbb{R}^n$-beli x mellett

$$\tau_x\big((\eta_r\varphi)\check{}\big) \to \tau_x(\partial_e\varphi)\check{}$$

a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, s így

$$\lim_{r\to 0}\big(u*(\eta_r\varphi)\big)(x) = \big(u*(\partial_e\varphi)\big)(x). \tag{27}$$

A (26) és (27) alapján

$$\partial_e(u*\varphi) = u*(\partial_e\varphi), \tag{28}$$

így a (28) ismételt alkalmazásával (ii)-t kapjuk.

Az (iii) bizonyításához a

$$(\varphi*\psi)\check{}(t) = \int_{\mathbb{R}^n}\check{\psi}(s)(\tau_s\,\check{\varphi})(t)dm_n(s) \tag{29}$$

azonosságból indulunk ki. Legyen K_1, illetve K_2 a $\check{\varphi}$, illetve $\check{\psi}$ tartója, továbbá $K = K_1 + K_2$. Ekkor (29) a következő, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$-értékű integrál (ld. az 5.7 szakasz 5.7.3 tételét):

$$(\varphi*\psi)\check{} = \int_{K_2}\check{\psi}(s)\tau_s(\check{\varphi})\,dm_n(s), \tag{30}$$

amiből

$$(u*(\varphi*\psi))(0) = u((\varphi*\psi)\check{}) =$$

$$= \int_{K_2} \check{\psi}(s) u(\tau_s \check{\psi})\, ds = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-s)(u * \varphi)(s)\, dm_n(s),$$

vagyis

$$(u * (\varphi * \psi))(0) = ((u * \varphi) * \psi)(0) \tag{31}$$

adódik.

Ahhoz, hogy (31)-et 0 helyett x-re kapjuk meg, alkalmazzuk (31)-et $\tau_{-x}\psi$-re a ψ helyett, és használjuk fel (i)-t. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Az approximatív egységek szerepét világítja meg a következő tétel.

2.9.2 Tétel. *Legyen $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ approximatív egység $\mathbb{R}^n$-en, u egy disztribúció, φ pedig egy tesztfüggvény. Ekkor*

(i) $\lim_{j \to \infty} \varphi * \omega_j = \varphi$ *a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben,*

(ii) $\lim_{j \to \infty} u * \omega_j = u$ *a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-ben.*

Bizonyítás. Az 1.8.3 tétel alapján $f * \omega_j \to f$ az $\mathbb{R}^n$ minden kompakt részhalmazán, ha f az $\mathbb{R}^n$-en folytonos, komplex értékű függvény. Ha itt $f = \partial^\alpha \varphi$, akkor látjuk, hogy $\partial^\alpha(\varphi * \omega_j) \to \partial^\alpha \varphi$ egyenletesen. Ugyanakkor az összes $\varphi * \omega_j$ tartója benne van egy kompakt halmazban, hiszen az ω_j függvények tartói a $\{0\}$-ra húzódnak össze. Ebből (i) következik. Továbbá, a 2.9.1 tétel (i) és (iii) állításaiból következik (ii), ugyanis

$$u(\check{\varphi}) = (u * \varphi)(0) = \lim_{j \to \infty} (u * (\omega_j * \varphi))(0) =$$

$$= \lim_{j \to \infty} ((u * \omega_j) * \varphi)(0) = \lim_{j \to \infty} (u * \omega_j)(\check{\varphi}).$$

□

2.9.3 Tétel. *Legyen n pozitív egész, és minden $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli u disztribúció esetén*

$$L\varphi = u * \varphi, \tag{32}$$

hacsak φ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli tesztfüggvény.

(i) Ekkor L a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-nek $\mathcal{E}$-be való folytonos, lineáris leképezése, melyre minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén teljesül

$$\tau_x L = L \tau_x. \tag{33}$$

(ii) Megfordítva, ha L a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ből $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$-be képező folytonos, lineáris leképezés, melyre fennáll (33), akkor egyértelműen létezik olyan u disztribúció, hogy fennáll (32).

Bizonyítás. Először (i)-t bizonyítjuk. Mivel $\tau_x(u*\varphi) = u*(\tau_x\varphi)$, ezért (32)-ből következik (33). Az L folytonosságának bizonyításához elég megmutatni, hogy az L-nek minden $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ térre való szűkítése folytonos leképezés $\mathcal{E}$-be, hacsak K az $\mathbb{R}^n$ kompakt részhalmaza. Mivel ezek a terek Fréchet–terek, így a 5.6.5 zárt gráf tétel alkalmazható. Tegyük fel, hogy $\varphi_i \to \varphi$ a $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$-ban, és $u*\varphi_i \to f$ az $\mathcal{E}$-ben. Azt kell igazolni, hogy $f = u*\varphi$.

Legyen x az $\mathbb{R}^n$ egy eleme. Ekkor $\tau_x\check{\varphi}_i \to \tau_x\check{\varphi}$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, ezért

$$f(x) = \lim_{i\to\infty}(u*\varphi_i)(x) = \lim_{i\to\infty} u(\tau_x\check{\varphi}_i) = u(\tau_x\check{\varphi}) = (u*\varphi)(x).$$

Az (ii) bizonyításához legyen $u(\varphi) = (L\check{\varphi})(0)$, hacsak φ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli. Mivel $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-n folytonos, lineáris operátor, a $\varphi \mapsto \varphi(0)$ pedig a $C(\mathbb{R}^n)$-en folytonos, lineáris funkcionál, ezért u folytonos $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-n, azaz disztribúció. Mivel L teljesíti (33)-t, így

$$(L\varphi)(x) = (\tau_{-x}L\varphi)(0) = (L\tau_{-x}\varphi)(0) =$$

$$= u((\tau_{-x}\varphi)\check{}) = u(\tau_x\check{\varphi}) = (u*\varphi)(0).$$

Az u egyértelműsége nyilvánvaló, ugyanis, ha u olyan disztribúció, hogy $u*\varphi = 0$ minden φ tesztfüggvény esetén, akkor

$$u(\check{\varphi}) = (u*\varphi)(0) = 0,$$

hacsak φ tesztfüggvény, ezért $u = 0$. □

Tegyük fel, hogy u kompakt tartójú disztribúció. A 2.8.1 tétel alapján u egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{E}$ folytonos, lineáris funkcionáljává, melyet a félreérthetőség veszélye nélkül ugyancsak u-val jelölünk. Ekkor a korábbiakhoz hasonló módon értelmezzük u és tetszőleges $\mathcal{E}$-beli φ konvolúcióját az

$$(u*\varphi)(x) = u(\tau_x\check{\varphi})$$

formulával minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén.

2.9.4 Tétel. *Legyen n pozitív egész, u kompakt tartójú disztribúció $\mathbb{R}^n$-en, φ az $\mathcal{E}$ egy eleme, ψ pedig egy tesztfüggvény. Ekkor*

(i)

$$\tau_x(u*\varphi) = (\tau_x u)*\varphi = u*(\tau_x\varphi),$$

ha x az $\mathbb{R}^n$ eleme;

(ii) $u*\varphi$ az $\mathcal{E}$-hez tartozik, és

$$\partial^\alpha(u*\varphi) = (\partial^\alpha u)*\varphi = u*(\partial^\alpha\varphi);$$

(iii) $u*\psi$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik;

(iv) $u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi = (u * \psi) * \varphi$.

Bizonyítás. Az (*i*) és (*ii*) bizonyítása teljesen hasonló a 2.9.1 tétel megfelelő állításainak bizonyításához, így azokat nem ismételjük. meg. Az (*iii*) bizonyításához legyen K, illetve H az u, illetve a ψ tartója, ekkor $\tau_x\check{\psi}$ tartója $x - H$. Ezért

$$(u * \psi)(x) = u(\tau_x\check{\psi}) = 0,$$

ha K nem metszi $x - H$-t, azaz, ha x nem tartozik $K + H$-hoz. Így az $u * \psi$ tartója a $K + H$ kompakt halmaznak részhalmaza.

A (*iv*) igazolásához legyen W egy K-t tartalmazó korlátos, nyílt halmaz, és válasszunk a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben olyan φ_0 függvényt, hogy $\check{\varphi}_0 = \check{\varphi}$ teljesüljön a $W + H$-ban. Ekkor $(\varphi * \psi)\check{} = (\varphi_0 * \psi)\check{}$ teljesül W-ben, így

$$\big(u * (\varphi * \psi)\big)(0) = \big(u * (\varphi_0 * \psi)\big)(0). \tag{34}$$

Ha $-s$ a H-ban van, akkor $\tau_s\check{\varphi} = \tau_s\check{\varphi}_0$ érvényes W-ben, tehát $u * \varphi = u * \varphi_0$ teljesül a $-H$ halmazban. Ebből

$$\big((u * \varphi) * \psi\big)(0) = \big((u * \varphi_0) * \psi\big)(0) \tag{35}$$

adódik. Mivel az $u * \psi$ tartója $K + H$-ban van, ezért

$$\big((u * \psi) * \varphi\big)(0) = \big((u * \psi) * \varphi_0\big)(0). \tag{36}$$

A jobboldalak egyenlők a 2.9.1 tétel alapján, így a baloldalak is egyenlők. Ez azt mutatja, hogy az (*iv*)-ben szereplő konvolúciók egyenlők az origóban. Az általános esetet eltolással kapjuk, csakúgy, mint a 2.9.1 tétel végén. □

Legyenek u, v disztribúciók, és tegyük fel, hogy legalább az egyiknek kompakt a tartója. Ekkor bármely φ tesztfüggvény esetén legyen

$$L\varphi = u * (v * \varphi). \tag{37}$$

Vegyük észre, hogy ha a v tartója kompakt, akkor $v * \varphi$ tesztfüggvény, ezért az $u * (v * \varphi)$ értelmezve van, és $L\varphi$ az $\mathcal{E}$-hez tartozik, míg ha u tartója kompakt, akkor $u * (v * \varphi)$ azért van értelmezve, mert $v * \varphi$ az $\mathcal{E}$-hez tartozik, melyre u egyértelműen kiterjeszthető, s ekkor ismét $L\varphi$ az $\mathcal{E}$-hez tartozik.

Ha $\varphi_i \to 0$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, akkor a 2.9.3 tétel (*i*) állítása miatt $v * \check{\varphi}_i \to 0$ az $\mathcal{E}$-ben, továbbá, ha v tartója kompakt, akkor $v * \check{\varphi}_i \to 0$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben. Ezért mindkét esetben $(L\check{\varphi}_i)(0) \to 0$, s így a $\varphi \mapsto (L\check{\varphi})(0)$ funkcionál disztribúció, melyet $u * v$-vel fogunk jelölni, és az u és v *disztribúciók konvolúciójának* nevezzük. A 2.9.3 tétel (*ii*) részének bizonyításából látható, hogy $u * v$ és L a következő kapcsolatban állnak egymással:

$$L\varphi = (u * v) * \varphi, \tag{38}$$

bármely φ tesztfüggvény esetén. Másszóval, az $u * v$ disztribúciót az

$$(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi) \tag{39}$$

egyenlőség jellemzi, mely minden φ tesztfüggvény esetén fennáll.

2.9.5 Tétel. *Legyen n pozitív egész, u, v, w disztribúciók $\mathbb{R}^n$-en, S_u, S_v, S_w pedig rendre a tartóik.*

(i) Ha u és v valamelyikének tartója kompakt, akkor $u * v = v * u$.

(ii) Ha S_u és S_v valamelyike kompakt, akkor

$$S_{u*v} \subseteq S_u + S_v.$$

(iii) Ha u, v és w közül legalább kettőnek a tartója kompakt, akkor

$$(u * v) * w = u * (v * w)\,.$$

(iv) Ha α multi-index, akkor

$$\partial^\alpha u = (\partial^\alpha \delta) * u.$$

Speciálisan, $u = \delta * u$.

(v) Ha u és v valamelyikének a tartója kompakt, akkor bármely α multi-index esetén

$$\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v).$$

Bizonyítás. Az (*i*) bizonyításához legyenek φ, ψ tesztfüggvények. A 2.9.1 tétel (*iii*) állításából következik, hogy

$$(u * v) * (\varphi * \psi) = u * \big(v * (\varphi * \psi)\big) =$$

$$= u * \big((v * \varphi) * \psi\big) = u * \big(\psi * (v * \varphi)\big),$$

hiszen a függvények konvolúciója kommutatív. Ha S_v kompakt, akkor ismét alkalmazzuk a 2.9.1 tétel (*iii*) állítását, ha pedig S_u kompakt, akkor a 2.9.4 tétel (*iv*) részét. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy

$$(u * v)(\varphi * \psi) = (u * \psi) * (v * \varphi). \tag{40}$$

Mivel $\varphi * \psi = \psi * \varphi$, ugyanezzel a számítással

$$(v * u) * (\varphi * \psi) = (v * \varphi) * (u * \psi) \tag{41}$$

adódik. A (40) és (41) jobboldalai egyenlők, hiszen függvények konvolúciói. Így

$$\big((u * v) * \varphi\big) * \psi = \big((v * u) * \varphi\big) * \psi. \tag{42}$$

Ha kétszer alkalmazzuk a 2.9.3 tétel bizonyításának végén használt egyértelműségre vonatkozó érvelést, akkor $u * v = v * u$ adódik.

Az (*ii*) bizonyításához legyen φ egy tesztfüggvény, ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$(u * v)(\varphi) = u((v * \check{\varphi})\check{\ }). \tag{43}$$

Az (i) alapján nem korlátozzuk az általánosságot, ha feltételezzük, hogy v tartója kompakt. A 2.9.4 tétel (iii) állításának bizonyítása mutatja, hogy a $v * \check{\varphi}$ tartója $S_v - S_\varphi$-ben van, ahol S_φ a φ tartója. A (43) miatt $(u*v)(\varphi) = 0$, ha S_u nem metszi $S_\varphi - S_v$-t, azaz, ha S_φ nem metszi $S_u + S_v$-t.

Most (iii)-t igazoljuk. Az (ii)-ből következik, hogy az $(u * v) * w$ és az $u * (v * w)$ disztribúciók mindegyike értelmezve van, ha az S_u, S_v, S_w halmazok közül legfeljebb egy nem kompakt. Ha φ egy tesztfüggvény, akkor a definícióból azonnal következik, hogy

$$\big(u * (v * w)\big) * \varphi = u\big((v * w) * \varphi\big) = u * \big(v * (w * \varphi)\big). \tag{44}$$

Ha S_w kompakt, akkor

$$\big((u * v) * w\big) * \varphi = (u * v) * (w * \varphi) = u * \big(v * (w * \varphi)\big), \tag{45}$$

hiszen $w * \varphi$ tesztfüggvény, a 2.9.5 tétel (iii) állítása alapján. Az (44) és (45) összehasonlításából kapjuk (iii)-t, ha S_w kompakt.

Ha S_w nem kompakt, akkor S_u kompakt, s az előző eset alapján a kommutativitás felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$u * (v * w) = u * (w * v) = (w * v) * u =$$

$$= w * (v * u) = w * (u * v) = (u * v) * w.$$

Az (iv) bizonyításához legyen φ egy tesztfüggvény, ekkor $\delta * \varphi = \varphi$, ugyanis

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\tau_x \check{\varphi}) = (\tau_x \check{\varphi})(0) = \check{\varphi}(-x) = \varphi(x),$$

minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén. Így (iii), valamint a 2.9.3 tétel (ii) állítása alapján

$$(\partial^\alpha u) * \varphi = u * \partial^\alpha \varphi = u * \partial^\alpha(\delta * \varphi) = u * (\partial^\alpha \delta) * \varphi.$$

Végül, a (v) az (iv), (iii) és (i) következménye:

$$\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha \delta) * (u * v) = \big((\partial^\alpha \delta) * u\big) * v = (\partial^\alpha u) * v,$$

és

$$\big((\partial^\alpha \delta) * u\big) * v = (u * \partial^\alpha \delta) * v = u * (\partial^\alpha \delta) * v = u * \partial^\alpha v.$$

□

A 2.5 szakaszban bevezettük a $D_k = \frac{1}{i}\partial_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ differenciáloperátorokat. Könnyű látni, hogy ha a fentiekben a ∂_k operátorokat D_k-ra cseréljük, akkor állításaink és formuláink - esetleg értelemszerű változtatásokkal - érvényben maradnak.

2.10 Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha φ tetszőleges tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, η pedig olyan tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, mely a 0 valamely környezetében 1-el egyenlő, akkor bármely pozitív egész n esetén van olyan ψ tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, hogy minden $\mathbb{R}$-beli x esetén fennáll
$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + x^n \psi(x)\,.$$

2. Legyen φ tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik olyan ψ tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, hogy $\varphi = \psi'$, ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = 0$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha φ_0 olyan tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en, melyre fennáll $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0 = 1$, akkor az $\mathbb{R}$-en bármely φ tesztfüggvény előállítható
$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi + \psi'(x)$$
alakban, ahol ψ alkalmas tesztfüggvény $\mathbb{R}$-en.

4. Bizonyítsuk be, hogy a Dirac–disztribúció szinguláris disztribúció.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $x \mapsto \ln|x|$ függvény $\mathbb{R}$-en lokálisan integrálható.

6. Bizonyítsuk be, hogy az $x \mapsto \ln|x|$ függvény disztribúció-értelemben vett deriváltja $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ disztribúció szinguláris disztribúció.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pedig folytonos függvény, akkor $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} u_f$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ approximatív egység $\mathbb{R}^n$-ben, akkor a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-ben $\omega_\varepsilon \to \delta$ teljesül $\varepsilon \to 0+$ esetén.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha f_ε az alábbi $\mathbb{R}$-en lokálisan integrálható függvények bármelyikét jelöli, akkor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben $f_\varepsilon \to \delta$ teljesül $\varepsilon \to 0+$ esetén.

    (i)
$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\,;$$

    (ii)
$$f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,;$$

    (iii)
$$f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,;$$

(iv)
$$f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}\,.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta_k$ sor tetszőleges komplex a_k együtthatók esetén $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben konvergens.

12. Bizonyítsuk be, hogy disztribúciók bármely $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-ben konvergens sora tagonként differenciálható.

13. Legyen $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ komplex számsorozat, melyhez van olyan m nem negatív egész, s vannak olyan A, B valós számok, hogy
$$|a_k| \le A|k|^m + B$$
teljesül minden k egész szám esetén. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$ trigonometrikus sor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben konvergens.

14. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben érvényes a következő:
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k\,.$$

15. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben fennállnak a *Szohockij–féle formulák*:
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,$$
és
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{x-i\varepsilon} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,.$$
(A két határérték szokásos jelölése: $\frac{1}{x+i0}$, illetve $\frac{1}{x-i0}$.)

16. Bizonyítsuk be, hogy ha m pozitív egész szám, akkor az
$$x^m\,u = 0$$
egyenletnek eleget tevő minden u disztribúció a következő alakú:
$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\delta^{(k)}\,,$$
ahol $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ tetszőleges komplex számok.

17. Határozzuk meg az alábbi egyenletek összes u disztribúció-megoldásait:

   (i) $x\,u' = 1\,;$

   (ii) $x\,u' = \mathcal{P}\frac{1}{x}\,;$

(iii) $x^2\, u' = 1$;

(iv) $\sin x \cdot u' = 0$.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha u kompakt tartójú disztribúció $\mathbb{R}^n$-en, akkor $u * 1$ állandó.

19. Legyen bármely $\alpha > 0$ és valós x esetén

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \qquad g_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely $\alpha, \beta > 0$ esetén

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{és} \quad g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}.$$

20. Számítsuk ki $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben a $H*H$ konvolúciót, ahol H a Heaviside–függvény.

21. Legyen minden $\mathbb{R}$-beli x esetén $f(x) = e^{-|x|}$. Számítsuk ki $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben az $u_f * u_f$ konvolúciót.

22. Legyen minden $\mathbb{R}$-beli x esetén $f(x) = H(R - |x|)$, ahol $R > 0$, H pedig a Heaviside–függvény. Számítsuk ki $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-ben az $u_f * u_f$ konvolúciót.

23. Legyen $a > 0$, minden $\mathbb{R}$-beli x, t esetén $f(t, x) = H(at - |x|)$, továbbá jelölje v a $H(t) \cdot \delta(x)$ disztribúciót $\mathbb{R}^2$-en, ahol H a Heaviside–függvényt jelöli. Számítsuk ki $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$-ben az $u_f * v$ konvolúciót.

24. Legyen $a > 0$, minden $\mathbb{R}$-beli x, t esetén $f(t, x) = H(at - |x|)$, továbbá jelölje v a $H(t) \cdot \delta'(x)$ disztribúciót $\mathbb{R}^2$-en, ahol H a Heaviside–függvényt jelöli. Számítsuk ki $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$-ben az $u_f * v$ konvolúciót.

3 FOURIER–TRANSZFORMÁCIÓ

3.1 Jelölések

A továbbiakban n mindig egy pozitív egész számot jelöl, s multi-index alatt mindig n-dimenziós multi-indexet értünk. Mint korábban, az $\mathbb{R}^n$ téren m_n fogja jelölni a *normált Lebesgue–mértéket*:

$$dm_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dx.$$

Az L^p tereket $\mathbb{R}^n$-en ezzel a mértékkel normáljuk:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dm_n \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

Az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett f, g komplex értékű függvények konvolúciója tehát

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)$$

módon van értelmezve, feltéve, hogy az integrál létezik.

Bármely $\mathbb{R}^n$-beli t esetén az e_t *karaktert* az

$$e_t(x) = e^{itx} = \exp\{i(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n)\}$$

egyenlőség értelmezi, ahol x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme. Minden e_t kielégíti az

$$e_t(x+y) = e_t(x)e_t(y)$$

függvényegyenletet, ahol t, x, y az$\mathbb{R}^n$ tetszőleges elemei. Tehát e_t az $\mathbb{R}^n$ additív csoportjának az egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportjába való homomorfizmusa.

3.2 A Fourier–transzformáció értelmezése

Az $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli f függvény *Fourier–transzformáltja* az $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvény, melyet az

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} dm_n$$

egyenlőség értelmez az $\mathbb{R}^n$ minden t eleme esetén. Az $f \mapsto \hat{f}$ leképezést *Fourier–transzformációnak* nevezzük. Vegyük észre, hogy

$$\hat{f}(t) = (f * e_t)(0)$$

minden $\mathbb{R}^n$-beli t esetén fennáll.

Ha α egy multi-index, akkor a 2.5 szakasz jelöléseinek megfelelően legyen

$$D^\alpha = (i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\dots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

A D^α operátorok használata egyszerűsíti a formulákat. Például,

$$D^\alpha e_t = t^\alpha e_t,$$

ahol, mint korábban, az $\mathbb{R}^n$-beli $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ esetén $t^\alpha = t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}\dots t^{\alpha_n}$. Ha P egy n változós, komplex együtthatós polinom, és minden $\mathbb{R}^n$-beli ξ mellett

$$P(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha \xi^\alpha,$$

akkor a $P(D)$ és $P(-D)$ differenciáloperátorokat

$$P(D) = \sum_\alpha c_\alpha D^\alpha, \quad P(-D) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}c_\alpha D^\alpha$$

módon értelmeztük. Következésképpen

$$P(D)e_t = P(t)e_t$$

teljesül minden $\mathbb{R}^n$-beli t esetén.

A következő tétel állításai egyszerű számolással következnek a definíciókból.

3.2.1 Tétel. *Legyenek f, g az $L^1(\mathbb{R}^n)$ elemei, x, t pedig $\mathbb{R}^n$-beli. Ekkor*

(i) $(t_x f)\hat{} = e_{-x}\hat{f}$;

(ii) $(e_x f)\hat{} = \tau_x \hat{f}$;

(iii) $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$;

(iv) *ha* $\lambda > 0$, *és* $h(x) = f(x/\lambda)$, *akkor* $\hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$.

3.2.2 Tétel. *(i) Ha P egy polinom, g az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tér egy eleme, α pedig egy multi-index, akkor az*

$$f \mapsto Pf, \quad f \mapsto gf, \quad f \mapsto D^\alpha f$$

leképezések az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-nek $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-be való folytonos, lineáris leképezései.

(ii) Ha f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy eleme, P pedig egy n-változós, komplex együtthatós polinom, akkor

$$\big(P(D)f\big)\hat{} = P\hat{f} \quad \text{és} \quad (Pf)\hat{} = P(-D)\hat{f}.$$

(iii) A Fourier–transzformáció $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-nek $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-be való folytonos, lineáris leképezése.

