25. fejezet

Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció fogalma és alaptulajdonságai

D 25.1 A $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvény **Laplace-transzformáltjának** nevezzük és $\mathcal{L}\{f\}$-fel jelöljük azt a komplex függvényt (**D 24.1**), amely

a) valamely p helyen akkor és csak akkor van értelmezve, ha az

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

improprius integrál létezik, és

b) minden ilyen p helyen függvényértékként éppen az előbbi improprius integrál értékét veszi fel.

Az $\mathcal{L}\{f\}$ függvény p helyen felvett értékét $\mathcal{L}\{f;p\}$-vel jelöljük. (Szokásos az $F = \mathcal{L}\{f\}$, $F(p) = \mathcal{L}\{f;p\}$ és $f(t) \to F(p)$ rövid írásmód is.)

M 25.2 Bevezetjük az $1(t)$ **egységfüggvényt** a következő definícióval: $1(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases}$

Megjegyezzük, hogy bármely f függvényre $f(t)\cdot 1(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \end{cases}$ és

$\mathcal{L}\{f(t)\cdot 1(t);p\} = \mathcal{L}\{f(t);p\}$, ha létezik. Az $f(t)\cdot 1(t)$ jelölést akkor használjuk, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a $t \le 0$ helyeken az f értéke nulla.

T 25.3 Ha az f függvénynek van Laplace-transzformáltja, akkor bármely konstansszorosának is van, mégpedig

$$\mathcal{L}\{kf\} = k\mathcal{L}\{f\}$$

bármely komplex k esetén.

T 25.4 Ha az f és g függvénynek van Laplace-transzformáltja, akkor az $f+g$ függvénynek is van, mégpedig

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}.$$

T 25.5 Legyen f a $(0,\infty)$ intervallum bármely véges részintervallumán integrálható komplex értékű függvény. Ha megadhatók olyan K és C nemnegatív valós számok, hogy a $(0,\infty)$ intervallum minden t elemére

$$|f(t)| \le K e^{Ct},$$

akkor az f függvény Laplace-transzformáltjára érvényesek a következők:

1. Az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált a kompex számsík
$$\{p;\ \operatorname{Re} p > C\}$$
félsíkján létezik és abszolút konvergens;
2. $$\lim_{\operatorname{Re} p \to \infty} \mathcal{L}\{f;p\} = 0.$$

A tételbeli feltételek (tehát elegendők, de) nem szükségesek ahhoz, hogy az f Laplace-transzformáltja létezzék. Mégis, mivel a gyakorlatban többnyire a feltételeknek eleget tevő függvények Laplace-transzformáltjait kell kiszámítani, a rövid megfogalmazás kedvéért bevezetjük a következő elnevezést:

D 25.6 A $(0,\infty)$ intervallumon vagy annak valamely valódi részhalmazán értelmezett, komplex értékű f függvényt **Laplace-transzformálhatónak** mondjuk, ha f-re teljesül a következő két feltétel:

1. Ha az f értelmezését a teljes $(0,\infty)$ intervallumra kiterjesztjük azzal a megállapodással, hogy értéke 0 legyen ennek az intervallumnak minden olyan pontjában, ahol eredetileg nem volt értelmezve, akkor az így adódó függvény a $(0,\infty)$ intervallum minden véges részintervallumán integrálható.
2. Megadhatók olyan K és C nemnegatív valós számok, hogy a $(0,\infty)$ intervallum minden t elemére $|f(t)| \le K e^{Ct}$.

A legfontosabb elemi függvények Laplace-transzformáltjait tartalmazza az alábbi táblázat.

	$f(t)$ $(t \ge 0)$	$F(p)$		$f(t)$ $(t \ge 0)$	$F(p)$
I	1	$\frac{1}{p}$	VIII	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
II	$\frac{t^n}{n!}$ $(n \in \mathbf{N})$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	IX	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
III	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	X	$\frac{t^n}{n!}e^{at}$ $(n \in \mathbf{N})$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$
IV	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	XI	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
V	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	XII	$t\sin bt$	$\frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}$
VI	$\operatorname{ch} bt$	$\frac{p}{p^2-b^2}$	XIII	$t\operatorname{ch} bt$	$\frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}$
VII	$\operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	XIV	$t\operatorname{sh} bt$	$\frac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$
			XV	t^v $(v > -1)$	$\frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}$
				$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

(Az I-VIII. és XV. képletekre nézve I. Szász G., Matematika III., 385. – 389. oldal; a VIII-XIV. képleteket alább, az 1. és a 6. feladatban igazoljuk. XI-XIV **egyszerűbb bizonyítására** nézve l. a 64. feladatot.)

A táblázatban szereplő Γ függvény Szász G., Matematika I. c. **könyvében** a 394. – 395. oldal 5. példájában bevezetett Euler-féle gammafüggvény. **Emlékeztetünk** ennek arra az alaptulajdonságára, hogy valamint arra, hogy

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Feladatok

1.▷ A Laplace-transzformált definíciója alapján igazoljuk, hogy

a) $\mathcal{L}\{te^{at}; p\} = \dfrac{1}{(p-a)^2}$, ha $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

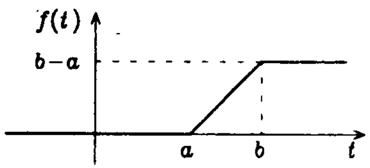
b) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}; p\} = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, ha $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, $(n \in \mathbf{N})$, (ez a X. képlet).

