MATEMATIKAI ANALIZIS

FRITZ JÓZSEF, BME MATEMATIKA INTÉZET

Előszó.

Ez az oktatási segédanyag fizikus hallgatók részére készült. Bővebb egy részletes definíció és tételjegyzéknél is, de tömörebb mint egy szokványos jegyzet. Sok definíció és tétel nem kiemelten, hanem csak a szöveg között van kimondva, és a bizonyítások, főleg ilyen esetekben, csak a gondolatmenet lényegére szorítkoznak. A tárgyalás nem mindig követi az előadást, átlalában a dolog belső logikájához igazodik. A fontosabb fogalmak többször is megjelennek, ezért vannak átfedések az egyes részek között. Mivel kevés a magyarázó szöveg és példa, a jegyzet olvasását az előadáson szerzett emlékek igencsak megkönnyíthetik, használatakor papír és ceruza is legyen kéznél. Az új fogalmak és tételek neve ilyen szedésű, az állítások *szövege ilyen.* A szöveg közé rejtett gondolatmeneteket $\heartsuit$ így emeljük ki $\square$. A tárgyalt anyag lényegesen meghaladja a standard szintet, fizikai példák és alkalmazások is vannak benne. A törzsanyagon túlmutató részeket a szövegben $**$ jelöli, ilyenek általában a lábjegyzetek is. Kritikus észrevételeiknek örülök. FJ, jofri@math.bme.hu

Ajánlott irodalom:

1. G. Thomas et al.: Thomas-féle Kalkulus I.-II.-III. Typotex 2006.
2. Farkas Miklós et al.: Matematika. (Sorozat) Tankönyvkiadó 1972–.
3. Monostory Iván et al.: Matematika Példatár. (Sorozat) Tankönyvkiadó 1974–.
4. N. M. Gjunter – R.O. Kuzmin: Felsőbb Matematikai Példatár. Tankönyvkiadó 1953.
5. Császár Ákos: Matematikai Analízis I.-II. Tankönyvkiadó 1983.
6. Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I. Nemzeti Tankönyvkiadó 2005.
7. W. Rudin: A Matematikai Analízis Alapjai. Műszaki Könyvkiadó 1978.
8. Hatvani László – Pintér Lajos: Differenciálegyenletes Modellek a Középiskolában. Polygon 1997.
9. Hatvani László – Krisztin Tibor – Makay Géza: Dinamikus Modellek a Közgazdaságban. Polygon 2001.
10. Pólya György – Szegő Gábor: Feladatok és Tételek az Analízis Köréből I.-II. Tankönyvkiadó 1980.
11. V. I. Arnold: Közönséges Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó 1987.
12. V. I. Arnold: A Differenciálegyenletek Elméletének Geometriai Fejezetei. Műszaki Könyvkiadó 1988.
13. V. I. Arnold: A Mechanika Matematikai Módszerei. Műszaki Könyvkiadó 1985.
14. Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós Függvények és Függvénysorok. Tankönyvkiadó 1965.
15. Riesz Frigyes – Szőkefalvi-Nagy Béla: Funkcionálanalízis. Tankönyvkiadó 1988.
16. Ph. Frank – R. von Mises: A Mechanika és a Fizika Differenciál- és Integrálegyenletei. Műszaki Könyvkiadó 1967.
17. Halmos Pál: Mértékelmélet. Gondolat Kiadó 1984.
18. Járai Antal: Modern Alkalmazott Analízis. Tipotex 2007.

Date: January 14, 2008.

Contents

Előszó. 1
Szóhasználat, jelölések. 7
Logika. Halmazok és függvények. Alaphalmazok és műveletek. Függvényterek.

VALÓS SZÁMOK ÉS FÜGGVÉNYEK 9

1. KONVERGENS SOROZATOK ÉS SOROK 9

1.1. **A természetes számok halmaza, kombinatórika.** 9
Peano axiómái és a teljes indukció. Sorozatok száma, permutációk, kombinációk.
A binomiális tétel

1.2. **Algebrai műveletek és egyenlőtlenségek.** 9
Műveletek, rendezés, a háromszög egyenlőtlenség. Bernoulli egyenlőtlensége.
Komplex számok. Elemi függvények.

1.3. **Konvergens sorozatok.** 10
Definíció. Divergens sorozatok. Hasznos észrevételek. Műveleti szabályok.
Néhány egyszerű határérték. Sorozatok nagyságrendje.

1.4. **A folytonossági axióma négy alakja.** 11
Egy algoritmus. Monoton sorozatok. A Bolzano - Weierstrass tétel. Cauchy sorozatok.
A Cantor - Dedekind axióma.

1.5. **Abszolút konvergens sorok.** 13
Leibniz sorok, feltételes konvergencia. Sorok átrendezése és egyéb műveletek.
Az abszolút konvergencia kritériumai. A $\sum n^{-\alpha}$ sor. Hatványsorok.

1.6. **Az exponenciális függvény.** 15
Defini ció, az exponenciális sor, $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$.
Az e^x függvény érintője, konvexitása, és a görbe alatti terület.

2. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 17

2.1. **Definíciók.** 17
A folytonosság két definíciója. Torlódási pont, határérték, féloldalas
határértékek. Műveletek folytonos függvényekkel.

2.2. **Alaptételek.** 18
Weierstrass tétele. Egyenletes folytonosság. Bolzano tétele, inverz függvény.

2.3. **Elemi függvények.** 19
A logaritmus és a hatványfüggvények. Trigonometrikus függvények és inverzeik.
Hiperbolikus függvények és inverzeik.

3. DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK 20

3.1. **Definíciók.** 20
Deriváltak, az érintő és a differenciál. Konvex függvények, a Jensen egyenlőtlenség.
A számtani, a mértani, a harmonikus és a négyzetes közép. Cauchy egyenlőtlensége.

3.2. **A differenciálás szabályai.** 21
Összeg, szorzat és hányados deriváltja. A láncszabály, inverz függvény deriváltja.

3.3. **Elemi függvények deriváltjai.** 22
Hatványok, exponenciális, trigonometrikus, hiperbolikus függvények és inverzeik.

3.4. **Lagrange és Cauchy tételei, függvényvizsgálat.** 22
A l'Hospital szabály. Második differenciál, Lagrange maradéktagja. Monotonitás,
konvexitás és a szélsőérték elégséges feltételei. Darboux tétele.

3.5. **Taylor sorfejtés.** 24
Numerikus deriválás. A geometriai sor és deriváltja. Az exponenciális függvény, a trigonometrikus függvények és a logaritmus hatványsora.
Hatványsor deriválása. A binomiális sor. Euler formulája.

4. INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK 26

4.1. **Definíció, folytonos függvények integrálása.** 26
Integrálközelítő összegek. Oszcillációs összeg, Riemann kritériuma. Műveleti szabályok. Primitív függvény, Newton - Leibniz formula.

4.2. **Integrálok kiszámítása.** 28
Primitív függvények listája. Integrálás helyettesítéssel. Parciális integrálás. Racionális függvények. Improprius integrálok. Numerikus integrálás, trapéz szabály, Simpson formulája.

4.3. **Nevezetes integrálok.** 31
A gamma és a béta függvény. Trigonometrikus polinomok. Elliptikus integrálok. Gauss integrálok, a normális eloszlás. Fourier integrálok, az exponenciális és a Cauchy eloszlás. Integrálok paraméter szerinti deriválása és integrálása.

5. A DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI. 34

Simulókör és görbület. Egyenlőtlenségek. Végtelen sorok. Síkgörbék és lapok nyomatékai, súlypont. Forgástestek térfogata, felszíne és nyomatékai.
A d-dimenziós gömb térfogata és felszíne.

6. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. 36

Elsőrendű egyenletek: lineáris, autonóm, szétválasztható és homogén egyenlet. Grönwall lemmája, a megoldás egyértelműsége. A láncgörbe egyenlete. Állandó görbületű görbék. Biológiai példák, a Lotka - Volterra modell. Másodrendű egyenletek. Harmonikus oszcillátor, kényszerrezgés, csillapított rezgések. Az eneria megmaradása és az inga lengésideje. Elliptikus integrálok.

7. VÁLOGATOTT PROBLÉMÁK ÉS MEGJEGYZÉSEK 41

Néhány azonosság. Cauchy, Hölder és Minkowski egyenlőtlenségei. A diagonális módszer. Zárt, nyilt és kompakt halmazok, Cantor és Borel tételei. Kronecker lemmája. Az Euler féle C konstans. A faktoriális első közelítése. A prímszámok sorozata. Egy algoritmus. Minimumhely keresése. Legendre transzformáció. Entrópia, LSI. Euler összegképlete, a faktoriális második közelítése. Bináris sorozatok száma. Schwarz egyenlőtlenség. A Dirac delta, konvolúció. Riemann lemmája. A Fourier transzformáció inverze, Plancherel azonossága. A Cauchy egyenlet, Laplace transzformáció. Nagy kitevők, Laplace módszere, Stirling formulája.

8. A VALÓS FÜGGVÉNYTAN ELEMEI 50

A Cantor halmaz. Ellenpéldék. Nullahalmazok. Monoton függvény differenciálása. Lebesgue kritériuma. Konvergencia majdnem mindenütt, egyenletesen és átlagosan. Dini tétele, Riesz lemmája, Lebesgue integrál. A monoton és a dominált konvergencia tételei. Az L^1 tér teljes. A Lebesgue mérték. Primitív függvény létezése. A Cantor függvény. Abszolút folytonos függvények és mértékek. Lebesgue NL tétele. Lebesgue - Stieltjes integrál, Riesz második reprezentációs tétele.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK 61

9. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK 61

9.1. **Görbék differeciálgeometriája** 61
Geometria, a skaláris és a vektoriális szorzat. Vegyes szorzat és a determináns. Sík- és térgörbék érintője és normálisa. Görbület és a centripetális gyorsulás. Síkban haladó, és állandó görbületű görbék. Görbe ívhossza és a természetes paraméterezés. Vonalintegrál, erőtér munkája, centrális erőtér.

9.2. **Az Euklideszi sík és tér.** 64
Pontok és vektorok a síkon. Sorozatok konvergenciája, folytonos függvények.

9.3. **Parciális deriváltak.** 65
Definíció, a gradiens. Lokális szélsőérték szükséges feltétele. Young tétele, a Hesse mátrix, Laplace operátora.

9.4. **Differenciálható függvények.** 66
Definíció, az érintősík, konvex függvények. Folytonos differenciálhatóság. A láncszabály változatai, iránymenti deriváltak. Konzervatív erőtér munkája, potenciál létezése.

9.5. **Lagrange tételei és következményeik.** 69
Lagrange formulái, maradéktag és a második differenciál. Konvexitás és a lokális szélsőérték elégséges feltételei. Steiner tétele, a legkisebb négyzetek módszere.

9.6. **Feltételes szélsőérték, implicit függvények.** 71
A feladat, szükséges feltétel. Lagrange multiplikátora. Elégséges feltételek. Implicit függvény. Egzakt egyenletek. Felületek megadása, érintősík és normális. Gömbi koordináták. Felületi görbék görbülete. Geodetikus görbék.

9.7. **Komplex függvények.** 73
A komplex sík, lineáris törtleképezések. A Cauchy - Riemann egyenlet. Komplex hatványsorok. Elemi függvények, Euler képlete. Komplex integrálok, a Newton - Leibniz formula. Primitív függvény konstrukciója.

9.8. **Kettős integrálok.** 78
Közelítő összegek. Fubini tétele, normáltartományok. Integrálok deriválása, potenciál. Improprius integrálok. Poláris koordináták. Integrálok transzformációi, Jacobi determináns. Gauss és Green formulái. Felület felszine, fluxus, Stokes tétele.

10. METRIKUS TEREK, TOPOLÓGIA 82

10.1. **Metrikus terek.** 82
Távolság, környezet, konvergencia, torlódási pont. Cauchy sorozatok, kompakt és teljes terek. Nyílt és zárt halmazok, összefüggő terek, alterek, görbék.

10.2. **Folytonos függvények.** 83
Definíció, Bolzano és Weierstrass tételei, egyenletes folytonosság. Egyenletes konvergencia, a C_b tér. Banach fixpont tétele. Az implicit függvény tétele.

10.3. **Lineáris terek** 85
Lineáris normált tér, Minkowski egyenlőtlenség. Lineáris függvények és operátorok, differenciálszámítás Banach térben. Inverz függvény, perturbációszámítás. Euklideszi terek, Cauchy egyenlőtlenség. Merőlegesség, Pitagorasz tétele. Ortonormált rendszer. Az $\mathbb{R}^d$ tér, korlátos zárt halmazok. Az L^2 tér.

11. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 89

11.1. **Többváltozós függvények differenciálása.** 89
Parciális deriváltak, differenciálhatóság és a gradiens. Láncszabály, Lagrange tételei. Konvexitás. Inverz és implicit függvényrendszer. Lokális és feltételes szélsőérték.

11.2. **Lineáris transzformációk.** 92
Bázistól független állítások. Lineáris függvények és operátorok. Adjungált operátor, szimmetrikus, antiszimmetrikus, ortogonális és pozitív operátorok. Sajátérték feladat. Operátor poláris alakja, nyoma és determinánsa. Antiszimmetrikus operátorok és a vektoriális szorzat, a vektorinvariáns.

11.3. **Skaláris és vektormezők.** 95
Differenciálhatóság, a gradiens egyértelműsége, deriválttenzor. Newton potenciál. Láncszabály, a Jacobi mátrix transzformációja. Divergencia és rotáció, a nabla, szorzat divergenciája és rotációja. Centrális erőtér, hengerszimmetrikus mezők.

12. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 97

12.1. **Mértéktér és a Riemann integrál.** 97
Halmazgyűrű, mérték és tulajdonságai. Folytonos függvény Riemann integrálja.

12.2. **Az Integrál** 99
Nullahalmazok, mérhető függvények. Cauchy sorozatok L^1-ben. Fatou és Lebesque tételei. Mértékterek szorzata, Fubini tétele. Integrál paraméter szerinti deriválása.

12.3. **Integrálok kiszámítása.** 102
Integrál az egyenesen. Vonalintegrálok, konzervatív erőtérek, potenciál létezése. Kettős integrálok. Felületi integrálok, a felszín és a fluxus. Többes integrálok. Integrálok transzformációi, henger és gömbi koordináták. A divergencia tétel. Green formulái, a Poisson egyenlet. A kör és a gömb Green függvénye.

12.4. **Négyzetesen integrálható függvények, Fourier sorok.** 108
Schwarz egyenlőtlenség, az L^2 tér. Ortogonális sorok, Riesz-Fisher tétel. A fűrészjel sora. Fourier sorok. Riemann lemmája. Dirichlet mag, Dini tétele. Parseval egyenlőség. Példák.

13. A MODERN ANALÍZIS ELEMEI 111

13.1. **Halmazelmélet** 112
Részben és teljesen rendezett halmazok. Hausdorff elve, a kiválasztás axiómája. Jólrendezett halmazok, Zermelo tétele, Transzfinit indukció.

13.2. **Általános topológia** 113
Topologikus tér, altér, bázis, albázis. Szeparábilis és kompakt terek, Alexander tétele. Folytonos leképezések, homeomorfizmus. Összefüggő halmazok, görbék és felületek. Topologikus szorzat, Tyihonov tétele.

13.3. **Metrikus terek** 115
Halmazok távolsága. Szeparábilis és teljes terek. Metrikus tér teljes burka. Teljesen korlátos és kompakt terek. Teljes szeparábilis terek, kompakt beágyazás. A C_b tér és kompakt halmazai. Egyenletes folytonosság, egyenlő mértékben egyenletesen konvergens sorozatok. Mértéktér metrizálása.

13.4. **Lineáris terek** 117
Normák ekvivalenciája. Abszolút konvergens sorok. Euklideszi normák. Ortogonális sorok. Hilbert tér, Riesz Frigyes tételei, gyenge konvergencia, gyenge deriváltak. Funkcionálok differenciálása. Érintőtér, implicit függvények. Feltételes szélsőérték. Minimális ívhosszú görbék, a láncgörbe, minimális felszínű forgástest.

13.5. **Mértékelmélet** 123
A monoton osztály tétele, mérték kiterjesztése. Kolmogorov alaptétele. Az absztrakt integrál és kiterjesztése. Az L^1 tér, egyenletes integrálhatóság. Az L^2 tér teljes. Előjeles mérték, Hahn felbontás. Radon-Nikodym tétel, szinguláris mértékek. Topologikus mértékterek. Eloszlások gyenge konvergenciája, feszesség, Prohorov tétele.

A MATEMATIKAI FIZIKA ANALITIKUS MÓDSZEREI 130

14. KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN 130

14.1. **Cauchy alaptétele és formulái.** 130
Komplex vonalintegrálok, kontúrok és egyszeresen összefüggő tartományok. Newton - Leibniz formula, primitív függvény létezése. Goursat lemmája, Cauchy alaptétele kontúr belsejében, külsejében és félsíkon. Magasabbrendű deriváltak. Liouville tétele, az algebra alaptétele, mátrix sajátértékei, gyökök száma. Analitikus függvények és hatványsoruk. Szingularitások osztályozása, Laurent sorfejtés, rezidumszámítás.

14.2. **Harmonikus függvények, Poisson formulái.** 137
Maximum elv és a középérték tétel. Dirichlet feladat a körön és félsíkon. Konformis leképezések, lineáris törtfüggvények. Peremérték feladatok transzformációja.

14.3. **Laplace transzformáció.** 140
Elemi tulajdonságok és nevezetes példák. Konvolúció transzformálása. Differenciálási szabályok. Inverziós formula. Magasabbrendű lineáris egyenletek, az átviteli függvény és a rezolvens. A harmonikus és a csillapított kényszerrezgés. A stabilitás kritériuma.

14.4. **Fourier transzformáció.** 145
Konvolúció, Riemann lemmája. Regularizálás Gauss konvolúcióval. Inverziós formula, Riemann és Mälvin képlete. Plancherel egyenlőség. Mértékek Fourier transzformációja és gyenge konvergenciája. A hővezetési egyenlet és a hullámegyenlet megoldása Fourier transzformációval, D'Alambert, Kirchoff és Poisson képletei, Huygens elve.

15. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ÉS RENDSZEREK 152

15.1. **Lineáris egyenletek** 152
Inhomogén lineáris egyenlet, komplex alak. Harmonikus és csillapított kényszerrezgés. Általános másodrendű egyenlet, az állandók variálásának elve.

15.2. **Nemlineáris első és másodrendű egyenletek** 154
Szétválasztható, egzakt, homogén, Bernoulli, Riccati és Euler típusú egyenletek. Anharmonikus rezgések, nagy és kis amplitudók. Az inga kis lengései, perturbációszámítás sorfejtéssel. Kepler problémája. Spontán bifurkáció.

15.3. **Lineáris rendszerek** 158
Mátrix analitikus függvényei, az exponenciális sor. Liouville képlete. Inhomogén rendszer megoldóképlete, másodrendű rendszerek. Megoldás sajátvektorokkal. Többszörös sajátértékek, belső rezonancia. Jordan blokkok, az exponenciális sor redukciója. Kvázipolinomok.

15.4. **Változó együtthatós rendszer, az állandók variálása** 161
A homogén rendszer általános megoldása, Vronski determináns. Inhomogén rendszer, az állandók variálása. Magasabbrendű egyenletek.

15.5. **Általános elmélet** 162
Lipschitz feltétel, lokális megoldások létezése és egyértelműsge. Grönwall lemmája, globális megoldások. Az általános megoldás tulajdonságai, variációs rendszer. Stacionárius pontok, a stabilitás fogalmai, attraktor. Lineáris rendszer Laplace transzformáltja, Ljapunov tétele. Ljapunov függvény, csillapított nemlineáris rezgések stabilitása. Fázisáramlás, Liouville tétele.

15.6. **Peremérték feladatok, Fourier módszere** 165
A harmonikus oszcillátor, Dirichlet és Neumann peremfeladatai. Sturm - Liouville egyenletek. A változók szétválasztásának módszere, a hővezetés egyenlete és a hullámegyenlet. Dirichlet feladat, inhomogén egyenletek és a sajátérték feladat. Laplace és Poisson egyenletei a síkon. Téglalap és körtartomány Dirichlet és sajátérték problémája. Bessel függvények és tulajdonságaik. Laplace operátora a gömbön, Legendre polinomok és a gömbfüggvények.

16. AZ ELMÉLETI MECHANIKA ALAPJAI 173

16.1. **Variációszámítás** 173
Általánosított koordináták, Lagrange függvény és a legkisebb hatás elve.
Euler - Lagrange egyenletek. Konvex dualitás, Legendre transzformáció.
A Hamilton függvény, Hamilton egyenletei. Az energia megmaradásának elve.

16.2. **A Hamilton - Jacobi egyenlet:** 176
A HJ egyenlet fizikus levezetése. A szabad mozgás esete, viszkózus közelítés, Hopf képlete. Dinamikus programmozás, Bellman elve. A HJ egyenlet klasszikus megoldásai.

16.3. **A Burgers egyenlet** 177
A HJ és a Burgers egyenlet kapcsolata. A karakterisztikák módszere, a megoldás megszakadása, gyenge megoldások. Példák: lökéshullámok, a megoldás egyértelműségének megszűnése, információvesztés. Rankine és Hugoniot szakadási feltétele. A Lax féle entrópia egyenlőtlenség.

17. VÁLOGATOTT PROBLÉMÁK ÉS MEGJEGYZÉSEK 180

17.1. **Lineáris algebra és analízis.** 180
17.2. **Mátrixok analitikus függvényei** 183

Szóhasználat, jelölések.

Ebben a szakaszban az általánosan használt jelöléseket foglaljuk össze.

Logika: Az $X := Y$, vagy $Y =: X$ formula azt jelzi hogy az Y magyarázattal új szimbólumot vezettünk be, melynek neve X , míg $X_1 \equiv X_2$ azonos objektumokat jelöl. Az $\exists$ logikai kvantor azt jelzi, hogy az utána álló objektum létezik, $\forall$ pedig arra utal, hogy az utána álló elemek mindegyike rendelkezik a vonatkozó tulajdonsággal.