Bizonyítás. Ha f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy eleme, akkor $D^\alpha f$ is, és a Leibniz–formula alapján Pf és gf is. A három leképezés linearitása nyilvánvaló, folytonosságuk pedig a 5.6.5 zárt gráf tétel következménye. Ez bizonyítja (i)-t.

Ha f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme, akkor $P(D)f$ is, és

$$\big(P(D)f\big) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t].$$

Ezen függvények 0-beli értékeit kiszámítva kapjuk (ii) első részét, nevezetesen

$$\big(P(D)f\big)\hat{}(t) = P(t)\hat{f}(t),$$

hacsak t az $\mathbb{R}^n$ egy eleme. Ha $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, és $t' = (t_1 + \varepsilon, t_2, \ldots, t_n)$, ahol $\varepsilon \neq 0$, akkor

$$\frac{\hat{f}(t') - \hat{f}(t)}{i\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\varepsilon} - 1}{ix_1\varepsilon} e^{-ixt} dm_n(x).$$

A 5.7.1 Lebesgue–tétel alkalmazható, hiszen $x_1 f$ integrálható, s azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1}\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e^{-ixt} dm_n(x).$$

Ez éppen (ii) második része $P(x) = x_1$ esetén. Az általános esetet ebből iterációval kapjuk.

Legyen f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme, és $g(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)$, ha x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme. Ekkor g az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik. Az ($ii$) alapján $\hat{g} = D^\alpha \hat{f}$, és

$$P \cdot D^\alpha \hat{f} = P \cdot \hat{g} = (P(D)g)\hat{},$$

mely korlátos, hiszen $P(D)g$ az $L^1(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik. Ezért $\hat{f}$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme. Ha $f_i \to f$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, akkor $f_i \to f$ az $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben, s ezért $\hat{f}_i(t) \to \hat{f}(t)$ teljesül minden $\mathbb{R}^n$-beli t esetén. Az $f \mapsto \hat{f}$ leképezés folytonossága ezek után a 5.6.5 zárt gráf tételből adódik, amivel (iii)-t is igazoltuk. □

3.2.3 Tétel. *(Riemann–Lebesgue–lemma) Ha f az $L^1(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, akkor $\hat{f}$ folytonos, és eltűnik a végtelenben, továbbá $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Bizonyítás. Mivel $|e_t(x)| = 1$, ezért ha f az $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben van, t pedig $\mathbb{R}^n$-beli, akkor

$$|\hat{f}(t)| \leq \|f\|_1. \tag{46}$$

Mivel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ezért $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben. Minden $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli f-hez vannak olyan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f_i függvények, hogy $\|f - f_i\|_1 \to 0$. Mivel $\hat{f}_i$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, ami $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ része, a (46) alapján az következik, hogy $\hat{f}_i \to \hat{f}$ teljesül az $\mathbb{R}^n$-en egyenletesen, s ezzel a bizonyítást befejeztük. □

3.3 Az inverziós tétel

3.3.1 Lemma. *Legyen bármely $\mathbb{R}^n$-beli x esetén*

$$\phi_n(x) = \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2).$$

Ekkor ϕ_n az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, $\hat{\phi}_n = \phi_n$, és

$$\phi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_n dm_n.$$

Bizonyítás. Világos, hogy ϕ_n az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik. Mivel ϕ_1 kielégíti $\mathbb{R}$-en az

$$y' + xy = 0 \tag{47}$$

differenciálegyenletet, a 3.2.2 tétel (*ii*) állítása alapján $\hat{\phi}_1$ is kielégíti ugyanezt az egyenletet. Másrészt,

$$\hat{\phi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1 dm_1 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 1,$$

továbbá $\phi_1(0) = 1$, ezért $\hat{\phi}_1 = \phi_1$. Vegyük figyelembe a

$$\phi_n(x) = \phi_1(x_1)\phi_1(x_2)\dots\phi_1(x_n)$$

egyenlőséget, ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, melyből

$$\hat{\phi}_n(t) = \hat{\phi}_1(t_1)\hat{\phi}_1(t_2)\dots\hat{\phi}_1(t_n)$$

következik bármely $\mathbb{R}^n$-beli $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ mellett, s így $\hat{\phi}_n = \phi_n$ teljesül minden n pozitív egész esetén. Mivel $\hat{\phi}_n(0) = \int \phi_n dm_n$, ezért a tétel bizonyítását befejeztük. □

3.3.1 Tétel. *(Inverziós tétel)*

(i) Ha g az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges eleme, akkor

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(t)e_x(t)\,dm_n(t) \tag{48}$$

minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén fennáll.

(ii) A Fourier–transzformáció az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-nek $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-re való folytonos, lineáris, kölcsönösen egyértelmű, 4 periódusú leképezése, melynek inverze is folytonos.

(iii) Ha f és $\hat{f}$ integrálhatók, akkor

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e_x(t)\,dm_n(t)$$

majdnem minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén teljesül.

Bizonyítás. Ha f és g integrálhatók, akkor a 5.7.4 Fubini–tételt alkalmazhatjuk az

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-ixy}dm_n(x)dm_n(y)$$

kettős integrálra, amiből az

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} dm_n \tag{49}$$

egyenlőség adódik. Az (i) bizonyításához legyenek g, ϕ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ elemei, és minden $\mathbb{R}^n$-beli x, valamint $\lambda > 0$ esetén legyen $f(x) = \phi(x/\lambda)$. A 3.2.1 tétel (iv) állítása alapján (49) a következő alakot ölti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t)\lambda^n \hat{\phi}(\lambda t)dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\hat{g}(y)dm_n(y),$$

vagy

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right)\hat{\phi}(t)dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\hat{g}(y)dm_n(y). \tag{50}$$

Ha $\lambda \to \infty$, akkor $g(t/\lambda) \to g(0)$ és $\phi(y/\lambda) \to \phi(0)$, így a 5.7.1 Lebesgue–tétel alkalmazható az (50)-ben szereplő két integrálra. Ebből

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\, dm_n = \phi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}\, dm_n \tag{51}$$

adódik minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli g, ϕ esetén. Ha most ϕ a 3.3.1-ben szereplő ϕ_n, akkor a (48) inverziós formula $x = 0$ esetre vonatkozó részét kapjuk. Ebből az általános eset a 3.2.1 tétel (i) állítása alapján

$$g(x) = (\tau_{-x}g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-x}g)\hat{}\, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}e_x dm_n$$

módon következik.

Az (ii) bizonyításához vezessük be ideiglenesen a $\Phi g = \hat{g}$ jelölést. A (48) inverziós formula mutatja, hogy Φ kölcsönösen egyértelmű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en, hiszen $\hat{g} = 0$-ból nyilván $g = 0$ következik. Ugyancsak adódik, hogy

$$\Phi^2 g = \breve{g}, \tag{52}$$

ahol $\breve{g}(x) = g(-x)$, s ezért $\Phi^4 g = g$. Ebből következik, hogy Φ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-t $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-re képezi. A Φ folytonosságát már a 3.2.2 tételben igazoltuk, ebből Φ^{-1} folytonossága $\Phi^{-1} = \Phi^3$ alapján következik.

Az (iii) bizonyításához térjünk vissza a (49) azonossághoz, ahol g az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy eleme. Ha a (48) inverziós formulát (49)-ba helyettesítjük, majd alkalmazzuk a Fubini–tételt, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0\, \hat{g}\, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\, \hat{g}\, dm_n\,, \tag{53}$$

ahol

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e_x(t)\, dm_n(t)$$

bármely $\mathbb{R}^n$-beli x esetén. Az (ii) alapján a $\hat{g}$ alakú függvények kimerítik $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-t, s mivel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ része, így (53)-ből

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_0 - f)\phi\, dm_n = 0 \tag{54}$$

következik minden $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli ϕ-re. Mivel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathcal{C}_{00}$-ban, ezért $f_0 - f = 0$ az $\mathbb{R}^n$-en majdnem mindenütt. □

3.3.2 Tétel. *Ha f, g tetszőleges $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli függvények, akkor*

(i) $f * g$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, és

(ii) $(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$.

Bizonyítás. A 3.2.1 tétel (iii) állítása alapján az előző tétel jelöléseit használva

$$\Phi(f * g) = \Phi f \cdot \Phi g. \tag{55}$$

Ha f, g helyére az $\hat{f}, \hat{g}$ függvényeket helyettesítjük, akkor

$$\Phi(\hat{f} * \hat{g}) = \Phi^2 f \cdot \Phi^2 g = \check{f}\check{g} = (fg)\check{} = \Phi^2(fg) \tag{56}$$

adódik. Ha (56) mindkét oldalára alkalmazzuk Φ^{-1}-et, akkor (ii)-t kapjuk. Mivel fg az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, így (ii)-ből következik, hogy $\hat{f} * \hat{g}$ is $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli, s ebből (i) adódik, hiszen a Fourier–transzformáció szürjektív. □

3.4 Plancherel tétele

3.4.1 Tétel. *(Plancherel) Egyértelműen létezik az $L^2(\mathbb{R}^n)$-nek önmagára való olyan Ψ lineáris izometriája, melynél minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f mellett $\Psi f = \hat{f}$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha f, g az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartoznak, akkor az inverziós tételből

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g}(x) dm_n(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{ixt} dm_n(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) dm_n(t) \int \overline{g}(x) e^{ixt} dm_n(x)$$

adódik. Az utóbbi integrál éppen $\hat{g}(t)$ komplex konjugáltja. Ebből a *Parseval–formulát* kapjuk: ha f, g az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartoznak, akkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, \overline{g}\, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \overline{\hat{g}}\, dm_n. \tag{57}$$

Ha $g = f$, akkor
$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \tag{58}$$
adódik tetszőleges $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f mellett.

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ugyanazért sűrű $L^2(\mathbb{R}^n)$-ben, amiért $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben. Ezért (58) azt mutatja, hogy az L^2-metrikára nézve az $f \mapsto \hat{f}$ leképezés az $L^2(\mathbb{R}^n)$ sűrű alterének, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-nek önmagára való izometrikus leképezése. Ebből elemi módon következik, hogy az $f \mapsto \hat{f}$ leképezés egyértelműen kiterjeszthető egy $\Psi : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ folytonos leképezéssé, mely lineáris és szürjektív. $\square$

Az $f \mapsto \hat{f}$ leképezés $L^2(\mathbb{R}^n)$-re való fenti kiterjesztését szokás *Fourier–Plancherel–transzformációnak* nevezni. Megjegyezzük, hogy az (57) Parseval–formula tetszőleges $L^2(\mathbb{R}^n)$-beli f és g esetén érvényes.

Az a tulajdonság, amit a Plancherel–tétel a Fourier–transzformációról kifejez, hogy tudniillik az L^2-tér lineáris izometriája, a Fourier–transzformáció legfontosabb és legmélyebb tulajdonsága.

3.5 Temperált disztribúciók

Mindenekelőtt a következő tételt igazoljuk.

3.5.1 Tétel. *Az identikus leképezés $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ből $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-be folytonos.*

Bizonyítás. Az identikus leképezés folytonosságának igazolásához vegyük észre azt, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-nek egy topologikus vektortérbe való leképezése pontosan akkor folytonos, ha annak minden $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ altérre való szűkítése folytonos, ahol K az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges kompakt részhalmaza. Ha K egy ilyen kompakt részhalmaz, akkor a $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$-n $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ által indukált topológia pontosan megegyezik saját topológiájával, hiszen nyilván az $(1 + \|x\|^2)^N$ függvények mind korlátosak K-n. Ezért az identikus leképezés $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$-ből $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-be folytonos (valójában homeomorfizmus), s ebből az állítás következik. $\square$

Jelölje $i : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ az identikus leképezést, L pedig legyen az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy folytonos lineáris funkcionálja. Az $u_L = L \circ i$ formula a fentiek miatt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ egy folytonos lineáris funkcionálját értelmezi, azaz, egy disztribúciót. Mivel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben az 1.5.1 lemma szerint, különböző L funkcionálokból különböző u disztribúciók származnak. Másszóval, ez a formula vektortér-izomorfizmus az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tér $\mathcal{S}'$ duálisa és disztribúciók egy bizonyos vektortere között. Az ilyen disztribúciókat *temperált disztribúcióknak* nevezzük. Egy disztribúció pontosan akkor temperált, ha folytonosan kiterjeszthető $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-re. Ha tehát a temperált disztribúciókat azonosítjuk $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-re való kiterjesztésükkel, akkor azt mondhatjuk, hogy a temperált disztribúciók pontosan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folytonos lineáris funkcionáljai, azaz, az $\mathcal{S}'$ duális tér elemei. A "temperált" jelző egy növekedési feltételre utal a végtelenben, amint azt a következő példák mutatják.

3.5.1 Példa. Minden kompakt tartójú disztribúció temperált. Legyen ugyanis K az u disztribúció kompakt tartója, rögzítsünk egy olyan ψ tesztfüggvényt, amely azonosan 1 valamely K-t tartalmazó nyílt halmazon és legyen

$$\tilde{u} = u(\psi\, f),$$

ha f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme. Ha $f_i \to 0$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, akkor $D^\alpha f_i \to 0$ az $\mathbb{R}^n$-en egyenletesen, minden α multi-index esetén. Ezért $D^\alpha(\psi\, f_i) \to 0$ az $\mathbb{R}^n$-en egyenletesen, minden α multi-index esetén, tehát $\psi\, f_i \to 0$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben. Ezért $\tilde{u}$ folytonos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en. Mivel $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$, ha φ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, ezért $\tilde{u}$ az u kiterjesztése.

3.5.2 Példa. Legyen μ egy olyan pozitív Borel–mérték $\mathbb{R}^n$-en, melyre

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-k}\, d\mu(x) < +\infty \tag{59}$$

teljesül valamely pozitív egész k mellett. Ekkor μ temperált disztribúció, ami azt jelenti, hogy az

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu$$

formula az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tér folytonos lineáris funkcionálját értelmezi. Tegyük fel ugyanis, hogy $f_i \to 0$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben. Ekkor az

$$\varepsilon_i = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^k |f_i(x)|$$

jelöléssel nyilván $\varepsilon_i \to 0$. Mivel $|u(f_i)|$ az (59)-ben szereplő integrálnak legfeljebb ε_i-szerese, ezért $u(f_i) \to 0$, tehát u folytonos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en.

3.5.3 Példa. Legyen $1 \le p < +\infty$, N pozitív egész, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pedig olyan mérhető függvény, melyre

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^{-N} g(x)|^p\, dm_n(x) = C < +\infty$$

teljesül. Ekkor g temperált disztribúció. Legyen ugyanis

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f g\, dm_n\,,$$

ha f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme. Tegyük fel először, hogy $p > 1$, s legyen q a p-hez konjugált kitevő, ekkor a 5.7.2 Hölder–egyenlőtlenség szerint

$$u(f) \le C^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^N f(x)|^q\, dm_n(x) \right)^{1/q} \le \tag{60}$$

$$\le C^{1/p}\, B^{1/q} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^M f(x)|\,,$$

ahol M elég nagy ahhoz, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{(N-M)q} \, dm_n(x) = B < +\infty$$

teljesüljön. A (60) egyenlőtlenség mutatja, hogy u folytonos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en. A $p = 1$ eset még egyszerűben tárgyalható.

3.5.4 Példa. Az előző példa mutatja, hogy bármely $1 \le p \le +\infty$ mellett minden $L^p(\mathbb{R}^n)$-beli függvény temperált disztribúció. Ilyen például minden polinom, és minden olyan mérhető függvény, mely abszolút értékben polinommal majorálható.

3.5.2 Tétel. *Ha α multi-index, P polinom, g gyorsan csökkenő függvény, u pedig temperált disztribúció, akkor $D^\alpha u$, Pu és gu temperált disztribúciók.*

Bizonyítás. Az állítások a 3.2.2 tétel alapján a következő definíciókból adódnak:

$$\begin{aligned} (D^\alpha u)(f) &= (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f)\,, \\ (Pu)(f) &= u(Pf)\,, \\ (gu)(f) &= u(gf)\,. \end{aligned}$$

□

Bármely u temperált disztribúció esetén legyen

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})\,,$$

ha φ tetszőleges tesztfügggvény. Mivel $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ folytonos lineáris leképezés $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en, u pedig folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en, ezért $\hat{u}$ folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en, azaz, temperált disztribúció, melyet az u temperált disztribúció *Fourier–transzformáltjának* nevezünk. Megjegyezzük, hogy ezzel az elnevezéssel kapcsolatban meg kell vizsgálni a következő problémát: láttuk, hogy minden integrálható függvény temperált disztribúció, így egy ilyen függvénynek kétféle értelemben létezik Fourier–transzformáltja. Azt kellene tudni, hogy ha tehát f az $L^1(\mathbb{R}^n)$ egy eleme, akkor a $\hat{f}$-nek megfelelő reguláris disztribúció éppen $(u_f)\hat{}$. Ez azonban így van, hiszen

$$(u_f)\hat{}(\varphi) = u_f(\hat{\varphi}) = \int \hat{f}\varphi = (u_{\hat{f}})(\varphi)$$

teljesül minden φ gyorsan csökkenő függvényre. Ugyanez a kérdés a Fourier–Plancherel–transzformációval kapcsolatban is feltehető, hiszen a négyzetesen integrálható függvények is temperált disztribúciók, s a válasz hasonlóan, pozitív értelemben adható meg, amint az könnyen látható.

3.5.3 Tétel. *A Fourier–transzformáció $\mathcal{S}'$ önmagára való kölcsönösen egyértelmű, folytonos, lineáris, 4 periódusú leképezése, melynek inverze is folytonos. Továbbá, ha u temperált disztribúció, P pedig egy polinom, akkor*

$$\big(P(D)u\big)\hat{} = P\hat{u}, \qquad \text{és} \qquad (Pu)\hat{} = P(-D)\hat{u}\,.$$

Bizonyítás. Legyen W a 0 környezete $\mathcal{S}'$-ben. Ekkor vannak olyan $f_1, f_2, \ldots, f_k$ függvények $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, hogy

$$\{u \in \mathcal{S}' : |u(f_i)| < 1 \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, \ldots, k\} \subseteq W\,.$$

Legyen

$$V = \{u \in \mathcal{S}' : |u(\hat{f}_i)| < 1 \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, \ldots, k\}\,.$$

Ekkor V a 0 környezete $\mathcal{S}'$-ben, s mivel

$$\hat{u}(f) = u(\hat{f}) \tag{61}$$

teljesül minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f és $\mathcal{S}'$-beli u esetén, ebből látható, hogy $\hat{u}$ a W-hez tartozik, ha u V-beli. Ez mutatja a Φ leképezés folytonosságát, ahol $\Phi(u) = \hat{u}$, ha u temperált disztribúció. Mivel Φ 4 periódusú $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en, (61) mutatja, hogy 4 periódusú $\mathcal{S}'$-n is, tehát $\Phi^4(u) = u$ teljesül minden $\mathcal{S}'$-beli u mellett. Ezért Φ kölcsönösen egyértelmű, s mivel $\Phi^{-1} = \Phi^3$, így Φ^{-1} folytonos. A további állítások a 3.2.2 és 3.5.2 tételekből, valamint a következő számításokból következnek:

$$\big(P(D)u\big)\hat{}(\varphi) = \big(P(D)u\big)(\hat{\varphi}) = u\big(P(-D)\hat{\varphi}\big) =$$

$$= u\big((P\varphi)\hat{}\big) = \hat{u}(P\varphi) = (P\hat{u})(\varphi)\,,$$

és

$$\big(P(-D)\hat{u}\big)(\varphi) = \hat{u}\big(P(D)\varphi\big) = u\big((P(D)\varphi)\hat{}\big) =$$

$$= u(P\hat{\varphi}) = (Pu)(\hat{\varphi}) = (Pu)\hat{}(\varphi)\,,$$

melyek minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli φ esetén fennállnak. □

3.5.5 Példa. Tekintsük $\mathbb{R}^n$-en az $f(x) = 1$ függvényt, ha x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme. Az f függvény - mint polinom - temperált disztribúció. Fourier–transzformáltja:

$$\hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \hat{\varphi}\, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\, dm_n = \varphi(0) = \delta(\varphi)\,,$$

az inverziós tétel miatt, ahol δ a Dirac–disztribúció. Hasonlóan

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dm_n = 1(\varphi)\,.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\hat{1} = \delta, \qquad \text{és} \qquad \hat{\delta} = 1\,.$$

Ha P tetszőleges polinom $\mathbb{R}^n$-en, akkor az előző tétel alapján

$$\big(P(D)\delta\big)\hat{} = P, \qquad \text{és} \qquad \hat{P} = P(-D)\delta\,.$$

Figyelembe véve a 2.8.2 tételt és ezeket a formulákat azt mondhatjuk, hogy egy disztribúció akkor és csak akkor Fourier–transzformáltja egy polinomnak, ha tartója üres, vagy egyetlen pontból áll.

3.5.6 Példa. A H Heaviside–függvény nyilván temperált disztribúció. A következőkben meghatározzuk Fourier–transzformáltját. Legyen tehát φ gyorsan csökkenő függvény $\mathbb{R}$-en, ekkor a definíció alapján

$$\langle \hat{u}_H, \varphi \rangle = \langle u_H, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ix \cdot t}\, dx\, dt\,.$$

Mivel a $t \mapsto e^{-ix \cdot t}$ függvény $[0, +\infty)$-en nem integrálható, így a Fubini–tétel nem alkalmazható, s a két integrálás sorrendjét nem lehet felcserélni. A Fourier–transzformált kiszámításához más utat választunk. Legyen $\varepsilon > 0$ esetén u_ε az $x \mapsto H(x)e^{-\varepsilon x}$ lokálisan integrálható függvénynek megfelelő temperált disztribúció. Nem nehéz megmutatni, hogy az $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ általánosított sorozat $\mathcal{S}'$-ben az u_H disztribúcióhoz konvergál. Valóban, ha φ gyorsan csökkenő függvény, akkor

$$\langle H(x)e^{-\varepsilon x}, \varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx\,,$$

a Lebesgue–tétel szerint. A 3.5.3 tétel miatt tehát az $(\hat{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ általánosított sorozat $\mathcal{S}'$-ben az $\hat{u}_H$ disztribúcióhoz konvergál. Legyen φ gyorsan csökkenő függvény $\mathbb{R}$-en, ekkor a definíció alapján

$$\langle \hat{u}_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle u_\varepsilon, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} \hat{\varphi}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ix \cdot t - \varepsilon t}\, dx\, dt\,.$$

Itt már a $t \mapsto e^{-ix \cdot t - \varepsilon t}$ függvény integrálható $[0, +\infty)$-en, a Fubini–tétel alkalmazásával tehát

$$\langle \hat{u}_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-ix \cdot t - \varepsilon t}\, dt \right] \varphi(x)\, dx$$

adódik. A belső integrál kiszámítható:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix \cdot t - \varepsilon t}\, dt = \left[\frac{e^{-ix \cdot t - \varepsilon t}}{-ix - \varepsilon} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{ix + \varepsilon} = \frac{1}{i} \frac{1}{x - i\varepsilon}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \frac{1}{x - i\varepsilon}\,.$$

Korábban (ld. a 2.10.15. Szohockij–formulákat) láttuk, hogy

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,$$

így

$$\hat{u}_H(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \hat{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

a Heaviside–függvény Fourier–transzformáltja.

A továbbiakban bármely u disztribúció és bármely φ tesztfüggvény esetén legyen

$$\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})\,.$$

Ekkor $\check{u}$ disztribúció és nyilván bármely lokálisan integrálható f esetén $\check{u_f} = u_{\check{f}}$. Ha u temperált disztribúció, akkor $\check{u}$ is az.

3.5.4 Tétel. *(Inverziós tétel) Bármely u temperált disztribúció esetén*

$$(\hat{u})\hat{} = \check{u}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a $(\hat{\varphi})\hat{} = \check{\varphi}$ inverziós formulából, mely minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli φ mellett fennáll, ugyanis ennek alapján

$$(\hat{u})\hat{}(\varphi) = \hat{u}(\hat{\varphi}) = u\big((\hat{\varphi})\hat{}\big) = u(\check{\varphi}) = \check{u}(\varphi)\,.$$

□

3.5.1 Lemma. *Ha $w = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ az $\mathbb{R}^n$ eleme, φ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme, és*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x+\varepsilon w) - \varphi(x)}{\varepsilon}$$

ha $\varepsilon > 0$ és x az $\mathbb{R}^n$ eleme, akkor $\varphi_\varepsilon \to \partial_1\varphi$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, ha $\varepsilon \to 0$.