A Laplace-transzformált **D 25.1** definíciója alapján számítsuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltjait:

2. $f(t) := \begin{cases} \gamma, & \text{ha } \alpha < t \le \beta, \\ 0, & \text{ha } t \le \alpha, \text{ vagy } t > \beta, \end{cases}$ ahol α, β, γ pozitív konstansok, $\alpha < \beta$.

3. $f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a, \\ e^{-b(t-a)}, & \text{ha } t > a, \end{cases}$; $a, b > 0$.

4. A függvényt grafikonjával adjuk meg.



5.• $f(t) := \begin{cases} (t-3)^2, & \text{ha } t > 3, \\ 0, & \text{ha } t \le 3. \end{cases}$

6.• A táblázat I-VII. és XV. képleteinek, valamint a Laplace-transzformált **T 25.3** és **T 25.4** alaptulajdonságainak felhasználásával igazoljuk a táblázat VIII-IX. és XI-XIV. képleteit!

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

7. $1(t)$, **8.** $1(t-2)$,

9. $1(t-2) \cdot 1(t-3)$.

10.• Ábrázoljuk az $f(t) = 1(t) + 1(t-1) + 1(t-2)$ függvényt, és számítsuk ki Laplace-transzformáltját.

A Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait:

11.• $t^{\frac{3}{2}}$, **12.•** $\cos^2 t$, **13.▷** $\sin t \cdot \cos t$,

14.* $\sin^3 t$, **15.*** $\cos^2(t-a)$, **16.** $\dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$; $a \ne b$.

17. $\sin bt + bt \cos bt$, **18.** $\dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$, **19.** $e^t \operatorname{ch} t$,

20. $\operatorname{sh}(3t-5)$, **21.•** $t(e^t + \operatorname{ch} t)$, **22.** $(t+1)\sin 2t$,

23. $\operatorname{ch} \dfrac{t}{\sqrt{2}} \cos \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, **24.** $\operatorname{sh} \dfrac{t}{\sqrt{2}} \sin \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, **25.** $\operatorname{sh} at \cdot \operatorname{ch} at$,

26.▷ $\operatorname{ch} 3t \cdot \sin^2 t$.

Jelöljön f_1 és f_2 tetszőleges Laplace-transzformálható függvényeket, a tetszőleges komplex számot. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények szintén Laplace-transzformálhatóak:

27.▷ $a \cdot f_1(t)$, **28.** $f_1(t) \cdot f_2(t)$, **29.** $f_1(t) + f_2(t)$.

30.• Igazoljuk, hogy az $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ függvény (bár létezik Laplace-transzformáltja, de) nem Laplace-transzformálható a **D 25.6** értelemben.

Igazoljuk, hogy az alábbi függvények Laplace-transzformálhatóak, és adjunk meg a **D 25.6** definíciónak megfelelő K és C számokat:

31.• e^{3t+2}, **32.** e^{-t}, **33.▷** $\ln(t+1)$,

34.* $t \cdot \sin \dfrac{1}{t}$.

A konvolúciótétel és következményei

D 25.7 A $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett, valós értékű f és g függvények **konvolúciójának** nevezzük és $f * g$-vel jelöljük azt a függvényt, amely minden egyes nemnegatív valós t számhoz az

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds$$

értéket rendeli hozzá, feltéve, hogy ez az integrál létezik. (Az f és g konvolúciójának a t helyen felvett értékét tehát $(f * g)(t)$-vel jelöljük.)

T 25.8 A konvolúcióképzés kommutatív művelet, azaz

$$f * g = g * f$$

minden olyan f és g függvényre, amelynek a konvolúciója létezik.

T 25.9 A konvolúció rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal is.
Ha az $f * g$ és $f * h$ konvolúciók léteznek, akkor érvényes a disztributív tulajdonság:

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

továbbá tetszőleges k valós konstanssal

$$f * (kg) = k \cdot (f * g).$$

T 25.10 Konvolúciótétel. Legyen f és g Laplace-transzformálható függvény, mégpedig

$$|f(t)| \le K_1 e^{C_1 t} \quad \text{és} \quad |g(t)| \le K_2 e^{C_2 t},$$

ha $t \in (0, \infty)$, ahol K_1, K_2, C_1 és C_2 nemnegatív valós konstansok. Ekkor a két függvény konvolúciójának Laplace-transzformáltja a $\{p;\ \operatorname{Re} p > \sup\{C_1, C_2\}\}$ félsíkon létezik, és egyenlő a két függvény Laplace-transzformáltjának szorzatával:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}.$$

T 25.11 Az eredeti függvény integrálja Laplace-transzformáltjának tétele. Ha az f függvény Laplace-transzformálható, akkor bármely $[0,t]$ intervallumon vett integrálja is Laplace-transzformálható, mégpedig

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(s)\,ds;\ p\right\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{f;p\}.$$

T 25.12 Az eredeti függvény deriváltja Laplace-transzformáltjának tétele. Ha az egyváltozós valós f függvénynek a $(0,\infty)$ intervallumon korlátos és folytonos deriváltja van, akkor f és f' Laplace-transzformálhatók, és Laplace-transzformáltjaik között az

$$\mathcal{L}\{f';p\} = p\mathcal{L}\{f;p\} - \lim_{t\to+0} f(t)$$

összefüggés áll fenn.

