3. Elsőrendű differenciálegyenletek

3.1. Alapvető fogalmak

Differenciálegyenleten egy olyan egyenletet értünk, amelyben a keresett ismeretlen egy függvény, és a függvény valamelyik deriváltja is szerepel az egyenletben. Ha a keresett függvény egyváltozós, akkor *közönséges differenciálegyenletről* beszélünk, ha pedig többváltozós, és a keresett függvény egy vagy több parciális deriváltja is szerepel az egyenletben, akkor az egyenletet *parciális differenciálegyenletnek* hívjuk.

Egy közönséges differenciálegyenletet *n-edrendű differenciálegyenletnek* nevezzük, ha a keresett függvény egyenletben szereplő legmagasabb deriváltja az n-edik derivált. Egy n-edrendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja tehát

$$g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{3.1}$$

Itt y jelöli a keresett függvényt, amely x függvénye, azaz $y = y(x)$. A differenciálegyenletek elméletében és az alkalmazásokban is szokásos, hogy a keresett függvény változóját nem írjuk ki explicit módon az egyenletben. Mi is általában ezt a konvenciót használjuk. A (3.1) egyenletet úgy írtuk fel, hogy minden tagot egy oldalra rendezve a bal oldalon a független változó, x, valamint az ismeretlen y függvény, valamint annak deriváltjai, az n-edik deriválig bezárólag tetszőleges kifejezése áll. Egy konkrét egyenletben természetesen bármelyik tag (az $y^{(n)}$ kivételével) hiányozhat.

Megjegyezzük, hogy az alkalmazások nagy részénél az idő a független változó, így az x helyett a t változót is gyakran használjuk az egyenletben a független változó jelölésére. Ebben ésa következő fejezetben általában x-et fogunk használni, de a rendszerekre áttérve t-vel fogjuk mi is jelölni a független változót.

A (3.1) egyenletetet *implicit n-edrendű differenciálegyenletnek* hívjuk. Ha az egyenletből a benne szereplő legmagasabb deriváltat ki lehet fejezni, akkor egy

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

alakú egyenletet kapunk, amely az *explicit n-edrendű differenciálegyenlet* általános alakja. A továbbiakban szinte mindig explicit, illetve explicit alakra átalakítható egyenletekkel fogunk foglalkozni, ezért erre fogalmazzuk meg az alábbi fogalmakat.

Egy (3.2) explicit *differenciálegyenlet megoldása* egy olyan y függvény, amely egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon van értelmezve, és amelyet behelyettesítve az adott egyenletbe teljesül az egyenlet minden $x \in I$-re. Megoldás tehát definíció szerint mindig intervallumon van értelmezve.

3.1. Példa. Az

$$xy^{(3)} - (y'')^2 - x^5 + 1 = 0$$

egy harmadrendű implicit differenciálegyenlet, amelyet át lehet alakítani explicit alakra:

$$y^{(3)} = \frac{(y'')^2 + x^5 - 1}{x}.$$

A két egyenlet nem ekvivalens, hiszen az implicit egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, az explicit egyenletben pedig $x \neq 0$. □

3.2. Példa. Az

$$y'' = 2x + 1$$

egyenlet egy explicit másodrendű (triviális) differenciálegyenlet, amelyet könyen megoldhatunk kétszer integrálva az egyenlet mindkét oldalát.

$$y' = \int 2x + 1\, dx,$$

azaz

$$y' = x^2 + x + c_1.$$

Ezért

$$y = \int x^2 + x + c_1\,dx,$$

azaz

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2.$$

Megfigyelhető, hogy egymással ekvivalens átalakításokat végeztünk, azaz a fenti képlet az egyenlet összes megoldását tartalmazza, ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok. □

Az előbbi példa azt illusztrálja, hogy egy differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása van. Egy olyan képletet, amely tartalmaz n darab független konstanst (paramétert) a (3.1) (vagy (3.2)) n-edfokú differenciálegyenlet *általános megoldásának* hívunk, ha az a paraméterek (adott tartományokból vett) tetszőleges értékeire az egyenlet megoldását adja. Az előbbi példa végén kapott képlet tehát az egyenlet általános megoldását adja. Néha előfordul, hogy egy differenciálegyenletnek megadunk egy általános megoldását, de a kapott képlet nem tartalmazza az egyenlet összes megoldását. Az ilyen „hiányzó” megoldást *szinguláris megoldásnak* nevezzük.

Ha adott egy n-edfokú differenciálegyenlet és annak n db paramétert tartalmazó általános megoldásának képlete, akkor általában n db egyéb feltételt előírva határozhatjuk meg egyértelműen az n db paraméter értékét, azaz kapunk egyértelmű megoldást. Ezt leggyakrabban az

$$y(x_0) = z_1, \quad y'(x_0) = z_2, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = z_n \tag{3.3}$$

alakú feltételekkel szokás előírni. A (3.3) alakú feltételeket *kezdeti feltételeknek*, az x_0 számot *kezdeti időpontnak*, a megadott $z_1, z_2, \ldots, z_n$ számokat *kezdeti értékeknek* hívjuk. A (3.1) (vagy a (3.2)) egyenletet és a (3.3) kezdeti feltételt együtt *kezdeti érték feladatnak* nevezzük.

3.3. Példa. Tekintsük az

$$(e^y + 2y)y' = x^3$$

elsőrendű differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldala egy összetett függvény deriváltja, ami átalakítható az

$$(e^y + y^2)' = x^3$$

alakba. Így mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy

$$e^y + y^2 = \frac{x^4}{4} + c.$$

Ezt az algebrai egyenletet a differenciálegyenlet *implicit megoldásának* hívjuk. Ebből az egyenletből most nem tudjuk y-t, mint x függvényét kifejezni, azaz nem tudjuk a differenciálegyenlet *explicit megoldását* megadni. Viszont numerikus módszerrel adott x-re meg tudjuk határozni az implicit megoldás egyenletéből $y(x)$ tetszőleges pontosságú közelítő értékét. □

3.2. Szeparálható differenciálegyenletek

Az

$$y' = g(x)h(y) \tag{3.4}$$

alakú elsőrendű skaláris differenciálegyenletet *szeparálható differenciálegyenletnek* nevezzük.