Bizonyítás. Elég azt igazolnunk, hogy a $\varphi_\varepsilon - \partial_1\varphi$ függvény Fourier–transzformáltja 0-hoz konvergál $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, azaz,

$$\psi_\varepsilon\hat{\varphi} \to 0 \tag{62}$$

az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, ha $\varepsilon \to 0$, ahol

$$\psi_\varepsilon(y) = \frac{\exp(i\varepsilon y_1) - 1}{\varepsilon} - i\, y_1\,,$$

ha $\varepsilon > 0$, y pedig az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, melynek első koordinátája y_1. Ha P egy polinom, α pedig egy multi-index, akkor

$$P\cdot D^\alpha(\psi_\varepsilon\hat{\varphi}) = \sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta} P\cdot(D^{\alpha-\beta}\hat{\varphi})\cdot(D^\beta\psi_\varepsilon)\,. \tag{63}$$

Egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$|D^\beta\psi_\varepsilon(y)| \le \begin{cases} \varepsilon y_1^2 & \text{ha} \quad |\beta| = 0, \\ \varepsilon|y_1| & \text{ha} \quad |\beta| = 1, \\ \varepsilon^{|\beta|-1} & \text{ha} \quad |\beta| > 1. \end{cases}$$

Ezért a (63) baloldala egyenletesen 0-hoz konvergál $\mathbb{R}^n$-en, amint $\varepsilon \to 0$. A (62) reláció ezután az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ topológiájának definíciójából következik. □

Ha u temperált disztribúció, φ pedig gyorsan csökkenő függvény, akkor az $u * \varphi$ konvolúciót az

$$(u * \varphi)(x) = u(\tau_x \check{\varphi})$$

formulával értelmezzük, ahol x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme. Ez értelmes, hiszen az $\mathbb{R}^n$ minden x eleme esetén $\tau_x \check{\varphi}$ gyorsan csökkenő.

3.5.5 Tétel. *Legyen φ gyorsan csökkenő függvény, u pedig temperált disztribúció. Ekkor*

(i) *$u * \varphi$ végtelen sokszor differenciálható és*

$$D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$$

teljesül minden α multi-index esetén,

(ii) *$u * \varphi$ temperált disztribúció,*

(iii) $(u * \varphi)\hat{} = \hat{\varphi}\, \hat{u}$,

(iv) $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$ *teljesül minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli ψ mellett,*

(v) $\hat{u} * \hat{\varphi} = (\varphi u)\hat{}$.

Bizonyítás. Az (i) ugyanúgy bizonyítható, mint a 2.9.4 tételben, mivel a konvolúció nyilván felcserélhető az eltolásokkal. Ebből az is adódik, hogy

$$\left(\frac{\tau_{-\varepsilon w} - \tau_0}{\varepsilon}\right)(u * \varphi) = u * \left(\frac{\tau_{-\varepsilon w} - \tau_0}{\varepsilon}\right)\varphi \,.$$

A 3.5.1 lemma alapján

$$D^\alpha(u * \varphi) = u * (D^\alpha \varphi) \,,$$

ha $\alpha = w$. Ezt iterálva kapjuk (i) általános esetét.

Jelölje $q_N(f)$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tér topológiáját definiáló normát az 1.5 szakaszból, tetszőleges $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f mellett. Az $\mathbb{R}^n$ tér bármely x, y elemeire fennálló

$$1 + \|x + y\|^2 \le 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy

$$q_N(\tau_x f) \le 2^N (1 + \|x\|^2) q_N(f) \tag{64}$$

teljesül minden $\mathbb{R}^n$-beli x és $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f esetén. Mivel u folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-en, s a q_N normák $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ topológiáját definiálják, ezért van olyan N nem negatív egész szám és C szám, hogy minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli f-re fennáll

$$|u(f)| \le C\, q_N(f) \,. \tag{65}$$

A (64) és (65) alapján tehát

$$|(u * \varphi)(x)| = |u(\tau_x \check{\varphi})| \le 2^N C\, q_N(\varphi)(1 + \|x\|^2)^N \,,$$

amiből (*ii*) következik.

Az előbbiek szerint tehát $u * \varphi$-nek van Fourier–transzformáltja $\mathcal{S}'$-ben. Ha ψ egy tesztfüggvény a K kompakt tartóval, akkor

$$(u*\varphi)\hat{}(\hat{\psi} = (u*\varphi)(\check{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^n} (u*\varphi)(x)\psi(-x)\,dm_n(x) =$$

$$= \int_{-K} u[\psi(-x)\tau_x\check{\varphi}]\,dm_n(x) = u\Big(\int_{-K} \psi(-x)\tau_x\check{\varphi}\,dm_n(x)\Big) =$$

$$= u\big((\varphi*\psi)\check{}\big) = \hat{u}\big((\varphi*\psi)\hat{}\big) = \hat{u}(\hat{\varphi}\hat{\psi})\,,$$

ezért

$$(u*\varphi)\hat{}(\hat{\psi}) = (\hat{\varphi}\hat{u})(\hat{\psi})\,. \tag{66}$$

Az előző számításban, amikor u-t "kiemeltük" az integráljel alól, azt használtuk fel, hogy egy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli értékű integrál az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folytonos lineáris funkcionáljaival felcserélhető (ld. a 5.7 szakasz 5.7.3 tételét). Eddig tehát (66)-et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli ψ függvényekre igazoltuk. Mivel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben, a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli függvények Fourier–transzformáltjai is sűrűk $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-ben. Ezért (66) minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli $\hat{\psi}$ mellett érvényes. Tehát az $(u*\varphi)\hat{}$ és $\hat{\varphi}\,\hat{u}$ disztribúciók egyenlők, amivel igazoltuk (*iii*)-t.

A (66)-ot megelőző számítás két végén álló tagok tehát minden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli ψ mellett egyenlők. Ezért

$$(u*\varphi)(\hat{\psi}) = u\big((\varphi*\psi)\check{}\big)\,,$$

ami ugyanaz, mint

$$\big((u*\varphi)*\psi\big)(0) = \big(u*(\varphi*\psi)\big)(0)\,.$$

Ha itt ψ-t $\tau_x\psi$-re cseréljük, akkor (*iv*)-t kapjuk.

Végül, $(\hat{u}*\hat{\varphi})\hat{} = \check{\varphi}\,\check{u} = (\varphi\,u)\check{}$ a fentiek alapján, ez adja (*v*)-t, mivel nyilván $(\varphi\,u)\check{} = \big((\varphi\,u)\hat{}\big)\hat{}$. □

3.6 A Szoboljev–lemma

Ebben a szakaszban n egy rögzített pozitív egész számot jelöl. Az $\mathbb{R}^n$ tér Ω nem üres, nyílt részhalmazán értelmezett $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető függvényt az Ω-n *lokálisan* L^2*-nek* nevezzük, ha

$$\int_K |f|^2\,dm_n < +\infty$$

az Ω minden K kompakt részhalmaza esetén teljesül. Egy $\mathcal{D}(\Omega)$-beli u disztribúciót Ω-n *lokálisan L^2-nek* mondunk, ha van olyan g függvény, amely Ω-n lokálisan L^2, és $u = u_g$, azaz,

$$u(\varphi) = \int_\Omega g\,\varphi\,dm_n$$

teljesül minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ tesztfüggvény esetén. Amikor azt mondjuk, hogy egy f függvény *D^α disztribúció-deriváltja lokálisan L^2 az Ω-n*, akkor ez azt jelenti, hogy f lokálisan integrálható Ω-n, s a $D^\alpha u_f$ disztribúció Ω-n lokálisan L^2. Explicit módon ez azt jelenti, hogy van olyan $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, amely Ω-n lokálisan L^2, és

$$\int_\Omega g\varphi\,dm_n = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\,D^\alpha\varphi\,dm_n$$

teljesül minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ tesztfüggvény esetén. Ez tehát semmit nem állít az f függvény klasszikus értelemben esetleg létező parciális deriváltjairól.

Emlékeztetünk arra, hogy ha p nem negatív egész, akkor $\mathcal{C}^p(\Omega)$ jelöli az összes olyan $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvények halmazát, melyek $D^\alpha f$ parciális deriváltjai minden $|\alpha| \le p$ multi-index esetén léteznek és folytonosak Ω-n.

3.6.1 Tétel. *(Szoboljev–lemma) Legyenek n, p, r egész számok, n pozitív, p nem negatív és*

$$r > p + \frac{n}{2}\,.$$

Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pedig egy függvény, melynek $\partial_i^k f$ disztribúció-deriváltjai Ω-ban lokálisan L^2-k $1 \le i \le n$ és $0 \le k \le r$ esetén. Ekkor van olyan f_0 függvény $\mathcal{C}^p(\Omega)$-ban, hogy $f_0(x) = f(x)$ majdnem minden Ω-beli x esetén.

Bizonyítás. A feltevés miatt vannak olyan g_{ik} függvények, melyek Ω-n lokálisan L^2-k, hogy

$$\int_\Omega g_{ik}\varphi\,dm_n = (-1)^k\int_\Omega f\,\partial_i^k\varphi\,dm_n \tag{67}$$

teljesül minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli φ esetén, ha $1 \le i \le n$ és $0 \le k \le r$.

Legyen ω egy olyan nem üres, nyílt halmaz, melynek K lezártja az Ω kompakt részhalmaza. Válasszunk egy olyan ψ tesztfüggvényt $\mathcal{D}(\Omega)$-ban, amely 1 a K-n és értelmezzük F-et $\mathbb{R}^n$-en a következő módon:

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x)f(x) & \text{ha} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{ha} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

Ekkor F integrálható és négyzetesen integrálható $\mathbb{R}^n$-en.

A Leibniz–formula Ω-ban a következőt adja:

$$\partial_i^r F = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s}(\partial_i^{r-s}\psi)(\partial_i^s f) = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s}(\partial_i^{r-s}\psi)g_{is}\,.$$

A ψ tartójának Ω_0 komplementerében $\partial_i^r F = 0$. Ez a két disztribúció egybeesik az $\Omega \cap \Omega_0$ halmazon. Így $\partial_i^r F$, melyet eredetileg $\mathbb{R}^n$ egy disztribúciójaként értelmeztünk, valójában $L^2(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, hiszen a $(\partial_i^{r-s}\psi)g_{is}$ függvények $L^2(\mathbb{R}^n)$-hez tartoznak. Mivel $\partial_i^r F$ kompakt tartójú, így ugyancsak $L^1(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik.

A Plancherel–tételt F-re, valamint $\partial_1^r F$-re, $\partial_2^r F$-re,..., $\partial_n^r F$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{F}|^2 \, dm_n < +\infty \, ,$$

és

$$\int_{\mathbb{R}^n} y_i^{2r} |\hat{F}(y)|^2 \, dm_n(y) < +\infty \, ,$$

ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Mivel

$$(1 + \|y\|)^{2r} < (2n+2)^r (1 + y_1^{2r} + \cdots + y_n^{2r}) \, ,$$

ezért az előbbi egyenlőtlenségekből

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^{2r} |\hat{F}(y)|^2 \, dm_n(y) < +\infty \tag{68}$$

következik. Ha J jelöli a (68)-ban szereplő integrált, σ_n pedig az $\mathbb{R}^n$ egységgömbje $n-1$-dimenziós felszínét, akkor a Schwarz–egyenlőtlenség alapján

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^p |\hat{F}(y)|^2 \, dm_n(y) \right)^2 \leq J \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^{2p-2r} \, dm_n(y) =$$

$$= J\sigma_n \int_0^{+\infty} (1+t)^{2p-2r} t^{n-1} \, dt < +\infty$$

adódik, mivel $2p - 2r + n - 1 < -1$. Ezzel azt igazoltuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^p |\hat{F}(y)|^2 \, dm_n(y) < +\infty \, . \tag{69}$$

Legyen

$$F_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(y) e^{ix \cdot y} \, dm_n(y),$$

ha x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme. Az inverziós tétel alapján $F_\omega = F$ az $\mathbb{R}^n$-en majdnem mindenütt. Továbbá (69) miatt $y \mapsto y^\alpha \hat{F}(y)$ is $L^1(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, ha $|\alpha| \leq p$. A 3.2.2 tétel (*ii*) része bizonyításának iterálásával azt kapjuk, hogy F_ω a $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik. Másrészt, az adott f függvény ω-ban egybeesik F-el. Ezért $f = F_\omega$ az ω-ban majdnem mindenütt.

Ha ω' egy másik ω-hoz hasonló halmaz, akkor az eddigiek alapján egy $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$-hez tartozó $F_{\omega'}$ függvényt kapunk, amely f-el majdnem mindenütt megegyezik ω'-ben. Így $F_\omega = F_{\omega'}$ az $\omega \cap \omega'$ halmazban. A kívánt f_0 függvényt tehát az Ω halmaz tetszőleges x pontjában értelmezhetjük úgy, mint $f_0(x) = F_\omega(x)$, ha x az ω-hoz tartozik. $\square$

3.7 A Paley–Wiener–tételek

Ebben a szakaszban n egy rögzített pozitív egész, Ω pedig a $\mathbb{C}^n$ tér egy nem üres, nyílt részhalmaza. A $\mathbb{C}^n$ tér elemeit $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ módon jelöljük, ahol z_k komplex szám ($k = 1, 2, \ldots, n$). Ha $z_k = x_k + iy_k$, ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ az $\mathbb{R}^n$ elemei, akkor a $z = x + iy$ írásmódot használjuk, s az $x = \operatorname{Re} z$ és $y = \operatorname{Im} z$ vektorokat a z *valós részének*, illetve *képzetes részének* nevezzük. Így $\mathbb{R}^n$-t a $\mathbb{C}^n$ részének tekintjük, mégpedig az $\operatorname{Im} z = 0$ tulajdonságú z elemekből álló részhalmaznak. Ha α tetszőleges multiindex, z a $\mathbb{C}^n$, t pedig az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, akkor a $\|z\|$, $\|\operatorname{Re} z\|$, $\|\operatorname{Im} z\|$, z^α, $z \cdot t$ és $e_z(t)$ jelölések jelentése értelemszerűen adódik a korábbiakból. Ha $r > 0$, akkor B_r fogja jelölni az $\mathbb{R}^n$ térben az origó középpontú, r sugarú zárt gömböt.

Ha $f : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, akkor f-et *holomorfnak* nevezzük Ω-n, ha minden változójában holomorf. Ha f holomorf $\mathbb{C}^n$-en, akkor *egész függvénynek* nevezzük.

3.7.1 Lemma. *Ha f olyan egész függvény, amely eltűnik $\mathbb{R}^n$-en, akkor $f = 0$.*

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetet ismertnek tekintve jelölje P_k az f következő tulajdonságát: ha a $\mathbb{C}^n$-beli z pontnak legalább k valós koordinátája van, akkor $f(z) = 0$. Ekkor P_n a tétel feltétele, és P_0-t akarjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy $1 \leq i \leq n$ és P_i-t már igazoltuk. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_i$ valós számok. Ekkor a

$$\lambda \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \lambda, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

egész függvény a valós tengelyen nulla, így minden komplex λ esetén nulla. Ezért P_{i-1} igaz, s a bizonyítást befejeztük. $\square$

3.7.1 Tétel. *(Paley–Wiener) Legyen $r > 0$ valós szám.*

(i) Ha a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ tesztfüggvény tartója B_r-ben van, és minden $\mathbb{C}^n$-beli z esetén

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\, e^{-iz \cdot t}\, dm_n(t)\,, \tag{70}$$

akkor f egész függvény, és van olyan $(\gamma_N)_{N \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy minden $\mathbb{C}^n$-beli z esetén fennáll

$$|f(z)| \leq \gamma_N\, (1 + \|z\|)^{-N}\, e^{r\|\operatorname{Im} z\|} \tag{71}$$

$(N = 0, 1, \ldots)$.

(ii) Megfordítva, ha az f egész függvény teljesíti a (71) feltételeket minden $\mathbb{C}^n$-beli z és $N = 0, 1, \ldots$ esetén, akkor van olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ tesztfüggvény tartója B_r-ben van, és minden $\mathbb{C}^n$-beli z esetén fennáll (70).

Bizonyítás. Ha t a B_r-hez tartozik, akkor

$$|e^{-iz \cdot t}| = e^{y \cdot t} \leq e^{\|y\|\,\|t\|} \leq e^{r\|\operatorname{Im} z\|}\,.$$

A (70)-ben szereplő integrandus tehát bármely $\mathbb{C}^n$-beli z esetén integrálható $\mathbb{R}^n$-en, s f értelmezve van $\mathbb{C}^n$-en. Az f folytonossága nyilvánvaló, s ha minden változójában alkalmazzuk a Morera–tételt, akkor azt kapjuk, hogy f egész függvény. Parciális integrálással a következőt kapjuk

$$z^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \varphi)(t)\, e^{-iz\cdot t}\, dm_n(t)$$

bármely α multi-index esetén, ami azt jelenti, hogy

$$|z^\alpha|\,|f(z)| \leq \|D^\alpha \varphi\|_1\, e^{r\|\mathrm{Im}\, z\|}\,, \tag{72}$$

amiből (71) következik.

Tegyük most fel, hogy f olyan egész függvény, melyre teljesül (71), és legyen

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{it\cdot x}\, dm_n(x) \tag{73}$$

az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges t eleme esetén. Először is megjegyezzük, hogy ilyenkor az $x \mapsto (1+\|x\|)^N f(x)$ függvény bármely $\mathbb{N}$-beli N esetén integrálható $\mathbb{R}^n$-en a (71) alapján. Ebből adódik, hogy φ végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^n$-en, ugyanazzal az érveléssel, amivel a 3.2.2 tétel (*ii*) állítását igazoltuk.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy ha $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tetszőleges valós számok, $z_2, z_3, \ldots, z_n$ pedig tetszőleges komplex számok, akkor az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + i\eta, z_2, \ldots, z_n) e^{i\left(t_1(\xi+i\eta)+t_2 z_2+\cdots+t_n z_n\right)}\, d\xi \tag{74}$$

integrál értéke η-tól független. Legyen Γ annak a téglalapnak a határa a $(\xi + i\eta)$ síkban, melynek egyik oldala a valós tengelyen van, egy másik az $\eta = \eta_1$ egyenesen, a függőleges oldalai pedig a végtelenbe távolodnak. A Cauchy–integráltétel alapján a (74)-ben szereplő integrál Γ-n nulla. Ebből következik, hogy a (74)-ben szereplő integrál $\eta = 0$ esetén ugyanannyi, mint $\eta = \eta_1$ esetén. Ez állításunkat igazolja.

Ugyanezt a gondolatmenetet a többi koordináta esetén is alkalmazhatjuk, így a (73) alapján azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{it\cdot x}\, dm_n(x) \tag{75}$$

fennáll az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges t és y elemei esetén.

Legyen $t \neq 0$ az $\mathbb{R}^n$ egy eleme, és legyen $y = \frac{\lambda t}{\|t\|}$, ahol $\lambda > 0$ valós szám. Ekkor $t \cdot y = \lambda\,\|t\|$, $\|y\| = \lambda$, és

$$|f(x+iy)\, e^{it\cdot(x+iy)}| \leq \gamma_N\, (1+\|x\|)^{-N}\, e^{(r-\|t\|)\lambda}\,,$$

s ezért

$$|\varphi(t)| \le \gamma_N\, e^{(r-\|t\|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{-N}\, dm_n(x)\,, \tag{76}$$

ahol az N számot olyan nagyra választjuk, hogy az integrál véges legyen. Ha most $\lambda \to +\infty$ és $\|t\| > r$, akkor (76) alapján $\varphi(t) = 0$. Így φ tartója B_r-ben van.

Ezután (70) valós z értékekre az inverziós tételből következik. Mivel (70) mindkét oldalán egész függvények állnak, így egyenlőségük a 3.7.1 lemma alapján adódik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

3.7.2 Tétel. *(Paley–Wiener) Legyen $r > 0$ valós szám.*

(i) Ha a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli u disztribúció tartója B_r-ben van, és u rendje N, továbbá minden $\mathbb{C}^n$-beli z esetén

$$f(z) = \langle u, e_{-z}\rangle\,, \tag{77}$$

akkor f egész függvény, az f függvény $\mathbb{R}^n$-re való leszűkítése az u Fourier–transzformáltja, és van olyan γ valós szám, hogy minden $\mathbb{C}^n$-beli z esetén fennáll

$$|f(z)| \le \gamma_N\, (1+\|z\|)^{-N}\, e^{r\|\operatorname{Im} z\|}\,. \tag{78}$$

(ii) Megfordítva, ha az f egész függvény teljesíti a (78) feltételt minden $\mathbb{C}^n$-beli z és valamely N nem negatív egész esetén, akkor van olyan $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli u disztribúció, melynek tartója B_r-ben van, és minden $\mathbb{C}^n$-beli z esetén fennáll (77).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli u disztribúció tartója B_r-ben van. Válasszunk olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli ψ tesztfüggvényt, amely 1-el egyenlő B_{r+1}-en. Ekkor $u = \psi u$, s a 3.5.5 tétel (v) állítása alapján

$$\hat{u} = (\psi\, u)\hat{} = \hat{u} * \hat{\psi}\,. \tag{79}$$

Ezért $\hat{u}$ végtelen sokszor differenciálható. Válasszunk olyan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-beli φ-t, hogy $\hat{\varphi} = \psi$. Ekkor

$$(\hat{u} * \hat{\psi})(x) = (\hat{u} * \check{\varphi})(x) = \hat{u}(\tau_x\varphi) = u\big((\tau_x\varphi)\hat{}\big) =$$

$$= u(e_{-x}\hat{\varphi}) = u(\psi\, e_{-x}) = u(e_{-x})\,,$$

így (79) alapján

$$\hat{u}(x) = u(e_{-x}) \tag{80}$$

következik minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén.

A következő lépésben azt mutatjuk meg, hogy a (77)-ben definiált f függvény egész függvény. Legyenek a, b a $\mathbb{C}^n$ elemei és

$$g(\lambda) = f(a+\lambda b) = u(e_{-a-\lambda b}) \tag{81}$$

tetszőleges komplex λ esetén. Az f folytonossága nyilvánvaló: ha $w \to z$ a $\mathbb{C}^n$-ben, akkor $e_{-w} \to e_{-z}$ az $\mathcal{E}$-ben, és u folytonos $\mathcal{E}$-n. Ahhoz tehát, hogy megmutassuk, hogy f egész függvény azt kell igazolni, hogy minden változójában egész függvény, amihez elég megmutatni, hogy a (81)-ben definiált g függvény egész függvény.

Legyen Γ egy téglalap határvonala $\mathbb{C}$-ben. Mivel a $\lambda \mapsto e_{-a-\lambda b}$ leképezés $\mathbb{C}$-ből $\mathcal{E}$-be folytonos, ezért létezik az

$$F = \int_\Gamma e_{-a-\lambda b}\, d\lambda \tag{82}$$

$\mathcal{E}$-beli értékű integrál (ld. a 5.7.3 tételt). Mivel az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges t pontjában a kiértékelés folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{E}$-n, ez felcserélhető az integrálással, azaz

$$F(t) = \int_\Gamma e_{-a-\lambda b}(t)\, d\lambda = \int_\Gamma e^{-ia\cdot t}\, e^{-i(b\cdot t)\lambda}\, d\lambda = 0\,.$$

Tehát $F = 0$, s a (82)-ből azt kapjuk, hogy

$$0 = u(F) = \int_\Gamma u(e_{-a-\lambda b})\, d\lambda = \int_\Gamma g(\lambda)\, d\lambda\,,$$

s a Morera–tétel alapján g egész függvény.