Halmazok és függvények: Az X halmaz akkor ismert, ha bármely x objektumról meg tudjuk mondani, hogy eleme (pontja) az X-nek, vagy nem; ezt $x \in X \equiv X \ni x$, illetve $x \notin X$ jelöli. $A \subset X$: A az X halmaz részhalmaza. $A := \{x \in X : Y\}$: az X halmaz Y tulajdonsággal jellemzett elemeinek halmaza. Mindig csak egy ismertnek tekinthető X alaphalmaz elemeiről és részhalmazairól illik beszélni, az $\emptyset$ üres halmaz minden halmaznak része. Ha már felírtunk egy képletet vagy más összefüggést, azt mindig úgy értjük hogy a benne szereplő objektumok mind léteznek. Például, $x \in A$ feltételezi hogy az A halmaz nem üres. Adott X alaphalmaz esetén I_A az $A \subset X$ indikátora, $\mathsf{I}_A(x) = 1$ ha $x \in A$, $\mathsf{I}_A(x) = 0$ ha $x \notin A$; $A \cup B$: az $A, B \subset X$ halmazok egyesítése; $\cup A_n$: az A_n halmazok egyesítése; $A \cap B$: az A, B halmazok metszete; $\cap A_n$: az A_n halmazok metszete; A^c : az $A \subset X$ komplementuma; $A \backslash B := A \cap B^c$: az A és B halmazok különbsége ; $A \cap B = \emptyset$: A és B diszjunkt halmazok; $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, és $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ azonosságok; $X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\, y \in Y\}$: az (x, y) rendezett párok halmaza, az X és Y halmazok Descartes szorzata; $X^2 \equiv X \times X$; X^n : az X halmaz elemeiből alkotható $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_k \in X$, n hosszúságú sorozatok halmaza. $f : X \mapsto Y$: az f függvény (leképezés) az X minden eleméhez hozzárendeli az Y halmaz egy, és csak egy $y = f(x)$ elemét. $D_f := X$ az f értelmezési tartománya, az $(x, f(x))$ párok halmaza az f gráfja. $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ az f lehetséges értékeinek halmaza, az X képe. Az f leképezés kölcsönösen egyértelmű ha $x \neq x'$ esetén $f(x) \neq f(x')$. Ha $Y = f(X)$ akkor $(f)^{-1} : Y \mapsto X$ az $f : X \mapsto Y$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverze; $(f)^{-1}(y) = x$ acsak $y = f(x)$, vagyis $(f)^{-1}(f(x)) = x \;\; \forall x \in X$ és $f\big((f)^{-1}(y)\big) = y \;\; \forall y \in Y$. $f : X \leftrightarrow Y$ azt jelenti hogy $f : X \mapsto Y$ kölcsönösen egyértelmű és $Y = f(X)$. Az $f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$, $U \subset Y$ inverz leképezés akkor is megtartja a halmazalgebrai műveleteket ha f nem kölcsönösen egyértelmű. Például, $f^{-1}(\cap U_\gamma) = \cap f^{-1}(U_\gamma)$, $f^{-1}(\cup U_\gamma) = \cup f^{-1}(U_\gamma)$, $f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c$.

Alaphalmazok és műveletek: $\mathbb{N}$: a természetes számok halmaza; $\mathbb{Z}$: az egész számok; $\mathbb{Z}_+$: a nemnegatív egészek; $\mathbb{R}$: a valós számok; $\mathbb{C}$: a komplex számok; $\mathbb{R}_+$: a nemnegativ számok halmaza; $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ zárt intervallum, mindig véges; $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} :$

$a < x < b\}$ nyilt intervallum, végtelen is lehet. $\mathbb{R}^d$: a d-dimenziós Euklideszi tér; $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$; $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$: az $x_1, x_2, ..., x_d$ koordinátákkal adott vektor, az $\mathbb{R}^d$ tér általános eleme; $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} \equiv \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle$: skaláris szorzat; $|\mathsf{x}| := \sqrt{\mathsf{x} \cdot \mathsf{x}}$: az x vektor hossza; $\mathsf{r} = x\mathsf{i} + y\mathsf{j} + z\mathsf{k}$ az $\mathbb{R}^3$ tér helyvektora; $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$: az $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok vektoriális szorzata; $K_\delta(\mathsf{x})$: az $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d$ pont δ sugarú környezete; $z = x + \imath\, y \equiv \operatorname{Re} z + \imath \operatorname{Im} z\,, x, y \in \mathbb{R}$: komplex szám; $\bar{z} := \operatorname{Re} z - \imath \operatorname{Im} z$ a z komplex szám konjugáltja; $|z|^2 = z\bar{z}$; $\operatorname{Arg} z$ a $z = |z|e^{\imath\varphi}$ poláris alakban felírt komplex szám φ irányszöge (argumentuma); $\det A$: az A négyzetes mátrix determinánsa, $A^\top$ a transzponáltja; $\lim x_n = x$ azaz $x_n \to x$: az x_n sorozat határértéke x amint $n \to \infty$; $x_n = O(y_n)$: az x_n/y_n sorozat korlátos; $x_n = o(x_n)$ azaz $x_n \ll y_n$: $x_n/y_n \to 0$; $x_n \approx y_n$: $x_n/y_n \to 1$; f' : az f valós függvény deriváltja; $\dot{\varphi}$: a $\varphi = \varphi(t)$ deriváltja ha t az idő; $f^{(n)}$: az f valós vagy komplex függvény n-ik deriváltja; $\partial_x f \equiv f'_x$: parciális differenciálás az x változó szerint; $\nabla f \equiv \operatorname{grad} f$: az f differenciálható függvény parciális deriváltjaiból álló vektor, a gradiens; $f''_{x,y} \equiv \partial_x \partial_y f$; $\nabla^2 f$: a kétszer differenciálható f függvény második parciális deriváltjaiból álló mátrix.

Függvényterek: $C(X) \supset C_b(X) \supset C_c(X)$: az X halmazon folytonos, korlátos, illetve kompakt halmazon kívül eltűnő függvények terei, $\|f\| = \sup |f(x)|$ a C_b tér normája; $D^k(X) \supset C^k(X)$: k-szor differenciálható, illetve folytonosan differenciálható függvények; $C^k_\delta(x_0)$: az x_0 egy környezetében k-szor folytonosan differenciálható függvények; $L^1(\mu)$: a μ mérték szerint integrálható függvények tere, $\|f\|_{1,\mu}$ az $L^1(\mu)$ tér normája.

VALÓS SZÁMOK ÉS FÜGGVÉNYEK

Ez az első szemeszter anyaga, de az 5. 6. 7. és 8. fejezetek, különösen az utóbbi kettő, azt messze meghaladó ismereteket tartalmaznak. A későbbi félévek során ezek egyrésze aztán mint kötelező anyag kerül elő.

1. KONVERGENS SOROZATOK ÉS SOROK

A valós szám alapfogalom, bár a méginkább alapfogalomnak tekintendő természetes számok halmazából kiindulva megkonstruálható a valós számok halmaza is, de erre itt nincs idő.

1.1. **A természetes számok halmaza, kombinatórika.** Peano axiómái szerint a természetes számok $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$ halmazának van első eleme, az 1, és minden $n \in \mathbb{N}$ elemhez van egy utána következő $n' \equiv n+1$ újabb elem úgy, hogy az elsőből kiindulva az utána következő elemek felsorolásával minden természetes számot pontosan egyszer kapunk meg, tehát $2 = 1' = 1+1$, $3 = 2' = 2+1 = 1+1+1$, és így tovább. [1] A természetes számok felsorolásával a rendezés $n < m$ relációját is definiáltuk. Ezután bevezetjük az összeadás és a szorzás műveleteit, majd a kivonással együtt az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazát, az osztással együtt pedig a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát is.

Leszámlási feladatok: Az X halmaz elemeiből alkotható n hosszúságú sorozatok halmazát X^n jelöli. Ha X elemeinek száma m, akkor a fenti sorozatok száma éppen m^d mert a sorozatok felírásakor mindegyik pozíciónál m lehetőségünk van, és ezek összeszorzódnak. Az X véges halmaz elemeinek valamely sorbarendezését permutációnak nevezzük. Valamely n elemű halmaz permutációinak megszámolásához csak azt kell meggondolni, hogy egy sorbarendezés elkészítésekor az első pozíciónál n, a másodiknál $n-1$, a harmadiknál $n-2$, stb lehetőségünk van, tehát a permutációk száma $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n(n-1)!,$. Ezután n elemből k kiválasztása, a kombinációk leszámlálása úgy történhet hogy először k hosszúságú sorozatokat képezünk úgy, hogy a már kiválasztott elemeket újból nem használjuk fel. Az ilyen sorozatok száma $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$, és $k!$ sorozat áll ugyanazokból az elemekből, tehát a kombinációk száma a binomiális együttható:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{1.1}$$

Az elnevezés az indukcióval, de kombinatorikus okoskodással is könnyen bizonyítható binomiális tételhez fűződik,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\,.$$

Itt azt kell észrevenni hogy az n tényezős szorzat kifejtésekor $a^k b^{n-k}$ együtthatója éppen annyi, ahányféleképpen a k darab a tényezőt ki lehet választani.

1.2. **Algebrai műveletek és egyenlőtlenségek.** A valós számok $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ halmaza, a számegyenes olyan algebrai struktúra amelyben a két alapművelet és azok inverzei, valamint a rendezés relációja vannak definiálva. Az összeadás és a szorzás is asszociatív és kommutatív művelet, kapcsolatukat a disztributív tulajdonság fejezi ki. Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = y$ egyenlet egyértelműen oldható meg, vagyis adott $a, y \in \mathbb{R}$ esetén pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$ szám van hogy $y = ax$, nevezetesen $x = y/a$.

A műveletek és a rendezés kapcsolatáról azt kell leszögezni, hogy $0 < x^2$ $\forall x \neq 0$, továbbá igaz egyenlőtlenség érvényes marad ha mindkét oldalához ugyanazt a számot adjuk hozzá, illetve ha mindkét oldalt ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk meg. Tehát azonos irányú

[1] Végső soron ez a teljes indukció mint bizonyítási módszer logikai háttere, és ez teszi lehetővé sorozatok $x_{n+1} = f(x_n)$ alakú rekurzív konstrukcióját is, ahol az x_1 első elemet, és a meglévő x_n elemből a következő képzésének f szabályát kell megadni. X megszámlálható halmaz, ha az elemeit az $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ módon fel tudjuk sorolni. Táblázatba elrendezve látható, hogy a természetes számokból alkotható párok $\{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ halmaza megszámlálható, és így a racionális számok halmaza is az.

egyenlőtlenségeket mindig össze lehet adni, de összeszorozni csak akkor szabad őket ha egyik oldal sem negatív.

Indukcióval bizonyítható az $x > -1$ esetén érvényes $(1+x)^n \geq 1+nx$ Bernoulli egyenlőtlenség. ♡ A feltevés szerint $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, tehát az indukció tényleg működik. □ Ha $x > 0$ akkor az állítás a binomiális tételből is azonnal következik.

Az $x \in \mathbb{R}$ szám $|x|$ abszolút értéke x és $-x$ közül a nagyobb, $|xy| = |x|\,|y|$ és $|x+y| \leq |x|+|y|$ mindig igaz. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos, ha van olyan K szám hogy $|x| \leq K\ \forall x \in A$. Ha csak azt tudjuk hogy $x \in A$ esetén $x \leq K$, illetve $x \geq K$, akkor azt mondjuk hogy A felülről, illetve alulról korlátos.

A $\mathbb{C}$ komplex számsík tulajdonképpen valós számpárokból áll, a $z = x + \imath\, y$ írásmód, ahol $\imath := \sqrt{-1}$ a képzetes egység, a műveleti szabályokat is megadja. Ezek ugyanazok mint a valós számok esetében. A $z = x + \imath\, y$ komplex szám abszolút értéke $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$, itt is igaz hogy $|z+w| \leq |z|+|w|$ és $|zw| = |z|\,|w|$.

Elemi függvények: Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ függvény monoton nő, illetve monoton fogy, ha $x, y \in X$ és $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$, illetve $f(x) \geq f(y)$. Ha itt $f(x) < f(y)$, illetve $f(x) > f(y)$ áll, akkor szigorúan monoton függvényekről beszélünk. Az $f(x) = x^n$ függvény mindenütt értelmezve van, és az $\mathbb{R}_+$ pozitív félegyenesen szigorúan monoton nő. Elég egyszerű függvények a szintén mindenütt definiált $p_n(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinomok, ahol $a_0\,, a_1\,, ...a_n$ adott valós számok. A két polinom hányadosaként definiált racionális függvények csak ott vannak értelmezve ahol a nevező nem 0. Például, $x^{-n} = (1/x)^n$, és $x^0 = 1$ ha $x \neq 0$.

Az $y = x^2$ egyenletnek $y \geq 0$ esetén pontosan egy nemnegatív valós megoldása van, ezt $x := \sqrt{y}$ jelöli. Eszerint négyzetgyököt tartalmazó kifejezések csak akkor értelmesek, ha a gyök alatti mennyiség nem negatív. Hasonlóan, ha $y, x \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $y = x^n$ megoldása $x := y^{1/n}$, végül $x^\alpha := (x^{1/n})^m$ ha $\alpha = m/n \in \mathbb{Q}$ és $x \geq 0$. Az x^α függvény is szigorúan monoton nő a pozitív félegyenesen, $f(x) = x^\alpha$ inverz függvénye $(f)^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$.

Az $a^x > 0$ exponenciális függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető ha $a > 0$, de ehhez a műveleti szabályok önmagukban már nem elegendőek. Érvényesek az $a^{x+y} = a^x\, a^y$ és $(a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$ azonosságok. Ha $a > 1$, akkor a^x mindenütt szigorúan monoton nő, és az $y = a^x$, egyenlet megoldása $x = \log_a y$, vagyis $\log_a a^x = x\ \forall x \in \mathbb{R}$; a logaritmus az exponenciális függvény inverze. A trigonometrikus függvényeket egyenlőre geometriai szemléltetés segítségével definiáljuk; $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ és $\operatorname{tg}\varphi$ argumentuma ívmértékben van megadva, a teljes szög 2π, az egységkör kerülete.

1.3. **Konvergens sorozatok.** Az $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat konvergens ha van olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, a sorozat határértéke, melyhez $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy hogy $|x_n - x| < \varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$, tehát az x pont minden $K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$ környezete, véges számú kivétellel, a sorozat minden elemét tartalmazza. Látható hogy konvergens sorozat határértéke egyértelműen meghatározott szám. A tényállást $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, vagy $x_n \to x$ jelöli, magát az eljárást határátmenetnek nevezzük. Biztosan konvergens az a sorozat amelynek véges sok kivételével minden tagja ugyanaz.

Szemléletesen nyilvánvaló, de logikailag nem következik hogy az $x_n = 1/n$ sorozat határértéke 0. Ezt a hézagot tölti be Arkhimédész axiómája: *Minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz van nála nagyobb $n \in \mathbb{N}$ természetes szám.*

Kitüntetett szerepet játszanak a monoton sorozatok. Az $x_n\,, n \in \mathbb{N}$ sorozat monoton nő, illetve monoton fogy ha $x_{n+1} \geq x_n$, illetve $x_{n+1} \leq x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Az eddigi axiómákból még nem következik hogy minden monoton sorozatnak van határértéke; ha csak a racionális számokat ismernénk, akkor ez nem is volna igaz.

Divergens sorozatok: Ha az x_n sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk hogy divergens, aminek több változata is van. Például, az $x_n := (-1)^n$, $x_n = (-n)^n$, $x_n := n$ és $x_n := -n^2$ sorozatok egyaránt divergensek, de az utóbbi kettőnek van határértéke. A $\pm\infty$ ideális elemek nem tartoznak a számegyeneshez, ezért nem mondhatjuk azt hogy az $x_n := n$ sorozat konvergens. Definíció szerint: $x_n \to +\infty$ azt jelenti, hogy tetszőleges K számnál a sorozatnak csak véges számú tagja lehet kisebb. Az $x_n \to -\infty$ reláció jelentése hasonló. Ezekben az esetekben azt mondjuk hogy a sorozat nem konvergens, de határértéke azért van. Világos hogy $x_n \to +\infty$ esetén $\lim 1/x_n = 0$. Bernoulli miatt $q^n \to +\infty$ ha $q > 1$, tehát $|q| < 1$ esetén $q^n \to 0$.

Hasznos észrevételek és szabályok: *Minden konvergens sorozat korlátos*, vagyis van olyan K szám hogy $|x_n| \le K\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Ha $x_n \to x \ne 0$, akkor a sorozat egy idő múlva jeltartó,* vagyis van olyan n_0 küszöbszám hogy x és x_n előjele ugyanaz ha $n > n_0$; és ha $x > \alpha$ *akkor véges számú kivétellel* $x_n > \alpha$, vagyis van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ hogy $x_n > \alpha$ ha $n > n_1$. *A konvergencia ténye, és a határérték maga sem változik meg, ha a sorozat véges sok elemét megváltoztatjuk, vagy elhagyjuk.* Ha n_k, $k \in \mathbb{N}$ természetes számok szigorúan monoton növő sorozata, akkor $y_k := x_{n_k}$, $k = 1, 2, ...$ az x_n, $n = 1, 2, ...$ sorozat részsorozata. *Ha az x_n sorozatnak van határértéke, akkor minden részsorozatának is van, éspedig ugyanaz a határértéke, ami végtelen is lehet.* Ha viszont az x_n *monoton sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a teljes sorozat is konvergens.*

Az algebrai műveletek a határátmenettel felcserélhetőek. Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ akkor $x_n + y_n \to x + y$ és $x_n y_n \to xy$, de $x_n/y_n \to x/y$ csak akkor írható le gond nélkül ha $y \ne 0$; ha $x = y = 0$ akkor még minden lehetséges. *Egyenlőtlenségek is érvényben maradnak a határátmenet után*: ha $x_n \le y_n$ akkor $\lim x_n \le \lim y_n$. Innen adódik a rendőrelv: ha $x_n \le y_n \le z_n$ és $\lim x_x = \lim z_n = y$ akkor $\exists \lim y_n = y$. Ezek az alapvető szabályok a definíció és a háromszög egyenlőtlenség egyszerű következményei. ♡ Például, a később is gyakran használatos

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)\, y + x_n\, (y_n - y) = (x_n - x)\, y + x\, (y_n - y) + (x_n - x)(y_n - y)$$

azonosság alapján $|x_n y_n - xy| \le (x + y)\delta + \delta^2$ hacsak $|x_n - x| \le \delta$ és $|y_n - y| \le \delta$. Akármi is az előre adott $\varepsilon > 0$ szám, $\exists\ \delta > 0$ úgy hogy $(x+y)\delta + \delta^2 < \varepsilon$, tehát $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$. A hányadosra vonatkozó állítás megértéséhez először azt kell meggondolni, hogy $|y_n| > |y|/2$ ha n elég nagy, ilyenkor tehát

$$|1/y_n - 1/y| = |y_n - y||y_n y|^{-1} \le 2|y_n - y||y|^{-2},$$

ami tetszőlegesen kicsi lesz ha $|y_n - y|$ elég kicsi, vagyis $1/y_n \to 1/y$. Mivel $x_n/y_n = x_n\,(1/y_n)$, alkalmazható a szorzat és a határátmenet felcserélhetősége. □ A rendezés megmaradása a tranzitív tulajdonságnak köszönhető, $x - \varepsilon < x_n \le y_n < y + \varepsilon\ \forall\ \varepsilon > 0$ ha n elég nagy.

Komplex számsorozatok határértékét betű szerint ugyanúgy definiáljuk mint a valós esetben. A műveletek folytonossága is érvényben marad; mindez annak köszönhető hogy a komplex számok is eleget tesznek a háromszög egyenlőtlenségnek, és $|zw| \le |z||w|$.

Néhány egyszerű határérték: Monotonitás és a rendőrelv miatt $n^\alpha \to +\infty$ ha $\alpha > 0$, míg a $q^n \to +\infty$ ha $q > 1$ határérték igazolásához Bernoulli egyenlőtlenségére is szükség volt. Szintén Bernoulli alapján, minden $\varepsilon > 0$ számhoz van n_ε úgy, hogy $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon > \sqrt{n}$ ha $n > n_\varepsilon := \varepsilon^{-2}$, tehát $n^{1/2n} \to 1$, vagyis $n^{1/n} \to 1$ a szorzási szabály alapján. Mivel $n! > m^{n-m}$ ha $1 < m < n$, és azt már tudjuk hogy $(m^m)^{1/n} \to 1$ ha $n \to \infty$ mialatt m rögzített, $(n!)^{1/n} \to +\infty$. Tipikus feladat határérték számolására végtelen összegek kiértékelése. Például, $S_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$, tehát $S_n \to (1-q)^{-1}$ ha $|q| < 1$.

Sorozatok nagyságrendje: Hihetetlenül hasznos fogalom. Az $x_n \approx y_n$ jelölést a $\lim a_n/b_n = 1$ esetben használjuk. $x_n = O(y_n)$ olyan K szám létezését jelenti hogy $|x_n| \le K|y_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$, míg $x_n = o(y_n)$ vagy $x_n \ll y_n$ közös jelentése: $x_n/y_n \to 0$. Eszerint $x_n \to 0$ úgy is felírható hogy $x_n = o(1)$, $x_n = O(1)$ pedig azt jelenti hogy az x_n sorozat korlátos. Például, $\log_a n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$, ahol $a, q > 1$ és $\alpha > 0$ tetszőleges számok. Ezek közül az elsőt később, a logaritmus pontos definíciója után bizonyítjuk. Az utolsó nyilvánvaló, hiszen $n!/n^n < 1/n$. Mivel $(n!)^{1/n} \to \infty$, $q^n \ll n!$ is azonnal következik. $n^\alpha \ll q^n$ ha $q > 1$ igazolásához először azt kell észrevenni, hogy az előző szakaszban voltaképp azt is láttuk hogy $\sqrt{n} \ll q^n$ ha $q > 1$. Arkhimédész szerint van olyan $m \in \mathbb{N}$ hogy $n^\alpha \le n^m = (\sqrt{n})^{2m}$, továbbá $q^{1/2m} > 1$ is igaz, tehát $n^\alpha \ll q^n$ a szorzási szabály alapján következik.