A (3.4) egyenlet megoldásához *szeparáljuk a változókat*, azaz egy oldalra rendezzük az azonos változókat:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

majd integráljuk mindkét oldalt x szerint. Hogy pontosabban lássuk a számolást, kiírjuk az y keresett függvény argumentumát is a bal oldalon:

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,dx = \int g(x)\,dx.$$

A bal oldalon az y függvény nem ismert, mégis ki tudjuk az integrált számítani, ha az $u = y(x)$ új változót bevezetjük: használva a $du = y'(x)\,dx$ formális számolási szabályt kapjuk

$$\int \frac{1}{h(u)}\,du = \int g(x)\,dx. \tag{3.5}$$

A két oldalon az integrált kiszámítva, majd a bal oldalon az u változó helyébe y-t visszahelyettesítve kapjuk az egyenlet implicit megoldását.

Ezt az általános módszert a következő példával illusztráljuk:

3.4. Példa. Tekintsük az

$$y' = (x^2 + 1)y^3 \tag{3.6}$$

skaláris differenciálegyenletet. Ez szeparálható differenciálegyenlet, hiszen osztással szét tudjuk választani, azaz szeparálni tudjuk a változókat:

$$\frac{y'}{y^3} = x^2 + 1.$$

Itt a bal oldal csak y-tól, a jobb oldal pedig csak x-től függ. Integráljuk mindkét oldalt x szerint:

$$\int \frac{y'(x)}{y^3(x)}\,dx = \int x^2 + 1\,dx.$$

Használva az $u = y(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{u^3}\,du = \int x^2 + 1\,dx,$$

azaz a határozatlan integrálokat kiszámítva

$$-\frac{1}{2u^2} + c_1 = \frac{x^3}{3} + x + c_2.$$

A két, egymástól független c_1 és c_2 kostansok helyett bevezethetjük a $c = c_2 - c_1$ konstanst, és így

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{x^3}{3} + x + c.$$

Ebből látható, hogy ha minkét oldalt integáljuk, elegendő az csak egyik oldalon (bármelyiken) írni a c konstanst. Az $u = y$ helyettesítést elvégezve, és a szokásos írásmódnak megfelelően megint elhagyva a keresett y függvény argumentumát kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + x + c$$

az implicit megoldása az egyenletnek. Most ki tudjuk y-t is fejezni az implicit alakból:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{-2x^3/3 - 2x - 2c}}$$

az egyenlet explicit általános megoldása. □

Most tekintsük újra a (3.4) egyenletet. Ha az egyenlet megoldásának a levezetését megvizsgáljuk alaposabban, kaphatunk egy gyakorlatban használható formális számolási szabályt. Először is írjuk fel az y' derivált jelölés helyett a klasszikus $y' = \frac{dy}{dx}$ alakot. Ekkor az egyenlet

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{3.7}$$

Tekintsük formálisan a bal oldalt törtként, és most így szeparáljuk a változókat:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx.$$

Hangsúlyozni kell, hogy ez az egyenlet csak egy formális egyenlet, nem rendelünk hozzá precíz matematikai tartalmat. Pontosabban fogalmazva differenciálegyenletes könyvekben szokás egy egyenletet ilyen alakban felírni, ekkor a jelölésen a (3.7) egyenletet kell értelmezni. A formális írásmódnak tényleges jelentése akkor lesz, ha mindkét oldalra „odaírunk" egy-egy integráljelet:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx.$$

Ekkor a bal oldalon most egy y-tól függő kifejezés y szerinti integrálja áll, amit kiszámíthatunk (konkrét megadott h esetén). Vegyük észre, hogy ez az egyenlet ekvivalens a (3.5) egyenlettel, csak ott y helyett u változót használunk a bal oldalon a számolásban, amit a következő lépésben vissza is helyettesítettünk y-ra.

A formális számolást használva ismételjük meg a 3.4. Példát.

3.5. Példa. Tekintsük újra a (3.6) egyenletet, de most ahogy azt a formális számolásnál használni szoktuk, a derivált jelölésére a „klasszikus" alakot használjuk:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)y^3.$$

Szeparáljuk a változókat

$$\frac{dy}{y^3} = (x^2+1)\,dx,$$

majd formálisan „integráljuk mindkét oldalt":

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int (x^2+1)\,dx.$$

Az integrálokat kiszámítva kapjuk ugyanazt az implicit megoldást, amit a 3.4. példában hosszabb számolással kaptunk meg:

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + x + c.$$

□

Most tekintsünk egy harmadik lehetséges számolási módszert is a (3.4) egyenlet megoldására. Tegyük fel, hogy adott egy

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.8}$$

kezdeti feltétel, és tekintsük a (3.4)-(3.8) kezdeti érték feladatot. Most is először szeparáljuk a változókat a (3.4) egyenletekben

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x),$$

de most mindkét oldal határozott integrálját vesszük x_0-tól x-ig. Mivel x szerepel az integrál felső határában, az integranduszban x helyett egy másik betűt használunk a változó jelölésére:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Ekkor a bal oldalon az $u = y(t)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{h(u)}\,du = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt,$$

azaz a kezdeti feltételt felhasználva

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,du = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Most is nézzünk egy példát a módszer szemléltetésére:

3.6. Példa. Tekintsük az

$$y' = \frac{e^{x^2}}{y^2}, \qquad y(1) = 2$$

kezdeti érték feladatot. Szeparálva a változókat kapjuk

$$y^2 y' = e^{x^2}.$$

Mindkét oldal x szerinti határozatlan integrálját véve kapjuk

$$\int y^2 y'\,dx = \int e^{x^2}\,dx.$$

Ezzel az a gond, hogy a jobb oldalon álló integrálnak nincs elemi függvényekkel felírható primitív függvénye, így nem tudjuk az integrált kiszámítani. Persze megadhatjuk a választ az

$$\frac{y^3}{3} = \int e^{x^2}\,dx$$

implicit alakban is. Ez az egyenlet általános megoldása, hiszen a határozatlan integrálban implicit módon egy c tetszőleges konstans is szerepel. De ilyen alakban nem tudjuk a megadott kezdeti feltételt felhasználni, így a kezdeti érték feladat megoldását sem tudjuk megadni.