A tétel első részének teljes bizonyításához elég (71)-et igazolni. Válasszunk egy olyan h végtelen sokszor differenciálható segédfüggvényt a valós egyenesen, hogy $h(s) = 1$, ha $s < 1$, és $h(s) = 0$, ha $s > 2$, továbbá minden $\mathbb{C}^n$-beli $z \neq 0$ és $\mathbb{R}^n$-beli t esetén legyen

$$\varphi_z(t) = e^{-iz\cdot t}\, h(\|t\|\,\|z\| - r\|z\|)\,. \tag{83}$$

Ekkor φ_z a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik. Mivel u tartója B_r-ben van, valamint érvényes $h(\|t\|\,\|z\| - r\|z\|) = 1$, ha $\|t\| \le \|z\|^{-1} + r$, a (77) és (83) összehasonlításából

$$f(z) = u(\varphi_z) \tag{84}$$

következik. Mivel u rendje N, van olyan γ_0 valós szám, hogy $|u(\varphi)| \le \gamma_0\, q_N(\varphi)$ teljesül minden $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ mellett, ahol q_N az 1.5 szakaszban bevezetett norma. Így (84)-ből azt kapjuk, hogy

$$|f(z)| \le \gamma_0 q_N(\varphi_z)\,. \tag{85}$$

A φ_z függvény tartóján $\|t\| \le r + \frac{2}{\|z\|}$, ezért

$$|e^{-iz\cdot t}| = e^{y\cdot t} \le e^{2+r\|\mathrm{Im}\, z\|}\,. \tag{86}$$

Ha a (83)-ban szereplő szorzatra a Leibniz–formulát alkalmazzuk, valamint felhasználjuk (86)-ot és (85)-öt, akkor (78)-at kapjuk. Ezzel a tétel első részének bizonyítását befejeztük.

A második résznél a feltevés szerint f-re teljesül (78), ezért

$$|f(x)| \leq \gamma(1 + \|x\|)^N \tag{87}$$

teljesül minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén. Ezért f-nek $\mathbb{R}^n$-re való leszűkítése $\mathcal{S}'$-höz tartozik, így valamely u temperált disztribúció Fourier–transzformáltja.

Válasszunk olyan $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli h függvényt, melynek tartója B_1-beli, és $\int h = 1$, valamint értelmezzük a

$$h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} h\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

függvényeket $\varepsilon > 0$ és tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli t esetén. Legyen továbbá

$$f_\varepsilon(z) = f(z)\,\hat{h_\varepsilon}(z)\,, \tag{88}$$

hacsak $\varepsilon > 0$ és z a $\mathbb{C}^n$ tetszőleges eleme. Itt $\hat{h_\varepsilon}$ azt az egész függvényt jelöli, melynek $\mathbb{R}^n$-re való leszűkítése a h_ε függvény Fourier–transzformáltja. Ha a 3.7.1 tétel első állítását a h_ε függvényre alkalmazzuk, akkor arra jutunk, hogy f_ε-ra teljesül a 3.7.1 tétel (71) feltétele r helyett $r + \varepsilon$-nal. Ezért a 3.7.1 tétel második állítása alapján $f_\varepsilon = \hat{\varphi}_\varepsilon$ teljesül valamely $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ_ε függvényre, melynek tartója $B_{r+\varepsilon}$-ba esik.

Legyen most ψ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy olyan eleme, hogy $\hat{\psi}$ nem metszi B_r-t. Ekkor $\hat{\psi}\,\varphi_\varepsilon = 0$ teljesül, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi. Mivel $f\,\psi$ integrálható $\mathbb{R}^n$-en és érvényes $\hat{h_\varepsilon}(x) = \hat{h}(\varepsilon x) \to 1$ korlátos majoránssal, ezért

$$u(\hat{\psi}) = \hat{u}(\psi) = \int f\,\psi\,dm_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int f_\varepsilon\,\psi\,dm_n =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \hat{\varphi}_\varepsilon\,\psi\,dm_n = \int \hat{\psi}\,\varphi_\varepsilon\,dm_n = 0\,.$$

Ezért u taró́ja B_r-ben van.

Azt kaptuk, hogy $z \mapsto u(e_{-z})$ egész függvény, s mivel (77) az u választása folytán minden $\mathbb{R}^n$-beli z mellett fennáll, így a 3.7.1 lemma alapján a tétel bizonyítását befejeztük. □

3.8 Feladatok

1. Legyen $\alpha \neq 0$ valós szám és minden $\mathbb{R}$-beli x esetén

$$f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}\,.$$

Mutassuk meg, hogy f gyorsan csökkenő és minden $\mathbb{R}$-beli t mellett

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\,e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}}\,.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha x_0 az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, akkor $\hat{\delta}_{x_0} = e_{-x_0}$.

3. Legyenek R, a valós számok, $R > 0$. Mutassuk meg, hogy a következő f függvényeknek megfelelő u_f reguláris disztribúciók temperáltak, s számítsuk ki Fourier–transzformáltjaikat (H a Heaviside–függvényt jelöli):

   (i) $f(x) = \operatorname{sign} x$,

   (ii) $f(x) = \sin ax$,

   (iii) $f(x) = \cos ax$,

   (iv) $f(x) = H(R - |x|)$,

   (v) $f(x) = H(x)$.

4. Számítsuk ki a következő disztribúciók Fourier–transzformáltját:

   (i) $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\,\delta$,

   (ii) $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\,\delta$,

   (iii) $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha u temperált disztribúció $\mathbb{R}^n$-en és x az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges eleme, akkor

$$(\tau_x u)\hat{} = e_{-x}\,\hat{u}, \qquad (e_x\,u)\hat{} = \tau_x\,\hat{u}\,.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbb{R}^n$-en integrálható függvény Fourier–transzformáltja folytonos.

7. Legyen az $\mathbb{R}^3$ bármely x eleme esetén

$$f(x) = (2\pi)^{\frac{3}{2}}(1 + \|x\|^2)^{-1}\,.$$

   Bizonyítsuk be, hogy

$$\hat{u}_f - \Delta\,\hat{u}_f = \delta\,.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha I jelöli az identikus operátort $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-en, akkor az $I - \Delta$ operátor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-en kölcsönösen egyértelmű.

4 ALKALMAZÁSOK DIFFERENCIÁL-EGYENLETEKRE

4.1 Fundamentális megoldások

Ebben a szakaszban n egy rögzített pozitív egész számot jelöl. Legyen P legalább elsőfokú n változós komplex együtthatós polinom. A $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli E disztribúciót a $P(D)$ differenciáloperátor *fundamentális megoldásának* nevezzük, ha fennáll

$$P(D)E = \delta\,. \tag{89}$$

Ilyenkor szokás az E disztribúciót a $P(D)u = 0$ *parciális differenciálegyenlet fundamentális megoldásának* is nevezni. A fundamentális megoldás szerepét a következő megfontás érzékelteti: tegyük fel, hogy E a $P(D)$ differenciáloperátor fundamentális megoldása, s legyen v kompakt tartójú disztribúció. Ekkor létezik az $E * v$ konvolúció, továbbá

$$P(D)(E * v) = \big(P(D)E\big) * v = \delta * v = v\,,$$

tehát $E * v$ megoldása a

$$P(D)u = v \tag{90}$$

parciális differenciálegyenletnek. A fundamentális megoldás birtokában tehát előállíthatjuk (90) egy disztribúció-megoldását. Másrészt, világos, hogy (90) bármely két megoldásának különbsége megoldása a $P(D)u = 0$ homogén egyenletnek.

Megjegyezzük, hogy az $E * v$ konvolúció olyankor is létezhet, ha v nem kompakt tartójú. Ilyenkor olyan E-t kellene találni, amely a "végtelenben jól viselkedik". Az volna az optimális, ha kompakt tartójú E-t találnánk, ám könnyű látni, hogy ez lehetetlen. Ekkor ugyanis a 3.7.2 tétel alapján $\hat{E}$ egész függvény volna, s azt kapnánk, hogy $P \cdot \hat{E} = 1$. Egy polinom és egy egész függvény szorzata viszont csak akkor lehet 1, ha mindkettő állandó.

Ugyanakkor a $P \cdot \hat{E} = 1$ egyenletet számos esetben felhasználhatjuk E meghatározására. Ha például $1/P$ temperált disztribúció, akkor az $1/P$ disztribúció inverz Fourier–transzformáltja olyan fundamentális megoldást szolgáltat, mely ugyancsak temperált disztribúció.

A következőkben $\mathbb{T}^n$ a $\mathbb{C}^n$ tér $w = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n})$ alakú pontjaiból álló halmazt jelöli, ahol $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ valós számok. A $\mathbb{T}^n$-en σ_n jelöli a Lebesgue–mérték $\frac{1}{(2\pi)^n}$-szeresét.

4.1.1 Lemma. *Legyen N nem negatív egész, P pedig egy N-edfokú polinom $\mathbb{C}^n$-en. Ekkor van olyan csupán P-től függő A valós szám, hogy*

$$|f(z)| \le A r^{-N} \int_{\mathbb{T}^n} |(f\,P)(z + rw)|\, d\sigma_n(w) \tag{91}$$

teljesül minden f egész függvény, $\mathbb{C}^n$-beli z és $r > 0$ esetén.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy F egyváltozós egész függvény, és minden komplex λ esetén

$$Q(\lambda) = c\prod_{i=1}^{N}(\lambda + a_i)\,, \tag{92}$$

ahol $c, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges komplex számok. Legyen minden komplex λ esetén

$$Q_0(\lambda) = c\prod_{i=1}^{N}(1 + \overline{a}_i\lambda)\,.$$

Ekkor $cF(0) = (FQ_0)(0)$. Mivel $|Q_0| = |Q|$ az egységkörön, ezért

$$|cF(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(FQ)(e^{i\theta})|\,d\theta\,. \tag{93}$$

Az adott P polinom felírható $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_N$ alakban, ahol P_j j-edfokú homogén polinom ($j = 0, 1, \ldots, N$). Értelmezzük A-t a következő módon:

$$\frac{1}{A} = \int_{\mathbb{T}^n} |P_N|\,d\sigma_n\,.$$

Mivel P fokszáma N, ez az integrál pozitív. Ha z a $\mathbb{C}^n$-ből, w pedig a $\mathbb{T}^n$-ből való, akkor legyen minden komplex λ esetén

$$F(\lambda) = f(z + r\lambda w), \qquad Q(\lambda) = P(z + r\lambda w)\,.$$

A Q polinom főegyütthatója $r^N P_N(w)$. Így (93) alapján

$$r^N|P_N(w)|\,|f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(fP)(z + re^{i\theta}w)|\,d\theta\,. \tag{94}$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget σ_n szerint integráljuk, akkor

$$|f(z)| \le Ar^{-N}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\int_{\mathbb{T}^n} |(fP)(z + re^{i\theta}w)|\,d\sigma_n \tag{95}$$

adódik. Mivel a σ_n mérték invariáns az $x \mapsto e^{i\theta}$ változótranszformációval szemben, ezért a belső integrál független θ-tól, amiből az állítást kapjuk. □

4.1.1 Tétel. *Legyen P egy n változós komplex polinom, v pedig egy kompakt tartójú disztribúció $\mathbb{R}^n$-en. A*

$$P(D)u = v \tag{96}$$

differenciálegyenletnek akkor és csak akkor létezik kompakt tartójú u megoldása, ha van olyan g egész függvény $\mathbb{C}^n$-en, hogy

$$P\,g = \hat{v}\,. \tag{97}$$

Ha ez a feltétel teljesül, akkor (96)-nak pontosan egy kompakt tartójú megoldása létezik, s annak tartója része a v tartója konvex burkának.

Bizonyítás. Ha (96)-nak van kompakt tartójú u megoldása, akkor világos, hogy fennáll (97) a $g = \hat{u}$ választással.

Megfordítva, tegyük fel, hogy teljesül (97) valamely g egész függvénnyel. Legyen $r > 0$ olyan, hogy v tartója B_r-ben van (ld. a 3.7 szakaszt). A 4.1.1 Lemma alapján (97)-ből az következik, hogy

$$|g(z)| \leq A \int_{\mathbb{T}^n} |\hat{v}(z+w)| \, d\sigma_n(w) \tag{98}$$

teljesül, hacsak z a $\mathbb{C}^n$ eleme. A 3.7.2 Paley–Wiener–tétel (77) állítása szerint van olyan N nem negatív egész és γ valós szám, hogy minden $\mathbb{C}^n$-beli z, w esetén fennáll

$$|\hat{v}(z+w)| \leq \gamma(1 + \|z+w\|)^N \, e^{r\|\mathrm{Im}\,(z+w)\|} \, . \tag{99}$$

Továbbá, vannak olyan c_1, c_2 valós számok, melyekre minden $\mathbb{C}^n$-beli z és $\mathbb{T}^n$-beli w esetén teljesül

$$1 + \|z+w\| \leq c_1(1 + \|z\|) \tag{100}$$

és

$$\|\mathrm{Im}\,(z+w)\| \leq c_2 + \|\mathrm{Im}\, z\| \, . \tag{101}$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből adódóan minden $\mathbb{C}^n$-beli z mellett fennáll

$$|g(z)| \leq B(1 + \|z\|)^N \, e^{r\|\mathrm{Im}\, z\|} \, , \tag{102}$$

ahol B egy újabb állandó, amely γ, A, N, c_1, c_2 és r értékétől függhet. A (102) egyenlőtlenség, és a 3.7.2 Paley–Wiener–tétel (78) állítása szerint van olyan B_r-beli tartójú u disztribúció, hogy $g = \hat{u}$. Így (97) azt jelenti, hogy $P\,\hat{u} = \hat{v}$, ami egyenértékű (96)-tal.

Az u egyértelműsége nyilvánvaló, hiszen a $P\,\hat{u} = \hat{v}$ egyenlőséget legfeljebb egy $\hat{u}$ egész függvény teljesítheti.

Az előző okfejtés alapján az u disztribúció S_u tartója minden olyan origó középpontú zárt gömbben benne van, amely tartalmazza a v disztribúció S_v tartóját. Mivel (96) alapján minden $\mathbb{R}^n$-beli x-re fennáll

$$P(D)(\tau_x u) = \tau_x v \, ,$$

ezért ugyanez igaz az $x + S_u$ és $x + S_v$ halmazokra is. Következésképpen S_u benne van az összes olyan, tetszőleges középpontú zárt gömbök metszetében, melyek tartalmazzák S_v-t. Mivel az összes ilyen gömbök metszete az S_v konvex burka, ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

4.1.2 Tétel. *(Malgrange–Ehrenpreis) Legyen N pozitív egész, P pedig egy N-edfokú n változós komplex polinom. Ekkor a $P(D)$ differenciáloperátornak van olyan E fundamentális megoldása, melyre fennáll*

$$|E(\psi)| \leq Ar^{-N} \int_{\mathbb{T}^n} d\sigma_n(w) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t + rw)| \, dm_n(t) \tag{103}$$

valamely A valós számmal, minden ψ tesztfüggvény és minden $r > 0$ esetén.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $r > 0$ számot és legyen

$$\|\psi\| = \int_{\mathbb{T}^n} d\sigma_n(w) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t + rw)|\, dm_n(t) \tag{104}$$

minden ψ tesztfüggvény esetén. Először azt mutatjuk meg, hogy

$$\lim_{j\to\infty} \|\psi_j\| = 0\,, \tag{105}$$

ha $\psi_j \to 0$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben. Ha t az $\mathbb{R}^n$-ből, w pedig a $\mathbb{C}^n$-ből van, akkor érvényes $\hat{\psi}(t + w) = (e_{-w}\psi)\hat{}(t)$. Ezért

$$\|\psi\| = \int_{\mathbb{T}^n} d\sigma_n(w) \int_{\mathbb{R}^n} |(e_{-w}\psi)\hat{}|\, dm_n \tag{106}$$

teljesül minden ψ tesztfüggvény esetén. Ha $\psi_j \to 0$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, akkor az összes ψ_j tartója benne van valamely K kompakt halmazban. Az e_{rw} függvények $\mathbb{T}^n$-beli w esetén egyenletesen korlátosak K-n. A 2.4.1 Leibniz–formulából következik, hogy minden α multi-index esetén fennáll

$$\|D^\alpha(e_{-rw}\psi_j)\|_\infty \le C(K,\alpha) \max_{\beta\le\alpha} \|D^\beta\psi_j\|_\infty\,. \tag{107}$$

Az (107) jobboldala 0-hoz tart minden α multi-index esetén. Így, ha adott $\varepsilon > 0$, akkor van olyan j_0, hogy

$$\|(I - \Delta)^n (e_{-rw}\psi_j)\|_2 < \varepsilon\,, \tag{108}$$

ha $j > j_0$ és w a $\mathbb{T}^n$ eleme, I az identikus operátor, Δ pedig a Laplace–operátor (ld. a 2.5.1 szakaszt):

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \cdots + \partial_n^2 = -(D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2)\,.$$

A 3.4.1 Plancherel–tétel alapján (108) azt jelenti, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + \|t\|^2)^n\, \hat{\psi}_j(t + rw)|^2\, dm_n(t) < \varepsilon^2\,, \tag{109}$$

amiből a Schwarz–egyenlőtlenség és (104) alapján az következik, hogy fennáll $\|\psi_j\| < C\varepsilon$ minden $j > j_0$ mellett, ahol

$$C^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|t\|^2)^{-2n}\, dm_n(t) < +\infty\,.$$

Ezzel (105)-öt bebizonyítottuk.

Tegyük most fel, hogy φ olyan tesztfüggvény $\mathbb{R}^n$-en, melyre fennáll

$$\psi = P(D)\varphi\,. \tag{110}$$

Ekkor $\hat{\psi} = P\hat{\varphi}$, továbbá $\hat{\varphi}$ és $\hat{\psi}$ egész függvények, ezért ψ meghatározza φ-t. Speciálisan, $\varphi(0)$ a ψ-nek lineáris funkcionálja, mely a $P(D)$ operátor értékkészletén értelmezve van. A bizonyítás lényege annak igazolása, hogy ez a lineáris funkcionál folytonos, tehát van olyan u disztribúció $\mathbb{R}^n$-en, melyre bármely φ tesztfüggvény esetén fennáll

$$u\big(P(D)\varphi\big) = \varphi(0)\,, \tag{111}$$

mert ekkor az $E = \check{u}$ disztribúcióra fennáll

$$\big(P(D)E\big)(\varphi) = E\big(P(-D)\varphi\big) = u\big((P(-D)\varphi)\check{}\,\big) =$$

$$= u\big(P(D)\check{\varphi}\big) = \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)\,,$$

tehát $P(D)E = \delta$. A 4.1.1 lemmát a $P\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$|\hat{\varphi}(t)| \le Ar^{-N} \int_{\mathbb{T}^n} |\hat{\psi}(t + rw)|\, d\sigma_n(w) \tag{112}$$

érvényes minden $\mathbb{R}^n$-beli t esetén. A 3.3.1 inverziós tétel alapján

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\, dm_n\,.$$

Ezért (112), (104) és (110) alapján

$$|\varphi(0)| \le Ar^{-N}\, \|P(D)\varphi\| \tag{113}$$

adódik minden φ tesztfüggvényre. Legyen Y a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ térnek az az altere, amely az összes $P(D)\varphi$ alakú függvényekből áll, ahol φ tetszőleges tesztfüggvény. Ekkor (113) alapján az (5.8.1) Hahn–Banach–tétel azt mutatja, hogy az Y altéren $P(D)\varphi \mapsto \varphi(0)$ módon értelmezett lineáris funkcionál kiterjeszthető a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ olyan u lineáris funkcionáljává, mely (111) mellett az

$$|u(\psi)| \le Ar^{-N} \|\psi\|$$

egyenlőtlenséget is teljesíti, ha ψ tesztfüggvény. Másrészt, (105) alapján u folytonos $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-n, tehát disztribúció. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

4.2 Közönséges differenciálegyenletek fundamentális megoldásai

Legyen a komplex szám, és jelölje L a $\frac{d}{dx} - a$ közönséges elsőrendű lineáris differenciáloperátort. Az L operátor fundamentális megoldásainak meghatározásához a

$$\frac{dF(x)}{dx} - aF(x) = \delta(x) \tag{114}$$

közönséges differenciálegyenlet F megoldásait kell meghatározni a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ térben. Az $a = 0$ esetben a H Heaviside–függvény $\sqrt{2\pi}$-szerese megoldás (ld. a 2.3

szakaszt), s az összes megoldás $x \mapsto \sqrt{2\pi}\, H(x) + C$ alakú, ahol C tetszőleges komplex szám. Ebből adódik, hogy (114) összes megoldása

$$F(x) = E(x) + Ce^{ax}$$

alakú, ahol $E(x) = \sqrt{2\pi}\, H(x)e^{ax}$ egy fundamentális megoldás. Vegyük észre, hogy az $U : x \mapsto e^{ax}$ függvény az

$$U' - aU = 0, \qquad U(0) = 1$$

kezdetiérték-feladat egyértelmű megoldása, és $E = \sqrt{2\pi}\, H\, U$. Ezt az eredményt könnyű általánosítani az

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0$$

közönséges m-edrendű lineáris differenciáloperátorra, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ tetszőleges komplex számok. Ennek egy fundamentális megoldása ugyancsak felírható $E = \sqrt{2\pi}\, H\, U$ alakban, ahol U az

$$LU = 0, \qquad U^{(j)}(0) = 0 \;\; (j = 0, 1, \ldots, m-2), \qquad U^{(m-1)}(0) = 1$$

kezdetiérték-feladat egyértelmű megoldása. Az összes fundamentális megoldás ismét $F = E + h$ alakban adható meg, ahol h az $Lh = 0$ homogén egyenlet tetszőleges megoldása.

4.3 A Cauchy–Riemann–egyenlet fundamentális megoldásai

Mivel a Cauchy–Riemann–operátor $\mathbb{R}^2$-n

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

(ld. a 2.5.1 szakaszt), így a fundamentális megoldások meghatározásához a

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial E(x,y)}{\partial y} = \delta(x,y)$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$-ben. Rögzített $\mathbb{R}$-beli x mellett az egyenlet mindkét oldalának, mint y függvényének vegyük a Fourier–transzformáltját:

$$\frac{\partial \hat{E}(x,\eta)}{\partial x} - \eta\hat{E}(x,\eta) = \delta(x)\,.$$

Ez egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet. Az előző pont alapján tehát

$$\hat{E}(x,\eta) = \sqrt{2\pi}\big(H(x) + C(\eta)\big)e^{\eta x}\,.$$

Minket azonban $E(x, y)$ érdekel, nem pedig $\hat{E}(x, \eta)$. Az inverz Fourier–transzformációt viszont csak akkor alkalmazhatjuk, ha $\hat{E}(x, \eta)$ az η változóban temperált disztribúció. Válasszuk meg $C(\eta)$-t úgy, hogy ez teljesüljön. Legyen

$$C(\eta) = \begin{cases} -1 & \text{ha} \quad \eta > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad \eta \leq 0\,. \end{cases}$$

Ekkor

$$\hat{E}(x, \eta) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi} H(-x) e^{\eta x} & \text{ha} \quad \eta > 0, \\ \sqrt{2\pi} H(x) e^{\eta x} & \text{ha} \quad \eta \leq 0\,. \end{cases}$$

Az inverz Fourier–transzformációt alkalmazva az η változóban azt kapjuk, hogy

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{0} H(x) e^{\eta(x+iy)}\, d\eta - \int_{0}^{+\infty} H(-x) e^{\eta(x+iy)}\, d\eta = \\ = \frac{1}{x + iy}\,.$$

Közvetlen behelyettesítéssel is meggyőződhetünk arról, hogy ez a disztribúció valóban fundamentális megoldása a Cauchy–Riemann–operátornak. Ehhez azt kell igazolni, hogy bármely $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$-beli φ tesztfüggvény esetén fennáll

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + i\frac{\partial E}{\partial y}\right)(\varphi) = \varphi(0, 0)\,,$$

azaz a $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ jelöléssel

$$-E(x, y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\, \frac{dx\, dy}{x + iy} = \varphi(0, 0)\,.$$

Ennek igazolásához vezessünk be (r, θ) polárkoordinátákat:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta\,. \end{aligned}$$

A $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ operátor alakja polárkoordinátákban

$$\frac{1}{2} e^{i\theta}(\tilde{\varphi}_r + \frac{i}{r}\tilde{\varphi}_\theta)$$

ahol $\tilde{\varphi}(r, \theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$, így

$$-\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\, \frac{dx\, dy}{x + iy} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} (\tilde{\varphi}_r + \frac{i}{r}\tilde{\varphi}_\theta)\, dr\, d\theta \\ = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \tilde{\varphi}_r\, dr\right) d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{i}{r}\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_\theta\, d\theta\right) dr = \\ = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\tilde{\varphi}(0, 0)\, d\theta = \tilde{\varphi}(0, 0) = \varphi(0, 0)\,.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az adott disztribúció valóban fundamentális megoldása a Cauchy–Riemann–operátornak.