1.4. **A folytonossági axióma négy alakja.** Az önmagáért is érdekes $x_{n+1} = f(x_n)$, ahol $f(x) := x/2 + 1/x$ és $x_1 > 0$ algoritmus konvergenciájának megértéséhez a számegyenes újabb tulajdonságát kell tisztázni. Azt látjuk hogy $x > 0$ esetén $f(x) \ge \sqrt{2}$, továbbá $f(x) \le x$ ha

$x \geq \sqrt{2}$, [2] vagyis $x_2 \geq x_3 \geq \cdots x_n \geq \sqrt{2}$. Ha tudnánk hogy a sorozat konvergens, akkor az x határértékét az $x = f(x)$ egyenlet pozitív gyökeként azonosíthatnánk, ami éppen $x = \sqrt{2}$.

Konvergens sorozatok létezését garantálja (posztulálja) a folytonossági axióma legegyszerűbb alakja: *Minden korlátos monoton sorozat konvergens.* Például, az $x_n := 1/n$ sorozat monoton fogy, tehát létezik az x határértéke. Viszont $y_n := 1/2n$ határértéke is x, vagyis $x = x/2$, amiből $x = 0$. Eszerint Arkhimédész axiómája a folytonossági axióma következménye. Az axióma számos egyenértékű megfogalmazása közül először Bolzano és Weierstrass tételét igazoljuk.

Tétel 1.1. *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizony: Azt kell megmutatni hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata. Az x_n sorozat x_m eleme csúcselem, ha $k > m$ esetén $x_k \leq x_m$. Ha végtelen sok csúcselem van, akkor ezek sorozata monoton csökkenő. Ha csúcselem egyáltalán nincs, akkor minden elem után van nála nagyobb, tehát szigorúan növekvő sorozat választható ki. Ugyanezt tesszük akkor is, ha a csúcselemek száma véges; a növekvő sorozat kiválasztását az utolsó csúcs után kezdjük. □

A tétel állításából a monoton sorozatok konvergenciájáról szóló axióma azonnal következik; ha monoton sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor maga a sorozat is konvergens. [3]

A határérték ismerete nélkül is jellemezhetjük a konvergens sorozatokat: Az $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ sorozat Cauchy sorozat ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε küszöb, hogy $n, m > n_\varepsilon$ esetén $|x_n - x_m| < \varepsilon$, vagyis a sorozat vége felé az elemek már nagyon közel vannak egymáshoz.

Tétel 1.2. *Minden konvergens sorozat Cauchy, és fordítva, minden Cauchy sorozat konvergens.*

Bizony: Ha tudjuk hogy $x_n \to x$, akkor a Cauchy tulajdonság az $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x|$ háromszög egyenlőtlenség következménye. Viszont minden Cauchy sorozat korlátos, ezért van konvergens részsorozata: $x_{n_k} \to x$ ha $k \to \infty$. Mivel $|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x|$, a teljes sorozat is az x számhoz konvergál. □

Korlátos és monoton sorozat nyilván Cauchy, tehát tételünkből következik a folytonossági axióma első alakja. [4]

Cantor és Dedekind nevéhez fűződik a következő változat. Az $y \in \mathbb{R}$ szám az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz legkisebb felső korlátja (felső határa), amit $y = \sup A$ jelöl, ha $x \leq y \ \forall x \in A$, de ha $z < y$, akkor van olyan $x \in A$ hogy $x > z$. Ha ilyen y nem található, akkor $\sup A = +\infty$. Hasonló az $\inf A$ legnagyobb alsó korlát (alsó határ) definíciója.

Tétel 1.3. *Minden $A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaznak létezik és véges a legkisebb felső korlátja. Ha A alulról korlátos, akkor $\mathbb{R} \ni \inf A > -\infty$.*

Bizony: Csak az első állítást kell igazolni; felső korlátok olyan K_n fogyó sorozatát konstruáljuk meg, amelynek $K := \sup A$ a határértéke. Legyen K_1 az egész számok közül az első felső korlát, $L_1 := K_1 - 1$, ha tehát $\sup A$ tényleg létezik, akkor biztosan az $[L_1, K_1]$ intervallumban van. K_2 meghatározásához az $[L_1, K_1]$ intervallumot két egyenlő részre osztjuk; az egyik biztosan metszi A-t. Ezután $K_2 := K_1 - 1/2$ ha az felső korlát, $K_2 := K_1$, ha nem, míg $L_2 := K_2 - 1/2$. Az eljárás folytatható: mindegyik K_n felső korlát, és az A halmaznak is mindig lesz pontja az $[L_n, K_n]$ intervallumban, ahol $L_n := K_n - 2^{-n+1}$. Ha most $K_n - 2^{-n}$ is felső korlát, akkor

[2] A számtani és mértani közép tétele szerint $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ha $a, b > 0$, tehát $f(x) \geq \sqrt{2}$. Az $f(x) \leq x$ állítás az $1/x \leq x/2$ egyenlőtlenségre vezet, ami $x \geq \sqrt{2}$ esetén igaz.

[3] Részsorozat véges határértékét a sorozat torlódási pontjának nevezzük, tehát a tétel így is kimondható: *Korlátos sorozatnak van torlódási pontja.*

[4] Azt a tulajdonságot hogy minden Cauchy sorozat konvergens, röviden így nevezzük: a számegyenes teljes. Kompakt az az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyben minden sorozatnak van az A valamelyik eleméhez konvergáló részsorozata. Ha a konvergens részsorozatnak csak a létezését kívájuk meg, akkor a prekompakt vagy relatív kompakt jelzōt használjuk. Minden kompakt tér teljes, de fordítva nem igaz, például $\mathbb{R}$ sem kompakt. Nem ilyen a racionális számok halmaza; a valós számok halmazát végsō soron úgy konstruáljuk meg, hogy a racionális számokhoz hozzávesszük a belōlük alkotható Cauchy sorozatok elképzelt határértékeit: *Minden x valós számhoz van olyan $x_n \in \mathbb{Q}$ sorozat, hogy $x = \lim x_n$.* Ilyen a számot megadó tizedestörtek sorozata. A Cauchy tulajdonság elvi jelentōségū végtelen sok tagból álló összegek, és különféle integrálok értelmezésekor is.

$K_{n+1} := K_n - 2^{-n}$, míg $K_{n+1} := K_n$ az ellenkező esetben, továbbá $L_{n+1} := K_{n+1} - 2^{-n}$. A K_n sorozat (nem feltétlenül szigorúan) monoton fogy, és alulról korlátos, tehát létezik és véges a $K := \lim_n K_n$ határérték. Mivel $x \le K_n\ \forall x \in A$ és $\forall n \in \mathbb{N}$, ez a K is felső korlát. Mivel mindegyik $[L_n, K_n]$ intervallum metszi A-t, és tartalmazza K-t, nincs nála kisebb korlát. Valóban, ha $L < K$ is felső korlát volna, akkor $K - L > 2^{-n}$ esetén $[L_n, K_n]$ az A halmaznak már egyetlen pontját sem tartalmazhatná, tehát tényleg $K = \sup A$. [5] □

Ha most $x_n, n \in \mathbb{N}$ monoton növő sorozat, akkor a fenti tétel szerint éppen $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ az x_n sorozat határértéke. A kör bezárult: *a folytonossági axióma a fenti állítások mindegyikével ekvivalens.* ∗∗ Számsorozat felső és alsó határát is definiáljuk: $\sup x_n := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ és $\inf x_n := \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, továbbá a sorozat felső és alsó határértéke

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{m\to\infty} \sup\{x_n : n > m\} \quad \text{és} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{m\to\infty} \inf\{x_n : n > m\}\,. \tag{1.2}$$

Eszerint $\limsup x_n$ a sorozat legnagyobb, $\liminf x_n$ a legkisebb torlódási pontja. Például, $\limsup x_n = \bar{x}$ azt jelenti hogy ha $y > \bar{x}$, akkor $x_n < y$ véges számú kivételtől eltekintve teljesül. Mivel az $\bar{x}_m := \sup\{x_n : n > m\}$ sorozat monoton fogy, $\underline{x}_m := \inf\{x_n : n > m\}$ pedig monoton nő, a $\limsup x_n \le +\infty$ felső, és a $\liminf x_n \ge -\infty$ alsó határértékek mindig léteznek. Mindig igaz hogy $\liminf x_n \le \limsup x_n$, és a határérték létezésének egyenlőség a feltétele; $\limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n$ ha az utóbbi létezik. Az is látszik hogy $\limsup(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n$, míg $\liminf(x_n + y_n) \ge \liminf x_n + \liminf y_n$. ∗∗

1.5. **Abszolút konvergens sorok.** A $\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ végtelen sor összegét kézenfekvő az $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ részletösszegek sorozatának határértékeként definiálni, ha az létezik. Nemnegatív számokból álló sor részletösszegeinek sorozata monoton nő, tehát a sor összege mindig létezik, legfeljebb $+\infty$ lesz az értéke. Például, az összeget 2^m hosszúságú blokkokra tagolva látható hogy a harmonikus sor divergens, $\sum n^{-1} = +\infty$. Ugyanakkor az $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ alternáló harmonikus sor – Leibniz tétele szerint – konvergens: *Ha az a_n sorozat monoton fogyva tart nullához, akkor az $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$ sor konvergens.* ♡ Csak azt kell észrevenni hogy az S_{2n} részletösszegek sorozata monoton nő, mig S_{2n-1} monoton fogy, tehát $a_n \to 0$ miatt ugyanaz a határértékük. □ Az is látható hogy $|S - S_n| \le a_{n+1}$, ahol $S := \lim S_n$ a Leibniz sor összege.

Ennél érdekesebb az a tény hogy az alternáló harmonikus sor akár úgy is átrendezhető, hogy az összege $+\infty$ legyen, vagy úgy is, hogy a részletösszegei $+\infty$ és $-\infty$ között ingadozzanak. Végtelen összegek esetén tehát sérülhet az összeadás sorrendjének felcserélhetősége, de még az asszociatív tulajdonság is veszélybe kerül. Ha az összeget véges blokkokra osztjuk, vagyis zárójelezzük, és a blokköszegek sorozatát összegezzük, akkor az eredmény a zárójelezés módszerének függvénye lehet. Példa a $\sum(-1)^{n+1}$ összeg. Ilyen rendellenességek nem fordulhatnak elő ha a sor abszolút konvergens, vagyis $\sum |a_n| < +\infty$.

Tétel 1.4. *Minden abszolút konvergens sor konvergens, az összege nem függ az összeadandók sorrendjétől, és tetszés szerint zárójelezhető.*

Bizony: Mivel $m > n$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$|S_m - S_n| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \le R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \le \varepsilon$$

ha n elég nagy, abszolút konvergens sor részletösszegei Cauchy sorozatot alkotnak, tehát a sor konvergens. Azt is látjuk hogy ha $S := \sum a_n$, akkor $|S_n - S| \le R_n$.

∗∗ Az átrendezhetőség bizonyításakor feltehetjük hogy a $\sum a_n$ sor egyik tagja sem nulla, ekkor minden szám csak véges sokszor fordulhat elő a sorozatban. Legyen $\sum b_n$ a $\sum a_n$ átrendezése,

---

[5] A gondolatmenet tartalmazza a Cantor-féle metszettétel legegyszerűbb változatát (=oroszlánfogás). A felezgetési eljárással intervallumok olyan $[L_n, K_n]$ fogyó sorozatát konstruáltuk meg, amelyek mindegyike tartalmazza az elképzelt $\sup A$ számot, feltéve hogy az tényleg létezik. Az intervallumok egyetlen pontra húzódnak össze, ezt kerestük.

vagyis a $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ sorozatban az $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ számok mindegyike pontosan annyiszor szerepel, mint az eredetiben. Jelölje S'_m a $\sum b_n$ sor részletösszegeit, és adott $\varepsilon > 0$ mellett legyen n olyan nagy, hogy $R_n < \varepsilon$. Ezután m növelésével elérhető, hogy $S'_m - S_n$ már csak olyan tagokból áll, melyek eredeti sorszáma n után következik. Ekkor viszont

$$|S'_m - S| \leq |S'_m - S_n| + |S_n - S| \leq R_n + \varepsilon \leq 2\varepsilon\,,$$

amit bizonyítani kellett. Az asszociativitás bizonyítása hasonló. ∗∗ □

Ez az egyszerű de alapvető eredmény lényegében azt mondja, hogy abszolút konvergens sorokkal ugyanúgy számolhatunk, mint azt a véges összegeknél megszoktuk. Azt hogy abszolút konvergens sor összege nem függ az összegzés módjától, jól tükrözi a következő jelölés. Legyen $f : X \mapsto \mathbb{R}$, ahol X tetszőleges megszámlálható halmaz. Ekkor az $f(x)\,, x \in X$ számok összegét az $s = \sum_{x\in X} f(x)$ formulával is felírhatjuk, feltéve hogy a sor abszolút konvergens. Ez az alak már semmiféle utalást sem tartalmaz az összegezés sorrendjére vonatkozóan. Ha egy sor konvergens, de nem nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk hogy a sor feltételesen konvergens.

Sorok szorzásának disztributív tulajdonsága most már egyszerű következmény: *Két abszolút konvergens sor tetszés szerint szorozható össze.* ♡ Arról van szó hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_n\, b_m| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| < +\infty,$$

tehát a $\sum\sum a_n b_m$ számokat tetszőleges sorrendben összegezhetjük. □ A

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0) \tag{1.3}$$

típusú összegzés a Cauchy szorzat, ez főleg a $\sum a_n x^n$ hatványsorok esetén előnyös.

A végtelen mértani sor összege

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{ha } |x| < 1, \tag{1.4}$$

és ilyenkor a sor abszolút konvergens. Az összeg átrendezésével kapjuk hogy

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{ha } |x| < 1\,; \tag{1.5}$$

ez a sor is abszolút konvergens.

Az abszolút konvergencia kritériumai: Számos sor konvergenciájának bizonyítása vezethető vissza a mértani sorra.

Majoráns kritérium: *Ha* $|a_n| \leq b_n$ *és* $\sum b_n < \infty$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens.* Ez az állítás szinte nyilvánvaló.

Hányados kritérium: *Ha* $\limsup |a_{n+1}/a_n| = q < 1$, *akkor* $\sum a_n$ *abszolút konvergens.* ♡ Véges sok tag elhagyása az abszolút konvergencia tényén nem változtat, tehát feltehető hogy valamilyen $p < 1$, $p > q$ számmal $|a_{n+1}| \leq p\,|a_n|$ mindig igaz. Ekkor viszont indukcióval $|a_n| \leq p^n |a_0|$ következik, tehát a sornak geometriai majoránsa van. □ Ha viszont $q \geq 1$, akkor a sor általános tagja nem tart nullához, tehát a sor nem lehet konvergens.

Gyök kritérium: *Ha* $\limsup |a_n|^{1/n} = q < 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens.* ♡ Ugyanúgy mint előbb, véges sok tag elhagyása után feltehető hogy $|a_n| \leq p^n$, ahol $p < 1$ de $p > q$, vagyis a majoráns kritérium ismét működik. □ Ha $q \geq 1$, akkor a sor divergens. *Bár a gyök kritérium bizonyítása egyszerűbb mint a hányados kritériumé, ő az erősebb.* ♡ Ha ugyanis $|a_{n+1}|/|a_n| \leq q < 1$ ha $n > m$, akkor

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\,\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\,\cdots\,\frac{|a_2|}{|a_1|}\,|a_1|\,,$$

tehát van olyan C_m szám hogy $|a_n| \le C_m q^n \; \forall n \in \mathbb{N}$, amiből $(C_m)^{1/n} \to 1$ miatt a gyök kritérium következik. $\square$

Semmit sem mondhatunk a $q = 1$ *esetben,* ami például akkor következik be, ha $|a_n| = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. *Megmutatjuk hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < +\infty \quad \text{ha } \alpha > 1, \tag{1.6}$$

de a sor divegens ha $\alpha \le 1$. ♡ A $\sum n^{-1}$ összeget 2^m hosszúságú blokkokra bontva látjuk hogy

$$2^{-m} + (2^m + 1)^{-1} + \cdots + (2^{m+1} - 1)^{-1} \ge 2^m 2^{-m-1} = 1/2\,,$$

tehát a fenti sor $\alpha = 1$, és így $\alpha \le 1$ esetén is divergens. Hasonlóan, ha $\alpha > 1$ akkor az m-ik blokk esetében

$$2^{-m\alpha} + (2^m + 1)^{-\alpha} + (2^m + 2)^{-\alpha} + \cdots + (2^{m+1} - 1)^{-\alpha} \le 2^m 2^{-m\alpha} = 2^{m(1-\alpha)}\,,$$

tehát a jobboldalon konvergens geometriai sort kaptunk, vagyis az eredeti sor is konvergens. $\square$
Számos további nevezetes határérték és összeg elemi úton is meghatározható, de a rövidesen kidolgozandó differenciál- és integrálszámítás sokkal hatékonyabb eszközökkel szolgál.
Hatványsorok: A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ típusú összegek konvergenciájának vizsgálata is a mértani sorra épül, itt x_0 a sorfejtés középpontja, az a_n valós (esetleg komplex) számok a sor együtthatói.

Tétel 1.5. *Valós hatványsor konvergenciájának tartománya intervallum, vagyis van olyan* $R \ge 0$ *szám hogy* $|x - x_0| < R$ *esetén a sor abszolút konvergens, de ha* $|x - x_0| > R$, *akkor a sor divergens.*

Bizony: Tegyük fel hogy az $y \ne x_0$ helyen a sor konvergens, ekkor az $|a_n||y - x_0|^n$ sorozat korlátos. Mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (y - x_0)^n \left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right)^n ,$$

$|x - x_0| < |y - y_0|$ esetén a sornak geometriai majoránsa van, tehát az x helyen is konvergens. $\square$
$**$ A gyökkritériummal kapjuk Cauchy és Hadamard képletét, amely megadja a konvergencia intervallumának R sugarát. *Ha* $\limsup |a_n|^{1/n} = 1/R$, *és* $|x - x_0| < R$, *akkor a hatványsor abszolút konvergens.* Ezt úgy kell érteni hogy ha $\lim |a_n|^{1/n} = 0$, akkor a sor az egész számegyenesen konvergens; persze $R = 0$ is lehetséges. Az is látható hogy $|x| > R$ esetén a hatványsor divergens, a végpontok esete bonyolultabb. Például a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} x^n$ sorok közül az első $(n!)^{1/n} \to +\infty$ miatt a teljes számegyenesen abszolút konvergens, a második típusú sor konvergencia sugara az $\alpha \in \mathbb{R}$ mindegyik értékénél éppen $R = 1$. Ha most $\alpha > 1$, akkor a második sor mindkét végpontban abszolút konvergens, míg az $\alpha \le 0$ esetben mindkettőben divergens. Ha viszont $0 < \alpha \le 1$ akkor a sor $x = 1$ esetén divergens, de feltételesen konvergens ha $x = -1$. $**$

1.6. **Az exponenciális függvény.** A nevezetes Euler féle e számot, ami a "természetes" exponenciális függvény, e^x alapja, az $e_n := (1 + 1/n)^n$ sorozat határértékeként definiáljuk. Már az is szép hogy a sorozat korlátos: Bernoulli szerint

$$\frac{1}{\sqrt{e_{2n}}} = \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)^n \ge 1 - \frac{n}{2n+1} \ge \frac{1}{2}$$

tehát $1 \le e_{2n} \le 4$. Másrészt viszont, megint a Bernoulli egyenlőtlenség alapján

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \ge \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1\,,$$

tehát $e_{n+1} \ge e_n$. Eszerint $e_{2n+1} \le 4$ is igaz, vagyis létezik és véges az $e := \lim_n e_n$ határérték.

Hasonlóan igazolható hogy adott $x \in \mathbb{R}$ mellett az $e_n(x) := (1 + x/n)^n$ sorozat is korlátos és monoton, tehát konvergens; ezt már nem részletezzük, de nem is használjuk. Az $e_n(x)$ függvénysorozat természetes módon, a kamatok folytonos tőkésítésének számolásakor, vagy az $y'(x) = cy(x)$ differenciálegyenet numerikus megoldásakor is előkerül. Érdemes észrevenni hogy

$e_n(x) = (1+1/m)^{mx}$ ha $m := n/x$. Ez az m persze nem mindig egész szám, de azért sejthető hogy előbb vagy utóbb az $e^x = \lim_n e_n(x)$ formula értelmesnek és igaznak bizonyul. Sőt, $e_n(\alpha x) = (1+x/m)^{\alpha m} = e_m^{\alpha}(x)$ ha $m := n/\alpha$ alapján az várjuk hogy $e^{\alpha x} = (e^x)^{\alpha}$ akkor is igaz ha α irracionális szám. [6] A fő gond itt nem az hogy $m = n/x$ nem biztos hogy egész szám, hanem az hogy noha e már megvan, de az $f(x) = e^x$ exponenciális függvényt általános $x \in \mathbb{R}$ esetén még nem definiáltuk. Az alábbiakban e^x hatványsorát állítjuk elő.