Ha határozatlan integrál helyett a fent vázolt módszerrel határozott integrállal számolunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_1^y t^2\,dt = \int_0^x e^{t^2}\,dt,$$

amiből az

$$\frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

formula adódik, amiből ráadásuk ki is tudjuk fejezni y-t:

$$y = \sqrt[3]{1 + 3\int_0^x e^{t^2}\,dt}.$$

Ez a kezdeti érték feladat megoldása. Ez sem elemi függvény alakjában fejezi ki a megoldást, viszont a határozott integrált numerikus módszerekkel tetszőleges pontossággal ki lehet számolni, így ez a képlet is a gyakorlat szempontjából szinte olyan, mintha elemi függvénnyel lenne megadva a megoldás. □

3.3. Elsőrendű skaláris lineáris differenciálegyenletek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Az

$$a(x)y' + b(x)y = g(x), \qquad x \in I \tag{3.9}$$

alakú egyenleteket *elsőrendű skaláris lineáris differenciálegyenleteknek* hívjuk. Abban az esetben, amikor g azonosan nulla, az egyenletet *homogén*, ellenkező esetben pedig, azaz amikor $g \not\equiv 0$, *inhomogén* egyenletnek nevezzük. Az elsőrendű homogén lineáris egyenletek általános alakja tehát

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \qquad x \in I. \tag{3.10}$$

3.7. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 a (3.10) homogén lineáris egyenlet megoldása I-n. Ekkor $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ is megoldása a (3.10) homogén egyenletnek I-n minden $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$-re.*

Bizonyítás: Helyettesítsük be az $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ függvényt (3.10) bal oldalába. Ekkor $x \in I$-re

$$\begin{aligned} a(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + b(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= a(x)\alpha_1 y_1' + a(x)\alpha_2 y_2' + b(x)\alpha_1 y_1 + b(x)\alpha_2 y_2 \\ &= \alpha_1\Big(a(x)y_1' + b(x)y_1\Big) + \alpha_2\Big(a(x)y_2' + b(x)y_2\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

3.8. Következmény. *Az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér (vektortér).*

3.9. Példa. Tekintsük az

$$y' + 2xy = 0$$

homogén lineáris egyenletet. Vegyük észre, hogy az egyenlet szeparálható:

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx,$$

amit integrálva kapjuk

$$\ln|y| = -x^2 + C,$$

azaz

$$y = \pm e^{-x^2+C} = ce^{-x^2},$$

ahol $c = \pm e^C$. Látható, hogy a fenti képlettel $c = 0$-ra is megoldást kapunk, hiszen a konstans 0 függvény is teljesíti az eredeti egyenletet. □

A fenti példában látott módszer általánosan alkalmazható. Tekintsük a (3.10) egyenlet explicit alakját, azaz tegyük fel, hogy $a(x) \neq 0$ az I intervallumon. Ekkor az $r(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ jelölést bevezetve a (3.10) egyenlet az

$$y' + r(x)y = 0, \qquad x \in I \tag{3.11}$$

alakban írható fel. Ennek az egyenletnek az általános megoldását az alábbi tételben adjuk meg.

3.10. Tétel. *A (3.11) elsőrendű lineáris homogén egyenlet általános megoldása*

$$y_H = ce^{-\int r(x)\,dx}, \qquad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Bizonyítás: A (3.12) homogén egyenlet egy szeparálható differenciálegyenlet is, így alakítsuk át az

$$\frac{dy}{y} = -r(x)\,dx$$

alakba. Ekkor integrálva az egyenletet

$$\ln|y| = -\int r(x)\,dx + C$$

adódik. A határozatlan integrál jelölésében egyébként implicit módon beleértett C konstanst most explicit módon kiírtuk. Mindkét oldalra alkalmazva az exponenciális függvényt kapjuk, hogy

$$|y| = e^{-\int r(x)\,dx + C} = e^C e^{-\int r(x)\,dx}.$$

A $c = \pm e^C$ jelöléssel megkaptuk a (3.12) formulát, de a fenti számolás szerint $c \neq 0$. Másrészt ha $c = 0$, akkor a (3.12) formulából az $y \equiv 0$ függvényt kapjuk, amely szintén megoldása a (3.12) egyenletnek. □

3.11. Következmény. *Az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak lineáris tere egydimenziós.*

3.12. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 a (3.9) inhomogén lineáris egyenlet megoldásai I-n. Ekkor $y_1 - y_2$ megoldása a (3.10) homogén egyenletnek I-n.*

Bizonyítás: Helyettesítsük be az $y = y_1 - y_2$ függvényt (3.9) bal oldalába. Ekkor $x \in I$-re

$$\begin{aligned}
a(x)(y_1 - y_2)' + b(x)(y_1 - y_2) &= a(x)y_1' - a(x)y_2' + b(x)y_1 - b(x)y_2 \\
&= a(x)y_1' + b(x)y_1 - \Big(a(x)y_2' + b(x)y_2\Big) \\
&= g(x) - g(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