4.4 A hővezetési egyenlet fundamentális megoldásai

Tekintsük $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$-ben a hővezetési operátort (ld. a 2.5.1 szakaszt), illetve a

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$$

hővezetési operátorhoz tartozó differenciálegyenletet, ahol Δ_x a Laplace–operátor $\mathbb{R}^n$-ben. Így a fundamentális megoldások meghatározásához a

$$\frac{\partial E(t,x)}{\partial t} - \Delta_x E(t,x) = \delta(t,x)$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2$-ben. Az x változóban hajtsunk végre Fourier–transzformációt, ekkor

$$\frac{\partial \hat{E}(t,\xi)}{\partial t} + \|\xi\|^2 \, \hat{E}(t,\xi) = \delta(t)$$

adódik. Ennek - a t változóban - egy fundamentális megoldása

$$\hat{E}(t,\xi) = \sqrt{2\pi}\, H(t)\, e^{-t\|\xi\|^2}$$

alakú, ami nyilván temperált disztribúció. Az inverz Fourier–transzformációt alkalmazva $t > 0$ esetén

$$E(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x - t\|\xi\|^2}\, d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-t(\xi_j - i\frac{x_j}{2t})^2} d\xi_j \right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

adódik. Az integrálás elvégezhető, ha felhasználjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,,$$

ebből ugyanis

$$E(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{2t})^n}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

adódik ha $t > 0$, az $\mathbb{R}^n$ minden x eleme esetén. Ezért a hővezetési egyenlet egy fundamentális megoldása a

$$E(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{2t})^n}\, H(t)\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \qquad (t \neq 0)$$

disztribúció. Az összes fundamentális megoldás $E + h$ alakú, ahol h a

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \Delta_x\, h = 0$$

homogén hővezetési egyenlet megoldása $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$-en.

4.5 A Schrödinger–egyenlet fundamentális megoldásai

A Schrödinger–operátor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$-ben

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$$

(ld. a 2.5.1 szakaszt), így az

$$\frac{1}{i}\frac{\partial E(t,x)}{\partial t} - \Delta_x E(t,x) = \delta(t,x)$$

parciális differenciálegyenlet E disztribúció-megoldását kell meghatároznunk. A fentiekhez hasonló módon, Fourier–transzformációt végrehajtva az x változóban, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{i}\frac{\partial \hat{E}(t,\xi)}{\partial t} + \|\xi\|^2 \hat{E}(t,\xi) = \delta(t)\,,$$

ahonnan

$$\hat{E}(t,\xi) = \sqrt{2\pi}\, i\, H(t)\, e^{-it\|\xi\|^2}$$

következik. Ez ismét temperált disztribúció, így az inverz Fourier–transzformáció alkalmazható. Vegyük észre, hogy ha $\varepsilon \to 0+$, akkor az

$$\hat{E}_\varepsilon(t,\xi) = \sqrt{2\pi}\, i\, H(t)\, e^{-(\varepsilon+it)\|\xi\|^2}$$

általánosított sorozat disztribúció-sorozat disztribúció-értelemben tart $\hat{E}$-hez, így inverz Fourier–transzformáltja tart E-hez. Az $\hat{E}_\varepsilon$ inverz Fourier–transzformáltja

$$E_\varepsilon(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\varepsilon+it)\|\xi\|^2}\, d\xi\right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4(\varepsilon+it)}}\,.$$

Ha $t > 0$ és $\varepsilon \to 0+$, akkor ennek határértéke

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} E_\varepsilon(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}}\,\frac{1}{\sqrt{t^n}}\, C\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4it}}\,,$$

ahol

$$C = J^n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2}\, dx\right)^n,$$

az úgynevezett *Fresnel–féle integrál*. A J értékét például a residuum-tétel segítségével lehet kiszámítani, amiből az adódik, hogy

$$J = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\,,$$

és így a fenti határérték

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} E_\varepsilon(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2t)^n}}\, e^{-in\frac{\pi}{4}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4it}}\,,$$

s végül

$$E(t,x) = H(t)\, e^{-i(n-2)\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2t)^n}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4it}}\,.$$

4.6 A hullámegyenlet fundamentális megoldásai

A hullám–operátor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$-ben

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$$

(ld. a 2.5.1 szakaszt), így a

$$\frac{\partial^2 E(t,x)}{\partial t^2} - \Delta_x E(t,x) = \delta(t,x)$$

parciális differenciálegyenlet E disztribúció-megoldását kell meghatároznunk. A fentiekhez hasonló módon, Fourier–transzformációt végrehajtva az x változóban azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(t,\xi)}{\partial^2 t} + \|\xi\|^2 \hat{E}(t,\xi) = \delta(t)\,,$$

aminek egy $t \geq 0$ tartójú fundamentális megoldása

$$\hat{E}_+(t,\xi) = \sqrt{2\pi}\, H(t)\, \frac{\sin(\|\xi\|\, t)}{\|\xi\|}\,.$$

Hasonlóan, egy $t \leq 0$ tartójú fundamentális megoldás

$$\hat{E}_-(t,\xi) = -\sqrt{2\pi}\, H(-t)\, \frac{\sin(\|\xi\|\, t)}{\|\xi\|}\,.$$

Most csak $\hat{E}_+$-szal foglalkozunk. Az inverz Fourier–transzformáció alkalmazásával $t > 0$ és minden $\mathbb{R}^n$-beli x esetén

$$E_+(t,x)(\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{E}_+(t,\xi)(\Phi^{-1}\varphi)(\xi)\, d\xi\,,$$

adódik, ahol Φ a Fourier–transzformációt jelöli, φ pedig tetszőleges gyorsan csökkenő függvény. Az integrálásokat felcserélve

$$E_+(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, \hat{E}_+(t,\xi)\, d\xi \tag{115}$$

adódna, ám ez csak szimbolikus írásmód, hiszen a $\xi \mapsto \hat{E}_+(t,\xi)$ függvény nem integrálható. Ennek pontos értelme a következő:

$$E_+(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi - \varepsilon\|\xi\|^2}\, \hat{E}_+(t,\xi)\, d\xi\,.$$

A (115) felírható

$$E_+(t,x) = H(t)\,\mathcal{U}(t,x)$$

alakban, ahol

$$\mathcal{U}(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \frac{\sin\|\xi\|t}{\|\xi\|}\, d\xi\,,$$

ahol az integrált ugyancsak az előbbi értelemben értjük.

Az $\mathcal{U}$ disztribúció fontos szerepet játszik a hullámegyenletre vonatkozó Cauchy–feladat elméletében.

Hasonló vizsgálatok végezhetők el a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x + m^2$$

úgynevezett *Klein–Gordon–operátorral* kapcsolatban is, amely fontos szerepet játszik a kvantummechanikában.

Az $n = 2$ esetben E_+ polárkoordinátákban a következő alakú:

$$E_+(t,r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{ha} \quad r < t, \\ 0 & \text{egyébként}\,. \end{cases}$$

Az $n = 3$ esetben E_+ gömbi koordinátákban:

$$E_+(t,r,\varphi,\theta) = \frac{1}{2\pi r}\delta(t-r)\,.$$

Az $\hat{E}_-$ disztribúció hasonlóan vizsgálható.

4.7 A Laplace–egyenlet fundamentális megoldásai

A Laplace–operátor $\mathbb{R}^n$-ben

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

(ld. a 2.5.1 szakaszt), így a

$$\Delta\, E(x) = \delta(x)$$

parciális differenciálegyenlet E disztribúció-megoldásait kell meghatároznunk. Itt nem célszerű egy változót kitüntetni és a többi szerint Fourier–transzformációt végrehajtani, mert ez ellentmond a természetességnek és a Laplace–operátor szimmetriájának. A Laplace–operátor ugyanis rotációval szemben invariáns, sőt, invariáns az $\mathbb{R}^n$ tér minden ortogonális transzformációjával szemben. Ez megfordítva is igaz: ha egy lineáris transzformációval szemben Δ invariáns, akkor a lineáris transzformáció ortogonális, amit Fourier–transzformációval nem nehéz igazolni. Ezért célszerű a Laplace–egyenlet rotációval szemben invariáns fundamentális megoldásait megkeresni.

Először megmutatjuk, hogy rotációval szemben invariáns tesztfüggvényeken Δ különösen egyszerű alakú. Nevezetesen, ha a φ tesztfüggvény csak $r = \|x\|$-től függ, $\varphi(x) = f(r)$, akkor

$$\Delta\varphi(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\,.$$

Valóban,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = f'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\,\frac{x_i}{r}\,,$$

és

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r}\,f'(r) + x_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{1}{r}\,f'(r)\Big) =$$

$$= \frac{1}{r}\,f'(r) + x_i\Big(\frac{1}{r}\,f'(r)\Big)'\,\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r}\,f'(r) + \frac{x_i^2}{r^2}\,f''(r) - \frac{x_i^2}{r^3}f'(r)$$

teljesül $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, melyeket összegezve

$$\Delta\varphi(x) = \Big(\frac{n}{r} - \frac{1}{r^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\,f'(r) + f''(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\,.$$

Ennek felhasználásával megadható Δ egy fundamentális megoldása. Legyen

$$F(r) = \begin{cases} -\frac{1}{r}\,\ln\frac{1}{r} & \text{ha} \quad n = 2, \\ -\frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{2\pi(n-2)|S^{n-1}|r^{n-2}} & \text{ha} \quad n > 2\,, \end{cases}$$

ahol $|S^{n-1}|$ az n dimenziós egységgömb felszíne:

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Itt Γ az *Euler–féle gammafüggvény*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\,s^{z-1}\,ds\,,$$

hacsak z komplex szám, és $\mathrm{Re}\,z > 0$. Ekkor számolással ellenőrizhetjük, hogy az $E(x) = F(r)$ disztribúció a Laplace–operátor fundamentális megoldása.

A Laplace–operátor egy fundamentális megoldását a következő észrevétel alapján is meghatározhatjuk. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$, és legyen

$$E(t,x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{2t})^n}\,H(t)\,e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \qquad t \neq 0$$

a hővezetési egyenlet fundamentális megoldása. Ez azt jelenti, hogy ha φ egy tesztfüggvény $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$-en, akkor

$$\varphi(0,0) = \langle\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E, \varphi\rangle = -\langle E, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\rangle - \langle E, \Delta_x\varphi\rangle =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n} E(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dm_1(t)\,dm_n(x) \;-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}_+} E(x,t)\Delta_x\varphi\,dm_1(t)\,dm_n(x)\,.$$

Speciálisan, ha φ tesztfüggvény $\mathbb{R}^n$-en, akkor $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, s ezért

$$\varphi(0) = -\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty} E(x,t)\,dt\right)\Delta_x\varphi\,dm_n(x) =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\Delta\varphi(x)\,dm_n(x) = -\langle \Delta F,\varphi\rangle\,,$$

azaz, az

$$F(x) = \int_0^{+\infty} E(x,t)\,dm_1(t)$$

disztribúció a $-\Delta$ operátor fundamentális megoldása.

4.8 Szoboljev–terek

Legyen s valós szám, s jelölje μ_s a következő mértéket $\mathbb{R}^n$-en:

$$d\mu_s(y) = (1+\|y\|^2)^s\,dm_n(y)\,.$$

Nyilván μ_s pozitív mérték, s ha f az $L^2(\mu_s)$-hez tartozik, akkor f temperált disztribúció, így f valamely u temperált disztribúció Fourier–transzformáltja. Mindazon u temperált disztribúciók lineáris terét, melyek Fourier–transzformáltja $L^2(\mu_s)$-hez tartozik, jelölje H^s. A H^s tér az

$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2\,d\mu_s\right)^{1/2}$$

normával ellátva $L^2(\mu_s)$-el izometrikusan izomorf Hilbert–tér. A H^s tereket *Szoboljev–tereknek* nevezzük. A Plancherel–tétel alapján H^0 izometrikusan izomorf $L^2(m_n)$-el.

Nyilvánvalóan $t<s$ esetén fennáll $H^s\subseteq H^t$. Ezért az összes H^s terek X egyesítése lineáris tér. A $\Lambda : X\to X$ lineáris operátort *t-edrendűnek* nevezzük, ha a Λ bármely H^s-re való leszűkítése H^s-nek H^{s-t}-be való folytonos leképezése.

4.8.1 Tétel. *(i) Minden kompakt tartójú disztribúció valamely H^s térhez tartozik.*

(ii) Ha t valós szám, akkor az az $u\mapsto v$ leképezés, melyet minden $\mathbb{R}^n$-beli y esetén

$$\hat{v}(y) = (1+\|y\|^2)^{t/2}\,\hat{u}(y)$$

értelmez, a H^s-nek H^{s-t}-re való lineáris izometriája, ezért t-edrendű operátor, melynek inverze $-t$-edrendű.

(iii) Ha b az $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ eleme, akkor a $\hat{v}=b\,\hat{u}$ módon értelmezett $u\mapsto v$ leképezés 0-adrendű operátor.

(iv) Bármely α multi-index esetén a D^α leképezés $|\alpha|$-edrendű operátor.

(v) Ha f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eleme, akkor a $u \mapsto f\,u$ leképezés 0-adrendű operátor.

Bizonyítás. Ha u kompakt tartójú disztribúció $\mathbb{R}^n$-en, akkor a 3.7.2 tétel első állítása szerint

$$|\hat{u}(y)| \le C(1 + \|y\|)^N$$

teljesül minden $\mathbb{R}^n$-beli y mellett valamilyen C, N állandókkal. Ezért bármely $s < -N - \frac{n}{2}$ esetén u a H^s térhez tartozik, amiből következik *(i)*. Az *(ii)* és *(iii)* állítások nyilvánvalóak. Mivel minden α multi-index és $\mathbb{R}^n$-beli y esetén fennáll

$$|(D^\alpha u)\hat{\ }(y)| = \|y^\alpha\|\,|\hat{u}(y)| \le (1 + \|y\|^2)^{|\alpha|/2}\,|\hat{u}(y)|\,,$$

ezért érvényes

$$\|D^\alpha u\|_{s-|\alpha|} \le \|u\|_s\,,$$

amiből következik *(iv)*.

Az *(v)* bizonyítása az

$$(1 + \|x+y\|^2)^s \le 2^{|s|}\,(1 + \|x\|^2)^s\,(1 + \|y\|^2)^{|s|} \tag{116}$$

egyenlőtlenségen múlik, amely fennáll minden $\mathbb{R}^n$-beli x, y és minden $\mathbb{R}$-beli s esetén. Valóban, az $s = 1$ eset nyilvánvaló, míg az $s = -1$ esetet úgy kapjuk, hogy az $s = 1$ esetben x-et $x - y$-al, y-t pedig $-y$-al helyettesítjük. A (116) általános esetét ezután megkapjuk, ha ebben a két esetben mindent s-edik hatványra emelünk. A (116) alapján

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|^2\,d\mu_s(x) \le 2^{|s|}(1 + \|y\|^2)^{|s|} \int_{\mathbb{R}^n} |h|^2\,d\mu_s \tag{117}$$

teljesül minden h mérhető függvényre $\mathbb{R}^n$-en.

Legyen most u a H^s egy eleme, f az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ egy eleme, valamint $t > |s| + \frac{n}{2}$. Mivel $\hat{f}$ az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, ezért $\|f\|_t < +\infty$. Legyen $\gamma = \mu_{|s|-t}(\mathbb{R}^n) < +\infty$, továbbá $F = |\hat{u}| * |\hat{f}|$. A 3.5.5 tétel szerint

$$|(f\,u)\hat{\ }| = |\hat{u} * \hat{f}| \le |\hat{u}| * |\hat{f}| = F\,. \tag{118}$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz–egyenlőtlenség szerint

$$|F(x)|^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2\,d\mu_t(y) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x-y)|^2\,d\mu_{-t}(y)$$

teljesül minden $\mathbb{R}^n$-beli x-re. Integráljuk ezt az egyenlőtlenséget $\mathbb{R}^n$-en a μ_s mérték szerint. A (117) szerint az eredmény

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F|^2\,d\mu_s \le 2^{|s|}\,\gamma\,\|f\|_t^2\,\|u\|_s^2\,. \tag{119}$$

Végül (118) és (119) alapján

$$\|f\,u\|_s \leq (2^{|s|}\,\gamma)^{1/2}\,\|f\|_t\,\|u\|_s\,,$$

amiből következik *(v)*. □

Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, s pedig egy valós szám. Akkor mondjuk, hogy a $\mathcal{D}'(\Omega)$-beli u disztribúció *lokálisan H^s-be tartozik*, ha az Ω bármely x pontjának van olyan Ω-beli ω nyílt környezete és olyan H^s-beli v disztribúció, hogy $u = v$ az ω környezetben.

4.8.2 Tétel. *Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, s egy valós szám, u pedig egy $\mathcal{D}'(\Omega)$-beli disztribúció. Ekkor a következő feltételek egyenértékűek:*

(i) u lokálisan H^s-hez tartozik,

(ii) $\psi\,u$ H^s-hez tartozik minden $\mathcal{D}(\Omega)$-beli ψ tesztfüggvény esetén.

Továbbá, ha s nem negatív egész, akkor e két feltétellel egyenértékű a következő:

(iii) $D^\alpha u$ lokálisan L^2 az Ω-n minden olyan α multi-index esetén, melyre fennáll $|\alpha| \leq s$.

A második feltétel némi magyarázatra szorul, hiszen az u disztribúció csak olyan tesztfüggvényeken van értelmezve, melyek tartója Ω-ban van. Azonban $\psi\,u$ definíció szerint azt a funkcionált jelenti, amely tetszőleges $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli φ tesztfüggvényhez a

$$(\psi\,u)(\varphi) = u(\psi\varphi)$$

számot rendeli, s itt már $\psi\varphi$ $\mathcal{D}(\Omega)$-hoz tartozik, tehát $u(\psi\varphi)$ értelmes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy u lokálisan H^s-hez tartozik, és legyen K valamely $\mathcal{D}(\Omega)$-beli ψ tartója. Mivel K kompakt, létezik véges sok ω_i nyílt részhalmaza Ω-nak úgy, hogy egyesítésük lefedi K-t, s ω_i-n az u megegyezik valamely H^s-beli v_i disztribúcióval. Az 1.3.1 egységfelbontási tétel szerint vannak olyan $\mathcal{D}(\omega_i)$-beli ψ_i függvények, hogy $\sum_i \psi_i = 1$ a K halmazon. Ha φ tesztfüggvény $\mathbb{R}^n$-en, akkor

$$u(\psi\varphi) = \sum_i u(\psi_i\psi\varphi) = \sum_i v_i(\psi_i\psi\varphi)\,,$$

mivel $\psi_i\psi\varphi$ a $\mathcal{D}(\omega_i)$-hez tartozik. Ezért

$$\psi\,u = \sum_i \psi_i\psi v_i\,.$$

A 4.8.1 tétel *(v)* állítása alapján $\psi_i\psi v_i$ a H^s-hez tartozik minden i-re, ezért $\psi\,u$ a H^s-hez tartozik, így *(i)*-ből következik *(ii)*.

Ha fennáll *(ii)* , és x az Ω egy eleme, valamint ψ olyan tesztfüggvény Ω-n, amely 1-el egyenlő az x valamely Ω-beli ω nyílt környezetében, akkor $u = \psi\,u$

az ω-ban, s a feltevés szerint $\psi\, u$ a H^s-hez tartozik. Tehát *(ii)*-ből következik *(i)*.

Tegyük most fel ismét, hogy *(ii)* érvényes. Ha ψ tesztfüggvény Ω-n, akkor $\psi\, u$ a H^s-hez tartozik, így $D^\alpha(\psi\, u)$ a $H^{s-|\alpha|}$-hoz tartozik, a 4.8.1 tétel *(iv)* állítása alapján. Ha $|\alpha| \le s$, akkor

$$H^{s-|\alpha|} \subseteq H^0 = L^2(\mathbb{R}^n)\,,$$

ezért $D^\alpha(\psi\, u)$ az $L^2(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik. Ha most ψ olyan tesztfüggvény Ω-n, amely 1-el egyenlő valamely adott Ω-beli x pont egy környezetében, akkor azt kapjuk, hogy $D^\alpha u$ lokálisan L^2 az Ω-n. Ezért *(ii)*-ből következik *(iii)*.

Végül, tegyük fel, hogy $D^\alpha u$ lokálisan L^2 az Ω-n minden olyan α multi-index esetén, melyre $|\alpha| \le s$. Legyen ψ egy tesztfüggvény Ω-n. A Leibniz–formula alapján $D^\alpha(\psi\, u)$ az $L^2(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik, ha $|\alpha| \le s$, ezért az ilyen α-kra

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|y^\alpha\|^2\, |(\psi\, u)\hat{\ }(y)|^2\, dm_n(y) < +\infty\,. \tag{120}$$

Ha s nem negatív egész, akkor (120) érvényes y^α helyett az $y_1^s, y_2^s, \ldots, y_n^s$ monomokkal. Ugyanúgy, ahogy a 3.6 Szoboljev–lemma bizonyításában, azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y\|^2)^s\, |(\psi\, u)\hat{\ }(y)|^2\, dm_n(y) < +\infty\,.$$

Tehát $\psi\, u$ a H^s-hez tartozik, azaz, *(iii)*-ből következik *(ii)*, s ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

4.8.3 Tétel. *Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ tér nem üres, nyílt részhalmaza, s egy valós szám, továbbá*

(i) legyen

$$L = \sum_\alpha f_\alpha D^\alpha$$

elliptikus lineáris differenciáloperátor Ω-n, melynek rendje $N \ge 1$, f_α együtthatói pedig $\mathcal{E}(\Omega)$-beli függvények,

(ii) ha $|\alpha| = N$, akkor f_α állandó,

(iii) a $\mathcal{D}(\Omega)$-beli u, v disztribúciókra teljesüljön

$$Lu = v\,, \tag{121}$$

ahol v lokálisan H^s-hez tartozik.

Ekkor u lokálisan H^{s+N}-hez tartozik.

A tétel *(ii)* feltétele elhagyható, de segítségével a bizonyítás lényegesen egyszerűbb. Először a következő segédtételt igazoljuk.

4.8.1 Lemma. *A 4.8.3 tétel feltételei mellett, ha valamely $t \le s + N - 1$ valós szám, és valamely $\mathcal{D}(\Omega)$-beli ψ, φ függvények mellett ψ egyenlő 1-el a φ tartóját tartalmazó valamely nyílt halmazon, továbbá $\psi\, u$ a H^t-hez tartozik, akkor $\varphi\, u$ a H^{t+1}-hez tartozik.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy $L(\varphi\, u)$ a H^{t-N+1}-hez tartozik. Tekintsük a következő disztribúciót:

$$\Lambda = L(\varphi\, u) - \varphi\, Lu = L(\varphi\, u) - \varphi\, v\,. \tag{122}$$

Mivel ennek a tartója része a φ tartójának, ezért (122)-ben u-t $\psi\, u$-ra cserélhetjük anélkül, hogy Λ megváltozna:

$$\Lambda = L(\varphi\psi\, u) - \varphi\, L(\psi\, u) = \sum_{\alpha} f_\alpha \cdot [D^\alpha(\varphi\psi\, u) - \varphi\, D^\alpha(\psi\, u)]\,. \tag{123}$$

Ha $D^\alpha(\varphi\cdot\psi\, u)$-ra alkalmazzuk a Leibniz–formulát, akkor látjuk, hogy (123)-ban a $\psi\, u$ N-edrendű deriváltjai kiesnek. Ezért Λ a $\psi\, u$ disztribúció legfeljebb $N-1$-edrendű deriváltjainak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli együtthatókkal vett lineáris kombinációja. Mivel $\psi\, u$ a H^t-hez tartozik, a 4.8.1 tétel *(iv)* és *(v)* állításai alapján Λ a H^{t-N+1}-hez tartozik. A 4.8.2 tétel alapján a $\varphi\, v$ disztribúció a H^s-hez tartozik, s mivel $t - N + 1 \le s$, ezért $\varphi\, v$ a H^{t-N+1}-hez tartozik. Végül tehát eredeti állításunk (122) következménye.

Mivel L elliptikus, karakterisztikus polinomja, az $\mathbb{R}^n$-beli y esetén

$$p(y) = \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha y^\alpha$$

módon értelmezett polinom $y \ne 0$ esetén nem nulla. Értelmezzük a következő függvényeket:

$$q(y) = \|y\|^{-N} p(y), \qquad r(y) = (1 + \|y\|^N) q(y)$$

hacsak y az $\mathbb{R}^n$ nullától különböző eleme, valamint értelmezzük a Q, R, S operátorokat a Szoboljev–terek egyesítésén a következő módon:

$$(Qw)\hat{} = q\hat{w}, \qquad (Rw)\hat{} = r\hat{w}, \qquad S = \sum_{|\alpha|<N} \psi\, f_\alpha\, D^\alpha\,.$$

Mivel p egy N-edfokú homogén polinom, ezért $q(\lambda y) = q(y)$, ha y az $\mathbb{R}^n$ eleme, és $\lambda > 0$. Továbbá, p csak az origóban tűnik el, s az $\mathbb{R}^n$ egységgömbje kompakt, így q és $1/q$ korlátos függvények. A 4.8.1 tétel *(iii)* állításából következik, hogy Q és Q^{-1} 0-adrendű operátorok.