A binomiális tétel szerint

$$e_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\,\frac{x^k}{k!}\,, \quad \text{ahol} \quad a_{n,k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\,.$$

Látjuk hogy $0 \le a_{n,k} \le 1$, és minden rögzített k mellett $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$, tehát okkal vesszük elő az $e(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ hatványsort. A hányados vagy gyök kritérium segítségével könnyen igazolható hogy ez a sor mindenhol abszolút konvergens. [7]

Legyen $|x| < r$ és $n > m$, ekkor

$$|e(x) - e_n(x)| \le \sum_{k=0}^{m} |1 - a_{n,k}|\,\frac{r^k}{k!} + R_m(r)\,,\ R_m(r) := \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \le \frac{r^{m+1}}{(m+1)!}\,e(r)\,; \tag{1.7}$$

az R_m maradéktag becslése $(m+1+k)! \ge (m+1)!\,k!$ következménye. Mivel az e^x hatványsor abszolút konvergens, a második összeg tetszőlegesen kicsi lesz ha m elég nagy; ezt $r^n \ll n!$ igazolja. Pontosabban, adott $r > 0$ mellett minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan m_ε hogy $R_m(r) < \varepsilon/2$ ha $m > m_\varepsilon$. Rögzítsük m-et ennek megfelelően, vagyis az első összeg tagjainak száma nem változik amint $n \to \infty$. Mivel mindegyik tag nullához tart, elérhetjük hogy összegük is kisebb legyen mint $\varepsilon/2$, tehát $e(x) = \lim_{n\to\infty} e_n(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ezután azt igazoljuk hogy $e(x+y) = e(x)\,e(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, tehát joggal nevezhetjük exponenciális függvénynek: $e(x) \equiv e^x$, ahol $e := 1 + 1/2 + 1/6 + \cdots + 1/n! + \cdots$ az Euler féle szám. Az e^x és e^y abszolút konvergens sorok Cauchy szorzatát képezve valóban

$$e(x)\,e(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^k y^m}{k!\,m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e(x+y)$$

következik a binomiális tétel alapján. [8] Kényesebb az $e(\alpha x) = e^{\alpha}(x)$ azonosság irracionális α esetében, ezt később tisztázzuk.

Összefoglalva a fentieket:

$$e^x \equiv \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \tag{1.8}$$

továbbá $e^{x+y} = e^x\,e^y\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Látható hogy $e^0 = 1$ és $e^x >, 0$ tehát $e^y > e^x$ ha $y > x$; *az exponenciális függvény szigorúan monoton.*

Ismét a Bernoulli egyenlőtlenség szerint $e_n(x) = (1 + x/n)^n \ge 1 + x$ ha $x > -n$, tehát $e_n(x) \to e^x$ miatt $e^x \ge 1{+}x$. A sorfejtés alapján viszont, lásd R_m becslését (1.7) után, $e^x{-}1{-}x \le$

---

[6] Fizikai okoskodásokban gyakori a mértékegység megváltoztatása, és az az érv hogy ez az *átskálázás a törvényt nem változtatja meg.*

[7] Az $e_n(x) \to e(x)$ állítás Weierstrass sorok dominált konvergenciájáról szóló tételéből egyszerűen következik. Legyen $|a_{n,k}| \le b_k$ ha $n, k \in \mathbb{N}$, és tegyük fel hogy az $\bar{S} := \sum b_k$, és az $S^{(n)} := \sum_k a_{n,k}$ sorok mind konvergensek. *Ha $a_{n,k} \to a_k\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ amint $n \to +\infty$, akkor az $S := \sum a_k$ sor is konvergens, és $S = \lim S^{(n)}$.* ♡ A bizonyítás azon múlik hogy a szimultán majorálás miatt az $S^{(n)}$ sorok konvergenciája egyenletes: minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan m_ε küszöbszám hogy $|S_m^{(n)} - S^{(n)}| < \varepsilon$ ha $m > m_\varepsilon$, ahol $S_m^{(n)}$ az $S^{(n)}$ sor m-ik részletösszege. Valóban, $|a_k| \le b_k$ miatt az S sor is konvergens, söt $|S_m - S| < \varepsilon$ is igaz ha $m > m_\varepsilon$. Tekintve hogy $|S^{(n)} - S| \le |S^{(n)}{-}S_m^{(n)}| + |S_m^{(n)}{-}S_m| + |S_m{-}S|$, az állítás ugyanúgy adódik mint $e_n(x) \to e(x)$, elöször $m > m_\varepsilon$ rögzített értéke mellett elvégezzük az $n \to +\infty$ határátmenetet, ettöl a becslés középsö tagja eltünik, vagyis limsup $|S^{(n)}{-}S| \le 2\varepsilon$. □

[8] Az 5. szakaszban azt is megmutatjuk hogy az $f(x+y) = f(x)f(y)$ Cauchy féle függvényegyenlet minden folytonos és nem azonosan nulla megoldása $f(x) = e^{\lambda x}$ alakú, azaz exponenciális függvény.

$(x^2/2)e^{|x|}$, tehát $1+x \le e^x \le 1+x+(x^2/2)e^{|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Ha tehát $x_n \to 0$, akkor $e^{x_n} \to 1$ és $(1/x_n)(e^{x_n}-1) \to 1$. Az $e^{x+y} = e^x e^y$ azonosság alapján azt is látjuk hogy $x_n \to x$ esetén $e^{x_n} = e^{x_n - x} e^x \to e^x$ és $(x_n - x)^{-1}(e^{x_n} - e^x) \to e^x$ amint $x_n \to x$: *az exponenciális függvény folytonos, sőt differenciálható.* Az is látható hogy $e^y \ge e^x + e^x(y-x)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Ez utóbbiak úgy is elmondhatóak, hogy az e^x függvény gráfjához az x_0 pontban húzott érintő egyenlete $y = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)$. Látható hogy e^x mindenütt az érintője fölött halad, tehát konvex függvény. Végül a mértani sor összegképletével

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/n} = \frac{1/n}{1-e^{1/n}} \to 1\,,$$

tehát az e^{-x} függvény és az x tengely pozitív fele közé eső terület éppen 1.

2. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

Egy valós függvény gyakran nem a teljes számegyenesen, hanem annak csak egy X részhalmazán van definiálva. Az X értelmezési tartomány elvileg tetszőleges, de legtöbbször intervallum, ami végtelen is lehet. Ilyenkor a függvény viselkedését azokban a pontokban is vizsgálhatjuk, amelyek ugyan nem tartoznak az X értelmezési tartományhoz, de annak pontjaival tetszőlegesen megközelíthetőek.

2.1. **Definíciók.** Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in X$ helyen, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $\delta > 0$ úgy, hogy $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ hacsak $|x - x_0| < \delta$ és $x \in X$. A tényállást $f \in C(x_0)$ jelzi, és $f \in C(X)$ ha f az X minden pontjában folytonos. Nyilvánvaló hogy *folytonos függvény a határátmenettel felcserélhető,* vagyis $f(x_0) = \lim f(x_n)$ ha $x_n \to x_0$ és $x_0, x_n \in X$. Ezzel a folytonosság ekvivalens definícióját kaptuk, $\heartsuit$ mert ha valamely $\varepsilon_0 > 0$ számhoz egyik $\delta = 1/n$ sem volna jó, akkor kiválaszthatnánk olyan $x_n \in X$ sorozatot hogy $|f(x_n) - f(x_0)| \ge \varepsilon_0$, pedig $|x_n - x_0| < 1/n$. $\square$

Folytonos függvény értelmezési tartománya többnyire nyilt vagy zárt intervallum, ekkor a $C(a,b)$ vagy $C[a,b]$ jelölést használjuk; a második esetben a végpontokban természetesen csak féloldalas folytonosságot követelünk meg. Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ úgy hogy $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ha $x, y \in X$ és $|x - y| < \delta$.

Előfordul hogy egy függvény definíciója az értelmezési tartományon kívüli pontokra is kiterjeszthető, például $f(x) := x/x$ az $x = 0$ helyen formálisan nincs definiálva, de ésszerű azt mondani hogy $f(0) = 1$. Az $x \in \mathbb{R}$ pont az $X \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja ha található olyan $x \ne x_n \in A$ sorozat, hogy $x_n \to x$. Másként fogalmazva: az x torlódási pont minden környezete az X halmaz végtelen sok pontját tartalmazza. [9]

Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek az $X \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartomány x_0 torlódási pontjában van határértéke, és az y_0, ha $x_n \in X$ és $x_n \to x_0$ esetén $f(x_n) \to y_0$ is mindig igaz; a határérték $\pm\infty$ is lehet. A tényállást $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ vagy $f(x) \to y_0$ ha $x \to x_0$ jelzi. Ha $f(x) \to y_0$ az x_0 helyen, és y_0 véges, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ hogy $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ hacsak $x \in X$ és $|x - x_0| < \delta$. Jobboldali, illetve baloldali határértékről akkor beszélünk, ha csak az $x_n > x_0$, illetve csak az $x_n < x_0$ sorozatokat vesszük figyelembe; ezeket a féloldali határértékeket $f(x_0 + 0) = \lim f(x)$ ha $x \to x_0 + 0$, illetve $f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x_0)$ jelölik. Ha $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) =: y_0$, akkor persze $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = y_0$.

Bármelyik definícióból azonnal következik hogy folytonos függvények összege és szorzata is folytonos, de a hányadosuk csak ott, ahol a nevező nem nulla. A folytonos f és g függvényekből összetett $h(x) := f(g(x))$ függvény is folytonos, feltéve hogy értelmes.

---

[9] Számsorozat torlódási pontjai a konvergens részsorozatok határértékei; ez a halmaz nem azonos az $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz torlódási pontjaival, mert az utóbbiban a sorozatban végtelen sokszor ismétlődő számok csak egyszer szerepelnek. Az $x \in X$ pont az X halmaznak izolált pontja ha van olyan környezete amiben rajta kívül a halmaznak egyetlen eleme sincs. Az értelmezés tartományának izolált pontjában minden függvény folytonosnak számít, de ez a helyzet eléggé érdektelen.

Az összeg és a szorzat folytonossága miatt a polinomok mindenhol folytonosak, de két polinom hányadosa csak ott, ahol a nevező nem 0. Az előző szakasz végén azt is megmutattuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton, és mindenütt folytonos. Érdekes az $f(x) := (e^x - 1)/x$ hányados, ami az $x = 0$ helyen formálisan nincs definiálva. Mivel $f(x) \to 1$ ha $x \to 0$, az $f(0) := 1$ konvencióval az egész számegyenesen adott folytonos függvényt kapunk.

2.2. **Alaptételek.** Weierstrass igazolta hogy zárt intervallumon folytonos függvény korlátos, továbbá felveszi a maximumát és a minimumát is. [10]

Tétel 2.1. *Ha* $f \in C[a, b]$, *akkor* $\exists\, x_*, x^* \in [a, b]$ *úgy hogy* $f(x_*) \le f(x) \le f(x^*)\ \forall\, x \in [a, b]$.

Bizony: Legyen $\beta := \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$, ami $+\infty$ is lehetne. Definíció szerint van olyan $x_n \in [a, b]$ sorozat, hogy $f(x_n) \to \beta$, továbbá Bolzano és Weierstrass tétele szerint ebből kiválasztható egy x'_n konvergens részsorozat is. Ha most $x^* := \lim x'_n$, akkor $\beta = \lim f(x'_n) = f(x^*)$, vagyis β véges, és f egyetlen értéke sem lehet nála nagyobb. A minimumról szóló állítás ugyanígy bizonyítható. □

A következő eredmény az intergál elméletében fontos. [11]

Tétel 2.2. *Minden* $f \in C[a, b]$ *függvény egyenletesen folytonos.*

Bizony: Ha a tétel nem lenne igaz, akkor volna olyan (x_n, y_y) párokból álló sorozat és egy $\varepsilon_0 > 0$ szám úgy, hogy $|x_n - y_n| < 1/n$, de $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0$. Jelölje x az x_n sorozat egy x'_n konvergens részsorozatának a határértékét, és legyen y'_n az x'_n párja. Ekkor $|x'_n - y'_n| \le 1/n$ miatt $y'_n \to x$, vagyis $\lim f(x'_n) = \lim f(y'_n) = f(x)$ volna, de ez $|f(x'_n) - f(y'_n)| \ge \varepsilon_0$ miatt lehetetlen. □

Bolzano tétele szerint egy intervallumon folytonos függvény minden közbülső értéket felvesz.

Tétel 2.3. *Ha* $f \in C[a, b]$ *és* $f(a) < y < f(b)$, *vagy* $f(a) > y > f(b)$, *akkor van olyan* $c \in (a, b)$ *pont hogy* $y = f(c)$.

Bizony: Feltehetjük hogy $f(a) < y < f(b)$, legyen $c := \sup\{\gamma : f(x) < y\, \forall x \in [a, \gamma)\}$, vagyis $[a, c]$ a legnagyobb intervallum ahol $f \le y$. A konstrukció szerint $f(c) < y$ lehetetlen, mert minden $(c, c+\delta)$, $\delta > 0$ intervallumban van olyan z pont hogy $f(z) > y$, de f folytonos, tehát $f(c) = y$. □

Weierstrass és Bolzano tétele úgy foglalható össze hogy zárt intervallum folytonos képe szintén zárt intervallum. Pontosabban, $f \in C[a, b]$ estén az $[a, b]$ intervallum képe $[\alpha, \beta]$, ahol $\alpha := \inf\{f(x) : a \le x \le b\}$, míg $\beta := \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$ az f értékeiből álló halmaz alsó, illetve felső határa. Ha f szigorúan monoton, akkor ez a megfeleltetés kölcsönšen egyértelmű, és az inverz függvény is folytonos.

Az inverz függvény konstrukciója Bolzano tételén alapul.

Tétel 2.4. *Tegyük fel hogy* $f \in C(a, b)$ *szigorúan monoton,* $\alpha := \inf\{f(x) : a < x < b\}$ *és* $\beta := \sup\{f(x) : a < x < b\}$. *Ekkor létezik az* $f^{-1} : (\alpha, \beta) \mapsto (a, b)$ *inverz függvény, ami szinén folytonos és szigorúan monoton.*

Bizony: Az f szigorú monotonitás miatt $f : (a, b) \mapsto (\alpha, \beta)$ kölcsönösen egyértelmű, és Bolzano tétele miatt minden $y \in (\alpha, \beta)$ értékhez van $x \in (a, b)$ pont hogy $y = f(x)$. Valóban, α és β definíciója szerint található olyan $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ intervallum hogy y az $f(a_1)$ és $f(b_1)$ értékek közé esik. Eszerint létezik az f leképezés $f^{-1} : (\alpha, \beta) \mapsto (a, b)$ inverze, és persze ez is szigorúan monoton.

f^{-1} folytonosságának bizonyításához legyen $y, y_n \in (\alpha, \beta)$ olyan hogy $y_n \to y$. Azt kell igazolni hogy $x_n \to x$ amint $n \to +\infty$, ahol $x = f^{-1}(y)$. Az $x_n := f^{-1}(y_n) \in (a, b)$ sorozat is korlátos, és minden x' torlódási pontja eleget tesz az $y = f(x')$ egyenletnek. Mivel ennek csak egy megoldása van: $x = f(y)$, látható hogy $x_n \to x$. □

---

[10] Absztrakt formában: kompakt halmaz folytonos képe is kompakt; a bizonyítás elve változatlan.

[11] A tétel úgy is kimondható hogy kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Ez a tétel zárt és félig zárt intervallumokkal is igaz. Például, az $f(x) := x^2$ függvény a $[0, +\infty)$ intervallumon folytonos és szigorúan monoton, pontos értékkészlete szintén az $[\alpha, \beta) = [0, +\infty)$ intervallum, tehát a $g(x) := \sqrt{x}$ inverz függvény is itt definiált, folytonos és szigorúan monoton növekvő függvény.

2.3. **Elemi függvények.** Az x^α, $x \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ hatványfüggvényeket közvetlenül, algebrai úton szokás definiálni. Nem nehéz megmutatni hogy $\alpha_n \to \alpha$ esetén x^{α_n} konvergens sorozat, és a határérték nem függ az α_n közelítő sorozat megválasztásától. Ez a határérték volna x^α értéke amikor α irracionális szám, az ismert műveleti szabályok a határátmenet után is érvényben maradnának. Mivel az e^x exponenciális függvény számos jó tulajdonságát már ismerjük, rövidebb utat választunk.

Tudjuk hogy az e^x fügvény folytonos és szigorúan monoton, értékkészlete a $(0, +\infty)$ intervallum. Inverze a természetes alapú logaritmus, ami a $(0, +\infty)$ intervallumon adott, $-\infty$-től $+\infty$-ig növő szigorúan monoton folytonos függvény; jelölése $\log x \equiv \ln x$. Eszerint $y = \log x$ pontosan akkor teljesül ha $x = e^y$, tehát $\log 1 = 0$, $\log x > 0$ ha $x > 1$ és $\log x < 0$ ha $0 < x < 1$, továbbá $\log e^x = e^{\log x} = x$. Az $e^{x+y} = e^x e^y$ azonosságból az $u := e^x$ és $v := e^y$ helyettesítéssel a jólismert $\log(uv) = \log u + \log v$ azonosságot kapjuk, ahol $u, v > 0$.

Ezután az átalános hatványokat és exponenciális függvényeket $x^\alpha := \exp(\alpha \log x)$, illetve $a^x := \exp(x \log a)$ definiálja, ahol $x, a > 0$ míg $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezek a függvények is folytonosak, és ha $\alpha \neq 0$, illetve $a > 1$ akkor mindkettő szigorúan monoton. Az $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ ha $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, valamint a $\log a^\alpha = \alpha \log a$ azonosságok a definíció egyszerű következményei, például $\log a^\alpha = \log e^{\alpha \log a} = \alpha \log a$. Nagyjából ugyanígy kapjuk hogy $(a^\alpha)^\beta = \exp(\beta \log a^\alpha) = \exp(\alpha\beta \log a) = a^{\alpha\beta}$, ahol $a > 0$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok, ezzel az e^x függvény $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$ tulajdonsága is tisztázódott.

A logaritmus függvény érintői: Az $1+x \leq e^x$ egyenlőtlenség logaritmusát véve $\log(1+x) \leq x$ adódik, ahol persze $x > -1$. Ellenkező irányú becslést az exponenciális sor maradéktagjából kaphatunk: van olyan $\delta > 0$ szám hogy $e^x =\leq 1 + x + x^2$ ha $|x| < \delta$. Tehát

$$x \leq \log(1 + x + x^2) \leq \log(1 + x) + \log(1 + x^2/(1 + x)),$$

amiből $\log(1 + x) \geq x - x^2(1 - \delta)^{-1}$ ha $|x| < \delta < 1$, vagyis $(1/x)\log(1 + x) \to 1$ amint $x \to 0$. Másik gondolatmenet szerint legyen $y = e^{1+x}$, ekkor $(1/x)\log(1 + x) = y/(e^y - 1)$, és $y \to 0$ ha $x \to 0$, tehát az állítás a baloldal konvergenciájából következik. Mivel $\log x - \log x_0 = \log(1 + (x - x_0)/x_0)$, azt is látjuk hogy $\lim(x - x_0)^{-1}(\log x - \log x_0) = 1/x_0$ ha $x \to x_0$ és $x_0 > 0$, vagyis $y = \log x_0 + (x - x_0)/x_0$ az x_0 pontban húzott érintő egyenlete. [12]

A logaritmus minden hatványyrendnél lassabban nő: ♡ $\log x = m \log(x^{1/m}) \leq m\, x^{1/m}$ alapján látható hogy $\log x = o(x^\alpha)$ ha $\alpha > 0$ és $x \to +\infty$. Hasonlóan, $x^2 \log(1/x) \leq x - x^2$ miatt $x^2 \log x \to 0$ ha $x \to 0$. Ez az összefüggés az $x = y^\beta$ helyettesítéssel az $f_\alpha := x^\alpha \log x$, $\alpha > 0$ függvényekre is kiterjeszthető: $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0$, □ tehát f_α értelmezését, az $f_\alpha(0) := 0$ választással nyugodtan kiterjeszthetjük az $x = 0$ helyre is.

A $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ trigonometrikus függvényeket geometriai szemlélet alapján definiáljuk. Eszerint $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ mindenütt folytonos, és 2π szerint periodikus, vagyis $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$ és $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$ $\forall\varphi \in \mathbb{R}$, ahol 2π az egységkör kerülete. Mindkét függvény értékei a $[-1, 1]$ intervallumba esnek, $\sin 0 = \cos\pi/2 = 0$, $\cos 0 = \sin(\pi/2) = 1$, továbbá $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ és $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, vagyis $\sin\varphi$ páratlan, $\cos\varphi$ pedig páros függvény; végül $\cos\varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$. Hasznosak a $\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\, \cos\psi + \cos\varphi\, \sin\psi$ és $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\, \cos\psi - \sin\varphi\, \sin\psi$ addíciós képletek is; speciális esetként $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$. Az $r > 0$ sugarú körben a $0 < \varphi < \pi/2$ nyílásszögű körcikk területe $r\varphi/2$, tehát a geometriai kép alapján $\varphi \geq \sin\varphi \geq \varphi\cos\varphi$ adódik, ahonnan az $(1/\varphi)\sin\varphi \to 1$ ha $\varphi \to 0$ határérték a rendőrelv

[12] Az inverz függvény gráfja az eredeti tükörképe az $y = x$ egyenesre vonatkozóan. A két alakzat (halmaz) geometriai egybevágósága sejteti hogy a két függvény analitikus tulajdonságai, mint folytonosság és differenciálhatóság, azonosak, sōt az egymásnak megfelelō pontokban húzott érintōk is egymás tükörképei. Mivel az exponenciális függvény tulajdonságait biyonyítottuk, az okoskodás lényegében korrekt; csak a geometriai és az analitikus képek egyenértékūségét kellene megvitatni. Ez a *differnciálgeometria* feladata.

segítségével következik. Mivel $1-\cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$, $\varphi^{-2}(1-\cos\varphi) \to 1/2$ amint $\varphi \to 0$. A $\operatorname{tg}\varphi \equiv \tan\varphi := (\sin\varphi)/\cos\varphi$ függvény a $\pi/2+n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ pontokban nincs értelmezve, de a $+\infty$ baloldali, és a $-\infty$ jobboldali határértékei léteznek. Periódusa π : $\operatorname{tg}(\varphi+\pi) = \operatorname{tg}\varphi$. Hasznos az $1+\operatorname{tg}^2 x = \cos^{-2} x$ azonosság is. Mivel $\sin\varphi$ a $[-\pi/2\,,\pi/2]$ intervallumon szigorúan monoton nő, ezen a szakaszon invertálható; az $\arcsin x$ inverz függvény a $[-1,1]$ intervallumon $-\pi/2$-től $\pi/2$-ig nő. A $\operatorname{tg}\varphi$ függvény $[-\pi/2\,,\pi/2]$ szakaszának inverzét $\operatorname{arctg} x \equiv \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$ jelöli, ez $-\pi/2$-től $\pi/2$-ig nő.