3.13. Tétel. *Legyen y_1 a (3.9) inhomogén és y_2 a (3.10) homogén lineáris egyenlet megoldása I-n. Ekkor $y_1 + y_2$ megoldása a (3.9) inhomogén egyenletnek I-n.*

Bizonyítás: Helyettesítsük be az $y = y_1 + y_2$ függvényt (3.9) bal oldalába. Ekkor $x \in I$-re

$$\begin{aligned} a(x)(y_1+y_2)' + b(x)(y_1+y_2) &= a(x)y_1' - a(x)y_2' + b(x)y_1 - b(x)y_2 \\ &= a(x)y_1' + b(x)y_1 + \Big(a(x)y_2' + b(x)y_2\Big) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

□

A (3.9) inhomogén egyenlet egy (tetszőlegesen) rögzített megoldását az egyenlet *partikuláris megoldásának* nevezzük.

3.14. Következmény. *A (3.9) inhomogén egyenlet általános megoldása felírható, a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként:*

$$y_{IH} = y_H + y_{IP}.$$

A gyakorlatban a 3.14. Következmény helyett az ú.n. *integrálótényező módszerét* alkalmazhatjuk az inhomogén egyenlet megoldására. Az ötlet egy példán mutatjuk meg először.

3.15. Példa. Tekintsük az

$$xy' + 2y = x^3$$

inhomogén lineáris egyenletet. Vegyük észre, hogy ha x-szel beszorozzuk az egyenletet, akkor a bal oldalon egy szorzat deriváltja jelenik meg:

$$x^2y' + 2xy = x^4,$$

azaz

$$(x^2y)' = x^4.$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk

$$x^2y = \frac{x^5}{5} + c,$$

azaz

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}.$$

Megjegyezzük, hogy a megoldás képlete természetes módon két függvény összege: $\frac{x^3}{5}$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, $\frac{c}{x^2}$ pedig a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása. □

Tekintsük a (3.11) egyenlethez kapcsolódó

$$y' + r(x)y = f(x), \qquad x \in I \tag{3.13}$$

inhomogén egyenletet. Olyan $\mu(x)$ integrálótényezőt keresünk, amellyel beszorozva az egyenletet a bal oldalon egy szorzat, mégpedig $\mu(x)y$ deriváltja jelenik meg. Ehhez hasolítsuk össze a beszorzott

$$\mu(x)y' + \mu(x)r(x)y = \mu(x)f(x)$$

egyenlet és a

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + \mu'(x)y$$

azonosság bal oldalait. Látható, hogy a két oldal pontosan akkor lesz azonos, ha a

$$\mu'(x) = \mu(x)r(x)$$

összefüggés teljesül. Ez pedig egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet a keresett μ függvényre, amelynek egy lehetséges megoldása a (3.12) képlet szerint

$$\mu(x) = e^{\int r(x)\,dx}. \tag{3.14}$$

Ekkor tehát a μ-vel való szorzás után a (3.13) egyenlet alakja

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)f(x),$$

amiből

$$\mu(x)y = \int \mu(x)f(x)\,dx,$$

azaz

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)f(x)\,dx$$

adódik. Ide visszahelyettesítve μ képletét, és a könnyebb olvashatóság érdekében megint kiírva a fenti határozatlan integrálban szereplő konstanst explicit módon, kapjuk, hogy

$$y = e^{-\int r(x)\,dx}c + e^{-\int r(x)\,dx} \int e^{\int r(x)\,dx} f(x)\,dx. \tag{3.15}$$

Legyen $x_0 \in I$. Határozott integrált használva a fenti képletből rögtön következik, hogy

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} r(t)\,dt}c + e^{-\int_{x_0}^{x} r(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} r(u)\,du} f(t)\,dt.$$

Az $x = x_0$ helyettesítésből rögtön adódik, hogy ekkor $y(x_0) = c$ következik. Ezért a (3.13) inhomogén egyenlet

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti értékhez tartozó megoldásának alakja

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int_{x_0}^{x} r(t)\,dt}y_0 + e^{-\int_{x_0}^{x} r(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} r(u)\,du} f(t)\,dt \\ &= e^{-\int_{x_0}^{x} r(t)\,dt}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x}^{t} r(u)\,du} f(t)\,dt, \qquad x \in I. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A (3.16) formulát *konstans variációs formulának* hívjuk.

3.16. Példa. Tekintsük az

$$xy' - 2x^2y = x^2, \qquad y(0) = -2$$

kezdeti érték feladatot. Alkalmazzuk az integrálótényező módszerét! Ehhez először alakítsuk át explicit alakra az egyenletet, azaz osszuk el x-szel mindkét oldalt:

$$y' - 2xy = x \tag{3.17}$$

Alkalmazzuk a (3.14) képletet, azaz tekintsük a

$$\mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

integrálótényezőt. A (3.17) egyenletet beszorozva $\mu(x)$-szel kapjuk az

$$(e^{-x^2}y)' = xe^{-x^2}$$

egyenletet, amiből integrálással

$$e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

azaz

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}.$$

Használva a kezdeti feltételt

$$-2 = -\frac{1}{2} + c,$$

amiből

$$c = -\frac{3}{2}.$$

A megoldás tehát

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{x^2}.$$

□

3.4. Alkalmazások

Ebben a szakaszban minden példánkban az idő a független változó, így t fogja jelölni a keresett függvény változóját.

3.17. Példa. A tórium 234-es izotóp a megfigyelések szerint az aktuális tömegével arányos sebességgel bomlik el. Adjuk meg a tórium tömegének képletét az idő függvényeként, ha tudjuk, hogy 100 mg anyag egy hét alatt 82.04 mg anyaggá bomlik el! Keressük meg, hogy mennyi idő alatt bomlik el a kezdeti anyagmennyiség felére!