Mivel az

$$y \mapsto (1 + \|y\|^2)^{-N/2}(1 + \|y\|^N)$$

függvény és reciproka az $\mathbb{R}^n$-en korlátos függvények, ha az előző paragrafus állítását a 4.8.1 tétel *(ii)* és *(iii)* állításaival kombináljuk, azt kapjuk, hogy R egy N-edrendű operátor, R^{-1} inverze pedig $-N$-edrendű.

Mivel $\psi\, f_\alpha$ tesztfüggvény $\mathbb{R}^n$-en, ezért a 4.8.1 tétel *(iv)* és *(v)* állításaiból azt kapjuk, hogy S egy $N-1$-edrendű operátor.

Mivel $p = r - q$, s p állandó együtthatós, azt kapjuk, hogy

$$\Bigl(\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha\, D^\alpha w\Bigr)\hat{} = p\hat{w} = (r-q)\hat{w} = (Rw - Qw)\hat{}\,,$$

hacsak w valamely Szoboljev–térhez tartozik. Ezért

$$(R - Q + S)(\varphi\, u) = L(\varphi\, u)\,. \tag{124}$$

A bizonyítás elején láttuk, hogy $L(\varphi\, u)$ a H^{t-N+1}-hez tartozik.

Mivel $\psi\, u$ a H^t-hez tartozik és $\varphi\,\psi = \varphi$, a 4.8.1 tétel *(v)* állítása alapján $\varphi\, u = \varphi\psi\, u$ a H^t-hez tartozik. Ebből adódóan $(Q - S)(\varphi\, u)$ a H^{t-N+1}-hez tartozik, hiszen Q 0-adrendű, S rendje pedig $N - 1 \geq 0$. Ekkor (124) alapján $R(\varphi\, u)$ a H^{t-N+1}-hez tartozik, s mivel R^{-1} rendje $-N$, így azt kapjuk, hogy $\varphi\, u$ a H^{t+1}-hez tartozik. □

Most bebizonyítjuk a 4.8.3 tételt.

Bizonyítás. Legyen x az Ω egy pontja, $B_0 \subseteq$ egy x középpontú zárt gömb, továbbá φ_0 egy olyan tesztfüggvény Ω-n, amely egy B_0-t tartalmazó nyílt halmazon 1-el egyenlő. A 4.8.1 tétel *(i)* állítása miatt $\varphi_0\, u$ beletartozik H^t-be valamely valós t esetén. Mivel H^t bővül, ha t csökken, ezért feltehetjük, hogy $t = s + N - k$, ahol k pozitív egész szám. Válasszunk olyan

$$B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_k$$

zárt gömböket, melyek középpontja x, hogy mindegyik valódi részhalmaza az előzőnek. Válasszunk továbbá olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ tesztfüggvényeket Ω-n, hogy φ_i egyenlő 1-el valamely B_i-t tartalmazó nyílt halmazon, és egyenlő 0-val B_{i-1}-en kívül. Mivel $\varphi_0\, u$ a H^t-hez tartozik, a 4.8.1 alapján az következik, hogy $\varphi_i\, u$ a H^{t+i}-hez tartozik $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén. Ezért u lokálisan H^{s+N}-hez tartozik, hiszen $t + k = s + N$, és φ_k egyenlő 1-el a B_k halmazon. □

Az alábbi következmény alapvető jelentőségű.

4.8.4 Tétel. *Ha L teljesíti a 4.8.3 tétel (i) és (ii) feltételeit, továbbá v az $\mathcal{E}(\Omega)$-hoz tartozik, akkor a* (121) *egyenlet minden u megoldása $\mathcal{E}(\Omega)$-hoz tartozik. Speciálisan, az $Lu = 0$ homogén egyenlet minden megoldása $\mathcal{E}(\Omega)$-hoz tartozik.*

Bizonyítás. Ha v a $\mathcal{E}(\Omega)$-hoz tartozik, akkor $\psi\, v$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-hez tartozik minden Ω-n értelmezett tesztfüggvény esetén, s ezért v minden valós s esetén lokálisan H^s-hez tartozik. A tétel szerint tehát u minden valós s esetén lokálisan H^s-hez tartozik, s a 4.8.2 tétel, valamint a 3.6 Szoboljev–lemma alapján u $\mathcal{E}(\Omega)$-hoz tartozik. □

4.8.1 Példa. Tegyük fel, hogy L egy elliptikus állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor $\mathbb{R}^n$-en, és E az L egy fundamentális megoldása. Az origó komplementerén az $LE = \delta$ egyenlet az $LE = 0$ egyenletet jelenti. Ezért a 4.8.3 tétel szerint az origó komplementerén E végtelen sokszor differenciálható függvény. Ugyanakkor az E szingularitásának jellege természetesen az L operátortól függ.

4.8.2 Példa. Korábban láttuk, hogy a Cauchy–Riemann–operátor az $\mathbb{R}^2$ bármely nem üres Ω nyílt halmazán elliptikus. Ez azt jelenti, hogy ha u egy $\mathcal{D}'(\Omega)$-beli disztribúció-megoldása a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0$$

Cauchy–Riemann–egyenletnek, akkor a 4.8.3 tétel alapján u végtelen sokszor differenciálható függvény Ω-n. Következésképpen u a $z = x_1 + ix_2$ változó holomorf függvénye Ω-n. Másszóval, minden holomorf disztribúció holomorf függvény.

5 FÜGGELÉK

5.1 Halmazelméleti alapok

A halmazelmélet alapfogalmai: a *halmaz* és a *halmazhoz elemként való tartozás*, röviden a *halmaz eleme* fogalmak. A "halmaz" szó szinonimájaként (a stílus élénkítése érdekében) szokás a "rendszer", "halmazrendszer", "család", s hasonló kifejezéseket használni. Ha X és Y halmazok, akkor azt a tényt, hogy az Y halmaz az X halmazt elemként tartalmazza, vagyis X *az Y-nak eleme*, amint az szokásos, $X \in Y$ jelöli. Ennek tagadása: $X \notin Y$. A halmazalgebra alapjaival kapcsolatos fogalmakat és jelöléseket, így a *halmazok egyenlőségének* fogalmát, a *részhalmaz*, a *valódi részhalmaz* s az *üres halmaz* fogalmait a szokásos értelemben használjuk. A halmazalgebrával kapcsolatban általánosan használt fogalmakat és műveleteket (*egyesítés, metszetképzés, különbségképzés, komplementer, diszjunkt halmazok*), s a megfelelő jelöléseket ugyancsak a megszokott módon alkalmazzuk. Az X és Y halmaz különbségét $X \backslash Y$, az X komplementerét pedig X^c módon jelöljük. A *párhalmaz*, valamint a *rendezett pár* jelölése a szokott módon történik: adott X, Y halmazok esetén az előbbit $\{X, Y\}$, az utóbbit (X, Y) fogja jelölni. Az X és Y halmazok elemeiből (ebben a sorrendben) képezhető összes rendezett párok halmazát, az X és Y halmazok *Descartes-szorzatát* a szokásos módon, $X \times Y$-nal jelöljük.

Az X halmaz összes részhalmazainak halmazát az X halmaz *hatványhalmazának* nevezzük, szokásos jelölése 2^X, vagy $\mathcal{P}(X)$.

Az X halmaz egy részhalmazának *lefedése* alatt az X részhalmazainak egy olyan rendszerét értjük, melyek egyesítése tartalmazza az adott részhalmazt.

Az X és Y halmazok közötti *relációkkal, függvényekkel*, ezek *értelmezési tartományával, értékkészletével* kapcsolatos fogalmakat (*kép, őskép, inverz, kompozíció, stb.*), s az ezekre vonatkozó legegyszerűbb összefüggéseket a szokott módon és értelemben használjuk. Ugyancsak feltételezzük az *ekvivalencia reláció*, a *parciális rendezési reláció* és a *rendezési reláció* fogalmának, valamint az ezekkel kapcsolatos legfontosabb tudnivalóknak (*faktorhalmaz, osztályozás, stb.*) az ismeretét. Ha egy halmazon adott egy ekvivalenciareláció, akkor azt a leképezést, amely a halmaz minden pontjához a pontot tartalmazó osztályt rendeli, a halmaznak az adott ekvivalenciareláció szerint vett faktorhalmazára való *természetes leképezésének* nevezzük.

Egy féligrendezett halmazt *irányított halmaznak* nevezünk, ha benne bármely kételemű részhalmaznak van felső korlátja.

Egy féligrendezett halmaz valamely részhalmazának egy elemét a részhalmaz egy *maximális elemének* nevezzük, ha nincs a szóban forgó részhalmaznak olyan eleme, mely az illető elemnél nagyobb. Hasonló módon értelmezzük egy részhalmaz *minimális elemét.*

5.1.1 Tétel. *(Zorn–lemma) Ha egy féligrendezett halmazban minden lánc felülről korlátos, akkor a halmaznak van maximális eleme.*

Fel fogjuk tételezni az indexelt *halmazrendszerekkel, halmazcsaládokkal*, valamint az ilyenek *szorzathalmazával, hatványhalmazával* kapcsolatos alapvető tudnivalók ismeretét, melyek vonatkozásában a szokásos elnevezéseket, jelöléseket fogjuk használni.

Ugyancsak feltételezzük a halmazok *számosságával, a véges, illetve végtelen számosságokkal*, valamint *a megszámlálható számossággal, a kontinuum számossággal* kapcsolatos legfontosabb ismereteket.

Feltételezzük, hogy az olvasó rendelkezik az következő számhalmazokra vonatkozó alapvető halmazelméleti, algebrai és topológiai ismeretekkel: a *természetes számok halmaza:* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, az *egész számok halmaza:* $\mathbb{Z}$, a *racionális számok halmaza:* $\mathbb{Q}$, a *valós számok halmaza:* $\mathbb{R}$, s a *komplex számok halmaza:* $\mathbb{C}$. Feltételezzük továbbá a valós és komplex analízis alapjainak ismeretét.

Legyen Γ irányított halmaz. A Γ-nak egy halmazba való f leképezését *általánosított sorozatnak* nevezzük. Ilyenkor az $f(\nu)$ elemet az általánosított sorozat *ν-edik tagjának* nevezzük, s f_ν-vel jelöljük. Tehát az általánosított sorozat egy irányított indexhalmazon értelmezett indexelt halmazrendszer. Ennek megfelelően az általánosított sorozatot $(f_\nu)_{\nu\in\Gamma}$ módon jelöljük. Ha az általánosított sorozatnak, mint leképezésnek az értékkészlete egy rögzített halmaz hatványhalmazának valamely részhalmaza, és ezt a tény ki akarjuk hangsúlyozni, akkor az általánosított sorozatot *általánosított halmazsorozatnak* nevezzük.

A $(g_\nu)_{\nu\in\Gamma_2}$ általánosított sorozatot az $(f_\nu)_{\nu\in\Gamma_1}$ általánosított sorozat *általánosított részsorozatának* nevezzük, ha van olyan Γ_2-t Γ_1-be képező φ leképezés, melynél minden Γ_2-beli μ esetén $g_\mu = f_{\varphi(\mu)}$ teljesül, és bármely Γ_1-beli ν-höz van olyan Γ_2-beli μ, hogy $\varphi(\mu) \geq \nu$.

Ha Γ a természetes számok halmaza, mely természetes módon, a szokásos $\leq$ rendezéssel irányított, akkor általánosított sorozat helyett röviden *sorozatot* mondunk, melynek általánosított részsorozatait röviden *részsorozatoknak* hívjuk.

5.2 Topologikus terek

Az X halmaz egy *topológiáján* az X részhalmazainak egy olyan halmazát értjük, amely bármely két hozzátartozó halmaz metszetét, és hozzátartozó halmazok bármely halmazának az egyesítési halmazát, továbbá az X halmazt és az üres halmazt is tartalmazza. Az X-et egy topológiával ellátva *topologikus* *térnek* nevezzük. A topológiához elemként tartozó halmazokat *nyílt halmazoknak*, komplementereiket *zárt halmazoknak* nevezzük. Az X topologikus tér egy Y részhalmazának *lezártján* az Y-t tartalmazó összes zárt halmazok metszetét értjük, az Y részhalmaz *belsejének* pedig az Y összes nyílt részhalmazainak egyesítését nevezzük. Amint az könnyen látható, egy topologikus térben bármely részhalmaz lezártja zárt halmaz, belseje nyílt halmaz. Továbbá, egy részhalmaz pontosan akkor zárt, ha egyenlő lezártjával, s pontosan akkor nyílt, ha egyenlő belsejével.

Mint könnyen látható, az X halmazon adott topológiák bármely nem üres halmazának metszete is topológia X-en. Ennek alapján az X részhalmazainak tetszőleges rendszere esetén van értelme az ezen halmazrendszert tartalmazó összes topológiák metszetéről, mint az adott rendszer *által generált* topológiáról beszélni. Ilyen esetben az eredeti halmazrendszert az általa generált topológia egy *szubbázisának* nevezzük. Tehát ahhoz, hogy egy topológiának egy halmazrendszer szubbázisa legyen szükséges és elegendő, hogy minden nem üres, nyílt halmaz előálljon a halmazrendszer halmazaiból képzett véges metszetek egysítéseként. Ha minden nyílt halmaz egy adott halmazrendszerből vett halmazok egyesítéseként áll elő, akkor a szóban forgó halmazrendszert a topológia egy *bázisának* nevezzük. Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér *megszámlálható bázisú*, ha létezik megszámlálható számosságú bázisa.

Egy topologikus tér részhalmazának *belső pontja* alatt belsejének tetszőleges pontját értjük, míg *külső pontja* alatt komplementerének tetszőleges belső pontját. Egy topologikus tér részhalmazának egy pont *határpontja*, ha a pont a halmaznak sem nem belső, sem nem külső pontja. Egy topologikus tér részhalmaza a tér egy pontjának *környezete*, ha az illető pont a szóban forgó részhalmaznak belső pontja. Egy topologikus tér egy pontjának környezeteiből álló halmazrendszert a pont egy *környezetbázisának* nevezzük, ha a pont bármely környezete tartalmazza a szóban forgó halmazrendszer valamely elemét. Nyilvánvaló, hogy topologikus térben minden pontnak van nyílt környezetekből álló környezetbázisa. Az is világos, hogy egy topologikus tér x pontja esetén az x bármely $\mathcal{U}(x)$ környezetbázisának minden eleme tartalmazza az x pontot, s bármely két $\mathcal{U}(x)$-beli halmaz metszete tartalmaz $\mathcal{U}(x)$-beli halmazt. Ezek a tulajdonságok valójában jellemzik a környezetbázist a következő értelemben: Ha egy X halmaz minden x pontjához adott az X részhalmazainak egy $\mathcal{U}(x)$ rendszere úgy, hogy minden X-beli x esetén az $\mathcal{U}(x)$ bármely eleme tartalmazza az x pontot, és bármely két $\mathcal{U}(x)$-beli halmaz metszete tartalmaz $\mathcal{U}(x)$-beli halmazt, akkor az X-nek pontosan egy olyan topológiája létezik, melynél bármely x pont esetén $\mathcal{U}(x)$ az x környezetbázisa.

Az X topologikus tér Y részhalmazának X nyílt részhalmazaival való metszetei Y egy topológiáját alkotják (mint könnyen látható), amellyel Y-t ellátva Y-t az X egy *alterének* nevezzük.

Egy halmaz két topológiája közül az elsőt a másodiknál *gyengébbnek* mondjuk, ha az elsőben nyílt halmazok nyíltak a másodikban is. Ebben az esetben a második topológiát az elsőnél *erősebbnek* mondjuk. Az X halmaz részhalmazainak egy halmazához X-nek van egy olyan leggyengébb topológiája, hogy abban az adott halmazok nyíltak (amint az könnyen látható, azt az adott halmazok véges tagszámú metszeteiből képzett halmazok egyesítési halmazai alkotják az üres halmazzal együtt); ezt az adott halmazok által *generált topológiának* nevezzük.

Akkor mondjuk, hogy az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való leképezése *folytonos*, ha Y minden nyílt halmazának az inverz képe nyílt. Az X-nek Y-ba való leképezése *nyílt*, ha X minden nyílt halmazának a képe nyílt. Az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való leképezése *zárt*, ha X minden zárt halmazának a képe zárt. Az X-nek Y-ra való olyan kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezését, amelynek az inverze is folytonos, *homeomorf leképezésnek* nevezzük. Akkor mondjuk, hogy X *homeomorf* Y-nal, ha X-nek van homeomorf leképezése Y-ra.

Az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése az X tér x_0 pontjában *folytonos*, ha az $f(x_0)$ pont bármely környezetének f-nél vett inverz képe az x_0-nak környezete. Világos, hogy az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése akkor és csak akkor folytonos, ha az X tér minden pontjában folytonos. Az is könnyen látható, hogy ha az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése az X tér x_0 pontjában *folytonos*, s az Y topologikus térnek a Z topologikus térbe való g leképezése az Y tér $f(x_0)$ pontjában *folytonos*, akkor az X topologikus térnek a Z topologikus térbe való $g \circ f$ összetett leképezése az X tér x_0 pontjában *folytonos*.

Ha a Γ halmaz minden ν eleme esetén f_ν az Y halmaznak az X_ν topologikus térbe való leképezése , akkor Y-nak van olyan leggyengébb topológiája, hogy azzal Y-t ellátva minden f_ν folytonos (mint könnyen látható, ezt az X_ν-k nyílt halmazainak az f_ν-knél vett inverz képei generálják); ezt a topológiát az f_ν *függvényrendszer által indukált topológiának* mondjuk.

A Γ halmaz minden ν eleméhez adott X_ν topologikus terek Y szorzathalmazát Y-nak az X_ν-kre való projekciói által indukált topológiával (vagyis azzal, amelyet az X_ν-k nyílt halmazainak inverz képei generálnak) ellátva, Y-t az X_ν *terek szorzatának* nevezzük. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{B}_\nu$ az X_ν topológiájának egy bázisa minden Γ-beli ν esetén, akkor a szorzattér topológiájának egy bázisát alkotják a $\prod_{\nu\in\Gamma} B_\nu$ alakú halmazok, ahol B_ν a $\mathcal{B}_\nu$ eleme, és véges sok ν kivételével $B_\nu = X_\nu$.

Az X topologikus tér R ekvivalencia relációja (illetve $\mathcal{P}$ partíciója) esetén az X/R faktorhalmaznak (illetve az $X/\mathcal{P}$ faktorhalmaznak) azok az A részhalmazai, melyeknek a természetes leképezésnél vett inverz képeik X-ben nyílt halmazok, a faktorhalmazon egy topológiát adnak (mint könnyen látható), melyet az X/R faktorhalmaz (illetve az $X/\mathcal{P}$ faktorhalmaz) *faktortopológiájának nevezzük.* Mint könnyen látható, a faktortopológiára nézve az X-nek X/R-re (illetve $X/\mathcal{P}$-re) való természetes leképezése folytonos.

Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér *Haussdorff*–tér, ha bármely két eleméhez van két, az egyiket, illetve a másikat tartalmazó, diszjunkt nyílt halmaz. Mint könnyen látható, Haussdorff–terek szorzata Haussdorff–tér.

Legyen $(x_\nu)_{\nu\in\Gamma}$ általánosított sorozat az X topologikus térben. Az X tér x pontját az $(x_\nu)_{\nu\in\Gamma}$ általánosított sorozat *határértékének* nevezzük, ha az x bármely U környezete esetén van olyan Γ-beli ν_0, hogy ha $\nu \geq \nu_0$, akkor x_ν az U környezethez tartozik. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(x_\nu)_{\nu\in\Gamma}$ általánosított sorozat *konvergens*, és *az x ponthoz konvergál*. Könnyen látható, hogy ha X Haussdorff–tér, akkor benne bármely általánosított sorozatnak legfeljebb egy határértéke létezik, melyet ekkor $\lim_\nu x_\nu$ módon jelölünk. Az is könnyen igazolható, hogy egy topologikus tér általánosított sorozatának határértéke határértéke minden általánosított részsorozatának is. Az általánosított sorozatok alkalmasak a topológia teljes leírására, ugyanis bármely topologikus tér egy részhalmazának lezártja mindazon pontokból áll, melyek valamely, a részhalmaz elemeiből képzett általánosított sorozat határértékei.

Az általánosított sorozatok jól felhasználhatók a függvények folytonossági tulajdonságainak vizsgálatakor is, ugyanis nem nehéz igazolni, hogy az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése akkor és csak akkor folytonos az X tér x_0 pontjában, ha bármely olyan X-beli $(x_\nu)_{\nu\in\Gamma}$ általánosított sorozat esetén, melynek x_0 határértéke, az $(f(x_\nu))_{\nu\in\Gamma}$ általánosított sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál. Ez a klasszikus analízisből jól ismert "átviteli elv" megfelelője.

Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér *kompakt*, ha nyílt halmazokból álló minden lefedéséből kiválasztható véges lefedés. Egy topologikus tér valamely részhalmaza akkor *kompakt*, ha mint altér kompakt. Akkor mondjuk, hogy egy halmaz valamely részhalmazainak a rendszere *centrált*, ha közülük bármely véges számúnak a metszete nem üres. A nyílt halmazok komplementereire való áttéréssel látható, hogy egy topologikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha centrált halmazt alkotó zárt halmazok metszete sohasem üres. Topologikus tér egy részhalmazát *relatív kompaktnak* nevezzük, ha lezártja kompakt. Könnyen látható, hogy kompakt tér minden folytonos képe és minden zárt altere kompakt, valamint Haussdorff–tér minden kompakt altere zárt halmaz. Alapvető fontosságú Tyihonov következő tétele.

5.2.1 Tétel. *(Tyihonov) Kompakt topologikus terek bármely halmazának szorzattere kompakt.*

Egy topologikus teret *lokálisan kompaktnak* nevezünk, ha minden pontjának van zárt, kompakt környezete. Egy topologikus teret *σ-kompaktnak* nevezünk, ha megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése.

Topologikus tér egy részhalmazát *sűrűnek*, vagy *mindenütt sűrűnek* nevezzük, ha lezártja az egész topologikus tér. A részhalmazt egy másik *részhalmazban sűrűnek* mondjuk, ha benne, mint topologikus altérben sűrű. Topologikus tér egy részhalmazát *sehol sem sűrűnek* nevezzük, ha lezártjának nincs belső pontja. Megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítését *első kategóriájú halmaznak* nevezzük. Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér valamely részhalmaza *második kategóriájú*, ha komplementere első kategóriájú.

Egy topologikus teret *szeparábilisnek* nevezünk, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza.

5.3 Metrikus terek

Ha az X halmaz minden x és y elemével képzett rendezett párhoz hozzá van rendelve egy $d(x, y)$ valós szám, amit x és y *távolságának* nevezünk úgy, hogy bármely X-beli x, y, z elemek esetén $d(x, y)$ nem negatív, és akkor és csak akkor 0, ha $x = y$, továbbá $d(x, y) = d(y, x)$ és $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy X ezzel a távolsággal *metrikus tér*. Az utóbbi egyenlőtlenséget *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük, a d függvényt pedig *távolságfüggvénynek*, vagy *metrikának*. Minden $r > 0$ esetén az X metrikus tér egy pontjának r *sugarú nyílt gömbje*, illetve r *sugarú zárt gömbje* alatt az X tér azon pontjainak halmazát értjük, amelyeknek a szóban forgó ponttól való távolsága kisebb, mint r, illetve kisebb, vagy egyenlő, mint r. Az illető pontot a gömb *középpontjának* nevezzük. Az X halmazon az összes nyílt gömbök által generált topológiát az X *természetes topológiájának*, vagy a d *metrika által indukált topológiának* nevezzük. Könnyen látható, hogy ez megegyezik az összes zárt gömbök által generált topológiával. Egy metrikus térben tehát minden topologikus fogalom szabadon használható, melyeket (ha mást nem mondunk) mindig a metrika által indukált topológiára vonatkoztatunk. Egy topologikus teret *metrizálhatónak* nevezünk, ha topológiája metrika által indukálható. Nyilván minden metrizálható topologikus tér Haussdorff–tér.