A hiperbolikus függvények az $y = \sqrt{1+x^2}$ hiperbola alatti terület számolásakor kerülnek elő, $\operatorname{sh} x \equiv \sinh x := (1/2)(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{ch} x \equiv \cosh x := (1/2)(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, végül $\operatorname{th} x \equiv \tanh x := (\operatorname{sh} x)/\operatorname{ch} x$; $1 - \operatorname{th}^2 x = \operatorname{ch}^{-2} x$.

A $\operatorname{sh} x$ és a $\operatorname{th} x$ függvény a teljes számegyenesen szigorúan monoton nő, inverzeiket $\operatorname{arsh} x$, illetve $\operatorname{arth} \mathrm{x}$ jelöli. A $\operatorname{ch} x$ függvény $[0,+\infty)$ szakaszának inverz függvénye $\operatorname{arch} x$. Nem nehéz kiszámolni hogy

$$\operatorname{arsh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1}),\ \operatorname{arch} x = \log(x+\sqrt{x^2-1}),\ \operatorname{arth} x = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1+x}{1-x}\,, \tag{2.1}$$

ahol az első képlet mindig, a második $x \geq 1$, a harmadik pedig $-1 < x < 1$ esetén érvényes.

3. DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

A fizika és más tudományok számos fogalmát, mint például a sebesség vagy az áramerősség, a differenciálszámítás terminusaival definiáljuk. Függvények vizsgálata, az analízis is erre épül.

3.1. **Definíciók.** Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény az $X \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartomány $x_0 \in X$ torlódási pontjában differenciálható, amit $f \in D(x_0)$ jelez, ha létezik és véges a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x_0) \tag{3.1}$$

határérték, az f deriváltja az x_0 pontban. Másként, $f'(x)$ a $\nabla_h f(x) := (1/h)(f(x+h)-f(x))$ differenciahányados határértéke, amint $h \to 0$; ∇_h éppen az x és $x+h$ pontokhoz tartozó húr meredeksége. Természetesen, *differenciálható függvény folytonos,* vagyis $D(x_0) \subset C(x_0)$. Az $A \subset X$ minden pontjában differenciálható függvények halmaza $D(A)$, míg $f \in C^1(A)$ azt jelöli, hogy $f' \in C(A)$, vagyis f folytonosan differenciálható. Az $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ egyenes az f gráfjának érintője az x_0 helyen, vagyis *a derivált a függvény növekedésének sebessége,* fizikai példákban gyakran szó szerint sebességet jelent. A definíció az

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x,x_0)|x-x_0|$$

módon is értelmezhető, ahol $\varepsilon(x,x_0) \to 0$ amint $x \to x_0$. Eszerint mondhatjuk hogy $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ az f legjobb lineáris közelítése az x_0 pont közelében. Ezt tükrözi a $df = f'dx$ formalizmus is. Ha f változója a t idő, akkor az $f'(t) \equiv \dot{f}(t)$ jelölés is szokványos. Az $f'(x+0)$ jobb, és az $f'(x-0)$ baloldali derivátakat $\nabla_h f(x)$ jobb, illetve baloldali határértékeként definiáljuk. Például, $f(x) := |x|$ jobboldali deriváltja a 0-ban 1, a baloldali pedig -1.

Néhány nevezetes határérték valójában derivált: $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x = \exp'(0) = 1$, $\lim_{x\to 0}(1/x)\log(1+x) = \log'(1) = 1$ és $\lim_{x\to 0}(1/x)\sin x = \sin' 0 = 1$.

Ahol az f' derivált függvény is differenciálható, ott $f'' := (f')'$ az f második deriváltja, és így tovább; $f^{(n)}(x_0)$ az f n-ik deriváltja az x_0 pontban, ezt $f \in D^n(x_0)$ jelöli, a C^n szimbólum az f, és első n deriváltjának folytonosságára utal. Például, $C^2(a,b)$ az (a,b) nyilt intervallum minden pontjában kétszer folytonosan differenciálható függvények tere, $C^k_\delta(x_0)$ az x_0 pont δ környezetében k-szor folytonosan differenciálható függvények halmaza. Végül $F \in D(a,b)$ az $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye ha $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Az $f \in D(a,b)$ függvény az (a,b) intervallumon konvex, ha mindenütt az érintője fölött halad, vagyis $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\ \forall x, x_0 \in (a,b)$. Ha $x \neq x_0$ esetén határozott egyenlőtlenség teljesül, akkor szigorúan konvex függvényről beszélünk. Konkáv függvény ellenkező irányú egyenlőtlenségnek tesz eleget. Konvex függvény inverze konkáv, és viszont. Jensen alábbi tételével számos nevezetes egyenlőtlenség igen egyszerűen következik.

Tétel 3.1. *Tegyük fel hogy f az (a,b) intervallumon konvex, $p_1+p_2+\cdots p_n=1$, $p_k>0$, $x_k\in(a,b)$ $\forall k=1,2,...,n$, és $x_0:=p_1x_1+p_2x_2+\cdots p_nx_n$, akkor $p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots p_nf(x_n)\geq f(x_0)$. Ha f szigorúan konvex, akkor $x_k=x_0$ $\forall k$ az egyenlőség feltétele. Konkáv függvény fordított egyenlőtlenségnek tesz eleget.*

Bizony: Mivel $\sum p_k(x_k-x_0)=0$, csak az $f(x_k)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_k-x_0)$ egyenlőtlenségeket kell a $p_k\geq 0$ számokkal megszorozni és összeadni. □

Jensen tétele az $n=2$ esetben igencsak szemléletes, azt mondja ki hogy *konvex függvény húrja a görbe fölött halad.* Nevezetes konvex függvények $f(x)=x^\alpha$ ha $\alpha\geq 1$, és $f(x)=e^x$, míg $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\leq 1$, és $f(x)=\log x$ konkáv. Ez utóbbi következménye a pozitív számok számtani és mértani közepéről szóló $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\leq(1/n)(x_1+x_2+\cdots x_n)$ egyenlőtlenség. Szintén csak pozitív számokkal érvényes a harmonikus és a számtani közép $n\,(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1})^{-1}\leq(1/n)(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ egyenlőtlensége, ami $f(x):=1/x$ konvexitásának következménye. Az $f(x)=x^2$ konvexitása miatt $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leq n\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$. Cauchy

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leq\sum_{k=1}^n x_k^2\,\sum_{k=1}^n y_k^2 \tag{3.2}$$

egyenlőtlensége is levezethető Jensen tételéből. Feltehetjük hogy $x_k>0$ és $\sum x_k^2=1$. Mivel $x_ky_k=x_k^2\,(y_k/x_k)$, és az y^2 függvény konvex,

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leq\sum_{k=1}^n y_k^2\,,$$

amit bizonyítani kellett. A konvexség definíciója általánosító úgy [13] hogy például $f(x):=|x|$ is konvexnek számít.

3.2. **A differenciálás szabályai.** Az összeg, szorzat és hányados határértékének levezetését megismételve kapjuk az $(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$ és $(f/g)'=f'/g-fg'/g^2=(f'g-fg')/g^2$ alapvető képleteket; a hányadosnál persze $g\neq 0$ szükséges a vizsgált pontban. Például, az

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x_0)+f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + (f(x)-f(x_0))\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

azonosságból az f folytonosságát kihasználva, határátmenettel kapjuk az $(fg)'=f'g+fg'$ képletet. Mivel $f/g=(1/g)\,f$, a hányados vonatkozásában elég a reciprok $(1/g)'=-g'/g^2$ képletét igazolni. Az $1/g(x)-1/g(x_0)=(g(x_0)-g(x))/g(x)g(x_0)$ azonosságot $x-x_0$-al végigosztva, határátmenettel kapjuk az állítást.

A $h(x):=f(g(x))$ összetett (közvetett) függvény differenciálásának $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ képlete, a láncszabály, ♡

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

következménye. Valóban, $g(x)\to g(x_0)$ ha $x\to x_0$, tehát az első tényező határértéke $f'(g(x_0))$, a másodiké persze $g'(x_0)$. Gond csak akkor van ha $g'(x_0)=0$, mert ilyenkor $g(x)=g(x_0)$ az x_0 minden környezetében előfordulhat. Ilyenkor viszont $h(x)=h(x_0)$, tehát nincs mit bizonyítani. □ A láncszabály az inverz függvény differenciálásának receptjét is tartalmazza. Ha ugyanis $g=$

[13] Ha f nem differenciálható, akkor érintõje sincs, de Jensen egyenlõtlensége is alkalmas definicióként; ha f eleve folytonos, akkor az $n=2$ és $p_1=p_2=1/2$ eset is elegendõ. Mivel az érintõ a húr határhelyzete, Jensen egyenlõtlenségébõl következik hogy konvex függvény az érintõje fölött halad. Az eredeti definíció kiterjesztése szerint akkor is konvex függvényrõl beszélünk ha a gráf minden pontján átmegy olyan egyenes, ami teljes egészében a függvény alatt halad.

f^{-1}, akkor $f(g(x)) = x$ a g értelmezési tartományán, tehát $f'(g(x))g'(x) = 1$, vagyis $f^{-1}(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$. Azt hogy g tényleg differerenciálható, a

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

azonosságból látni, ahol $y = f(x)$, vagyis $x = g(y)$. Valóban, g már igazolt folytonossága miatt $g(y) \to g(y_0)$, azaz $x \to x_0$ ha $y \to y_0$, tehát $f \in D(x_0)$ alkalmazható.

3.3. **Elemi függvények deriváltjai.** Konstans függvény deriváltja azonosan nulla, és az is közvetlenül ellenőrizhető hogy $(ax + b)' = a$. A szorzási szabály miatt $(x^2)' = 2x$, továbbá $x^n = x\,x^{n-1}$ alapján indukcióval kapjuk az $(x^n)' = nx^{n-1}$ képletetet, ami a hányados differenciálási szabályával az n negatív egész értékeire is kiterjeszthető. Az $x = (\sqrt{x})^2$ azonosság differenciálásával $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ adódik, ami szintén az $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ képlet speciális esete, ahol $x \geq 0$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Általános $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $x^\alpha := \exp(\alpha \log x)$ definíciót követjük, ezért először az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltját kell megtalálni.

Az $e^{x+h} - e^x = e^x\,(e^h - 1)$ azonosságból a már igazolt $(1/h)(e^h - 1) \to 1$ ha $h \to 0$ határérték alapján $(e^x)' = e^x$, míg $a^x = \exp(x \log a)$ miatt $(a^x)' = a^x \log a$ ha $a > 0$. Mivel $e^{\log x} = x$, $\log' x = 1/x$ a láncszabállyal, de ezt a $\log(x + h) - \log x = \log(1 + h/x)$ formulából az $(1/y)\log(1 + y) \to 1$ ha $y \to 0$ határérték segítségével is levezethetjük. Ezután írhatjuk hogy $(x^\alpha)' = (\alpha/x)\exp(\alpha \log x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$, míg $(a^x)' = (e^{x \log a})' = a^x \log a$.

A hiperbolikus függvények deriváltjait közvetlen számolással kapjuk, $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$, és $\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = -\operatorname{ch}^{-2} x$. Inverzeik deriváltjait a legegyszerűbb a 2.3 szakasz végén található képletekből számolni: $\operatorname{arsh}' x = (1 + x^2)^{-1/2}$, $\operatorname{arch}' x = (x^2 - 1)^{-1/2}$ ha $x \geq 1$, és $\operatorname{arth}' x = 1/(1 - x^2)$ ha $|x| < 1$.

A trigonometrikus függvények deriváltjaihoz az $(1/\alpha)\sin\alpha \to 1$ és $(1/\alpha^2)(1 - \cos\alpha) \to 1/2$ ha $\alpha \to 1/2$ határértékeket, valamint az addíciós képleteket használjuk fel. Minthogy $\sin(\varphi + \alpha) - \sin\varphi = (\cos\alpha - 1)\sin\varphi + \sin\alpha\,\cos\varphi$, $\sin'\varphi = \cos\varphi$. Hasonlóan, $\cos(\varphi + \alpha) - \cos\varphi = (\cos\alpha - 1)\cos\varphi - \sin\alpha\,\sin\varphi$, tehát $\cos'\varphi = -\sin\varphi$. Végül $\operatorname{tg}'\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1/\cos^2\varphi$ a $\operatorname{tg}\varphi = (\sin\varphi)/\cos\varphi$ formula következménye. Az inverz függvények deriváltjait a láncszabály segítségével számoljuk. Legyen $g(x) := \arcsin x$, vagyis $\sin g(x) = x$ a $-1 \leq x \leq 1$ intervallumon. Innen $g'(x)\cos g(x) = 1$, vagyis $g'(x) = 1/\cos g(x) = (1 - \sin^2 g(x))^{-1/2}$, tehát $\arcsin' x = (1 - x^2)^{-1/2}$. Hasonlóan, ha $\operatorname{tg} g(x) = x$, akkor $g'(x)(1 + \operatorname{tg}^2 g(x)) = 1$, tehát $\operatorname{arctg}' x = 1/(1 + x^2)$.

3.4. **Lagrange és Cauchy tételei, függvényvizsgálat.** A differenciálszámítás egyik fő alkalmazási területe függvények alakjának tisztázása. Az $f : (x - r, x + r) \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 pontban lokális maximuma, illetve lokális minimuma van, ha van olyan $0 < \delta < r$ szám hogy $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$, ha $|x - x_0| < \delta$. Ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$ esetén $f(x) \neq f(x_0)$, akkor szigorú lokális szélsőértékről (maximum, illetve minimum) beszélünk.

Tétel 3.2. *Ha $f \in D(x_0)$ az x_0 egy környezetében monoton nő, akkor $f'(x_0) \geq 0$, ha fogy, akkor $f'(x_0) \leq 0$. Ha pedig x_0 lokális szélsőérték helye, akkor $f'(x_0) = 0$.*

Bizony: Ha f monoton nő, akkor egy környezetben $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \geq 0$ ha $x > x_0$, tehát $f'(x_0) \geq 0$. Fogyó függvény esetében, hasonló okoskodással, $f'(x_0) \leq 0$ adódik. Ha most x_0 lokális maximum helye, akkor egy környezetben $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \leq 0$ ha $x > x_0$, míg $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \geq 0$ ha $x < x_0$, tehát $f'(x_0) = 0$. A lokális minimum problémája ugyanaz. □

Lagrange nevéhez fűződik a következő alapvető jelentőségű eredmény, ami akkor is használható amikor az x változó értékei egymástól messze vannak.

Tétel 3.3. *Ha $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$ pont hogy $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

Bizony: Legyen először $f(a) = f(b)$. Ha f konstans, akkor minden $\xi \in (a, b)$ jó. Ha nem, akkor f vagy a legnagyobb, vagy a legkisebb értékét veszi fel egy $\xi \in (a, b)$ pontban, és ott $f'(\xi) = 0$. Ez Rolle tétele. Ezután legyen $g(x) := f(x) - (x - a)(f(b) - f(a))/(b - a)$, ekkor $g(a) = g(b)$, tehát $g'(\xi) = f'(\xi) - (f(b) - f(a))/(b - a) = 0$ valamely $\xi \in (a, b)$ közbülső értéknél. □

$**$ Ugyanez a gondolatmenet mutatja hogy differenciálható függvény deriváltja nem lehet akármilyen, Darboux tétele [14] szerint minden közbülső értéket felvesz, tehát nagyon sok egyszerű, de nem folytonos függvénynek nincs primitív függvénye. $**$

A korábbiaknál többet mondhatunk ha a függvény nem csak egy pontban, hanem egy teljes intervallumon differenciálható, mert ott $f(x) = f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$, ahol ξ az x_0 és x között van. Innen egyszerű következményként kapjuk a monotonitás és a szélsőérték elégséges feltételeit.

Tétel 3.4. *Ha $f \in D(a,b)$ és $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, akkor f az (a,b) intervallumon monoton nő, és ha $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, akkor f szigorúan monoton nő. Hasonló a fogyó függvények esete, ha tehát $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$, akkor f konstans, vagyis ugyanaz az értéke a teljes intervallumon. Végül, ha f' előjelet vált az $x_0 \in (a,b)$ pontban, vagyis az x_0 egy környezetében $f'(x_1) < 0$ és $f'(x_2) > 0$, vagy $f'(x_1) > 0$ és $f'(x_2) < 0$ ha $x_1 < x_0 < x_2$, akkor x_0 szigorú lokális maximum, illetve minimum helye.*

Ez a tétel Lagrange nélkül is bizonyítható, de úgy bonyolultabb. [15] Szigorúan monoton függvénnyel is előfordulhat hogy $f'(x) = 0$. Ilyen például $f(x) := x^3$; az $x = 0$ helyen $f'(0) = 0$. Lagrange tételét Cauchy általánosította.

Tétel 3.5. *Legyen $g, h \in C[a,b] \cap D(a,b)$, továbbá $h'(x) \neq 0$ ha $a < x < b$. Ekkor van olyan $\xi \in (a,b)$ hogy $(g(b)-g(a))/(h(b)-h(a)) = g'(\xi)/h'(\xi)$.*

Bizony: Legyen $f(x) := g(x)-(h(x)-h(a))(g(b)-g(a))/(h(b)-h(a))$, ekkor $f(a) = f(b)$, tehát $f'(\xi) = g'(\xi)-h'(\xi)(g(b)-g(a))/(h(b)-h(a)) = 0$ valamely ξ közbülső helyen. □

Problematikus, $0/0$ és ∞/∞ alakú határértékek számolására is alkalmas a l'Hospital szabály.

Tétel 3.6. *Tegyük fel hogy $f, g \in D(a, x_0)$, ahol $a < x_0$ és $g(x)\cdot g'(x) \neq 0$ ha $a < x < x_0$, továbbá $f(x_0-0) = g(x_0-0) = 0$; legyen $\phi(x) := f(x)/g(x)$, $\psi(x) := f'(x)/g'(x)$ ha $a < x < x_0$. Ha létezik a $\psi(x_0-0)$ baloldali határérték, akkor $\phi(x_0-0)$ is létezik, és $\phi(x_0-0) = \psi(x_0-0)$.*

Bizony: Terjesszük ki f és g értelmezését az $f(x_0) = g(x_0) = 0$ konvencióval, ezzel folytonos függvényeket kapunk. Cauchy tétele szerint $\forall x \in (a, x_0)$ van olyan $x < \xi < x_0$ hogy $\phi(x) = f(x)/g(x) = f'(\xi)/g'(\xi) = \psi(\xi) \to \psi(x_0-0)$ ha $x \to x_0$. □

Jobboldali határértékek esete ugyanez. Ha most $f(x_0-0) = g(x_0-0) = +\infty$, akkor a tételt az $1/f$ és $1/g$ függvényekre alkalmazva ismét $\phi(x_0-0) = \psi(x_0-0)$ adódik, sőt az $x_0 = \infty$ lehetőség is megengedett. Ez utóbbi belátásához elég az $1/x = y$ új változót bevezetni. Végtelenhez tartó mennyiségek hányadosánál általában nehezebb a különbségük kiértékelése; ilyenkor Lagrange tétele lehet segítségünkre. Például, ha $x \to \infty$ esetén $f'(x) \to 0$, akkor $f(x+1)-f(x) = f'(\xi)$ miatt $\lim\,(f(x+1)-f(x)) = 0$ ha $x \to \infty$.

Cauchy tételét a $g(x) := f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ és $h(x) := (x-x_0)^2$ függvényekkel az x_0 és x pontokban alkalmazva kapjuk Lagrange második tételét.

Tétel 3.7. *Ha $f \in D^2_\delta(x_0)$, vagyis f az x_0 pont egy környezetében kétszer differenciálható, akkor itt $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$, ahol ξ az x_0 és x közé esik.*

Bizony: Valóban, $g(x_0) = h(x_0) = 0$, $g'(x) = f'(x)-f'(x_0)$, továbbá $h'(x) = 2(x-x_0)$, tehát Cauchy, majd Lagrange tételével

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f'(\eta)-f'(x_0)}{2(\eta-x_0)} = \frac{f''(\xi)}{2},$$

ahol η az x_0 és x, ξ pedig x_0 és η között van. □

Innen már csak egy lépés a konvexitás, és a lokális szélső érték elégséges feltétele.

---

[14] ♡ Tegyük fel hogy $f \in D$ és $f'(a+0) < \gamma < f'(b-0)$, ekkor a $g := f(x)-\gamma x$ függvény valamelyik szélső értékét biztosan az intervallum valamely c belső pontjában veszi fel, és ott $g'(x) = 0$, vagyis $f'(c) = \gamma$. □

[15] A lokális szélsőérték feltételénél nem tételeztük fel hogy $f'(x_0) = 0$, ez következmény, lásd Darboux fentemlített tételét.

Tétel 3.8. *Tegyük fel hogy $f \in D^1_\delta(x_0)$ és $f'(x_0) = 0$. Ha $f''(x_0) > 0$, illetve $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 szigorú lokális minimum, illetve szigorú lokális maximum helye. Ha pedig $f \in D^2(a,b)$ és $f''(x) \geq 0$, illetve $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$, akkor f az (a,b) intevallumon konvex, illetve konkáv.*

Bizony: Mivel $f'(x_0) = 0$, x_0 és x között van olyan ξ hogy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0)(\xi - x_0)\,,$$

tehát $(x-x_0)(\xi-x_0)$ mindig pozitív. Ha most $f''(x_0) > 0$, akkor f' differencia hányadosa az x_0 egy környezetében már pozitív, tehát ott $f(x) > f(x_0)$. A maximum elégséges feltételének bizonyítása ugyanaz. A konvexség, illetve konkávság igazolásához csak Lagrange második tételére kell hivatkozni. □

3.5. **Taylor sorfejtés.** A 3.7. Tétel indukcióval általánosítható, ismét Cauchy tétele a bizonyítás kulcsa.