Jelölje $Q(t)$ a tórium tömegét (mg-ban) a t időpontban. Mérjük az időt napokban. Ekkor a feltétel szerint $Q(0) = 100$ és $Q(7) = 82.04$. A bomlás sebessége a tömeg idő szerinti deriváltja, azaz a feltétel szerint

$$Q'(t) = -kQ(t)$$

teljesül, ahol $k > 0$ egy konstans paraméter. Ez egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, amely megoldása

$$Q(t) = e^{-kt}Q(0) = 100e^{-kt}.$$

k értékét megkapjuk a $Q(7) = 82.04$ másik feltételt felhasználva:

$$100e^{-7k} = 82.04,$$

azaz

$$k = -\frac{\ln 0.8204}{7} \approx 0.02828.$$

Jelölje T azt időt, amennyi a kezdeti anygmennyiség feleződéséhez kell (az ú.n. *felezési időt*):

$$\frac{1}{2}Q(0) = e^{-kT}Q(0).$$

Látható, hogy T értéke független a kezdeti anyagmennyiségtől, csak k-tól, azaz a radioaktív anyagra jellemző állandó:

$$T = \frac{\ln 2}{k} \approx 24.5 \text{ nap}.$$

□

3.18. Példa. Tegyük fel, hogy egy bankszámlára S_0 összeget fizetünk be kezdetben, és a számla az év végén r %-ot kamatozik. Ekkor az év végén

$$S_0 + S_0 r = S_0(1+r)$$

összeg lesz a bankszámlán. A második év végére ehhez hasonlóan

$$S_0(1+r) + S_0(1+r)r = S_0(1+r)^2$$

összeg lesz a számlán. Könnyen látható tehát, hogy t év elteltével

$$S_0(1+r)^t$$

lesz a számla értéke.

Tegyük fel most, hogy a bank évi r % kamatot évi n alkalommal számít kamatot. Azaz az első időszak végén, $\frac{1}{n}$ év elteltével a bank $\frac{r}{n}$ % kamatot számít. Ekkor

$$S_0 + S_0\frac{r}{n} = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

összeg lesz a számlán. A 2. periódus végén, $\frac{2}{n}$ év elteltétvel újra $\frac{r}{n}$ % kamattal növekszik a számlaegyenleg, azaz

$$S_0\left(1+\frac{r}{n}\right) + S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)\frac{r}{n} = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$$

lesz. Ellenőrizhető, hogy a k-adik periodus végén

$$S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^k,$$

így a t-edik év végén (tn cikus elteltével)

$$S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{tn}$$

lesz az egyenleg.

Analízis tanulmányokból ismert, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{tn} = e^{rt},$$

és a sorozat monoton növekvő módon konvergál minden t-re.

Ezért egy olyan bankszámlát, ahol a t időpontban a számla egyenlegét az

$$S(t) = S_0 e^{rt}$$

képlettel számítják ki, r %-os *folyamatos kamatozású bankszámlának* hívjuk. Egy folyamatos kamatozású bankszámlát úgy is lehetne definiálni, hogy amelyre az

$$S'(t) = rS(t)$$

összefüggés teljesül, azaz ahol a pénzmennyiség növekedésének a sebessége arányos az aktuális pénzösszeggel. Látható, hogy ez az egyenlet a radioaktív bomlás egyenletével azonos, csak itt az arányossági tényező, $r > 0$.

Tegyük fel, hogy egy 5 %-os ($r = 0.05$) folyamatos kamatozású bankszámlára $S_0 = 200000$ Ft-ot fizetünk be, és konstans sebességgel évi $k = 50000$ Ft-ot veszünk fel (például naponta 50000/365 Ft-ot veszünk fel). Számítsuk ki az egyenleg értékét $t = 3$ év múlva!

A kamatozás miatt növekszik, a konstans sebességű pénzfelvétel miatt pedig csökken a pénzösszeg. A két hatás összeadódik, így S-et a következő egyenlet határozza meg:

$$S'(t) = rS(t) - k \tag{3.18}$$

Ez egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet, amelyet az integrálótényező módszerével könnyen megoldhatunk:

$$S'(t) - rS(t) = -k,$$

ezért a $\mu(t) = e^{-rt}$ szorzótényezővel beszorozva

$$(e^{-rt}S(t))' = -ke^{-rt},$$

azaz

$$e^{-rt}S(t) = \frac{k}{r}e^{-rt} + c.$$

Az általános megoldás tehát

$$S(t) = ce^{rt} + \frac{k}{r}.$$

Az $S(0) = S_0$ kezdeti feltételt használva $c = S_0 - \frac{k}{r}$, azaz

$$S(t) = \left(S_0 - \frac{k}{r}\right)e^{rt} + \frac{k}{r}.$$

Ezért $S(3) = -800000e^{0.15} + 1000000 = 70532.6$.

Mivel $c < 0$, ezért véges idő alatt lenullázódik a pénzösszeg a bankszámlán. □

3.19. Példa. Tegyük fel, hogy egy tank kezdetben ($t = 0$ időpontban) Q_0 kg sót tartalmaz 100 liter sóoldatban. Tegyük fel, hogy 0.2 kg/l sóoldat folyik be a tartályba 3 l/perc sebességgel, és a jól elkevert sóoldat ugyanilyen sebességgel távozik a tartályból. Adjuk meg a sómennyiség tömegét az idő függvényeként! Adjuk meg, hogy mennyi só lesz a tartályban hosszú idő elteltével!