Az X metrikus tér bármely Y részhalmaza ugyancsak metrikus tér, ha két pontjának távolsága alatt ugyanazt értjük, mint az X térben. Ezzel a metrikával Y-t az X metrikus tér *alterének* nevezzük. Könnyű látni, hogy ekkor az Y metrikus tér metrika által indukált topológiája megegyezik az Y-nak, mint az X topologikus tér alterének topológiájával.

Könnyen látható, hogy metrikus térben az összes nyílt gömbök a topológia egy bázisát alkotják, továbbá bármely pontnak környezetbázisát alkotják az illető pont, mint középpont körüli nyílt (zárt) gömbök.

Metrikus terekben a függvények folytonosságának leírásához nincs szükség általánosított sorozatokra, a közönséges sorozatok is elegendőnek bizonyulnak, ugyanis az X metrikus térnek az Y metrikus térbe való f leképezése akkor és csak akkor folytonos az X tér x_0 pontjában, ha bármely X-beli, x_0-hoz konvergáló $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az $f(x_0)$-hoz konvergál.

Metrikus tér egy részhalmazát *korlátosnak* nevezzük, ha részhalmaza valamely nyílt gömbnek. Világos, hogy egy nem üres részhalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha átmérője véges. Akkor mondjuk, hogy egy metrikus térben egy *sorozat korlátos*, ha értékkészlete korlátos. Az is világos, hogy metrikus térben minden konvergens sorozat korlátos.

Az X metrikus tér $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát *Cauchy–sorozatnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan N, hogy $n, m > N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Könnyen látható, hogy metrikus térben minden konvergens sorozat Cauchy–sorozat, és minden Cauchy–sorozat korlátos, valamint, ha egy Cauchy–sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens. Egy metrikus teret *teljesnek* nevezünk, ha benne minden Cauchy–sorozat konvergens. Mint könnyen látható, teljes metrikus tér egy altere akkor és csak akkor teljes, ha zárt.

Az X metrikus teret az Y metrikus térbe képező leképezést *izometrikus leképezésnek*, vagy *izometriának* nevezünk, ha X bármely két pontjának távolsága megegyezik képeik távolságával. Nyilván minden izometria kölcsönösen egyértelmű. Az X metrikus teret az Y metrikus térrel *izometrikusnak* nevezzük, ha van X-nek Y-ra való izometrikus leképezése. Ekkor nyilván Y is izometrikus X-szel, így azt mondhatjuk, hogy X és Y *izometrikusak egymással.* Könnyen látható, hogy minden izometria folytonos és nyílt, így egymással izometrikus metrikus terek, mint topologikus terek hoemeomorfak.

Az X metrikus teret önmagába képező F leképezést *kontraháló leképezésnek*, vagy*kontrakciónak* nevezzük, ha van olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy minden X-beli x, y esetén $d\big(F(x), F(y)\big) \leq qd(x, y)$ teljesül. Kontraháló leképezésekkel kapcsolatban alapvető eredmény Banach tétele.

5.3.1 Tétel. *(Banach–féle fixponttétel) Teljes metrikus tér kontraháló leképezésének egyértelműen létezik fixpontja.*

Ugyancsak alapvető fontosságú az az eredmény, mely szerint teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete sűrű. Ennek azonnali következménye a Baire–féle kategóriatétel.

5.3.2 Tétel. *(Baire) Teljes metrikus tér második kategóriájú.*

A tétel alapján, ha egy teljes metrikus tér megszámlálható sok zárt halmaz egyesítése, akkor azok valamelyike tartalmaz gömböt.

Egy metrikus térben egy részhalmazt *szekvenciálisan kompaktnak* nevezünk, ha a részhalmaz pontjaiból álló bármely sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, melynek határértéke is a részhalmazhoz tartozik. Egy részhalmazt *relatív szekvenciálisan kompaktnak* mondunk, ha lezártja szekvenciálisan kompakt. Egy részhalmazt *teljesen korlátosnak* nevezünk, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van ε sugarú nyílt gömbökből álló véges lefedése. Egy ilyen lefedés esetén a gömbök középpontjainak halmazát *ε-hálónak* nevezzük. Világos, hogy minden teljesen korlátos halmaz korlátos. Kiderül, hogy metrikus tér egy részhalmazának kompaktsága és szekvenciális kompaktsága egyenértékű feltételek, s ezek még azzal is egyenértékűek, hogy a részhalmaz teljesen korlátos és mint altér teljes. Ebből könnyen adódik, hogy metrikus tér egy részhalmaza akkor és csak akkor relatív kompakt, ha relatív szekvenciálisan kompakt, valamint F. Haussdorff két nevezetes eredménye is, melyek szerint teljes metrikus tér egy részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha zárt és teljesen korlátos, valamint teljes metrikus tér egy részhalmaza akkor és csak akkor relatív kompakt, ha teljesen korlátos. Végül könnyű látni, hogy minden kompakt metrikus tér szeparábilis.

5.4 Lineáris terek

A valós, vagy komplex számok halmazának elemeit *skalároknak* fogjuk nevezni, ha nem lényeges, hogy valós vagy komplex számokról van szó. Legyen X Abel–csoport, melynek minden x eleméből és λ skalárból képzett párhoz hozzá van rendelve egy X-beli λx elem, melyet *szorzatuknak* nevezünk úgy, hogy bármely X-beli x, y, z elemek és bármely λ, μ skalárok esetén

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),$$

$$1 \cdot x = x$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy X *lineáris tér*, vagy *vektortér*. Ha utalni akarunk arra, hogy a skalárok valós, vagy komplex számok, akkor *valós*, vagy *komplex lineáris térről* beszélünk. Az X Abel–csoportot a lineáris tér *additív csoportjának* nevezzük. Egy lineáris teret *nem triviálisnak* nevezünk, ha van nullától különböző eleme.

Ha H az X lineáris tér egy részhalmaza, λ pedig skalár, akkor λH jelöli az összes H-beli h elemmel képzett λh elemek halmazát.

Az X lineáris tér $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemeinek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (n pozitív egész) skalárokkal való *lineáris kombinációja* a $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ elem. Ezt a lineáris kombinációt *nem triviálisnak* mondjuk, ha nem minden skalár nulla. Ha az itt szereplő skalárok nem negatív, valós számok, és összegük 1, akkor *konvex kombinációról* beszélünk.

Lineáris tér egy nem üres részhalmazát *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha a részhalmazból vett bármely véges sok különböző elem nem triviális lineáris kombinációja sohasem nulla. Ellenkező esetben a részhalmazt *lineárisan függőnek* mondjuk. Egy lineáris tér maximális lineárisan független részhalmazát a lineáris tér egy *bázisának* nevezzük. A Zorn–lemma alapján következik, hogy lineáris térben bármely lineárisan független halmaz részhalmaza valamely bázisnak, valamint minden nem triviális lineáris térnek van bázisa.

Lineáris tér egy részhalmazát *lineáris altérnek*, vagy röviden *altérnek* nevezzük, ha nem üres, és bármely két elemének bármely lineáris kombinációját tartalmazza. Világos, hogy egy altér az egész téren értelmezett műveletek megszorításaival ellátva maga is lineáris tér. Nyilván alterek metszete altér, így tetszőleges, nem üres részhalmaz esetén van értelme a részhalmazt tartalmazó összes alterek metszetéről, mint az illető részhalmazt tartalmazó legszűkebb altérről beszélni, melyet az illető részhalmaz által *generált altérnek* nevezünk, vagy az illető részhalmaz *lineáris burkának*, magát a részhalmazt pedig a szóban forgó altér *generátorrendszerének*.

Egy részhalmazt *konvexnek* nevezünk, ha nem üres, és bármely két elemének bármely konvex kombinációját tartalmazza. Világos, hogy minden altér konvex halmaz. Mint könnyen látható, konvex halmazok metszete ugyancsak konvex, így tetszőleges, nem üres halmaz esetén van értelme a halmazt tartalmazó összes konvex halmazok metszetéről, mint az illető halmazt tartalmazó legszűkebb konvex halmazról beszélni, melyet az illető halmaz *konvex burkának* nevezünk.

Egy lineáris tér H részhalmazát *körszerűnek* nevezzük, ha bármely λ skalár esetén $|\lambda| \leq 1$-ből $\lambda H \subseteq H$ következik.

Egy X lineáris tér H részhalmazát *elnyelőnek* nevezzük, ha az X bármely x eleme esetén van olyan $\lambda \neq 0$ skalár, hogy x a λH-hoz tartozik.

Mint könnyen látható, az X/Y faktorcsoport a $\lambda(x + Y) = \lambda x + Y$ összefüggéssel értelmezett szorzással ellátva lineáris tér. Itt x az X eleme, λ pedig skalár. Ezt a lineáris teret az X lineáris tér Y altér szerint vett *faktorterének* nevezzük.

Ha φ és ψ az X lineáris térnek az Y lineáris térbe való lineáris leképezése, akkor a $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ és a $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ ($x \in X$, λ skalár) összefüggések egy $\varphi + \psi$ és egy $\lambda\varphi$ lineáris leképezést értelmeznek (amint az könnyen látható), melyet a φ és ψ *összegének*, illetve a φ leképezés λ-val való *szorzatának* nevezünk. Mint könnyen látható, az X tér Y-ba való összes lineáris leképezéseinek halmaza ezzel az összeadással és szorzással ellátva lineáris tér, melyet az X tér Y-ba való *lineáris leképezései terének* nevezünk. Az X lineáris térnek X-be való lineáris leképezéseit *lineáris operátoroknak* nevezzük. Ha például λ egy skalár, akkor az $x \mapsto \lambda x$ képezés nyilván X lineáris operátora. Ha a az X tetszőleges eleme, akkor az $x \mapsto x + a$ leképezést az a-hoz tartozó *eltolásoperátornak* nevezzük. Ez nyilván csak $a = 0$ esetén lineáris.

Az X lineáris térnek a skalárok lineáris terébe való lineáris leképezését *lineáris funkcionálnak* nevezzük. Az X lineáris funkcionáljainak lineáris terét az X *konjugáltjának* mondjuk, ennek konjugáltját pedig X *második konjugáltjának*.

Könnyű igazolni, hogy ha φ az X lineáris tér Y alterének lineáris funkcionálja, akkor X-nek van olyan lineáris funkcionálja, mely Y-on φ-vel egyenlő.

Ha X' az X lineáris tér konjugáltja, akkor az X-beli x és X'-beli φ esetén $F(x)(\varphi) = \varphi(x)$ összefüggés által értelmezett F leképezés X-et második konjugáltjának egy alterére képezi le lineárisan (mint könnyen látható). Az F lineáris leképezést az X tér *második konjugáltjába való természetes leképezésének* nevezzük. Világos, hogy egy lineáris térnek második konjugáltjába való természetes leképezése izomorf leképezés.

Az X lineáris tér konjugáltjának, mint az X-en értelmezett skalárértékű függvények által alkotott topologikus szorzattér alterének topológiáját *gyenge*-topológiának* nevezzük. Fontos tudni, hogy az X lineáris térnek második konjugáltjába való természetes leképezésénél X képét az X gyenge*- topológiával ellátott konjugáltján folytonos lineáris funkcionálok alkotják.

5.5 Szeminormált terek

Az X valós vagy komplex lineáris téren értelmezett p valós értékű függvényt *szubadditívnak* nevezzük, ha bármely X-beli x, y elemek esetén fennáll

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

A p-t *abszolút homogénnek* nevezzük, ha bármely X-beli x és λ skalár esetén

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

teljesül. A p-t *szeminormának*, vagy *félnormának* nevezzük, ha szubadditív és abszolút homogén. Könnyen látható, hogy bármely p szeminorma nem negatív, a nullában nulla, továbbá $p^{-1}(0)$ az X tér lineáris altere. Az is nyilvánvaló, hogy bármely p szeminorma, és bármely X-beli x, y elemek esetén fennáll

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

Ha p szeminorma, és x_0 a tér tetszőleges pontja, továbbá $r > 0$ valós szám, akkor akkor a $p(x - x_0) < r$, illetve $p(x - x_0) \leq r$ tulajdonságú x pontok halmazát az x_0 *középpontú, r sugarú nyílt, illetve zárt p-gömbnek* nevezzük. Ha itt $x_0 = 0$ és $r = 1$, akkor a megfelelő gömböt *nyílt, illetve zárt p-egységgömbnek*, vagy *az adott szeminorma nyílt, illetve zárt egységgömbjének* nevezzük.

Egy lineáris téren értelmezett szeminormák egy halmazát *elválasztónak* mondjuk, ha a tér bármely nullától különböző elemén a szóban forgó szeminormák valamelyike nullától különböző értéket vesz fel.

Legyen adott az X lineáris téren szeminormák egy $\mathcal{P}$ családja. Azt a topológiát X-en, melynek a $\mathcal{P}$-beli összes szeminormákhoz tartozó nyílt gömbök szubbázisát alkotják, a $\mathcal{P}$ *szeminorma-család által indukált topológiának* nevezzük. Ezzel a topológiával X-et a $\mathcal{P}$ által indukált *szeminormált térnek* nevezzük. Könnyen látható, hogy erre a topológiára nézve a $\mathcal{P}$-beli szeminormák folytonosak. Azt is könnyű látni, hogy egy szeminormált tér akkor és csak akkor Haussdorff–féle, ha az indukáló család elválasztó.

5.6 Topologikus vektorterek

Az X halmazt, mely lineáris tér és topologikus tér egyidejűleg úgy, hogy az $(x, y) \mapsto x + y$ összeadás az X önmagával vett topologikus szorzatán folytonos, valamint a skalárral való $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ szorzás a valós, vagy komplex számok topologikus terének az X topologikus térrel képzett topologikus szorzatán folytonos, *lineáris topologikus térnek*, vagy *topologikus vektortérnek* nevezzük. Ha egy lineáris téren adott egy topológia, mellyel ellátva a tér topologikus vektortér, akkor a topológiát *vektortopológiának* nevezzük. Könnyű látni, hogy bármely szeminormált tér topológiája vektortopológia. Mint könnyen látható, topologikus vektortérben az eltolásoperátorok mellett bármely $\lambda \neq 0$ skalár esetén a λ-val való $x \mapsto \lambda x$ *szorzás operátora* is homeomorfizmusa X-nek.

Az X topologikus vektortéren értelmezett d metrikát *invariánsnak* nevezzük, ha az X bármely x, y, z elemei esetén $d(x, y) = d(x + z, y + z)$.

Topologikus vektortér egy H részhalmazát *korlátosnak* nevezzük, ha a zéruselem bármely U környezete esetén van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $\lambda > \alpha$ esetén H a λU részhalmaza. Könnyű látni, hogy minden véges halmaz korlátos, és véges sok korlátos halmaz egyesítése korlátos. Egy topologikus vektortérre akkor mondjuk, hogy *rendelkezik a Heine–Borel–tulajdonsággal*, ha benne minden korlátos, zárt halmaz kompakt. Szeminormált térben egy részhalmaz pontosan akkor korlátos, ha rajta minden szeminorma korlátos függvény.

Egy topologikus vektorteret *lokálisan konvexnek* nevezünk, ha Haussdorff–tér, és a zéruselemnek van konvex halmazokból álló környezetbázisa. Egy topologikus vektorteret *lokálisan korlátosnak* nevezünk, ha Haussdorff–tér, és a zéruselemnek van korlátos környezete. Egy topologikus vektorteret *F–térnek* nevezünk, ha a topológiája megegyezik egy olyan invariáns metrika által indukált topológiával, melyre nézve a tér teljes metrikus tér. A lokálisan konvex F-tereket *Fréchet–térnek* nevezzük.

Egy topologikus vektorteret *normálhatónak* nevezünk, ha Haussdorff–féle, és topológiája egyetlen szeminormával indukálható. Normálható topologikus vektortér topológiáját indukáló szeminormát *normának* nevezzük, s a topologikus vektorteret egy normával ellátva *normált térnek* mondjuk.

Legyen p norma az X normált téren. Ekkor inkább az $\|x\| = p(x)$ jelölést használjuk, s az X halmaz x, y elemei esetén $d(x, y) = \|x - y\|$ összefüggéssel értelmezett d függvény invariáns metrika X-en - mint könnyen látható -, mely által indukált topológia megegyezik X-nek a $\|, \|$ norma által indukált topológiájával. Ezért minden normálható tér metrizálható, illetve minden normált tér metrikus tér. A d metrikát a $\|, \|$ norma által *indukált metrikának* nevezzük.

Ha egy normált tér, mint metrikus tér teljes, akkor *Banach–térnek* nevezzük. Tehát minden Banach–tér Fréchet–tér.

Könnyű látni, hogy topologikus vektortérben bármely lineáris altér lezártja lineáris altér, bármely korlátos halmaz lezártja korlátos, bármely körszerű halmaz lezártja körszerű, bármely konvex halmaz lezártja és belseje konvex, s a zérus bármely körszerű környezetének belseje körszerű. Az is könnyen látható, hogy két tetszőleges részhalmaz lezártjainak összeghalmaza részhalmaza összeghalmazuk lezártjának.

Egy topologikus vektortérben minden pontnak van körszerű, nyílt halmazokból álló környezetbázisa, és lokálisan konvex topologikus vektortérben minden pontnak van körszerű, konvex, nyílt halmazokból álló környezetbázisa. Ha X egy topologikus vektortér, akkor benne a zérus bármely U környezete, s bármely $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a $+\infty$-hez divergáló valós számsorozat esetén

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n U$$

teljesül. Ha U korlátos, akkor bármely $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú nullsorozat esetén $(\delta_n U)_{n\in\mathbb{N}}$ a zérus környezetbázisa. Speciálisan, topologikus vektortérben a zérus minden környezete elnyelő. Könnyű látni, hogy topologikus vektortérben minden kompakt halmaz korlátos.

Topologikus vektorterek közti lineáris leképezés folytonos, ha valamely pontban folytonos. Topologikus vektortéren adott, nem azonosan nulla lineáris funkcionál akkor és csak akkor folytonos, ha a következő feltételek valamelyike teljesül:

(i) a funkcionál magja zárt altér;

(ii) a funkcionál magja nem sűrű altér;

(iii) a funkcionál korlátos a zérus valamely környezetén.

Az X topologikus vektortér folytonos lineáris funkcionáljaiból álló teret az X topologikus vektortér *duálisának* mondjuk. Ez nyilván altere az X lineáris tér konjugáltjának. Akkor mondjuk, hogy az X tér *duálisa elválasztja X pontjait*, ha az X bármely két különböző pontjához van az X-nek olyan folytonos lineáris funkcionálja, mely a két pontban különböző értékeket vesz fel.

Legyen X topologikus vektortér, s legyen N az X lineáris tér altere. Tudjuk, hogy az X/N faktorhalmaz a faktortopológiával topologikus tér, mely egyben topologikus csoport is. Ugyanakkor az X/N faktorhalmaz lineáris tér, mely könnyen látható módon, a faktortopológiával ellátva topologikus vektortér, mely pontosan akkor Haussdorff–féle, ha N zárt altér. Legyen N az X topologikus vektortér zárt altere. Ha X lokálisan konvex, vagy lokálisan korlátos, vagy metrizálható, vagy normálható, akkor X/N-is. Ha X F–tér, vagy Fréchet–tér, vagy Banach–tér, akkor X/N is. Azt is könnyű látni, hogy az X-nek X/N-re való természetes leképezése folytonos, nyílt, lineáris leképezés.

Haussdorff–féle topologikus vektortér minden lokálisan kompakt altere és minden n-dimenziós altere zárt. Alapvető fontosságú az a tétel, mely szerint lokálisan kompakt Haussdorff–féle topologikus vektortér véges dimenziós.

Könnyű látni, hogy minden szeminormált tér lokálisan konvex topologikus vektortér.

Az X topologikus vektortérből az Y topologikus vektortérbe képező lineáris leképezések $\mathcal{F}$ családját *egyformán folytonosnak* nevezzük, ha az Y tér zéruselemének bármely V környezetéhez van az X tér zéruselemének olyan U környezete, hogy bármely $\mathcal{F}$-beli f esetén $f(U) \subseteq V$. Az X topologikus vektortérből az Y topologikus vektortérbe képező lineáris leképezések $\mathcal{F}$ családját *egyenletesen korlátosnak* nevezzük, ha az X tér bármely E korlátos részhalmazához van az Y térnek olyan F korlátos részhalmaza, hogy bármely $\mathcal{F}$-beli f esetén $f(E) \subseteq F$. Alapvető fontosságúak a következő tételek.

5.6.1 Tétel. *(Az egyenletes korlátosság tétele) Topologikus vektorteret topologikus vektortérbe képező lineáris leképezések egyformán folytonos családja egyenletesen korlátos.*

5.6.2 Tétel. *(Banach–Steinhaus tétel) Legyen $\mathcal{F}$ az X topologikus vektorteret az Y topologikus vektortérbe képező folytonos lineáris leképezések egy családja. Ha a korlátos pályájú elemek halmaza X-ben második kategóriájú, akkor minden elem korlátos pályájú, s az $\mathcal{F}$ család egyformán folytonos.*

5.6.3 Tétel. *Ha F-teret Haussdorff–féle topologikus vektortérbe képező folytonos lineáris leképezések sorozata pontonként konvergens, akkor a határfüggvény folytonos lineáris leképezés.*

5.6.4 Tétel. *(A nyílt leképezések tétele) Ha egy F-teret topologikus vektortérbe képező folytonos lineáris leképezés értékkészlete második kategóriájú, akkor a leképezés nyílt és értékkészlete F–tér.*

5.6.5 Tétel. *(A zárt gráf tétel) Legyenek X, Y E-terek, $\Phi : X \to Y$ pedig egy lineáris leképezés. Ha a Φ leképezés gráfja, azaz, a*

$$G = \{\big(x, \Phi(x)\big) : x \in X\}$$

halmaz az $X \times Y$ szorzattérben zárt, akkor Φ folytonos.

5.7 Integrálás

Legyen X egy halmaz. Az X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ osztályát *σ-algebrának* nevezzük, ha tartalmazza az üres halmazt, minden elemével együtt annak komplementerét, s bármely megszámlálható sok elemének egyesítését. Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ párt *mérhető térnek* nevezzük. Az $\mathcal{A}$ σ-algebrához tartozó halmazokat *$\mathcal{A}$-mérhető halmazoknak*, vagy röviden *mérhető halmazoknak* nevezzük. Világos, hogy az X-en adott σ-algebrák bármely halmazának metszete ugyancsak σ-algebra.

Ha $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, H pedig az X egy mérhető részhalmaza, akkor az $\mathcal{A}$-beli halmazok H-val való metszetei - mint könnyen látható - egy $\mathcal{A}_H$ σ-algebrát alkotnak a H halmazon. Ekkor a $(H, \mathcal{A}_H)$ mérhető teret az $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér egy *alterének* nevezzük.

Ha X egy halmaz, $\mathcal{H}$ pedig az X részhalmazainak tetszőleges osztálya, akkor az X $\mathcal{H}$-t tartalmazó összes σ-algebráinak metszete σ-algebra, melyet a $\mathcal{H}$ *által generált σ-algebrának* nevezünk. Ez a $\mathcal{H}$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebra. Ha X egy topologikus tér, akkor az X nyílt halmazainak osztálya által generált σ-algebra a *Borel–féle σ-algebra*, ennek elemeit *Borel–halmazoknak* nevezzük.

Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $\mu : \mathcal{A} \to [0 + \infty]$ pedig olyan nem azonosan nulla függvény, melyre $\mu(\emptyset) = 0$, s ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-beli páronként diszjunkt sorozata, akkor

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \tag{125}$$

teljesül. Ekkor μ-t *mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. A (125) tulajdonság neve: *σ-additivitás.* Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktérnek* nevezzük. Ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben az $\mathcal{A}$-beli A halmaz olyan, hogy $\mu(A) = 0$, akkor A-t *μ-nullmértékű halmaznak*, vagy röviden *nullmértékű halmaznak* nevezzük. Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, melyen μ egy olyan mérték, hogy $\mu(A)$ minden $\mathcal{A}$-beli A halmaz esetén véges, akkor μ-t *véges mértéknek* nevezzük, az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékteret pedig *véges mértéktérnek.* Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, melyen μ egy olyan mérték, hogy $\mu(X) = 1$, akkor μ-t *valószínűségi mértéknek* nevezzük, az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékteret pedig *valószínűségi mezőnek.* Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, melyen μ egy olyan mérték, hogy X-nek van véges mértékű halmazokkal való megszámlálható lefedése, akkor μ-t *σ-véges mértéknek* nevezzük, az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékteret pedig *σ-véges mértéktérnek.* Ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér olyan, hogy bármely μ-nullmértékű halmaz minden részhalmaza $\mathcal{A}$-hoz tartozik (s ekkor nyilván ugyancsak μ-nullmértékű), akkor μ-t *teljes mértéknek* nevezzük, az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékteret pedig *teljes mértéktérnek.* Ha X topologikus tér és $\mathcal{B}$ jelöli az X Borel–halmazainak σ-algebráját, akkor az $(X, \mathcal{B})$ mérhető téren értelmezett mértékeket *Borel–mértéknek* nevezzük.