Tétel 3.9. *Ha $f \in D^{n+1}_\delta(x_0)$, és $x \in K_\delta(x_0)$, akkor $f(x) = T_{f,n}(x) + R_{f,n}(x)$, ahol*

$$T_{f,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,, \quad R_{f,n}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,,$$

továbbá $f^{(0)} \equiv f$, míg ξ az x_0 és x közötti érték.

Bizony: Legyen $g(x) := f(x) - T_{f,n}(x)$, $h(x) := (x - x_0)^{n+1}$, ekkor $g(x_0) = h(x_0) = 0$, $g'(x) = f'(x) - T_{f',n-1}(x)$, $h'(x) = (n+1)(x-x_0)^n$, tehát Cauchy tételével

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(\eta)}{h'(\eta)} = \frac{f'(\eta) - T_{f',n-1}(\eta)}{(n+1)(\eta - x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,,$$

az utolsó lépésnél az indukciós hipotézist az f' függvénnyel alkalmaztuk. □

Első alkalmazásként nézzük a numerikus differenciálás kérdését. Kézenfekvő a deriváltat a differenciahányadossal becsülni; $f \in C^2_\delta(x)$ esetén $f'(x) = \nabla_h f(x) + O(h)$ ha h kicsi. Ha viszont $f \in C^3_\delta(x)$, akkor a $\nabla^{(s)}_h f(x) := (1/2h)\big(f(x+h) - f(x-h)\big)$ szimmetrikus differencia jobb közelítést ad: $f'(x) = \nabla^{(s)}_h f(x) + O(h^2)$. A második derivált legegyszerűbb becslése a második differenciahányados, $\Delta_h f(x) := h^{-2}\big(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\big)$. Lagrange tételét a $g(x) = f(x) - f(x-h)$ függvénnyel alkalmazva $f''(x) = \Delta_h f(x) + o(1)$ adódik ha $f \in C^2_\delta(x)$. Ha viszont $f \in C^4_\delta(x)$, akkor a sorfejtésből $f''(x) = \Delta_h f(x) + O(h^2)$.

A fenti tételben n-ik Taylor polinom a $T_{f,n}$ neve, $R_{f,n}$ pedig a Lagrange féle maradéktag. Ha létezik, akkor $T_f(x) := \lim_{n\to\infty} T_{f,n}(x)$ az f x_0 körüli Taylor sora. Azt az intervallumot, ahol a Taylor sor abszolút konvergens, a hányados vagy a gyök kritérium segítségével határozhatjuk meg. Érdemes észrevenni hogy az f' derivált $T_{f'}$ Taylor sorát a T_f sor tagonkénti differenciálásával kapjuk.

Tétel 3.10. *Ha $f \in D^n_r(x_0)$, és $|f^{(n)}(x)| \leq C\,n!\,r^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ha $|x - x_0| < r$, akkor a $K_r(x_0)$ környezetben a T_f sor abszolút konvergens, és $f(x) = T_f(x)$; persze $f'(x) = T_{f'}(x)$ is igaz.*

Bizony: A T_f sornak az adott intervallumban geometriai majoránsa van, tehát abszolút konvergens. Az $f(x) = T_f(x)$ egyenlőség ezután az előző tétellel következik mert $R_{f,n} \to 0$. □

Az e^x függvény korábban megismert hatványsora az $x_0 = 0$ pont körüli sorfejtéssel keletkezik. Szintén az $x_0 = 0$ pont körüli kifejtéssel kapjuk a következő sorokat.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{ha } |x| < 1\,, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{ha } |x| < 1\,, \tag{3.3}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{ha } |x| < 1. \tag{3.5}$$

A (3.3) azonosságok közvetlenül is igazolhatóak, egyébként az alább következő Newton féle binomiális sor speciális esetei; a második képlet az első differenciálásával keletkezik. A tétel egyszerű következményei az e^x, $\sin x$ és $\cos x$ sorai. A logaritmus kifejtésében a maradéktag eltűnése csak a $-1/2 < x < 1$ intervallumban garantált, de a $g(x) := \log(1+x) - T_{\log}(x)$ függvény deriváltja, a hatványsorok differenciálásáról szóló következő tétel szerint eltűnik, tehát (3.5) is érvényes a teljes $|x| < 1$ intervallumon. Ez a sor $0 < x < 1$ esetén Leibniz típusú, tehát $|\log(1+x) - T_{\log,n}(x)| \le 1/n$ ebben a tartományban. Mivel $\log(1+x)$ az $x = 1$ helyen folytonos, a alternáló harmonikus sor összege $\log 2$; a precíz bizonyítás kicsit hosszabb.

Tétel 3.11. *Jelölje $R > 0$ az $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugarát. Ha $|x - x_0| < R$, akkor a tagonkenti deriválással kapott $g(x) := \sum_{n=1}^{n} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ sor is abszolút konvergens, és $g(x) = f'(x)$ a konvergencia $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumán. Hasonlóan,*

$$F(x) := a_0 (x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots \qquad \text{ha } |x - x_0| < R$$

az $F(x_0) = 0$ és $F'(x) = f(x)$ tulajdonságú függvény hatványsora.

Bizony: A következő számolásoknál feltehetjük hogy $x_0 = 0$ és $|x| + |h| = qr$, ahol $q < 1$ és $0 < r < R$. Mivel $\sum a_n r^n$ abszolút konvergens, az $a_n r^n$ sorozat korlátos, tehát a $g(x)$ sort majorálja a $\sum n q^{n-1}$ sor, vagyis $|x - x_0| < R$ esetén a g derivált sor is abszolút konvergens.

Az $f' = g$ állítás bizonyításához először azt kell észrevenni hogy Lagrange második tétele szerint $(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = (1/2)n(n-1)(x+\xi)^{n-2}h^2$, ahol ξ x és $x+h$ között van, tehát

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \le \frac{n(n-1)|h|^2}{2}(|x| + |h|)^{n-2}.$$

Eszerint

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \le |h| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| r^{n-2} q^{n-2} \le K|h| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 q^{n-2} = O(h)$$

mert az $a_n r^n$ sorozat korlátos, és a jobboldali sor a hányados kritérium miatt konvergens. □

Például, az $(1+x^2)^{-1}$ függvény a $-x^2$ hatványai szerint haladó mértani sorba fejthető, amiből

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad \text{ha } |x| < 1. \tag{3.6}$$

Ez a tétel többször egymás után is alkalmazható; így kapjuk az f'', f''' és a többi derivált hatványsorát is, ezek az $|x - x_0| < R$ intervallumban mind abszolút konvergensek. Az is látható hogy ha f a hatánysor összege, akkor $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, tehát $\sum a_n (x - x_0)^n$ éppen az f sora. Érdekes az $f(x) := \exp(-1/x^2)$ függvény, aminek az $x_0 = 0$ helyen mindegyik deriváltja 0, vagyis a Taylor sora eltűnik. Eszerint *az $f^{(n)}(x_0)$ deriváltak akkor sem határozzák meg a függvényt, ha a Taylor sora konvergens.*

A korábbiaknál bonyolultabb az $f(x) := (1+x)^\alpha$, $x \ge -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ függvény esete. Az egyszerű számolással nyert

$$T_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{3.7}$$

binomiális sor abszolút konvergenciája $|x| < 1$ esetén a hányados kritérium egyszerű következménye, de a Largange maradéktag,

$$R_{\alpha,n}(x) = \binom{\alpha}{n}(1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

csak akkor tűnik el, ha $-1/2 < x < 1$. Megmutatjuk hogy $(1+x)^\alpha = T_\alpha(x)$ akkor is igaz ha $|x| < 1$. Legyen $f(x) := T_\alpha(x)(1+x)^{-\alpha}$ ha $|x| < 1$; azt tudjuk hogy $f(x) = 1$ $\forall x \in (-1/2, 1)$.

Azt kell megtudni hogy $f'(x) = 0\ \forall |x| < 1$. Az előbb bizonyított 3.11. Tétel szerint $T_\alpha(x)$ tagonként differenciálható ha $|x| < 1$, és $T'_\alpha(x) = \alpha T_{\alpha-1}(x)$, tehát

$$\begin{aligned}(1+x)^{1-\alpha} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (n(1+x)x^{n-1} - \alpha x^{n-1}) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} - \binom{\alpha}{n} \right) x^n = 0\end{aligned}$$

mert a nagy zárójelben álló kifejezés (Pascal háromszög) akkor is 0 ha $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Az Euler formula: A $\sin x$ és $\cos x$ függvények hatványsora alkalmas ezek geometriai szemlélettől mentes definiálására, és az addíciós képletek, valamint a $\sin' x = \cos x$ és $\cos' x = -\sin x$ differenciálási szabályok is levezethetőek. A görbék alakjából viszont egyenlőre csak annyit látunk hogy $\sin 0 = 0$ és $\cos 0 = 1$. Ezután a π számot úgy definiálhatjuk, hogy $\pi/2$ a $\sin x$ első pozitív gyöke. A geometriai és az analitikus konstrukció kapcsolatát is Euler ismerte fel, a következő észrevétel alapján. A hatványsorokban $x \in \mathbb{R}$ helyére az $\imath x$ képzetes számot írva, formális számolással kapjuk Euler nevezetes formuláját: $e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x$. Ennek alapján

$$\begin{aligned}e^{\imath x + \imath y} &= \cos(x+y) + \imath \sin(x+y) = e^{\imath x} e^{\imath y} = (\cos x + \imath \sin x)(\cos y + \imath \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \imath (\sin x \sin y + \cos x \cos y)\,,\end{aligned}$$

és a valós és képzetes részek azonosítása után éppen az addíciós képleteket kapjuk. Innen már $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ is következik, tehát $|e^{ix}| = 1$ ha $x \in \mathbb{R}$, ami a geometriai képet tükrözi. A korrekt tárgyaláshoz a komplex hatványsorok elméletére van szükség, ami a jegyzet második részében kerül sorra. Euler képletével kapjuk a komplex számok $z = |z| e^{\imath\varphi}$ poláris alakját, ahol $\varphi = \operatorname{Arg} z$ a komplex siikon a z pontba mutató helyvektor irányszöge (argumentuma). Mivel $e^{2\pi\imath} = 1$, az $\operatorname{Arg} z$ szög nincs egyértelműen meghatározva. Ebben a jegyzetben a $-\pi < \varphi \le \pi$ konvenciót használjuk, tehát $\operatorname{Arg}(-1) := -\pi$. Előfordul a $-\pi/2 \le \varphi < 3\pi/2$ választás is. Mindezekről a B2 részben még lesz szó.

4. INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

A területszámításon, valamint forgástestek térfogatának és tehetetlenségi nyomatékának, görbék ívhosszának meghatározásán túl számos más feladat is egyváltozós függvények integráljának meghatározásához vezet. Ezek közül talán a differenciálegyenletek megoldása (=integrálása!) a legfontosabb.

4.1. **Definíció, folytonos függvények integrálása.** A területszámításból adódó szemlélet alapján az $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann integrálját a következő eljárással definiáljuk; maga a definíció is több állítást tartalmaz. Legyen

$$\gamma := \{a = x_0 \le \xi_0 < x_1 \le \xi_1 < x_2 \le \dots < x_{m-1} \le \xi_{m-1} < x_m = b\}$$

az intervallum egy felosztása, $\delta(\gamma) := \max_k \{x_{k+1} - x_k\}$ a felosztás finomsága, és

$$I_\gamma(f) := \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k) \quad \text{az} \quad \int_a^b f(x)\,dx \tag{4.1}$$

integrál közelítő összege. Megjegyezzük hogy $|I_\gamma(f)| \le K(b-a)$ ha $|f(x)| \le K\ \forall x \in [a,b]$. Az I_γ közelítő összeg úgy is értelmezhető, mint annak a lépcsős függvénynek az integrálja, amely az $[x_k, x_{k+1})$ intervallumon az $y_k = f(\xi_k)$ értéket veszi fel. f Riemann szerint integrálható, amit $f \in L^1_0[a,b]$ jelöl, ha az I_{γ_n} sorozat $\delta(\gamma_n) \to 0$ esetén mindig konvergens. Ha γ_n és γ'_n is ilyen minden határon túl finomodó sorozat, akkor $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2, \ldots$ is az, tehát integrálható függvénynél $\lim I_{\gamma_n}(f) = \lim I_{\gamma'_n}(f)$, vagyis a közelítő összegek határértéke nem függ a közelítés módjától. Ez a közös határérték az integrál értéke, tehát

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta(\gamma)\to 0} I_\gamma(f)\,, \tag{4.2}$$

amennyiben a határérték mindig létezik. Ha már tudjuk hogy $f \in L^1_0[a,b]$, akkor elég az integrált egy ügyesen választott felosztássorozat mentén számolni.

A definició úgy is kimondható, hogy $f \in L^1_0[a,b]$ *akkor, és csak akkor igaz, ha van olyan* $I \in \mathbb{R}$ *érték hogy minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz van* $\delta > 0$ *úgy hogy* $|I_\gamma(f) - I| < \varepsilon$ *ha* $\delta(\gamma) < \delta$. A Cauchy sorozat fogalmával analóg a következő változat: $f \in L^1_0[a,b]$ *acsak ha minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz van* $\delta > 0$ *úgy hogy* $|I_\gamma(f) - I_{\gamma'}(f)| < \varepsilon$ *ha* $\delta(\gamma) < \delta$ *és* $\delta(\gamma') < \delta$.

$**$ **Riemann kritériuma:** Az integrálhatóság szükséges és elégséges feltételét a γ felosztáshoz tartozó

$$O_\gamma(f) := \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \sup\{|f(x) - f(y)| : x_k \le x, y \le x_{k+1}\}\,. \tag{4.3}$$

oszcillációs összeg segítségével fogalmazzuk meg, O_γ csak a γ osztópontjaitól függ. Figyelemre méltó hogy $|I_\gamma(f) - I_{\gamma'}(f)| \le O_\gamma(f)$ ha γ és γ' osztópontjai egybeesnek, és $O_{\gamma'}(f) \le O_\gamma(f)$ ha γ' a γ felosztás finomítása, vagyis γ mindegyik osztópontja szerepel a γ' osztópontjai között.

Tétel 4.1. *Ha* $f \in L^1_0[a,b]$ *akkor* $\lim O_{\gamma_n}(f) = 0$ *ha* $\delta(\gamma_n) \to 0$. *Fordítva, ha van olyan* γ_n *felosztássorozat hogy* $\lim O_{\gamma_n}(f) = 0$, *akkor* f *Riemann szerint integrálható.*

Bizony: A feltétel szükségessége a definíció következménye. Az elégségességhez először azt kell meggondolni, hogy ha $O_{\gamma,n}(f) \to 0$, akkor $I_{\gamma_n}(f)$ biztosan Cauchy sorozat, tehát van határértéke. Jelölje ezután $m(\gamma)$ a γ felosztás osztópontjainak számát és legyen $K := \sup|f|$, ekkor bármely más felosztás eleget tesz az $O_{\gamma'}(f) \le O_\gamma(f) + 4K\, m(\gamma)\, \delta(\gamma')$ becslésnek, mert γ'-nek legfeljebb $2m(\gamma)$ olyan intervalluma van, amely nem része a γ valamelyik intervallumának. Eszerint $O_{\gamma'_n}(f) \to 0$ ha $\delta(\gamma' n) \to 0$ és $O_{\gamma_n}(f) \to 0$. $**$ □

A definíció alapján is látható hogy ha $f, g \in L^1_0[a,b]$, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható, és

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,, \tag{4.4}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ha most $f \le g$, akkor

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx\,, \quad \text{tehát} \quad \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx\,; \tag{4.5}$$

azt hogy $|f|$ is integrálható, az $||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|$ elemi egyenlőtlenség és a Riemann kritérium segítségével a legkönnyebb igazolni. Végül, ha $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,. \tag{4.6}$$

A fentiek alapján tömören azt mondjuk hogy *az integrál pozitív lineáris funkcionál.*

Megmutatjuk hogy korlátos intervallumon folytonos függvény mindig integrálható. Jelölje

$$c(\delta, f) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \le \delta, x, y \in [a,b]\} \tag{4.7}$$

az f folytonossági modulusát $[a,b]$-n; nyilván $O_\gamma(f) \le c(\delta(\gamma)), f)(b-a)$. Numerikus integráláskor is hasznos a következő becslés.

Lemma 4.1. *Ha* $\delta(\gamma) \le \delta$ *és* γ' *mindegyik osztópontja szerepel a* γ *osztópontjai között, akkor* $|I_\gamma(f) - I_{\gamma'}(f)| \le c(\delta, f)(b-a)$, *tehát* $f \in L^1_0[a,b]$ *esetén* $|I_\gamma(f) - \int_a^b f\, dx| \le c(\delta(\gamma), f)(b-a)$.

Bizony: Elég az első állítást igazolni, ami majdnem nyilvánvaló ha γ és γ' osztópontjai azonosak; csak a háromszög egyenlőtlenséget kell alkalmazni. Ha most $\gamma = \{x_k, \xi_k\}$, $\gamma' = \{x'_j, \xi'_j\}$, akkor a feltétel szerint $\{x_k\} \subset \{x'_j\}$, tehát

$$I_\gamma(f) = \sum_k \sum_{j \in \alpha(k)} f(\xi_k)(x'_{j+1} - x'_j)\,, \quad I_{\gamma'}(f) = \sum_k \sum_{j \in \alpha(k)} f(\xi'_j)(x'_{j+1} - x'_j)\,,$$

ahol $\alpha(k) := \{j : x_k \le x'_j < x'_{j+1} \le x_{k+1}\}$. Mivel $j \in \alpha(k)$ esetén $|\xi_k - \xi'_j| \le \delta$, a két képletet egymásból kivonva, megint a háromszög egyenlőtlenség adja az eredményt. □

A következő tétel az alapvető jelentőségű Newton - Leibniz (NL) formulát is tartalmazza; joggal nevezzük a differenciál és integrálszámítás alaptételének.

Tétel 4.2. *$L_0^1[a,b] \subset C[a,b]$, és ha $f \in C[a,b]$, akkor $F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$ az $x \in [a,b)$ változó differenciálható függvénye: $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b)$. Fordítva, ha az $f \in L_0^1[a,b]$ függvénynek van primitív függvénye, nevezetesen F, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*

Bizony: A fenti lemma egyszerű következménye hogy $|I_\gamma(f) - I_{\gamma'}(f)| \le 2c(\delta,f)(b-a)$ ha $\delta(\gamma)\,,\delta(\gamma') \le \delta$. Ennek belátásához csak olyan γ'' felosztást kell készíteni, aminek az osytópontjai között a γ és a γ' osztópontjai is mind szerepelnek, ekkor ugyanis $|I_\gamma - I_{\gamma'}| \le |I_\gamma - I_{\gamma''}| + |I_{\gamma'} - I_{\gamma''}|$

Mivel $f \in C[a,b]$ egyenletesen folytonos, $c(\delta,f) \to 0$ ha $\delta \to 0$. Ha tehát $\delta(\gamma_n) \to 0$, akkor $I_{\gamma_n}(f)$ Cauchy sorozat, ami a lemma alapján az első állítást bizonyítja.

Ha most $a \le x < x+h \le b$, akkor

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(y)\,dy = hf(x) + \int_x^{x+h} (f(y) - f(x))\,dy = hf(x) + o(h)$$

mert $f \in C(x)$. Valóban, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h_\varepsilon > 0$ úgy hogy $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ha $|y - x| \le h_\varepsilon$, tehát $h < h_\varepsilon$ esetében a második integrál abszolút értéke nem nagyobb mint $h\varepsilon$. A $h < 0$ eset hasonlóan tárgyalható, vagyis $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Végül legyen $a = x_0 < x_1 < \cdots x_{m-1} < x_m = b$. Lagrange tétele szerint $F(x_{k+1}) - F(x_k) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$, ahol $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, tehát

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big) = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\,.$$

A jobboldali integrál közelítő összeg a felosztás finomításakor az integrálhoz konvergál. □

A primitív függvény nem egyértelmű, de ha $F' = G'$ egy intervallumon, akkor ott $G(x) = F(x) + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans.

A definíció és a Riemann kritérium alapján az is igazolható, hogy minden olyan korlátos függvény Riemann integrálható, amely véges vagy megszámlálhatóan sok ponttól eltekintve folytonos. Ahol f nem folytonos, ott $(d/dx)\int_a^x f\,dy \ne f(x)$ lehetséges. Az integrál az alsó határnak is differenciálható függvénye. Mivel $\int_x^b f\,dy = \int_a^b f\,dy - \int_a^x f\,dy$, $(d/dx)\int_x^b f(y)\,dy = -f(x)$ ha f folytonos. Ez a tény az $\int_a^b f\,dx \equiv -\int_b^a f\,dx$ konvencióval is összhangban van; a primitív függvény $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ konstrukciójában kifejezetten célszerű az $x < a$ esetet is megengedni. A F primitív függvényt gyakran az $f = F'$ határozatlan integráljának nevezik, és az $\int f\,dx = F + c$ jelölést használják.

4.2. **Integrálok kiszámítása.** Számtalan módszer és trükk van, ezek közül a leggyakrabban előfordulókat ismertetjük. Newton és Leibniz tanítása szerint elsősorban a primitív függvényt keressük, differenciálegyenlet megoldásához mindig ez kellene. Határozott integrálok számolásakor előfordul hogy a primitív függvényt nem tudjuk, vagy nem is akarjuk meghatározni, de az integrálás határai olyan szerencsésen adottak hogy az integrál értékét meg tudjuk határozni.