Jelölje $Q(t)$ a t időpontban a tartályban levő só tömegét. A sómennyiség változásának a sebessége a tartályba bekerülő új sómennyiség növekedési sebességének (0.2 kg/l · 3 l/perc=0.6 kg/perc) és a távozó sómennyiség sebességének (Q(t)/100 kg/l · 3 l/perc) különbsége:

$$Q'(t) = 0.6 - \frac{3}{100}Q(t)$$

Ha a lineáris egyenletet megoldjuk, a

$$Q(t) = 20 + (Q_0 - 20)e^{-0.03t}$$

képletet kapjuk. Ennek határértéke $t \to \infty$-re 20, azaz hosszabb idő elteltével közel 20 kg só lesz a tartályban. □

3.20. Példa. Tegyük fel, hogy egy viszkózus folyadékban elejtünk egy m tömegű testet, és a testre a sebességével arányos közegellenállási erő hat mozgás közben. Adjuk meg a test sebességét és elmozdulását az idő függvényeként!

Newton II. törvénye szerint az $F = ma$ összefüggés teljesül, ahol F a testre ható erők eredője, $a = v'$ a test gyorsulása, és $v = v(t)$ a test sebessége. Tegyük fel, hogy olyan koordinátarendszerben vizsgáljuk a test mozgását, ahol az origó az a pozíció, ahonnan a mozgás indul, és a függőleges koordinátarendszer pozitív iránya lefele mutat. Ekkor a súlyerő mindig pozitív irányba mutat. A mozgás során a test lefele, azaz pozitív irányba mozog, így a közegellenállási erő a mozgás irányával ellentétes irányba, negatív irányba mutat. Ezért a mozgásegyenlet

$$mv' = mg - kv.$$

Ez egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet v-re. Általános megoldása

$$v(t) = ce^{-kt/m} + \frac{mg}{k}.$$

A feltétel szerint nyugalomból indul a mozgás, azaz a $v(0) = 0$ kezdeti feltétel határozza meg c-t, amiből

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

adódik. Integrálva v-t megkaphatjuk a test $x(t)$ elmozdulását:

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)dt = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-kt/m} + C.$$

C értékét az $x(0) = 0$ kezdeti értéket felhasználva kapjuk, azaz $C = -\frac{m^2g}{k^2}$, és így

$$x(t) = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-kt/m} - 1\right)$$

a test elmozdulása az idő függvényeként. □

3.21. Példa. Egy m tömegű rakétát függőlegesen fellövünk v_0 kezdeti kezdősebességgel a Föld felszínéről. Tegyük fel, hogy a közegellenállástól eltekintünk, de figyelembe vesszük, hogy a Föld gravitációs vonzóereje a Földtől távolodva változik. Határozzuk meg a rakéra sebességét a mozgás közben! Határozzuk meg, milyen magasra repül a rakéta, és mi az a kezdősebesség, amelynél nem esik vissza a rakéta a Földre!

A Földet modellezzük úgy, hogy a teljes tömege a középpontban helyezkedik el. Legyen R a Föld sugara. A koordinátarendszert függőlegesnek választjuk, az origó legyen a Föld felszinén, és a pozitív irány mutasson felfele. Jelölje x a test elmozdulását.

Ismert, hogy a két test között ható vonzóerő a távolság négyzetével fordított arányban csökken. Azaz x magasságban a testre ható súlyerő (azaz a test és a Föld tömegközéppontja közötti vonzerő)

$$w(x) = \frac{K}{(x+R)^2}$$

alakú, ahol K egy arányossági tényező. Tudjuk, hogy a Föld felszínén az m tömegű test súlya mg, azaz $w(0) = mg$, amiből $K = mgR^2$. Ezért az

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

összefüggést használhatjuk.

Newton II. törvénye szerint a test mozgásegyenlete

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \qquad v(0) = v_0. \tag{3.19}$$

A (3.19) egyenlettel az a probléma, hogy három ismeretlent is tartalmaz: v és x mindketten a t idő függvényei. Természetesen helyettesíthetjük v-t x'-vel, de ekkor egy másodrendű nemlineáris egyenletet kapnánk, amit nem tudunk megoldani.

A következő ötlettel tudjuk a problémát megoldani: Tegyük fel, hogy a sebességet tekinthetjük a magasság függvényeként. Ekkor a láncszabály szerint

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v.$$

Így a (3.19) egyenlet átalakítható az

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

alakba, ahol $v = v(x)$ alakú megoldást keresünk most. Ez így egy szeparálható differenciálegyenlet, ezért

$$\int v\,dv = -\int \frac{gR^2}{(x+R)^2}\,dx$$

teljesül, amiből

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{x+R} + c.$$

Mivel $t = 0$-ra $x = 0$, ezért a $v(0) = v_0$ feltételt felhasználva kapjuk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{x+R} + \frac{v_0^2}{2} - gR,$$

azaz

$$v = \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR}.$$

Pozitív előjelet a felfele történő mozgás közben, a negatív előjelet pedig a visszatérés közben használhatunk v képletében. Meg tudtuk tehát adni a rakéta sebességét a magasság (de nem az idő) függvényeként.

A legmagasabb távolságban a közvetlen visszaesés előtt, azaz akkor van a rakéta, amikor a sebessége 0. Ebből kifejezhetjük az $x_{\max}$ maximális magasságot:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}.$$

Ha $v_0 < \sqrt{2gR}$, akkor ilyen maximális magasság mindig létezik, azaz a test sebessége bizonyos magasságban 0 lesz. A

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.1 \text{ km/sec}$$

lesz az a kritikus kezdősebesség, az ú.n. *szökési sebesség*, amikor v sosem lesz 0, azaz a rakéta nem esik vissza a Földre. □

3.22. Példa. Jelölje $P(t)$ egy biológiai populáció egyedszámát a t időpontban. Ez a populáció lehet egy pédául egy ország lakossága, egy baktériumtenyészetben a baktériumok száma, egy tóban bizonyos halfajta darabszáma, stb. Megszokott a biológiai modelleknél, hogy az egyedszámot valós függvénynek tekintjük.