1. **Megjegyzés.** Ha f a 0 helyen folytonos is, akkor

$$\mathcal{L}\{f';p\} = p\mathcal{L}\{f;p\} - f(0).$$

2. **Megjegyzés.** Általánosabban a következő is igaz:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)};p\right\} = p^n\mathcal{L}\{f;p\} - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

feltéve, hogy az összes itt fellépő derivált folytonos és korlátos a $[0,\infty)$ intervallumon.

Feladatok

35.$^\triangleright$ Igazoljuk a **T 25.9** tételt.

36.$^\triangleright$ A konvolúcióképzés kommutativitását kihasználva igazoljuk, hogy a konvolúcióképzés asszociatív is, tehát

$$f*(g*h) = (f*g)*h,$$

amennyiben a megfelelő konvolúciók léteznek.

Számítsuk ki a következő konvolúciókat a **D 25.7** alapján:

37.$^\bullet$ $e^t * e^t$, **38.**$^\triangleright$ $t^2 * t^3$, **39.** $(\cos t) * t$,
40. $(\operatorname{sh} t) * t$, **41.**$^\bullet$ $\sin t * \cos t$, **42.** $\cos t * \cos t$,
43. $\sin t * \sin t$, **44.*** $\sin t * (\cos t * t)$. **45.*** $\operatorname{sh} t * \sin t$,
46. $2\operatorname{sh} t * \operatorname{ch} t$.

A konvolúcióképzés **T 25.8**-ban és **T 25.9**-ben említett tulajdonságait használva számítsuk ki a következő kifejezéseket:

47.$^\bullet$ $(\cos^2 t) * t + t * (\sin^2 t)$,

48. $(1-\sqrt{t}) * \sin t + (1+\sqrt{t}) * \cos t + (1-\sqrt{t}) * \cos t + (1+\sqrt{t}) * \sin t$.

Számítsuk ki az alábbi függvények konvolúciójának Laplace-transzformáltját:

49.$^\bullet$ e^t és e^t, **50.** t^2 és t^3.

Határozzuk meg a következő függvények Laplace-transzformáltjait:

51.$^\bullet$ $\displaystyle\int_0^t \sin s\cdot e^{t-s}\,ds$, **52.** $\displaystyle\int_0^t \operatorname{ch} s\cdot(t-s)^2\,ds$, **53.** $\displaystyle\int_0^t s^2 e^{2(t-\tau)}\,d\tau$,

54.$^\triangleright$ $\displaystyle\cos t\int_0^t \frac{\cos s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds + \sin t\int_0^t \frac{\sin s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds$, **55.*** $\displaystyle\sin t\int_0^t \frac{\cos s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds - \cos t\int_0^t \frac{\sin s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds$.

Határozzuk meg a következő f függvények Laplace-transzformáltját az integrál kiszámítása nélkül (azaz, az eredeti függvény integrálja Laplace-transzformáltjának **T 25.11** tétele és a Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával):

56.$^\bullet$ $\displaystyle f(t) := \int_0^t e^s\,ds$, **57.** $\displaystyle f(t) := \int_0^t \sin s\,ds$,

58. $\displaystyle f(t) := \int_0^t s\cos s\,ds$, **59.** $\displaystyle f(t) := \int_0^t s^2 e^{-s}\,ds$.

60. Számítsuk ki az $e^{-t}\cdot(t^2 * e^t)$ függvény Laplace-transzformáltját.

Határozzuk meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltját a Laplace-transzformáltak táblázata és az eredeti függvény deriváltja Laplace-transzformáltjának **T 25.12** tétele alapján:

61.$^\triangleright$ $f(t) = \cos^2 t$, **62.** $f(t) = \sin^2 t$.

63.$^\bullet$ Fejezzük ki az $f''(t) - f'(t) - f(t)$ függvény Laplace-transzformáltját az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltjával, feltéve, hogy $f(0) = f'(0) = 0$, és a megfelelő transzformáltak mind léteznek.

64. Fejezzük ki az $f^{(4)}(t) - 5f^{(3)}(t) - 4f''(t) + 2f'(t) - f(t) + 8$ függvény Laplace-transzformáltját az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltjával, ha a megfelelő transzformáltak léteznek és $f(0) = 5$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$.

A Laplace-transzformált differenciálása és integrálása

T 25.13 (A Laplace-transzformált differenciálási tétele). Ha az f függvénynek van Laplace-transzformáltja, és ez a Laplace-transzformált a p változónak reguláris függvénye, akkor

$$\mathcal{L}\{t^n f\} = (-1)^n \frac{d^n\mathcal{L}\{f\}}{dp^n}.$$

T 25.14 (A Laplace-transzformált integrálási tétele.) Legyen f a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett, komplex értékű függvény, amelyre a következő három feltétel teljesül:

1. Van olyan pozitív c szám, hogy a komplex számsík $S := \{p\in\mathbf{C};\ \operatorname{Re} p > c\}$ félsíkján az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált létezik és reguláris;
2. Az $\frac{1}{t}f(t)$ függvény Laplace-transzformálható;
3. Az $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t);p\right\}$ függvény a saját értelmezési tartományában mindenütt reguláris.