Elemi függvények: Először néhány függvény primitív függvényét soroljuk fel; ez utóbbiak csak egy additív konstans erejéig vannak meghatározva. Az alábbi képletek differenciálással közvetlenül ellenőrizhetőek.

$$x^\alpha = \frac{d}{dx}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,, x \ge 0\,, \alpha \ne -1\,; \quad \frac{1}{x} = \log' x\,, x > 0\,; \quad e^x = \frac{de^x}{dx}\,; \quad \log x = (x\log(x/e))'\,;$$

$$\cos x = \sin' x\,; \quad \sin x = -\cos' x\,; \quad \cos^{-2} x = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}' x\,; \quad \sin^{-2} x = 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \mathrm{ctg}' x\,;$$

$$2\cos^2 x = (x + \sin x\,\cos x)'\,; \quad 3\cos^3 x = (3\sin x - \sin^3 x)'\,; \quad \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}' x\,; \quad \mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}' x$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = \arcsin' x\,, |x| < 1\,; \quad (1+x^2)^{-1} = \mathrm{arctg}' x\,; \quad (x^2-1)^{-1} = \mathrm{arth}' x$$

$$= \tfrac{d}{dx}\,\tfrac{1}{2}\log\tfrac{x-1}{x+1} \text{ ha } x > 1\,; \quad (1+x^2)^{-1/2} = \mathrm{arsh}' x = \tfrac{d}{dx}\log(x + \sqrt{1+x^2})\,;$$

$$(x^2-1)^{-1/2} = \mathrm{arch}' x = \tfrac{d}{dx}\log(x + \sqrt{x^2-1})\,, |x| > 1\,.$$

Ezekben az esetekben a határozott integrál számítása közvetlenül, a Newton - Leibniz formulával történhet. Gyakori feladat $g = f(ax + b)$ alakú függvények integrálása. Ha $f(x) = F'(x)$, akkor $(d/dx)F(ax + b) = af(ax + b)$, tehát g primitív függvénye $G(x) = (1/a)F(ax + b)$ ha $a \neq 0$.
Integrálás helyettesítéssel: Mivel $f(g(x))g'(x)$ éppen $h(x) := F(g(x))$ deriváltja, ahol F a f primitív függvénye, $g \in C^1[a, b]$ és $f \in C[a, b]$ esetén az $y = g(x)$ helyettesítéssel

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = F(g(b)) - F(g(a))\,. \tag{4.8}$$

A helyettesítés sémája: $dy = g'(x)\, dx$, a befejező lépés az integrálás új határainak megállapítása. Előfordul hogy $g(a) > g(b)$, de a képlet ilyenkor is érvényes, mert tartalmazza a szükséges előjelváltást.

Szerencsétlen dolog a $h(x) = f(g(x))$ integrálását az $y = g(x)$ helyettesítéssel erőltetni, mert a $dx = dy/g'$ formulában g' az x, és nem az y változó függvénye. Emiatt a számolás elbonyolódhat, de nem ez az egyetlen probléma. Itt voltaképp az $x = \varphi(y)$ helyettesítésről van szó, ahol φ a g inverze, tehát arra is figyelni kell, hogy g az integrálás teljes (a, b) intervallumán invertálható legyen. Ha nem az, akkor (a, b)-t olyan részekre kell felbontani, amelyeken g kölcsönösen egyértelmű. Helyettesítés elvégzése előtt meg kell gondolni hogy a lépés hova vezet, zsákutca kerülendő!

Például, a félkör területe az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ integrálásával számítandó, és egyáltalán nem nyilvánvaló hogy az $x = \sin\varphi$ helyettesítés a jó. Mivel $dx = \cos\varphi\, d\varphi$,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, \cos\varphi\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

a $2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi$ azonosság alapján. A $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ képletet, és a trigonometrikus függvények szimmetriáját is figyelembe véve közvetlenül is látható hogy $\cos^2\varphi$ és $\sin^2\varphi$ integrálja π hosszúságú intervallumon éppen $\pi/2$; ennyi az egységkör területének fele. A primitív függvényt nem kellett meghatározni, az

$$\sqrt{1 - x^2}\, dx = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, d\sin\varphi = \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{d\varphi - \cos(2\varphi)\, d\varphi}{2} = \frac{2\, d\varphi - d\sin(2\varphi)}{4}$$

alapján $F(x) := (1/4)(2 \arcsin x - \sin(2 \arcsin x)) = (1/2)(\arcsin x - x\sqrt{1 - x^2})$ mert $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$.

Az $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola alatti terület számolása $f(x) := \sqrt{1 + x^2}$ integrálására vezet, amit az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel oldhatunk meg, de $x = \operatorname{tg} t$ is működik. Általában, az $f((1 - x^2)^{-1/2})$, $f((1+x^2)^{-1/2})$, $f((x^2-1)^{-1/2})$, illetve $f(e^x)$ alakú függvények integrálása a $t = \sin x$, $t = \operatorname{arsh} x$ vagy $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{arch} x$, illetve a $t = \log x$ helyettesítéssel egyszerüsödhet. Az $f(\sin x, \cos x)$ típus a

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}\,, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

azonosságok alkalmazása és az $x = 2\operatorname{arctg} t$ helyettesítés után válik olykor integrálhatóvá.
Parciális integrálás: Éppúgy mint a helyettesítéses integráláskor, itt is azt kell felismerni hogy az integrandus egyik tényezője valaminek a deriváltja. Kiinduló pontunk a szorzat differenciálásának $(fg)' = f'g + fg'$ képlete, amit most az $f\, dg = d(fg) - g\, df$ formában használunk. Ha $f, g \in C^1[a, b]$, akkor

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx \tag{4.9}$$

a NL formula alapján; előfordul hogy a jobboldali integrált már ki tudjuk számolni. Például,

$$\int_0^l x \sin x\, dx = -\int_0^l x \cos' x\, dx = -l\cos l + \int_0^l \cos x\, dx = \sin l - l\cos l\,.$$

A parciális integrálás rutinszerűen alkalmazható hatványok és trigonometrikus vagy exponenciális függvények szorzatának integrálásakor, de sok más trükk is ismert. Még az is előfordul

hogy az $1 = x'$ választás a célszerű, mert $xf'(x)$ könnyebben integrálható mint f. Ilyen például $f = \log^n x$ ha $n \in \mathbb{N}$. Az (4.9) formula elméleti okoskodásoknál is fontos szerepet játszik. Például, az fg' szorzat integrálját akkor is definiálni lehet, ha csak f differenciálható, g nem.
Racionális törtfüggvény integrálása: a hányados parciális törtekre való felbontásával kezdődik. Ezek prototípusai az $(x-a)^{-n}$, $x\,(x^2+bx+c)^{-n}$ és $(x^2+bx+c)^{-n}$ függvények, ahol az x^2+bx+c polinomnak már nincs valós gyöke. Az első két esetben nincs probléma, a harmadik a nevező teljes négyzetté való kiegészítése után az $f_n(x) := (1+x^2)^{-n}$ alakra redukálódik. Legyen $F_n(x) := \int_0^x f\,dy$, azt már tudjuk hogy $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$. Mivel $f_n(x) = f_{n-1}(x) - x^2 f_n(x)$ és $f'_{n-1}(x) = -2(n-1)x\,f_n(x)$, egyszerű számolással az

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2}\int x\,f'_{n-1}(x)\,dx = \frac{x\,f_{n-1}(x)}{2n-2} + \frac{(2n-3)F_{n-1}(x)}{2n-2}$$

rekurziót kapjuk, amivel mindegyik primitív függvény meghatározható. Például, $(1+x^2)^{-2}$ primitív függvénye $F_2(x) = (1/2)\operatorname{arctg} x + (x/2)(1+x^2)^{-1}$. Trigonometrikus függvények racionális kifejezésének integrálását az $x = 2\operatorname{arctg} t$ helyettesítéssel közönséges racionális függvény integrálására vezethetjük vissza.
Improprius integrálok: Gyakran kell nem korlátos függvényeket, esetleg végtelen intervallumon integrálni. Az $f \in C[a,b)$ függvény improprius (=nem valódi!) integrálja

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx \tag{4.10}$$

amennyiben a határérték létezik, ahol persze $\beta < b$ a határátmenet során. A határérték $+\infty$ vagy $-\infty$ is lehet. Ez a definíció tartalmazza azt az esetet is, amikor $b = +\infty$, és azt is, amikor b véges, de f nem korlátos a b környezetében. Ha f eleve integrálható volt, akkor nincs változás, mert ilyenkor f korlátos, b véges, tehát $|\int_a^b f\,dx - \int_a^\beta f\,dx| \le K(b-\beta)$, ahol K az f korlátja. Hasonló az $f \in C(a,b]$ eset, amikor $a = -\infty$ van megengedve. Például,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} := \lim_{l\to\infty}\frac{1-l^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha>1; \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} := \lim_{l\to 0}\frac{1-l^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \text{ ha } \alpha<1.$$

Azt is látjuk hogy $f(x) = 1/x$ integrálja mindkét intervallumon $+\infty$. Valamely improprius integrál abszolút konvergens ha $|f(x)|$ ugyanolyan típusú improprius integrálja véges, ellenkező esetben feltételesen konvergens integrálról beszélünk. Leibniz tételével könnyű igazolni hogy $f(x) = (1/x)\sin x$ integrálja a $[0,+\infty)$ intervallumon konvergens, de az is egyszerű számolás terméke hogy $|f|$ integrálja $+\infty$, tehát ez az integrál csak feltételesen konvergens. Nagyon fontos hogy az improprius integrálokat mindig csak félig zárt intervallumon definiáljuk, tehát egyszerre csak egy szingularitással foglalkozunk. Több lépésben persze több szingularitással rendelkező függvény improprius integrálja is meghatározható, de $\int_{-\infty}^\infty x\,dx = 0$ sehogy sem értelmezhető.

Az abszolút konvergens esetben az improprius jelzőt többnyire elhagyjuk, mert ilyenkor az integrál szokásos tulajdonságai érvényben maradnak. Az integrál additív tulajdonsága akkor is igaz marad ha az integrálás tartományát végtelen sok részre bontjuk fel. A Newton - Leibniz formula, valamint a parciális és a helyettesítéses integrálás képletei is alkalmazhatóak, az eltérés csak annyi, hogy végtelen intervallum esetén a primitív függvény határértékét kell behelyettesíteni. Igy kapjuk a $\lambda\int_a^\infty e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a}$ és $\lambda^2\int_0^\infty x\,e^{-\lambda x}\,dx = 1$ értékeket, ahol $a,\lambda > 0$. Érdekes az is hogy $x^{-\alpha}$ fentebb meghatározott két integrálja az $x = 1/y$ helyettesítéssel helyet cserél úgy, hogy $x^{-\alpha}$ helyére $y^{2-\alpha}$ kerül.
$**$ **Numerikus integrálás:** Folytonos függvény esetén általában csak annyit mondhatunk, hogy $c(\delta,f) \to 0$ ha $\delta \to 0$; a 4.1. Lemma csak az $I_\gamma \to I$ tén yt szögezi le. $f \in C^1[a,b]$, esetén $c(\delta,f) = O(\delta)$, ilyenkor tehát $I = I_\gamma + O(\delta)$. $(b-a)O(\delta(\gamma))$ lesz. A folytonosság modulusa nem lesz jobb ha $f \in C^2[a,b]$, de a szakaszonként konstans (lépcsős függvény) közelítés helyett lineáris interpolációt alkalmazva, jobb eredményt kapunk. Pontosabban, adott $\gamma = \{x_k\}$ felosztásnál legyen $\hat f_\gamma(x) := f(x_k) + (x-x_k)(f(x_{k+1} - f(x_k))/(x_{k+1}-x_k)$ ha $x_k \le x \le x_{k+1}$. Lagrange tétele szerint $f(x) = f(x_k) + f'(\xi)(x-x_k)$, de $\tilde f_\gamma(x) = f(x_k) + f'(\eta)(x-x_k)$ is igaz, ahol

$x_k < \xi < x < x_{k+1}$ és $x_k < \eta < x_{k+1}$, tehát $f(x) = \tilde{f}_\gamma(x) + f''(\zeta)(x-x_k)(x_{k+1}-x_k)$, vagyis $|\tilde{f}_\gamma - f| \le K\delta^2$ ha $|f''(x)| \le K$ az $[a,b]$ intervalumon. Összefoglalva:

$$\hat{I}_\gamma := \int_a^b \hat{f}_\gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big)\,(x_{k+1}-x_k) = \int_a^b f(x)\,dx + (b-a)O(\delta^2(\gamma))$$

az integrál monotonitása miatt. Az $x_{k+1} = x_k + h$, $h := (b-a)/n$, $f \in C^2[a,b]$ esetben a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{h}{2} f(a) + h\,f(a+h) + \cdots + h\,f(a+kh) + \cdots h\,f(b-h) + \tfrac{h}{2} f(b) + O(h^2) \quad (4.11)$$

trapéz szabályt kapjuk. Ezt az

$$\bar{I}_\gamma := h\,f(a) + h\,f(a+h) + \cdots + h\,f(a+kh) + \cdots + h\,f(b-h)$$

téglalap közelítéssel összehasonlítva látjuk hogy $\bar{I}_\gamma = \hat{I}_\gamma + (h/2)(f(a)-f(b)) = \hat{I}_\gamma + O(h)$, tehát a trapéz szabály tényleg egy nagyságrenddel jobb eredményt ad, kivéve ha $f(a) = f(b)$.
Simpson formulája úgy keletkezik hogy az integrandust nem törött vonalakkal, hanem parabola ívekkel közelítjük. Az (a,b) intervallumot $2n$ egyenlő, $h := (b-a)/2n$ nagyságú részre osztjuk, x_k jelöli a k-ik osztópontot, $x_0 = a$ és $x_{2n} = b$. Ezután az x_{2k} , x_{2k+1} és x_{2k+2} osztópontokban úgy illesztjük a $g_k(x)$ parabolát hogy $g_k(x_j) = f(x_j)$ legyen hacsak $j = 2k, 2k+1, 2k+2$; ezt a

$$g_k(x) := f(x_{2k})\,\ell^{(0)}_{2k}(x) - f(x_{2k+1})\,\ell^{(1)}_{2k}(x) + f(x_{2k})\,\ell^{(2)}_{2k+2}(x)$$

Lagrange interpolációval valósíthatjuk meg a legkönnyebben, ahol

$$\ell^{(i)}_{2k}(x) := \frac{(x-x_{2k})(x-x_{2k+1})(x-x_{2k+2})}{2h^2\,(x-x_{2k+i})}\,, \qquad i = 0,1,2\,.$$

Az így kapott közelítő függvény $\tilde{f}_\gamma(x) := g_k(x)$ ha $x_{2k} \le x \le x_{2k+2}$, $k = 0,1,...,n-1$, tehát $\int_a^b f\,dx$ közelítése

$$\widetilde{I}_\gamma := \int_a^b \tilde{f}_\gamma(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+\cdots+4y_{2k+1}+2y_{2k})+\cdots+2y_{2n-2})+4y_{2n-1}+y_{2n})\,, \quad (4.12)$$

ahol $y_k := f(x_k)$. Némi számolással megmutatható hogy ha f negyedik deriváltja is korlátos, akkor a közelítés pontossága $O(h^5)$. $**$

4.3. **Nevezetes integrálok.** Ismertetjük néhány trükkös integrál értékét, parciális integrálás a leggyakoribb eljárás. Néhány olyan technikát is bemutatunk, aminek a jogosultságát csak a B2 részben igazoljuk.
A gamma függvény: Mivel $e^{-x} = (-e^{-x})'$, $z > 0$ esetén

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt = (z-1)\Gamma(z-1)\,, \quad (4.13)$$

és $\Gamma(1) = 1$, tehát $\Gamma(n) = (n-1)!$ ha $n \in \mathbb{N}$. A $t = x^2/2$ helyettesítés a

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\int_0^\infty \exp(-x^2/2)\,dx = \sqrt{\pi}$$

Gauss integrálra vezet, lásd (4.20), és a $\Gamma(z+1) = z\Gamma$ függvényegyenlet segítségével $\Gamma(n+1/2) = n!\sqrt{\pi}$ ha $n \in \mathbb{N}$. A többi értéket táblázatba szedték.
$**$ **A béta függvény:** Szintén parciális integrálással igazolható hogy

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\beta-1}{\alpha}\,B(\alpha+1,\beta-1) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}\,B(\alpha,\beta-1)\,, \quad (4.14)$$

ahol a definícióban $\alpha,\beta > 0$, míg $\alpha > 0$ és $\beta > 1$ azután. A második egyenlet az $x^\alpha(1-x)^{\beta-2} = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2} - x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ azonosság következménye, mert belőle $B(\alpha+1,\beta-1) =$

$B(\alpha,\beta-1)-B(\alpha,\beta)$ következik. Ha $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ akkor indukcióval bizonyítható hogy

$$B(\alpha,\beta)=\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha-1}^{-1}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,. \tag{4.15}$$

A komplex függvénytan egyik alaptételéből következik, hogy ez az azonosság az $\alpha,\beta>0$ minden értékénél igaz. Helyettesítéssel sok integrál vezethető vissza erre az esetre; a béta integrálok értékei is táblázatból kereshetők ki. $**$

Trigonometrikus polinomok: Általában az Euler formulával kezeljük őket, de az alábbi integrálok egyszerűen számolhatóak.

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}\,\gamma_n\,, \tag{4.16}$$

ahol $\gamma_n:=1$ ha n páratlan, $\gamma_n:=\pi/2$ ha n páros, végül $n!!:=n(n-2)\cdots\beta_n$, és $\beta_n:=1$ ha n páratlan, $\beta_n=2$ ha n páros; $2!!=1!!=1$. Jelölje I_n az első integrált, parciális integrálással a $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ helyettesítés után $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ adódik, vagyis $I_n=I_{n-2}(n-1)/n$. Mivel $I_0=\pi/2$ míg $I_1=1$, indukcióval kapjuk a képletet. Itt említjük meg hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\sin(mx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\cos(mx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,\sin(mx)\,dx=0 \tag{4.17}$$

ha $m\neq n$, amit az addíciós képletekkel lehet igazolni. Ha $m=n\neq 0$, akkor mindegyik integrál értéke π.

$**$ **Elliptikus integrálok:** Az $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ alakban adott ellipszis kerületének számolása $(a^2-c^2\cos^2\varphi)^{1/2}$ integrálásához vezet, ahol $a>b$ és $c^2=a^2-b^2$, de ez az integrál zárt alakban nem adható meg. Ezért vezették be az

$$E_2(\phi,\kappa):=\int_0^{\phi}\sqrt{1-\kappa\sin^2\varphi}\,d\varphi\,,\quad 0<\kappa\le 1 \tag{4.18}$$

másodfajú elliptikus integrált. Ennek segítségével az ellipszis ívdarabjainak hossza könnyedén megadható.

A matematikai inga $\ddot{x}+\sin x=0$ egyenletének megoldása $(\cos\varphi-\cos\varphi_0)^{-1/2}$ integrálására vezethető vissza, lásd a 4.5 szakaszt. A $\cos x=1-2\sin^2(x/2)$ azonossággal ez a feladat az

$$E_1(\phi,\kappa):=\int_0^{\phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa\sin^2\varphi}}\,,\quad 0<\kappa\le 1 \tag{4.19}$$

elsőfajú elliptikus integrálhoz vezet. Az elliptikus integrálok értékeiről is készültek táblázatok. $**$

Gauss integrálok: Később precízen is bebizonyítjuk, de már most is jó tudni hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}\,. \tag{4.20}$$

A gondolatmenet a következő: Jelölje I az integrál értékét, ekkor

$$'sI^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2/2-y^2/2)\,dx\,dy=2\pi\int_0^{\infty}r\,e^{-r^2/2}\,dr=2\pi\,.$$

A kettős integrált először az $r=\sqrt{x^2+y^2}$ sugarú körök mentén számolva $2r\pi e^{-r^2/2}$ adódik, és ennek az integrálj́att már ki tudjuk számolni.

Az exponens teljes négyzetté való kiegészítése után innen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(zx-x^2/2)\,dx=e^{\,z^2/2} \tag{4.21}$$

következik.

Mivel $xe^{-x^2/2}=(-e^{-x^2/2})'$, $\int_a^{\infty}xe^{-x^2/2}\,dx=e^{-a^2/2}$,

$$\int_a^{\infty}x^3\,e^{-x^2/2}\,dx=a^2\,e^{-a^2/2}+2\int_a^{\infty}xe^{-x^2/2}\,dx=(a^2+2)e^{-a^2/2}\,,$$

és így tovább. Az általános esetben

$$M(\alpha) := \int_0^\infty x^\alpha\, e^{-x^2/2}\, dx = (\alpha-1)M(\alpha-2)\,; \tag{4.22}$$

a definícióban $\alpha > -1$, de a jobboldalon már $\alpha > 1$ szükséges. Innen $M(2) = M(0) = \sqrt{\pi/2}\,$, $M(4) = 3M(2) = 3\sqrt{\pi/2}\,$, $M(3) = 2M(1) = 2\,$, $M(5) = 4M(3) = 8\,$, és így tovább, $M(2n{+}1) = (2n)!! = 2^n\, n!\,$. Ha $\alpha \in \mathbb{N}$ páros, akkor az (4.21) egyenlet z-szerinti differenciálásával, és a jobboldal sorfejtését is felhasználva, $2M(2n) = (2n-1)!!\sqrt{2\pi}$ adódik. Másrészt, az $x = \sqrt{2y}$ helyettesítéssel $M(\alpha) = 2^{\alpha/2-1/2}\Gamma(\alpha/2+1/2)\,$, vagyis $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2\,$, $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4\,$, és így tovább. Eszerint az $n!!$ számok a gamma függvény segítségével is kifejezhetők, $(2n)!! = 2^n\, n! = 2^n\,\Gamma(n+1)$ míg $(2n-1)!! = (2^n/\sqrt{\pi})\Gamma(n+1/2)\,$. Innen a d-dimenziós gömb térfogata a $V_d(r) = r^d\pi^{d/2}/\Gamma(1+d/2)$ alakban is felírható.

Az $e^{-x^2/2}$ függvény primitív függvénye zárt alakban nem adható meg, a

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2)\, dy \tag{4.23}$$

standard normális eloszlásfüggvény értékeit is táblázatból kell kikeresni, de számos közelítő formula is van. Megmutatjuk hogy $a > 0$ esetén

$$\frac{ae^{-a^2/2}}{1+a^2} < F(a) := \int_a^\infty e^{-x^2/2}\, dx < \frac{e^{-a^2/2}}{a}\,. \tag{4.24}$$

A felső becslés $e^{-a^2/2} = \int_a^\infty xe^{-x^2/2}\, dx \ge aF(a)$ következménye. Az alsó becslés ismét parciális integrálás terméke, $1/x^2 = (-1/x)'$ alapján

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{x^2}\, dx = \frac{e^{-a^2/2}}{a} - F(a)\,,$$

de $1/x^2 < 1/a^2$ az integrál alatt, tehát $F(a)/a^2 > (1/a)e^{-a^2/2} - F(a)\,$, amiből átrendezéssel kapjuk az alsó becslést. Ismételt parciális integrálással mindkét becslés pontosítható.