Egy gyakran elfogadott feltételezés, hogy a populációban az egységnyi idő alatt született és meghalt egyedek száma arányos a populáció egyedszámával: jelölje r_{sz} és r_{h} ezeket az arányossági tényezőket, az ú.n. *születési* illetve *halálozási rátát*, és legyen $r = r_{\text{sz}} - r_{\text{h}}$. Ekkor a

$$P' = rP, \qquad P(0) = P_0 \tag{3.20}$$

egyenlet írja le a populáció egyedszámának megváltozását. Ennek megoldása $P(t) = P_0 e^{rt}$, amely exponenciálisan növekszik a $+\infty$-be, ha $t \to \infty$, ha a születési ráta nagyobb, mint a halálozási ráta, azaz $r > 0$; illetve exponenciálisan tart a 0-hoz $t \to \infty$ esetében, ha $r < 0$. A (3.20) differenciálegyenletet Malthus alkalmazta először populációs modellekben 1798-ban.

Tegyük fel most, hogy folyamatos emigráció van a populációból, és az emigráció sebessége konstans e. Ekkor a modellünk a

$$P' = rP - e, \qquad P(0) = P_0$$

inhomogén lineáris egyenlettel írható le. Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet azonos a (3.18) egyenlettel, azaz a megoldása

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{e}{r}\right) e^{rt} + \frac{e}{r}.$$

Itt kihalhat a populáció $r > 0$ esetében is, ha az emigráció kellően nagy: $e > P_0 r$. Ha $e = P_0 r$, akkor pedig a populáció egyedszáma konstans marad.

A gyakorlatban exponenciális növekedést hosszabb időintervallumon nem figyelhetünk meg, hiszen például a környezetben rendelkezésre álló táplálékmennyiség nem alkalmas akármekkora populáció eltartására. A (3.20) egyenletnél realisztikusabb modellt kapunk, ha azt tesszük fel, hogy az egyedek születésének sebessége arányos a populáció számával (mindig a populáció adott százaléka szaporodik), de a halálozás sebessége a populáció egyedszámának négyzetével arányos. Ez utóbbi feltevést azzal lehet indokolni, hogy minden egyed „harcban áll" a túlélésért a többi egyeddel, és a harcok száma $P(P-1) \approx P^2$. Ekkor a Mathus modell helyett a

$$P' = rP - sP^2 \tag{3.21}$$

ú.n. *logisztikus differenciálegyenlet* írja le a populáció megváltozását. Ezt a modellt Verhulst vezette be 1838-ban. Vezessük be a $K = r/s$ konstanst. Ekkor az egyenletet a

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

alakban is felírhatjuk. Ez egy szeparálható differenciálegyenlet, átrendezve kapjuk

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/K)} = \int r\, dt.$$

A bal oldali integrált parciális törtekre bontással számíthatjuk ki:

$$\int \frac{dP}{P(1-P/K)} = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K}\frac{1}{1-\frac{P}{K}}\right) dP = \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{K}\right| = \ln\left|\frac{P}{1-\frac{P}{K}}\right|.$$

Ezért

$$\ln\left|\frac{P}{1-\frac{P}{K}}\right| = rt + C,$$

amiből

$$\frac{P}{1-\frac{P}{K}} = ce^{rt},$$

ahol $c = \pm e^C$. Ebből a $P(0) = P_0$ kezdeti feltételt használva

$$c = \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}}$$

következik. Ezt visszahelyettesítve az előző képletbe rövid számolással ellenőrizhető, hogy

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}.$$

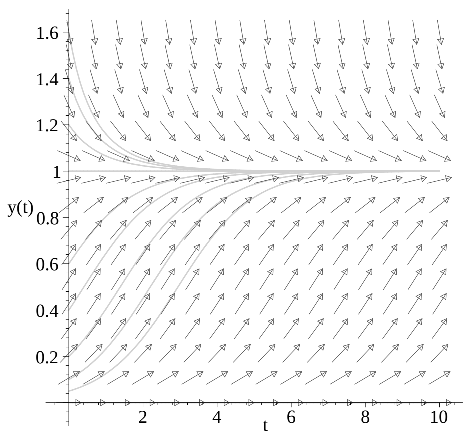
Erről látható, hogy $P(t) \to K$, ha $t \to \infty$. A K konstanst a környezet eltartóképességének szokás hívni, hiszen ha $0 < P_0 < K$, akkor $0 < P(t) < K$ teljesül minden $t > 0$-ra. $\square$

3.5. Elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletek általános elmélete

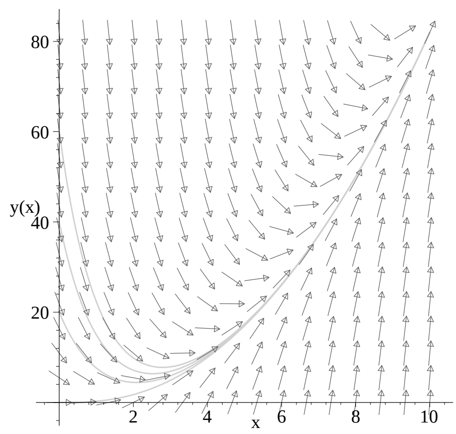
Egy nemlineáris általános elsőrendű explicit differenciálegyenlet általános alakja