Továbbá, definíció szerint legyen

$$\int_p^\infty \mathcal{L}\{f;q\}\,dq := \lim_{\operatorname{Re} z\to\infty}\int_p^z \mathcal{L}\{f;q\}\,dq,$$

ahol z az S félsíkban fekvő, p-ből kiinduló görbén fut végig. Ekkor

$$\int_p^\infty \mathcal{L}\{f;q\}\,dq = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t);p\right\},$$

feltéve, hogy a bal oldalon álló improprius integrál létezik.

Feladatok

65. A Laplace-transzformáltak táblázatának XI-XIV képleteit vezessük le a IV-VII képletekből a **T 25.13** tétel segítségével.

Számítsuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltját a T 25.13 tétel alkalmazásával:

66. $t^2 \cos t$, **67.** $bt\sin bt - b^2t^2\cos bt$; $b \in \mathbf{C}$,

68. $(t-1)^2\cos t$, **69.** $t\,\mathrm{sh}\,t\sin t$,

70. Tegyük fel, hogy egy $y(t)$ függvényre teljesülnek a $ty''(t)-2y'(t)=0$, $y(0)=1$ feltételek, és jelölje $y(t)$ Laplace-transzformáltját $Y(p)$. Döntsük el, hogy az $Y_1(p) = \frac{1}{p}$ és $Y_2(p) = \frac{p^3+1}{p^4}$ közül melyik lehet az $y(t)$ függvény Laplace-transzformáltja. (A vizsgálat során fellépő transzformáltak létezésével ne foglalkozzunk.)

71. Határozzuk meg, hogy az $aty'' + (bt+3a)y' + 3by = 0$, $y(0)=0$ $(a,b \in \mathbf{C})$ összefüggéseket kielégítő $y(t)$ függvény $Y(p)$ Laplace-transzformáltja milyen egyenletnek tesz eleget, feltéve, hogy a megfelelő Laplace-transzformáltak léteznek.

72. Legyen f olyan, a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Az $\mathcal{L}\{f;p\}$ Laplace-transzformált a p változó reguláris függvénye (l. **D 24.18.**);
2. Az f akárhányszor deriválható, és mindegyik deriváltjának létezik Laplace-transzformáltja. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}[t^m f(t)]\right\} = (-1)^m p^n \frac{d^m}{dp^m}\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad (m \ge n).$$

A **T 25.14** tétel segítségével határozzuk meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait (a, b, α, β tetszőleges komplex konstansok):

73. $\frac{e^{-t}\sin t}{t}$, **74.** $\frac{1-e^{at}}{te^t}$, **75.** $\frac{\cos bt - \cos at}{t}$,

76. $\frac{\mathrm{sh}^2 t}{t}$, **77.** $\int_0^t \frac{\mathrm{sh}^2 s}{s}\,ds$, **78.** $\int_0^t \frac{e^{\alpha s} - e^{\beta s}}{s}\,ds$,

79. $\int_0^t e^{-s}\frac{1-\cos s}{s}\,ds$.

Hasonlósági és eltolási tételek

T 25.15 Hasonlósági tétel. Ha a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvénynek Laplace-transzformáltja a F függvény, k pedig pozitív konstans, akkor

$$\mathcal{L}\{f(kt);p\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right).$$

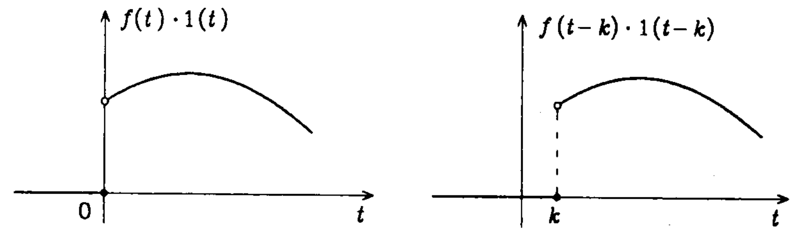
T 25.16 Az eredeti függvényre vonatkozó eltolási tétel. Ha a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvénynek van Laplace-transzformáltja, és k pozitív konstans, akkor a

$$g(t) := f(t-k)\cdot 1(t-k) = \begin{cases} f(t-k), & \text{ha } t > k, \\ 0, & \text{ha } t \le k \end{cases}$$

képlettel megadott g függvénynek is van Laplace-transzformáltja, mégpedig

$$\mathcal{L}\{g(t);p\} = \mathcal{L}\{f(t-k)\cdot 1(t-k);p\} = e^{-kp}\mathcal{L}\{f(t);p\}.$$

(A tétel függvényeit az alábbi ábrán szemléltetjük:



Megállapíthatjuk, hogy az eredeti függvény grafikonja k-val történő jobbra tolásának a Laplace-transzformált e^{-kp}-val szorzása felel meg.)

T 25.17 Periodikus függvény Laplace-transzformáltjának tétele. Legyen f a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény. Ha f ezen az intervallumon periodikus h szerint ($f(x+h) = f(x)$ tetszőleges $x > 0$-ra), akkor

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-hp}}\int_0^h e^{-pt}f(t)\,dt, \tag{1}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrál létezik. A **D 25.1** értelmében a jobb oldalon álló integrál annak az f_0 függvénynek a Laplace-transzformáltja, amelyet az

$$f_0(t) := \begin{cases} f(t), & \text{ha } 0 < t \le h, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > h \end{cases}$$

képlet definiál (vagyis f_0 az f függvénynek a $(0,h]$ intervallumra való „leszűkítése"). Ezzel a jelöléssel az (1) képlet így írható:

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-hp}}\mathcal{L}\{f_0;p\}. \tag{2}$$

Az f_0 függvény pedig kifejezhető a következőképpen is:

$$f_0(t) = f(t)\cdot 1(t) - f(t-h)\cdot 1(t-h).$$

T 25.18 Transzformáltakra vonatkozó eltolási tétel. Tetszőleges valós k-ra

$$\mathcal{L}\{e^{-kt}f(t);p\} = \mathcal{L}\{f(t);p+k\},$$

feltéve, hogy ezek a Laplace-transzformáltak léteznek.