Ha X topologikus tér és $\mathcal{B}$ jelöli az X Borel–halmazainak σ-algebráját, akkor az $(X, \mathcal{B})$ mérhető téren értelmezett μ Borel–mértéket *regulárisnak* nevezzük, ha minden nyílt halmaz mértéke egyenlő a benne levő kompakt halmazok mértékeinek szuprémumával, és minden mérhető halmaz mértéke egyenlő az őt tartalmazó nyílt halmazok mértékeinek infimumával.

Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pedig olyan függvény, melyre $\mu(\emptyset) = 0$, s ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-beli páronként diszjunkt sorozata, akkor (125) teljesül, ahol a jobboldalon álló sor abszolút konvergens. Ekkor μ-t *komplex mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha X topologikus tér és $\mathcal{B}$ jelöli az X Borel–halmazainak σ-algebráját, akkor az $(X, \mathcal{B})$ mérhető téren értelmezett komplex mértékeket *komplex Borel–mértéknek* nevezzük. Szokás ilyenkor az $(X, \mathcal{A}), \mu)$ hármast *komplex mértéktérnek* nevezni. Ha μ egy komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, melyre $\mu(A)$ minden $\mathcal{A}$-beli A esetén nem negatív valós szám, akkor μ-t *nem negatív komplex mértéknek* nevezzük. Világos, hogy ekkor μ mérték, és $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér. Ha μ egy komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, akkor vannak olyan $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ nem negatív mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, hogy

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \tag{126}$$

teljesül.

Ha X topologikus tér és $\mathcal{B}$ jelöli az X Borel–halmazainak σ-algebráját, akkor az $(X, \mathcal{B})$ mérhető téren értelmezett komplex Borel–mértéket *regulárisnak* nevezzük, ha valamely (126) alakú felbontásában szereplő $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ mértékek mindegyike reguláris.

Ha X topologikus tér és $\mathcal{B}$ jelöli az X Borel–halmazainak σ-algebráját, akkor az $(X, \mathcal{B})$ mérhető téren értelmezett Borel–mérték, illetve komplex Borel–mérték *tartójának* nevezzük mindazon nyílt halmazok egyesítésének komplementerét, melyek mértéke nulla.

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, H az X egy mérhető részhalmaza, akkor μ-nek $\mathcal{A}_H$-ra való μ_H szűkítése nyilván mérték a $(H, \mathcal{A}_H)$ altéren. A $(H, \mathcal{A}_H, \mu_H)$ mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér alterének* nevezzük. Az egyszerűség kedvéért ilyenkor μ_H helyett is a μ jelölést használjuk.

Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, Y pedig topologikus tér, akkor az $f : X \to Y$ függvényt *mérhetőnek* nevezzük, ha az Y bármely nyílt részhalmazának f-nél vett inverz képe $\mathcal{A}$-mérhető. Ha X is topologikus tér, akkor az $f : X \to Y$ függvényt *Borel–mérhetőnek*, vagy *Borel–függvénynek* nevezzük, ha az Y bármely nyílt részhalmazának f-nél vett inverz képe Borel–halmaz. Nyilván minden folytonos függvény Borel–mérhető.

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, Y topologikus tér, A az X mérhető részhalmaza, melynek komplementere nullmértékű, továbbá $f : A \to Y$ mérhető függvény, akkor azt mondjuk, hogy f *majdnem mindenütt van értelmezve.* Ilyenkor f-et tetszőleges módon X-re kiterjesztve, nyilván mérhető függvényt kapunk X-en. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, Y topologikus tér, $f, g : X \to Y$ pedig mérhető függvények, továbbá az X mindazon x pontjainak halmaza, amelyekre teljesül az $f(x) = g(x)$ egyenlőtség, nullmértékű, akkor azt mondjuk, hogy f és g *majdnem mindenütt egyenlők.* Ha két függvény majdnem mindenütt egyenlő, akkor - mint mérhető függvényeket - azonosnak tekithetjük őket. Ennek hátterében az áll, hogy a "majdnem mindenütt egyenlőség" ekvivalencia reláció az adott térbeli értékű összes mérhető függvények halmazán, mely szerinti faktortér elemei, az ekvivalencia reláció ekvivalenciaosztályai, a mértékelmélet szempontjaiból azonosíthatók az osztályok reprezentánsaival. Hasonló értelemben beszélünk majdnem mindenütt teljesülő egyenlőtlenségekről, s általában majdnem mindenütt teljesülő "értelmes" tulajdonságokról. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, Y topologikus tér, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pedig Y-beli értékű mérhető függvények sorozata X-en, akkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *függvénysorozat majdnem mindenütt konvergens*, ha az X mindazon x pontjainak halmaza, amelyekre az $\big(f_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat nem konvergens, nullmértékű. Nem nehéz igazolni, hogy ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat majdnem mindenütt konvergens, akkor határfüggvénye mérhető függvény.

Az $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktéren értelmezett $f : X \to [-\infty,+\infty]$ mérhető függvényt *majdnem mindenütt végesnek* nevezzük, ha az X mindazon x pontjai halmazának komplementere, melyekre $f(x)$ véges, nullmértékű. Az $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktéren értelmezett $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvényt *lényegében korlátosnak* nevezzük, ha van olyan K valós szám, hogy az X halmaz mindazon x pontjainak halmaza, amelyekre $|f(x)| > K$, nullmértékű. Az ilyen tulajdonságú K számok halmazának infimumát az f függvény *lényeges szuprémumának* nevezzük, melyet $\operatorname{ess\,sup}|f|$ jelöl. Könnyű látni, hogy ha f lényegében korlátos mérhető függvény, akkor van az X-nek olyan A mérhető részhalmaza, amelynek komplementere nullmértékű, hogy $|f(x)| \le \operatorname{ess\,sup}|f|$ teljesül az A minden x pontjában.

Ha $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt mérhető halmazok, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pedig különböző valós számok, akkor az

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i$$

módon értelmezett f függvényt *egyszerű függvénynek* nevezzük. Itt χ_i az A_i halmaz karakterisztikus függvényét jelöli ($i = 1, 2, \ldots, n$). Az $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktéren értelmezett összes egyszerű függvények nyilván lineáris teret alkotnak. Nyilván minden egyszerű függvény mérhető. Az f egyszerű függvény *Lebesgue–integráljának*, vagy röviden *integráljának* az

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$$

számot nevezzük. Az $f \mapsto \int f\,d\mu$ leképezés nyilván lineáris funkcionál az összes egyszerű függvények lineáris terén, melyre véges mértéktér esetén teljesül az

$$|\int f\,d\mu| \le \mu(X)\cdot \operatorname{ess\,sup}|f|$$

egyenlőtlenség.

Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $f : X \to [0,+\infty]$ nem negatív mérhető függvény. Ekkor az

$$\int f\,d\mu = \sup\big\{\int \varphi\,d\mu :\ 0 \le \varphi \le f, \quad \varphi \text{ egyszerű függvény}\big\}$$

értéket az f *nem negatív mérhető függvény Lebesgue–integráljának*, vagy röviden *integráljának* nevezzük. Ha ez véges, akkor azt mondjuk, hogy f *Lebesgue–integrálható*, vagy röviden *integrálható*.

Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $f : X \to [-\infty,+\infty]$ mérhető függvény. Jelölje f^+, illetve f_- az f függvény *pozitív részét*, illetve *negatív részét*, melyek az

$$f^+(x) = sup\,\{f(x), 0\}\,,$$

illetve

$$f^-(x) = -inf\,\{f(x), 0\}$$

egyenlőségekkel vannak értelmezve az X tetszőleges x pontjában. Világos, hogy f^+ és f^- nem negatív mérhető függvények, valamint fennáll $f = f^+ - f^-$ és $|f| = f^+ + f^-$. Ha az f^+ és f^- valamelyike integrálható, akkor az

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$$

értéket az f *mérhető függvény Lebesgue–integráljának*, vagy röviden *integráljának* nevezzük. Ha ez véges, akkor azt mondjuk, hogy f *Lebesgue–integrálható*, vagy röviden *integrálható*. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren az összes integrálható függvények nyilván lineáris teret alkotnak, melyen az $f \mapsto \int f\,d\mu$ leképezés lineáris funkcionál. Nyilván f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható. Szokásos az $\int_X f\,d\mu$, illetve $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ jelölések használata is.

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, akkor f-et *integrálhatónak* mondjuk, ha valós része és képzetes része egyaránt integrálható. Ilyenkor f integrálja alatt az

$$\int f\,d\mu = \int \mathrm{Re}\, f\,d\mu + i \int \mathrm{Im}\, f\,d\mu$$

komplex számot értjük.

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ komplex mértéktér, $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, akkor f-et *integrálhatónak* mondjuk, ha f integrálható a μ mérték valamely (126) alakú felbontásában szereplő μ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mértékekre nézve. Könnyű látni, hogy ez nem függ a felbontástól, amint ilyenkor az

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2 + i\big(\int f\,d\mu_3 - \int f\,d\mu_4\big)$$

módon értelmezett érték sem, melyet az f függvény *integráljának* nevezünk.

A továbbiakban ”mérték” alatt ”mértéket”, vagy ”komplex mértéket” értünk, ”mértéktér” alatt pedig ”mértékteret”, vagy ”komplex mértékteret”.

Alapvető fontosságú a következő tétel.

5.7.1 Tétel. *(Lebesgue) Legyen X mértéktér, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az X-en értelmezett komplex értékű mérhető függvények sorozata, f pedig komplex értékű integrálható függvény X-en, melyekre*

$$|f_n(x)| \leq f(x)$$

teljesül majdnem minden X-beli x esetén. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az X-en majdnem mindenütt konvergens, akkor a $(\int f_n\,d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu\,.$$

A tételben szereplő f függvényt az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *integrálható majoránsának* nevezzük.

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és $1 \le p < +\infty$ valós szám, akkor mindazon $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát, melyekre az

$$\int |f|^p \, d\mu$$

integrál véges, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, vagy röviden $L^p(X)$ jelöli. Ha az egymással majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítjuk, akkor az $L^p(X)$ téren az

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

kifejezés normát értelmez. Mindezt a $p = +\infty$ esetre is kiterjeszthetjük, amenynyiben $L^\infty(X)$ jelöli az X-en lényegében korlátos mérhető függvények halmazát, s ezen $|f|_\infty$ az $\operatorname{ess\,sup} |f|$ kifejezést, mely $L^\infty(X)$-en ugyancsak norma. Világos, hogy $L^1(X)$ elemei pontosan az integrálható függvények, míg $L^2(X)$ elemeit *négyzetesen integrálható függvényeknek* nevezzük. Érvényes a Hölder–egyenlőtlenség következő változata is.

5.7.2 Tétel. *(Hölder–egyenlőtlenség) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $1 \le p \le +\infty$, továbbá $f : X \to \mathbb{C}$ és $g : X \to \mathbb{C}$ nem negatív mérhető függvények, ahol $1 < p < +\infty$ esetén*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,,$$

$p = 1$ esetén $q = +\infty$, és $p = +\infty$ esetén $q = 1$. Ekkor fennáll

$$\int_X f \cdot g \, d\mu \le \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q} .$$

Ebben a változatban szereplő integrálok tehát nem feltétlenül végesek.

Ha X lokálisan kompakt Haussdorff–tér, μ pedig reguláris Borel–mérték X-en, melynél a kompakt halmazok mértéke véges, akkor $1 \le p < +\infty$ esetén a kompakt tartójú folytonos függvények halmaza sűrű $L^p(X)$-ben.

Legyen $(Q, \mathcal{B}, \mu)$ mértéktér, X pedig olyan topologikus vektortér, melynek duálisa elválasztja X pontjait. Legyen továbbá $f : Q \to X$ olyan függvény, melynél $\Lambda \circ f$ az X minden Λ korlátos lineáris funkcionálja esetén integrálható. Ha létezik az X-nek olyan y eleme, hogy

$$\Lambda(y) = \int_Q \Lambda \circ f \, d\mu$$

teljesül minden Λ korlátos lineáris funkcionál esetén, akkor azt mondjuk, hogy f *integrálható*, és *integrálja*

$$\int_Q f \, d\mu = y \, .$$

Világos, hogy a duális tér elválasztó tulajdonsága miatt az integrál egyértelmű. Alapvető fontosságú a következő tétel.

5.7.3 Tétel. *Legyen X topologikus vektortér, melynek duálisa elválasztja az X pontjait, Q egy kompakt Haussdorff–tér, μ pedig egy valószínűségi Borel–mérték Q-n. Ha $f : Q \to X$ olyan folytonos függvény, hogy értékkészlete konvex burkának lezártja kompakt, akkor f integrálható, és integrálja az f értékkészlete konvex burkának lezártjához tartozik.*

Megjegyezzük, hogy f értékkészlete nyilván kompakt, így konvex burkának lezártja biztosan kompakt, ha X Fréchet–tér. Az előbbi tétel kiterjeszthető valós Borel–mértékekre, valamint komplex mértékekre is.

Legyenek $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető terek, s jelölje $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ az $X \times Y$ szorzathalmaz $A \times B$ alakú részhalmazai által generált σ-algebrát $X \times Y$-on, ahol A az $\mathcal{A}$, B pedig a $\mathcal{B}$ tetszőleges eleme. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ mérhető teret az $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ *mérhető terek szorzatának* nevezzük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben az összefüggésben $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nem az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok szorzathalmazát jelenti. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértékterek, akkor az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ mérhető téren egyértelműen létezik olyan $\mu \times \nu$ σ-véges mérték, hogy ha A az $\mathcal{A}$, B pedig a $\mathcal{B}$ tetszőleges eleme, akkor

$$(\mu \times \nu)\,(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$$

teljesül. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *mértékterek szorzatának* nevezzük. Ha $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ egy függvény, akkor az X bármely x eleme esetén az Y halmaz y pontjaiban $f_x(y) = f(x, y)$ módon értelmezett $f_x : Y \to \mathbb{C}$ függvényt az *f függvény x által meghatározott metszetének* nevezzük. Hasonlóan értelmezzük bármely Y-beli y esetén az *f függvény y által meghatározott metszetét* az X halmazon. Alapvető jelentőségű a következő tétel.

5.7.4 Tétel. *(Fubini) Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértékterek, h pedig az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzattéren értelmezett integrálható függvény. Ekkor h majdnem minden metszete integrálható, továbbá fennáll*

$$\int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \int_X \Big(\int_Y h_x\, d\nu \Big)\, d\mu = \int_Y \Big(\int_X h_y\, d\mu \Big)\, d\nu\,.$$

Érvényes a tétel következő változata is.

5.7.5 Tétel. *(Fubini) Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértékterek, h pedig az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzattéren értelmezett nem negatív mérhető függvény. Ekkor fennáll*

$$\int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \int_X \Big(\int_Y h_x\, d\nu \Big)\, d\mu = \int_Y \Big(\int_X h_y\, d\mu \Big)\, d\nu\,.$$

5.8 Normált terek

Ha az X lineáris tér minden X eleméhez adva van egy $\|x\|$ nem negatív valós szám, melyet x *normájának* nevezünk, úgy, hogy minden X-beli x, y és λ skalár esetén $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ és $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ teljesül, továbbá $\|x\| = 0$ csak $x = 0$ esetén áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy X *normált tér*. Figyelembe véve az 5.5 és az 5.6 szakaszokban mondottakat, egy normált tér nem más, mint egyetlen szeminormával indukált Haussdorff–féle szeminormált tér, illetve topologikus vektortér. Az alábbiakban felsorolásra kerülő elnevezések, fogalmak tehát a korábban már említettek speciális esetei.

Az X normált tér x és Y elemeinek *távolságán* a $\|x-y\|$ számot értjük. Az X-beli x elem ε (ε pozitív valós szám) sugarú *környezetén* az $\|x-y\| < \varepsilon$ $(y \in X)$ tulajdonságú y elemek halmazát, az X középpontú, ε sugarú *gömbön* pedig a $\|x-y\| \leq \varepsilon$ $(y \in X)$ tulajdonságú y elemek halmazát értjük. A 0 középpontú, 1 sugarú gömböt az X *egységgömbjének* nevezzük. Az elemek környezetei által generált topológiát X *topológiájának* mondjuk.

Az X normált térnek az Y normált térbe való φ lineáris leképezését *korlátos lineáris leképezésnek* mondjuk, ha van olyan K valós szám, hogy minden X-beli x elem esetén $\|\varphi(x)\| \leq K\|x\|$ teljesül. Az X-nek Y-ba való leképezését *izometrikus leképezésnek* mondjuk, ha minden X-beli x elem esetén $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ teljesül. Akkor mondjuk, hogy X *izometrikusan izomorf* Y-nal, ha X-nek van izometrikus izomorf leképezése Y-ra.

Világos, hogy normált tér normált térbe való való lineáris leképezése akkor és csak akkor korlátos, ha folytonos.

Ha az X normált térnek, mint lineáris térnek Y altere, akkor az X-en értelmezett normának Y-ra való megszorításával Y-t ellátva Y normált tér, (mint könnyen látható), melyet az X normált tér egy *alterének* nevezünk. Ha Y zárt altere X-nek, akkor az X, mint lineáris tér Y szerint vett X' faktorterében egy elem normáján az X hozzátartozó elemei normáinak infimumát értve X' normált tér (mint könnyen látható), amelyet az X normált tér Y szerint vett *faktorterének* nevezünk. Ez a fogalom a korábban már megismert hasonló fogalomnak nyilván speciális esete.

Az X_ν $(\nu \in \Gamma)$ normált terek, mint lineáris terek szorzatterében azok az f függvények, amelyeknél a $\|f(\nu)\|$ $(\nu \in \Gamma)$ számok halmaza korlátos, alteret alkotnak, mely az $\|f\| = \sup_{\nu \in \Gamma} \|f(\nu)\|$ normával ellátva normált tér (mint könnyen látható), melyet az X_ν $(\nu \in \Gamma)$ normált terek *normált szorzatának* nevezünk.

Az X normált térnek az Y normált térbe való lineáris leképezéseiből álló lineáris térben a korlátos φ lineáris leképezések alteret alkotnak és ez a

$$\|\varphi\| = \inf_{x \in X, x \neq 0} \|x\|^{-1} \|\varphi(x)\|$$

normával ellátva normált tér (mint könnyen látható), amelyet az X normált tér Y normált térbe való *korlátos lineáris leképezései normált terének* nevezünk.

Az X normált tér korlátos lineáris funkcionáljaiból álló tér, az X normált tér duálisa, ezzel a normával tehát normált tér. Ennek duálisát az X *normált tér második duálisának* nevezzük.

Alapvető fontosságú a következő tétel.

5.8.1 Tétel. *(Hahn–Banach) Ha φ az X normált tér Y alterének korlátos lineáris funkcionálja, akkor X-nek van olyan korlátos lineáris funkcionálja, amely φ normájával egyenlő normájú, és az Y-on φ-vel egyenlő.*

Ha X^* az X normált tér duálisa, akkor az $F(x)(\varphi) = \varphi(x)$ $(x \in X, \varphi \in X^*)$ összefüggés által értelmezett F leképezés X-et második duálisának egy alterére képezi le lineárisan és ez a leképezés korlátos (mint könnyen látható), amelyet az X normált tér *második duálisába való természetes leképezésének* nevezünk. Egy normált térnek második duálisába való természetes leképezése mindig izometrikus izomorf leképezés.

A következő eredmény alapvető jelentőségű.

5.8.2 Tétel. *(Banach–Alaoglu) Az X normált tér duálisának egységgömbje az X lineáris tér gyenge*-topológiával ellátott duálisában, mint topologikus térben, kompakt altér.*

Akkor mondjuk, hogy az X normált tér elemeinek x_n (n természetes szám) *sorozata konvergál* az X-beli x elemhez, ha a $\|x_n - x\|$ számok sorozata 0-hoz konvergál. Ezt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ módon jelöljük. Akkor mondjuk, hogy az x_n sorozat *Cauchy–sorozat*, ha a $\|x_n - x_k\|$ kettős sorozat (n, k természetes számok) 0-hoz konvergál. Akkor mondjuk, hogy egy normált tér *Banach–tér*, ha elemeinek minden Cauchy–sorozata konvergens.

Akkor mondjuk, hogy az X normált tér x_n sorozatának (n természetes szám) elemeiből képzett *sor konvergál* az X tér x eleméhez, ha az $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ módon képzett s_n elemsorozat konvergál x-hez. Ezt $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ módon jelöljük. Akkor mondjuk, hogy az x_n elemek *abszolút konvergens sort* alkotnak, ha a $\|x_n\|$ számok konvergens sort alkotnak. Egy normált tér akkor és csak akkor Banach–tér, ha elemeinek minden abszolút konvergens sora konvergens.

Könnyű látni, hogy egy Banach–tér minden zárt altere és a szerinte vett faktortere Banach–tér, valamint Banach-terek bármely rendszerének normált szorzata, s egy kompakt tér feletti folytonos függvények normált tere Banach–tér. Ugyancsak érvényes, hogy normált térnek Banach–térbe való összes korlátos lineáris leképezéseiből álló normált tér Banach–tér.

5.9 Hilbert-terek

Ha egy lineáris tér minden x, y eleméhez adva van egy (x, y) skalár úgy, hogy bármely y rögzítése mellett (x, y) lineáris funkcionál, $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ($\overline{\lambda}$ a λ skalár komplex konjugáltját jelöli) és $(x, x) \geq 0$ teljesül, akkor ezt a függvényt *pszeudo-belsőszorzatnak* nevezzük. Ha egy pszeudo-belsőszorzat olyan, hogy $(x, x) = 0$ csak $x = 0$-nál teljesül, akkor *belső szorzatnak* nevezzük. Érvényes a *Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség*, mely szerint egy lineáris téren értelmezett pszeudo-belsőszorzattal a tér minden x, y elemére

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

teljesül.

Könnyű látni, hogy egy belső szorzattal ellátott lineáris tér bármely x elemének normáján az $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ számot értve a tér normált tér. A norma ilyen módon csak egy belső szorzatból származik.

Akkor mondjuk, hogy egy X normált tér *pre–Hilbert–tér*, ha az X lineáris téren értelmezhető olyan belső szorzat, amellyel $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ $(x \in X)$ teljesül. Ez a belső szorzat egyértelmű, s X elemeinek belső szorzatán ezt értjük. Ha egy pre–Hilbert–tér Banach–tér, akkor *Hilbert–térnek* nevezzük. Minden pre–Hilbert-tér izometrikusan izomorf valamely Hilbert–tér egy alterével.

Akkor mondjuk, hogy az X pre–Hilbert–tér x eleme az X-beli *y elemre ortogonális*, ha $(x, y) = 0$ teljesül. Akkor mondjuk, hogy az X tér A részhalmaza a *B részhalmazra ortogonális*, ha minden A-beli x elem ortogonális minden B-beli y elemre. Mint könnyen látható, az A-ra ortogonális elemek zárt alteret alkotnak, amelyet az *A ortogonális komplementerének* nevezünk. Alapvető fontosságú a következő tétel.

5.9.1 Tétel. *Ha Y az X Hilbert–térnek zárt altere, akkor X az Y-nak és Y ortogonális komplementerének direkt összege.*

Hilbert–terek korlátos lineáris funkcionáljaival kapcsolatban a legfontosabb eredmény Riesz Frigyes tétele.

5.9.2 Tétel. *(Riesz) Az X Hilbert–tér bármely a eleme esetén a $\varphi(x) = (x, a)$ $(x \in X)$ összefüggés X-nek korlátos lineáris funkcionálját értelmezi, s ennek normája $\|a\|$. Az X minden korlátos lineáris funkcionálja egy és csak egy X-beli a elemből származik így.*

Ebből könnyen adódik a következő eredmény.

5.9.3 Tétel. *Egy Hilbert–térnek második duálisába való természetes leképezése arra való izometrikus izomorf leképezés.*