$$y' = f(x, y). \tag{3.22}$$

Az egyenlet jobb oldalát adott x és y-ra nyilván ki tudjuk számítani. Ez megadja az adott (x, y) ponton átmenő megoldás érintőjének iránytangensét. Adott f esetén ezeket az érintőket szemléltethetjük úgy, hogy felveszünk egy rácsot a síkon, és az adott rácspontokban kirajzolunk adott iránytangensű egyenes szakaszokat. Egy ilyen ábrát a differenciálegyenlet *iránymezőjének* hívunk. A differenciálegyenlet megoldásai olyan görbék, amelyek „simulnak" a differenciálegyenlet iránymezőjéhez, azaz a görbe érintője egy adott pontban megegyezik a vektormező adott ponthoz tartozó irányával. A 3.1. Ábrán a (3.21) $r = 1$, $K = 1$ paraméterekhez tartozó logisztikus differenciálegyenlet, a 3.2. Ábrán pedig az $y' = -y + x^2$ differenciálegyenlet iránymezője és néhány megoldásgörbéje látható. Az iránymező ismeretében sokszor látható, hogy milyen alakúak az egyenlet megoldásgörbéi. Például az $y' = y - y^2$ logisztikus egyenlet 0 és 1 közötti kezdeti értékekből indított megoldásai monoton növekedve tartanak 1-hez, ha pedig a kezdeti érték 1-nél nagyobb, akkor a hozzá tartozó megoldások monoton csökkenve tartanak 1-hez.



3.1. ábra. $y' = y - y^2$ iránymezője



3.2. ábra. $y' = -y + x^2$ iránymezője

Rendeljük hozzá az

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.23}$$

kezdeti feltételt a (3.22) egyenlethez. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van egy $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ téglalapon.

Megmutatható a differenciálegyenletek megoldásai létezését garantáló alábbi egzisztencia tétel.

3.23. Tétel (Peano). *Legyen $f : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény amely maximumát M jelöli, azaz $M = \max\{|f(x, y)| : |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}$. Legyen $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Ekkor a (3.22)-(3.23) kezdeti érték feladatnak létezik legalább egy megoldása az $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ intervallumon.*

3.24. Példa. Tekintsük az

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot! Ez egy szeparálható egyenlet:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx,$$

így integrálva
$$2\sqrt{y} = x + c.$$
Az egyenlet általános megoldása tehát
$$y = \frac{1}{4}(x+c)^2.$$
A kezdeti feltételt használva kapjuk, hogy $c = 0$, azaz
$$y = \frac{1}{4}x^2$$
megoldása a kezdeti érték feladatnak. Másrészt látható, hogy az $y = 0$ konstans függvény szintén megoldása a kezdeti érték feladatnak. Továbbá könnyen látható, hogy bármely $C \geq 0$-ra az
$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C, \\ \frac{1}{4}(x-C)^2, & x > C \end{cases}$$
függvény is megoldása a kezdeti érték feladatnak. □

Azt mondjuk, hogy az $f\colon [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \to \mathbb{R}$ függvény *Lipschitz-tulajdonságú* vagy *Lipschitz-folytonos*, ha létezik olyan $L \geq 0$ konstans, hogy
$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y-\tilde{y}|, \qquad x \in [x_0-a, x_0+a], \quad y, \tilde{y} \in [y_0-b, y_0+b].$$

3.25. Tétel. *Legyen az $f\colon [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és Lipschitz-tulajdonságú. Legyen $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, ahol $M = \max\{|f(x,y)|\colon |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\}$. Ekkor a (3.22)-(3.23) kezdeti érték feladatnak pontosan egy megoldása létezik az $I = [x_0-h, x_0+h]$ intervallumon.*

3.6. Elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Ebben a szakaszban elsőrendű explicit differenciálegyenlet-rendszerekkel, azaz
$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$
alakú rendszerekkel foglalkozunk, ahol $y_i = y_i(x)$ keresett függvények. Az egyenletrendszerhez az
$$y_1(x_0) = z_1, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = z_n$$
kezdeti feltételeket rendeljük hozzá. Használva az
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$
vektoriális jelöléseket, a differenciálegyenlet-rendszerünket az
$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{3.24}$$
alakban írhatjuk fel röviden. Az egyenlethez tartozó kezdeti feltétel
$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{z}, \tag{3.25}$$
ahol $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$, $\quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaz, és $(x_0, \mathbf{z}) \in U$.

3.26. Tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaz, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, amely minden komponense folytonosan parciálisan differenciálható az első változó kivételével minden változójára vonatkozóan. Ekkor minden $(x_0, \mathbf{z}) \in U$ esetén létezik olyan $h > 0$, hogy a (3.24)-(3.25) kezdeti érték feladatnak létezik egyértelmű megoldása az $[x_0 - h, x_0 + h]$ intervallumon.*

Most megmutatjuk, hogy a (3.2) alakú n-edrendű skaláris differenciálegyenletek, illetve a hozzá tartozó (3.2)-(3.3) kezdeti érték feladat ekvivalens egy (3.24)-(3.25) alakú elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel. Vezessük be az

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad y_3(x) = y''(x), \quad \dots \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

változókat. Látható, hogy teljesülnek az

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{aligned}$$

egyenletek. Definiáljuk az

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

vektorokat. Ekkor $\mathbf{y}$ megoldása a (3.24)-(3.25) kezdeti érték feladatnak.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és legyenek $p_{n-1}, \dots, p_0 \colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tekintsük az

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x), \qquad x \in I \tag{3.26}$$

n-edrendű inhomogén lineáris skaláris differenciálegyenletet és a hozzá tartozó

$$y(x_0) = z_1, \quad y'(x_0) = z_2, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = z_n \tag{3.27}$$

kezdeti feltételt, ahol $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Az előbbiek szerint a skaláris egyenletet átírhatjuk rendszer alakba, ahol most

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ -p_{n-1}(x) y_n - \dots - p_1(x) y_2 - p_0(x) y_1 + f(x) \end{pmatrix}.$$

A 3.26. Tételt alkalmazva a kapott (3.24)-(3.25) kezdeti érték feladatra rögtön következik az alábbi eredmény.

3.27. Tétel. *Legyenek $p_{n-1}, \dots, p_0, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $x_0 \in I$. Ekkor a (3.26) egyenletnek bármely (3.27) kezdeti feltételhez létezik pontosan egy megoldása az I intervallumon.*