Feladatok

Határozzuk meg a T 25.15 hasonlósági tétel és a feladatok utáni szögletes zárójelben megadott összefüggés felhasználásával az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait.

80.° $e^{-at} - 1 + at$; $\left[\mathcal{L}\{e^{-t} - 1 + t; p\} = \dfrac{1}{p^2(p+1)}\right]$,

81. $\dfrac{1 - \operatorname{ch} at}{t}$; $\left[\mathcal{L}\left\{\dfrac{1 - \operatorname{ch} t}{t}\right\} = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right)\right]$,

82. $\operatorname{sh} bt$; $\left[i \operatorname{sh} bt = \sin ibt,\ \ \mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{p^2+1}\right]$.

83.° Definiáljuk az általánosított egységfüggvényt a következőképpen:

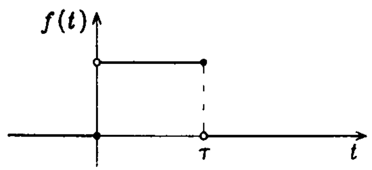
$$1_{t_0}(t) = 1(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > t_0, \\ 0, & \text{ha } t \le t_0. \end{cases}$$

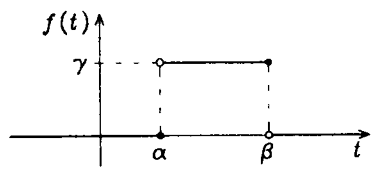
A **T 25.16** tétel segítségével igazoljuk, hogy $\mathcal{L}\{1_{t_0}(t); p\} = \dfrac{1}{p}e^{-t_0 p}$.

Az eredeti függvény T 25.16 eltolási tétele segítségével határozzuk meg a következő függvények Laplace-transzformáltját. (Útmutatás: fejezzük ki a függvényeket $1(t - t_0)$ segítségével, majd alakítsuk $h(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$ alakú kifejezések összegére.)

84.▹ $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t \le \tau, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > \tau; \end{cases}$

τ: pozitív konstans (l. a bal oldali ábra),





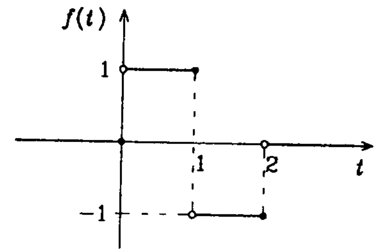
85. $f(t) := \begin{cases} \gamma, & \text{ha } \alpha < t \le \beta, \\ 0, & \text{ha } t \le \alpha, \text{ vagy } t > \beta; \end{cases}$

α, β, γ pozitív konstansok, $\alpha < \beta$. (l. előző jobboldali ábra),

86.° $f(t) := \begin{cases} t, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 2a - t, & \text{ha } a < t \le 2a, \\ 0, & \text{ha } 0 \le t, \text{ vagy } t > 2a; \end{cases}$

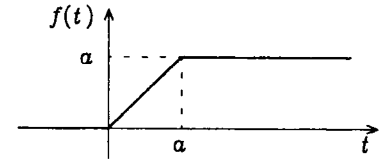
a pozitív konstans,

87.

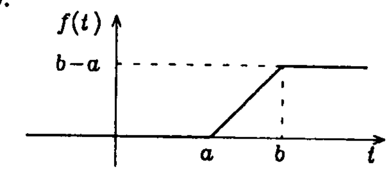


88. $g(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a, \\ e^{-b(t-a)}, & \text{ha } t > a; \end{cases}$ $\quad a, b > 0.$

89.▹



90.▹



91.* $f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ n + 1, & \text{ha } n < t \le n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$

92. $g(t) := \begin{cases} (t - 3)^2, & \text{ha } t > 3, \\ 0, & \text{ha } t \le 3. \end{cases}$

93.° Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}\{f(t); p\} = F(p)$ létezik és $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le \frac{b}{a}, \\ f(at - b), & \text{ha } t > \frac{b}{a}, \end{cases}$

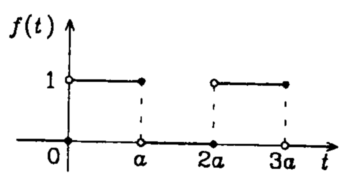
ahol a és b pozitív állandók. Fejezzük ki $\mathcal{L}\{g(t); p\}$-t F-fel.

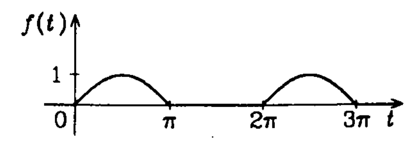
Határozzuk meg a $(0, \infty)$ intervallumon periodikus következő függvények Laplace-transzformáltját:

94.▹ $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 2na < t \le (2n+1)a, \\ 0, & \text{ha } (2n+1)a < t \le 2na, \text{ vagy } t < 0, \end{cases}$

$(a \in \mathbf{R}^+,\ n \in \mathbf{N})$.

Lásd baloldali ábra:

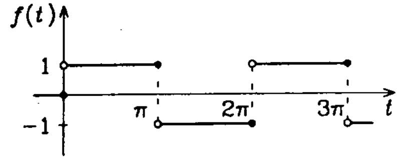


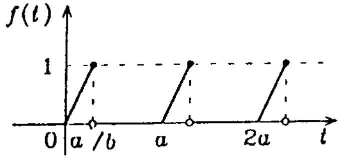


95.° $f(t) := \begin{cases} \sin t, & \text{ha } 2n\pi < t \le (2n+1)\pi, \\ 0, & \text{ha } (2n+1)\pi < t \le (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$ Lásd előző jobboldali ábra.

96. $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 2n\pi < t \le (2n+1)\pi, \\ -1, & \text{ha } (2n+1)\pi < t \le (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Lásd baloldali ábra:





97. $f(t) := \begin{cases} \frac{b}{a}t - bn, & \text{ha } na < t \le \left(n + \frac{1}{b}\right)a, \\ 0, & \text{ha } \left(n + \frac{1}{b}\right)a < t \le (n+1)a, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases} \quad (a, b \in \mathbf{R}^+,\ n \in \mathbf{N}).$

Lásd az előző jobboldali ábrát.

98▷ Legyen $g(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ |\sin t|, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$

A **T 25.18** alkalmazásával és a Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával állítsuk elő a következő függvények Laplace-transzformáltját $(a, b \in \mathbf{C})$:

99• $e^{-at}\,\mathrm{sh}\,bt$, **100▷** $\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{sh}\,bt$, **101.** $\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathrm{sh}\,bt$,

102. $\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}$.

Az inverz Laplace-transzformáció

T 25.19 Ha f Laplace-transzformálható függvény, mégpedig

$$|f(t)| \le Ke^{Ct} \quad (K, C: \text{nemnegatív valós konstansok})$$

a $(0, \infty)$ intervallum minden t elemére, F pedig az f Laplace-transzformáltja, akkor a $(0, \infty)$ intervallum minden olyan t pontjában, ahol f folytonos, az f függvény értékére az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{v \to \infty} \int_{u - vi}^{u + vi} e^{pt} F(p)\, dp$$

egyenlőség érvényes, amelyben az u szám a C-nél nagyobb valós számok közül tetszőlegesen választható. (A tétel következményeként minden Laplace-transzformálható függvényt – szakadási helyeitől eltekintve – Laplace-transzformáltja egyértelműen meghatároz.)

D 25.20 A komplex F függvény **inverz Laplace-transzformált**jának nevezzük és $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$-fel jelöljük az olyan Laplace-traszformálható f függvényt, amelyre $\mathcal{L}\{f\} = F$. Az $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ inverz Laplace-transzformáltnak a t helyen felvett értékét $\mathcal{L}^{-1}\{F; t\}$-vel jelöljük.

A Laplace-transzformált inverzével a **T 25.10** konvolúciótétel az alábbiak szerint fogalmazható át:

T 25.21 (Konvolúciótétel.) Ha f és g Laplace-transzformálható függvények, akkor

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p) \cdot G(p); t\} = (f * g)(t) = \int_0^t f(s) g(t - s)\, ds,$$

ahol $\mathcal{L}^{-1}\{F(p); t\} = f(t)$ és $\mathcal{L}^{-1}\{G(p); t\} = g(t)$.

Az $F(p) = \mathcal{L}\{f(t); p\}$ jelölés helyett az $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p); t\}$ jelölést bevezetve és feltéve, hogy a **T 25.19** egyértelműségi tétel feltételei is teljesülnek, a **T 25.11-18** tételeinket az inverz transzformáltakra vonatkozó alábbi formába írhatjuk át.

T 25.22 (Az eredeti függvény integrálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = \int_0^t f(s)\, ds.$$

T 25.23 (Az eredeti függvény differenciálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{pF(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{f'; p\} + f(0)\right\}$$

T 25.24 (A transzformált differenciálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(p)\} = -t \cdot f(t).$$

T 25.25 (A transzformált integrálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty F(q)\, dq\right\} = \frac{f(t)}{t}.$$

T 25.26 (Hasonlósági tétel.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(kp)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right), \quad (k \in \mathbf{C} - \{0\}).$$

T 25.27 (Az eredeti függvényre vonatkozó eltolási tétel.)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-kp} \cdot F(p)\right\} = f(t - k) \cdot 1(t - k) = \begin{cases} f(t - k), & \text{ha } t > k, \\ 0, & \text{ha } t \le k. \end{cases}$$

T 25.28 (Periodikus függvény transzformáltjának tétele.) Ha az $f_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_0(p)\}$ függvényre és $h > 0$ számra teljesül, hogy $f_0(t) = 0$, ha $t \le 0$, vagy $t > h$, akkor

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_0(p)}{1 - e^{-hp}}\right\} = f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{ha } t \le h, \\ f(t - h), & \text{ha } t > h; \end{cases}$$

az $f(t)$ tehát a $(0, \infty)$ intervallumon h periódusú függvény.

T 25.29 (Transzformáltakra vonatkozó eltolási tétel.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p + k)\} = e^{-kt} \cdot f(t)$$

P 25.30 Racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltjának meghatározásához a törtfüggvényt általában elemi törtekre bontjuk. Ehhez egyes esetekben jól használható az alábbi egyszerű összefüggés:

$$\frac{1}{(x - \alpha) \cdot (x - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta}\right); \quad \alpha \ne \beta,\ x \text{ tetszőleges.}$$

Valós együtthatós törtfüggvény inverz Lapace-transzformáltjának előállítására vonatkozik az alábbi két tétel.

T 25.31 (A kifejtési tétel általános alakja.) Legyen

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{(p-p_1)^{m_1}\cdot(p-p_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(p-p_s)^{m_s}},$$

ahol F_2 fokszáma nagyobb, mint F_1 fokszáma. Ekkor

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\} = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left((p-p_k)^{m_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{pt}\right)^{(m_k-1)},$$

ahol a differenciálás p szerint végzendő.

T 25.32 (A kifejtési tétel speciális alakja.) Legyen az előző tétellel egyezően

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{(p-p_1)^{m_1}\cdot(p-p_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(p-p_s)^{m_s}},$$

ahol F_2 fokszáma nagyobb, mint F_1 fokszáma. Ekkor

$$f(t) = \sum_{k=1}^{s}\left(A_{k,1}\cdot\frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} + A_{k,2}\cdot\frac{t^{m_k-2}}{(m_k-2)!} + \ldots + A_{k,m_k}\right)e^{p_k t},$$

ahol

$$A_{k,1} = \frac{1}{0!}\lim_{p\to p_k}\left\{(p-p_k)^{m_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\},$$

$$A_{k,2} = \frac{1}{1!}\lim_{p\to p_k}\frac{d}{dp}\left\{(p-p_k)^{m_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\}, \quad \text{stb.}$$

$$\vdots = \vdots$$

Feladatok

Határozzuk meg a következő konvolúciókat a konvolúciós integrál kiszámítása nélkül:

103.• $\sin t * \cos t$, **104.** $e^t * e^t$. **105.•** $\mathrm{sh}\, t * \mathrm{sh}\, t$.

Határozzuk meg az alábbi racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltját az elemi törtekre bontás módszerével, vagy a **T 25.31** - **T 25.32** kifejtési tételekre támaszkodva:

106.• $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$, **107.•** $\frac{2p+1}{p^2-2p+5}$, **108.•** $\frac{p}{(p-1)^3}$,

109.▷ $\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}$, **110.** $\frac{2p^2-3p-2}{p^3+p^2-2p}$, **111.** $\frac{1}{(p^2+1)(p+1)}$,

112. $\frac{p^2}{(p^2+1)(p-1)}$, **113.** $\frac{-5p}{(p^2+4)(p^2-1)}$, **114.** $\frac{7p+1}{(p-1)(p^2+2p+5)}$,

115.• $\frac{1}{p^3-8}$, **116.** $\frac{p^2}{(p-1)^3}$, **117.** $\frac{p}{(p-1)^3}$,

118. $\frac{p}{p^4-1}$, **119.** $\frac{p^3}{p^4-1}$, **120.*** $\frac{1}{(p-1)^2\cdot(p-2)^3}$.

Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltját az **T 25.21**, illetve a zárójelben megjelölt tétel segítségével.

121.▷ $\frac{1}{(p^2+1)^2}$, **122.▷** $\frac{1}{(p^2+1)^3}$, **123.▷** $\frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$,

124.• $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$, **125.** $\frac{1}{(p-1)\cdot(p^2+1)}$, **126.▷** $\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}$,

127. $\frac{p}{p^4-1}$, **128.*** $\frac{1}{p(p^4-1)}$,

129.• $\frac{p}{(p-1)^3}$; (**T 25.23**), **130.** $\frac{p^2}{(p-1)^3}$; (**T 25.23**),

131.• $\frac{2}{p(p^2+4)}$; (**T 25.22**), **132.** $\frac{2b}{(p^2+b^2)^2}$; (**T 25.22**).

Határozzuk meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját. (Útmutatás: Alkalmazzuk a zárójelben megjelölt tételt. A két utolsó feladatban ábrázoljuk is az inverzet!)

133.• $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{p}$; (**T 25.25**), **134.▷** $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$; (**T 25.25**),

135. $\ln\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p}$; (**T 25.25**), **136.•** $\frac{2e^{-p}}{p^3}$; (**T 25.27**),

137.▷ $\frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p(p^2+4)}$; (**T 25.27**), **138.▷** $\frac{p}{p^2+4} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2-1}$; (**T 25.27**),

139.• $\frac{1}{p(1+e^{-ap})}$; (**T 25.28**, **T 25.27**), **140.*** $\frac{ap+1-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}$; (**T 25.28**, **T 25.27**).

Állítsuk elő az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltjait hatványsor-alakban.

141.• $\frac{p^5}{p^6-1}$, **142.** $\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$, **143.** $\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$.

Vegyes feladatok

A Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait:

144. $\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, at \sin at + \mathrm{sh}\, at \cos at)$, **145.** $\cos^4 t$,

146. $\sin^2 t \cdot \cos^2 t$.

147.▷ Igazoljuk, hogy az e^{t^2} függvény nem Laplace-transzformálható **D 25.6** értelmében.

148.* Vezessük be a $\Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau$ jelölést. ($\Phi(t)$ ún. valószínűségi integrál, amelyre Szász G., Matematika III., 245. oldalának 33.8.3., illetve 247. oldalának 33.8.4. definíciói szerint $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=1$ teljesül.) A **D 25.1** alapján igazoljuk, hogy

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{p^2}{2}}\left(1-\Phi(p)\right).$$

149. Az előző feladat eredményére támaszkodva számítsuk ki $\Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$ Laplace-transzformáltját.

150.• Igazoljuk, hogy Laplace-transzformálható függvények konvolúciója is Laplace-transzformálható.

Számítsuk ki a következő konvolúciók Laplace-transzformáltját:

151. $f(t)*\int_0^t g(s)h(t-s)\,ds,$

152. $\int_0^t f_1(s)g_1(t-s)\,ds\;*\;\int_0^t f_2(s)g_2(t-s)\,ds.$

153. Legyen $[f_n(t);\ n\in\mathbf{N}^+]$ olyan függvénysorozat, amelyben minden elemnek van Laplace-transzformáltja. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{L}\{f_n(t);p\}=\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n,$$

akkor $\int_0^t f_n(s)f_n(t-s)\,ds=\frac{(n!)^2}{(2n!)}\int_0^t f_{2n}(\tau)\,d\tau.$

154.* Bizonyítsuk be, hogy ha f Laplace-transzformálható függvény, akkor

$$\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t f(s)\,ds^{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^t(t-s)^n f(s)\,ds\quad(n=0,1,\ldots).$$

(**Cauchy-formula**; a ds^{n+1} azt jelenti, hogy $(n+1)$-szer kell integrálni s szerint.)

155.• Határozzuk meg az $f(t)=\int_0^t\frac{\sin 7s\cdot\sin 3s}{s}\,ds$ Laplace-transzformáltját.

156.* Tegyük fel, hogy egy f függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

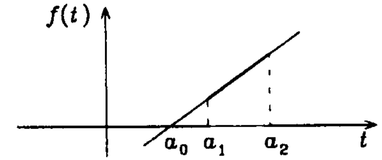
1. $\mathcal{L}\{f;p\}$ a p változó reguláris függvénye;
2. f akárhányszor differenciálható, és mindegyik deriváltjának létezik Laplace-transzformáltja. Igazoljuk, hogy

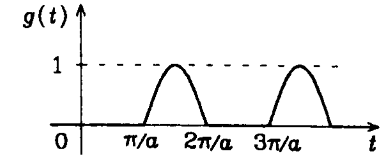
$$\mathcal{L}\left\{t^m\cdot\frac{d^n}{dt^m}f(t);p\right\}=(-1)^m\frac{d^m}{dp^m}\left(p^n\mathcal{L}\{f\}\right)\quad(m\ge n).$$

157.▷ Legyen

$$f(t)=\begin{cases}m(t-a_0), & \text{ha } a_1<t\le a_2;\ m\in\mathbf{R},\\ 0, & \text{ha } t\le a_1,\text{ vagy } t>a_2,\end{cases}\qquad a_0,a_1,a_2\in\mathbf{R}^+,\ a_1<a_2.$$

Határozzuk meg az $f(t)$ Laplace-transzformáltját, f görbéje a következő baloldali ábrán látható.





158.* A **95**. feladat eredményére támaszkodva állítsuk elő az alábbi függvény Laplace-transzformáltját.

$$g(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } \frac{2n\pi}{a}<t\le\frac{(2n+1)\pi}{a},\\ -\sin at, & \text{ha } \frac{(2n+1)\pi}{a}<t\le\frac{(2n+2)\pi}{a},\\ 0, & \text{ha } t\le 0,\quad a \text{ pozitív konstans, } n\in\mathbf{N}^+.\end{cases}$$

Lásd az előző jobboldali ábra.

159.• Határozzuk meg az $\operatorname{sh} t\cos 2t\sin 3t$ függvény Laplace-transzformáltját.

160. Határozzuk meg $\frac{-5p}{(p^2+4)\cdot(p^2-1)}$ inverz Laplace-transzformáltját a konvolúciótétel alkalmazásával.

161.• A konvolúciós integrál(ok) kiszámítása nélkül lássuk be, hogy

$$(\operatorname{ch} t)*(\sin t)=(\operatorname{sh} t)*(\cos t).$$

Határozzuk meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját:

162. $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$, **163.•** $\frac{2}{(p-3)^3\cdot(p+4)}$, **164.•** $\frac{p}{p^4-5p^2+4}$,

165.* $\frac{1}{(p^4-1)^2}$, **166.** $\frac{p^3}{(p^4-1)^2}$, **167.▷** $\frac{1}{p^3\cdot(p+1)^3}$,

168.• $F(p)=\frac{Q'(p)}{Q(p)}$, ahol $Q(p)=(p-p_1)((p-p_2)\ldots(p-p_n)$, és az összes p_i páronként különbözik,

169. $\frac{p^2}{(p^2-1)^3}$, (Útmutatás: Alkalmazzuk a **T 25.31** vagy **T 25.32** kifejtési tételt.)

170.▷ $\frac{e^{\frac{-p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}$, **171.** $\frac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

172. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(p^2+4)}\right\}=\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\int_0^t e^s\cdot\sin 2s\,ds.$

173.• Feltéve, hogy $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$, tehát az $F(p)$ függvény inverz Laplace-transzformáltja, létezik, fejezzük ki f-fel az $\mathcal{L}^{-1}\{F(ap+b)\}$ inverz Laplace-transzformáltat, ($a>0$ konstans).