$**$ **Fourier integrálok:** Euler képlete szerint az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény Fourier transzformáltja

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\imath\omega x} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \cos(\omega x)\, f(x)\, dx - \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \sin(\omega x)\, f(x)\, dx\,,$$

ahol $\omega \in \mathbb{R}$. Látjuk hogy páros függvény Fourier transzformáltja valós, páratlané tisztán képzetes értékű. A valszinűségszámításban sűrűségfüggvény az olyan $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ neve aminek a teljes számegyenesen 1 az integrálja, és $\int_{-\infty}^\infty e^{\imath\omega x} f(x)\, dx$ a karakterisztikus függvény. Az (4.21) egyenletből a $z = \imath\omega$ helyettesítés után látjuk hogy

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \cos(\omega x)\, e^{-x^2/2}\, dx = e^{-\omega^2/2}\,, \tag{4.25}$$

tehát az $f(x) := (2\pi)^{-1/2}\, e^{-x^2/2}$ *standard normális (Gauss) sűrűségfüggvénynek önmaga a Fourier transzformáltja.*

A következő integrálok is érdekesek, ahol $\lambda > 0$, $\omega \in \mathbb{R}\,$,

$$I_1 := \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, \cos(\omega x)\, dx = \frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\;, \quad I_2 := \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, \sin(\omega x)\, dx = \frac{\omega}{\lambda^2+\omega^2}\,. \tag{4.26}$$

Kétszeri parciális integrálással $I_1 = 1/\lambda - (\omega/\lambda)I_2 = 1/\lambda - (\omega/\lambda)^2\, I_1\,$, amiből már mindkét integrál meghatározható. Ismételt parciális integrálással az $x^n\, e^{-\lambda x}\, \cos(\omega x)$ és $x^n\, e^{-\lambda x}\, \sin(\omega x)$ függvények integrálása visszavezethető I_1 és I_2 képletére, de egyszerűbb út is van.

Ha az integrandus paraméter szerinti differenciálásával kapott függvény is integrálható, akkor az integrálás és a differenciálás sorrendje felcserélhető. Például, a fenti I_1 és I_2 integrálok differenciálásával

$$\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, \sin(\omega x)\, dx = \frac{2\lambda\omega}{(\lambda^2+\omega^2)^2} = \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, \cos(\omega x)\, dx \tag{4.27}$$

adódik, és a differenciálgatás folytatható.

Kettős integrálással és az integrál alatti határátmenettel számoljuk az

$$I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos(\omega x)\, dx}{\lambda^2 + x^2} = \pi\, e^{-\lambda|\omega|}\,, \quad I_4 := \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{4.28}$$

integrálokat, ahol λ és ω pozitív számok. A fenti I_1 felhasználásával

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\theta} \cos(\omega x)\, \cos(\theta x)\, d\theta \right) dx\,.$$

Szeretnénk az integrálás sorrendjét felcserélni, de Fubini tétele szerint ezt csak akkor tehetjük meg ha *az integrandus abszolút értéke is integrálható.* Ezért a következő regularizációs technikát alkalmazzuk.

$$I_3 = \lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\theta} \cos(\omega x)\, \cos(\theta x)\, d\theta \right) e^{-\delta x^2/2}\, dx\,,$$

és most már nem gond a csere. Mivel $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\, \cos\beta$,

$$I_3 = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x^2/2} (\cos(\omega x + \theta x) + \cos(\omega x - \theta x))\, dx \right) e^{-\lambda\theta}\, d\theta\,,$$

ami a Dirac típusu (4.28) felhasználásával a következő alakot ölti:

$$I_3 = \lim_{\delta\to 0} \sqrt{\frac{\pi}{2\delta}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\theta} \left(e^{-(\theta-\omega)^2/2\delta} + (e^{-(\omega+\theta)^2/2\delta} \right) d\theta\,,$$

és (7.12) levezetésének mintájára kapjuk hogy

$$\lim_{\delta\to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-(\theta-\omega)^2/2\delta}\, d\theta = f(\omega)$$

ha $\omega > 0$, míg 0 a határérték ha $\omega < 0$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Hasonló, de egyszerűbb az I_4 integrál számolása. Mivel

$$\frac{\sin \omega x}{x} = \int_0^1 \omega\, \cos(\theta\omega x)\, d\theta\,, \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin \omega x}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{\omega\lambda\, d\theta}{\lambda^2 + \omega^2\theta^2} = \operatorname{arctg}(\lambda/om)\,,$$

amiből a könnyen ellenőrizhető $\lambda \to 0$ határátmenettel kapjuk az eredményt.

A szakasz valamennyi integrálja Fourier transzformált képletét adja. Megjegyezzük hogy $\lambda e^{-\lambda x}$ az exponenciális, $(\pi + \pi x^2)^{-1}$ a Cauchy eloszlás sűrűsége. Az $1/x$ függvény nem is integrálható, mégis van neki Fourier transzformáltja, ami éppen a Dirac δ primitív függvényével arányos. A számolás során lényegesen kihaszáltuk az integrálás és a határátment, az integrálás és az integrandus paramétere szerinti deriválás, valamint az integrálás és az integrandus paramétere szerinti integrálás műveleteinek felcserélhetőségét. $**$

5. A DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI.

Függvényekkel adott görbék geometriai tulajdonságainak vizsgálata a fizika számára különösen fontos. Az integrál tulajdonságaiból, valamint az integrált közelítő összegek szemléletes jelentéséből kiindulva sok feladat oldható meg, méghozzá nem csak a területszámítás témaköréből.
Síkgörbék, görbület és simulókör: A differenciálható $y = f(x)$ görbe $(x_0, f(x_0)$ pontjában húzott érintőjének $y = \varphi(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ az egyenlete. Mondhatjuk hogy az f és a φ görbék elsőrendben érintkeznek az x_0 pontban ha $f(x_0) = \varphi(x_0)$ és $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$; ezt teszi a függvény és érintője. Ennek megfelelően az f és φ függvények görbéi másodrendben érintkeznek az x_0 helyen ha $f(x_0) = \varphi(x_0)$, $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$ és $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$. A Lagrange második tételében megjelenő $y = \varphi(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (1/2)f''(x_0)(x - x_0)^2$ másodfokú (Taylor) polinom másodrendben érinti f görbéjét, kérdés hogy van-e másodrendben érintkező kör? A jelölt az $(x - a)^2 + (\varphi(x) - b)^2 = r^2$ egyenletnek tesz eleget, ahol a és b a keresett simulókör középpontjának koordinátái, r a sugara. Differenciálással $x - a + (\varphi(x) - b)\varphi'(x) = 0$

és $1+\varphi'^2(x)+\varphi''(x)=0$ adódik, tehát a három paraméter meghatározására három egyenletünk van:

$$(x_0-a)^2+(f(x_0)-b)^2=r^2\,,\quad x_0-a+(f(x_0)-b)f'(x_0)=0\,,\quad 1+f'^2(x_0)+(f(x_0)-b)f''(x_0)=0\,.$$

Az utolsóból $b-f(x_0)=(1+f'^2(x_0))/f''(x_0)$, tehát a második egyenlet szerint $a-x_0=(1+f'^2(x_0))f'(x_0)/f''(x_0)$, amit az elsőbe helyettesítve, a simulókör sugarának négyzete: $r^2=(1+f'^2(x_0))^3/f''^2(x_0)$. Ennek megfelelően az $1/r$ számot, ami $g:=|f''(x_0)|(1+f'^2(x_0))^{-3/2}$, az f görbe $(x_0,f(x_0))$ pontjához tartozó görbületének nevezzük. A levezetés során felhasználtuk hogy $f''(x_0)\neq 0$. Ha $f''(x_0)=0$ akkor az érintő másodrendben is érintkezik; egyenes görbülete nyilván 0. [16]

A fenti konstrukció is alátámasztja azt az elképzelést, ami szerint a görbület az érintő irányának változási sebessége. Az x_0 helyen az érintő irányszöge $\alpha=\operatorname{arctg} f'(x_0)$, ezt viszonyítjuk a görbe mentén történő elmozduláshoz, ami Pitagorasz tétele szerint $|x-x_0|\sqrt{1+f'^2(x_0)}+o|x-x_0|$, tehát

$$g=\lim_{x\to x_0}\frac{|\operatorname{arctg} f'(x)-\operatorname{arctg} f'(x_0)|}{|x-x_0|\sqrt{1+f'^2(x_0)}}=\frac{|f''(x_0)|}{(1+f'^2(x_0))^{3/2}}\,, \tag{5.1}$$

az eredmény persze ugyanaz mint előbb.

Egyenlőtlenségek: Ha $f,g\in C^1[a,b)$, $f(a)=g(a)$ és $f'(x)\le g'(x)$, akkor NL miatt $f(x)\le g(x)$ ha $a<x<b$. Például, Bernoulli egyenlőtlensége az $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x$ ha $\alpha\ge 1$ és $x>-1$, illetve $(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x$ ha $0<\alpha<1$ és $x>-1$ módon általánosítható. Valóban, legyen $f(x):=\alpha\log(1+x)$ míg $g(x):=\log(1+\alpha x)$; feltehetjük hogy $1+\alpha x>0$. Ekkor $f(0)=g(0)=0$, $f'(x)=\alpha/(1+x)$, $g'(x)=\alpha/(1+\alpha x)$. Ha most $\alpha>1$, akkor $f'(x)\ge g'(x)$ ha $x\ge 0$ és $f'(x)\le g'(x)$ ha $x<0$, ami az első állítást bizonyítja. Az $\alpha<1$ eset hasonló.

Végtelen sorok: Tegyük fel hogy $f\in C(0,\infty)$ nemnegatív és monoton fogyó függvény. Ilyenkor az $\int_0^\infty f\,dx$ integrál mindig létezik, de $+\infty$ is lehet, továbbá

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)\le\int_0^\infty f(x)\,dx\le\sum_{n=0}^\infty f(n)\,. \tag{5.2}$$

Ha tehát a középen álló integrál véges, akkor a baloldalon álló összeg abszolút konvergens. Ha viszont az integrál divergens, akkor a jobboldali sor is az. Ez a sorok abszolút konvergenciájának integrál kritériuma, ami a baloldali sor divergenciája esetén az integrál divergenciáját is garantálja. Ez történt $\int_0^\infty(1/x)|\sin x|\,dx=+\infty$ bizonyításakor. A $\sum n^{-\alpha}$ sorok konvergenciája, ha $\alpha>1$, illetve divergenciája ha $\alpha\le 1$, így is igazolható. Például, $\alpha>1$ esetén

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)(n+1)}=\int_{n+1}^\infty\frac{dx}{x^\alpha}<\sum_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k^\alpha}<\int_n^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}\,. \tag{5.3}$$

Síkgörbék és lapok nyomatékai: Az $y=f(x)$ alakban megadott síkgörbe alakú homogén drótdarab tömege az ívhosszal arányos, tehát az (a,b) szakaszon $M_1(f)=\int_a^b f(x)(1+f'^2)^{1/2}\,dx$ az x tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomaték, és $M_2(f)=\int_a^b f^2(x)(1+f'^2)^{1/2}\,dx$ a tehetetlenségi nyomaték. A görbe (a,b) szakasz feletti részének első- és másodrendű nyomatékai:

$$M_{12}(f):=\frac12\int_a^b f^2(x)\,dx\,,\quad M_{22}(f):=\frac13\int_a^b f^3(x)\,dx\,.$$

A lap súlypontjának az x tengelytől való S távolságával: $S\int_a^b f(x)\,dx=M_{12}(f)$.

Forgástestek térfogata, felszíne, nyomatékai: Jelölje $A\subset\mathbb{R}^3$ a $0\le f\in C[a,b]$ függvény gráfjának az x tengely körüli megforgatásával nyert testet. A tér pontjait $\mathbf{r}=(x,y,z)$ jelöli, vagyis $A:=\{(x,y,z)\,:\,a\le x\le b\,,\sqrt{y^2+z^2}\le f(x)\}$. Az $x\in[a,b]$ pontban az y,z síkkal párhuzamos metszet $f(x)$ sugarú körlap, tehát $V(A)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ a forgástest térfogata.

[16] Az érintőt húrok határhelyzeteként definiáltuk. A simulókör is meghatározható úgy, mint azoknak a köröknek a határhelyzete, amelyek a görbe három egymáshoz közeli pontján mennek át.

Ugyanennek a metszetnek a kerülete $2\pi f(x)$, tehát $S(A) = 2\pi \int_a^b f(x)(1 + f'^2(x))^{1/2}\, dx$ a forgástest felszíne, mert a csatlakozó ívdarab hossza $(1+f'^2)^{1/2}\, dx$ lásd a következő szakaszt. Igy kapjuk az r sugarú gömb $V_3(r) = 4\pi r^3/3$ térfogatát és $S_3(r) = 4\pi r^2$ felszínét. A négydimenziós egységgömb térfogata

$$V_4(1) = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\, dx = \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2\varphi))^2\, d\varphi = \frac{\pi^2}{2}\,,$$

tehát $V_4(r) = \pi^2 r^4/2$. Indukcióval mindegyik $V_d(r)$ térfogat meghatározható.

Fizikai értelemben létező testnek tömege is van, és ha a test homogén, vagyis a $\rho > 0$ sűrűsége állandó, akkor az A test tömege $M(A) = \rho V(A)$. Forgástestnek az y, z síkra vonatkozó elsőrendű nyomatéka $M_1(A) := \rho\pi \int_a^b x f^2(x)\, dx$; súlypontja az x tengelyen van, és a súlypontnak a kezdőponttól mért s távolságát $M_1(A) = s\, M(A)$ határozza meg. Végül, az A forgástestnek az x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $M_2(A) = (\rho\pi/2)\int_a^b f^4(x)\, dx$, mert az r sugarú körlapnál ez az érték $M_2(r) = 2\rho\pi \int_0^r x^3\, dx = \rho r^4/2$.

A d-dimenziós gömb térfogata: Az r sugarú gömb pontjainak koordinátáit $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2 \le r^2$ jellemzi, a korábbiakkal összhangban jelölje $V_d(r)$ a térfogatát. Nem látható, de elképzelhető hogy a d-dimenziós gömb metszetei $d-1$ dimenziós gömbök, tehát indukcióval

$$V_d(r) = 2r^d \int_0^1 V_{d-1}(\sqrt{1-x^2})\, dx = \frac{(2r)^d}{d!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{[d/2]} \tag{5.4}$$

adódik, ahol $[x]$ az $x \in \mathbb{R}$ egész része. Valóban, $V_1(r) = 2r$, $V_2(r) = r^2\pi$, és így tovább, tehát $\sqrt{1-x^2}$ hatványait kell integrálni. Az $x = \sin\varphi$ helyettesítés után a feladat $\cos^d\varphi$ integrálására vezet, ami már nem gond. Megjegyezzük hogy ha r az a élű kocka sugara (az átmérő fele), akkor $(2r)^2 = da^2$, tehát a kocka $a^d = (2r)^d d^{-d/2}$ térfogata magas dimenziókban sokkal kisebb nagyságrendü mint az ugyanilyen sugarú gömbé. Viszont $V_d(1/2) \to 0$ amint $d \to +\infty$, vagyis a gömb térfogata sokkal kisebb mint a köré írt kockáé.

A térfogat és a felszín többdimenziós térben is szoros kapcsolatban áll egymással:

$$V_d(r) = \int_0^r S_d(x)\, dx \quad \text{tehát } S_d(r) = \frac{2^d r^{d-1}}{(d-2)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{[d/2]}\,, \tag{5.5}$$

ahol $S_d(r)$ a d-dimenziós gömb felszíne.

6. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK.

Alaptípus az $\dot{x} = f(t,x)$ elsőrendű explicit egyenlet, ahol f legalábbis folytonos a (t_0, x_0) pont egy környezetében, és azt az $x = x(t)$ függvényt keressük, amely kielégíti az egyenletet, vagyis $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ valamilyen intervallumon, és eleget tesz az $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételnek is. A NL formulával

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds \tag{6.1}$$

következik, amiből sejthető hogy a megoldás meghatározásához az $x(0) = x_0$ kezdeti érték ismerete mindenképpen szükséges. Legtöbbször $t_0 = 0$, de vannak kivételek. Természetes feltételek egyértelműen meghatározott megoldás létezését garantálják, erről a jegyzet harmadik részében lesz szó. A megoldás egyértelműsége nyilvánvaló olyankor, amikor azt abból a feltevésből kiindulva határozzuk meg, hogy van megoldás. Ilyenkor persze behelyettesítéssel ellenőrizni kell hogy tényleg megoldást kaptunk-e; érhet bennünket meglepetés. Az egyenlet általános megoldása olyan $\phi(t,c)$ függvény, amely a $c \in \mathbb{R}$ paraméter minden rögzített értéke mellett megoldás, és a c paraméter alkalmas megválasztásával az előírt $\phi(t_0, c) = x_0$ kezdeti feltétel kielégíthető.

Az $\dot{x} = f(t)$ egyenlet megoldásához csak az f primitív függvényét kell megtalálni, ami $F(t) := \int_0^t f(s)\, ds$, tehát $x(t) = x(0) + F(t)$. Az is látszik hogy más megoldás nincs. Érdekesebb az $\dot{x} = x$ egyenlet, melynek az $x(0) = 1$ kezdeti értékhez tartozó megoldása $x(t) = e^t$. Megtörténhet hogy a megoldás egyszer csak megszakad, például $\dot{x} = 1 + x^2$ megoldása $x(0) = 0$ mellett $x(t) = \operatorname{tg} t$, ami a $t = \pi/2$ helyen végtelenhez tart. Az $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ egyenletnek az $x(0) = 0$ kezdeti értékhez kettő (sőt végtelen sok) megoldása tartozik, $x_1(t) = 0$, és $x_2(t) = t^2$. A legtöbb egyenlet megoldását nem lehet képlettel megadni, az alábbiakban néhány explicit módon megoldható típust ismertetünk.

Lineáris egyenlet: $\dot{x} = ax + f(t)$ megoldását, ahol a adott szám, $f \in C[0, \infty)$ adott függvény, az egyenletet e^{-at}-vel végigszorozva határozhatjuk meg. Valóban, ha $x(t)$ megoldás, akkor az $y(t) := x(t)e^{-at}$ függvény $\dot{y} = \dot{x}e^{-at} - axe^{-at}$ miatt az $\dot{y} = e^{-at} f(t)$ egyenletnek tesz eleget, és ezt már meg tudjuk oldani. Az eredmény

$$x(t) = x(0)\, e^{at} + \int_0^t e^{at-as} f(s)\, ds\,, \tag{6.2}$$

behelyettesítéssel ellenőrizhető hogy tényleg megoldást kaptunk. Ezzel azt is igazoltuk hogy az $\dot{x} = x$ egyenletnek az $x(0) = 1$ kezdeti értékhez pontosan egy megoldása van, az $x(t) = e^t$ exponenciális függvény.

Az $f \equiv 0$ esetben homogén lineáris egyenletről beszélünk, $\dot{x} = ax + f(t, x)$ az inhomogén lineáris egyenlet. Az (6.2) megoldóképlet jobboldalán álló integrál az inhomogén egyenlet $x(0) = 0$ kezdeti értékhez tartozó partikuláris megoldása. Azt látjuk hogy *az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén lineáris egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy speciális megoldásának összege.* Az is hasznos tanulság hogy a egyenletet alkalmas függvénnyel átszorozva tettük integrálhatóvá. Például, az $\dot{x} \le ax$ differenciál egyenlőtlenséget is átszorozhatjuk az $e^{at} > 0$ függvénnyel. Az így keletkező $d(e^{at}x(t))/dt \le 0$ egyenlőtlenség integrálásával a Grönwall lemma legegyszerűbb változatát kapjuk: $x(t) \le x(t_0) \exp(at - at_0)$ azon az intervallumon, ahol $\dot{x} \le ax$. Ez a becslés különösen érdekes ha $a < 0$.

Autonóm egyenletek: $\dot{x} = g(x)$ megoldásának kulcsa az $1/g$ függvény G primitív függvénye. Ha $x(t)$ az $x(0) = x_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldás, és az integrálás tartományában $g \neq 0$, akkor $\dot{x}/g(x) = 1$ integrálásával

$$G(x) - G(x_0) := \int_{x_0}^{x} \frac{du}{g(u)} = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\, ds}{g(x(s))} = t \tag{6.3}$$

adódik. Mivel $g \neq 0$, $|g|$ határozottan pozitív, tehát G létezik az x_0 egy környezetében; a $g < 0$ esetben $x < x_0$, ilyenkor a szokásos konvencióval élünk. Az $x(t) = (G)^{-1}(G(x_0) + t)$ megoldóképlet persze csak addig érvényes, amíg $G(x_0) + t$ nem lép ki a G inverzének értelmezési tartományából. Ez biztosan bekövetkezik ha G korlátos. Ha viszont $x > x_0$ esetén $g(x) > 0$, és $\int_{x_0}^{\infty} (1/g)\, dx = +\infty$, akkor a megoldás nem robban fel. Például, $\dot{x} = x^\alpha$, $\alpha \neq 1$ és $x(0) = 1$ esetén $G(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, tehát $x(t)^{1-\alpha} = 1 + (1-\alpha)t$. Látjuk hogy $x(t) = (1 + t - \alpha t)^{1/1-\alpha}$ mindig értelmezve van ha $\alpha \le 1$, de a megoldás a $t = 1/(\alpha - 1)$ időpontban megszakad ha $\alpha > 1$.

Az f függvény gyökei az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet stacionárius pontjai: ha $f(x^*) = 0$ és $x(0) = x^*$, akkor $x(t) = x^*$ $\forall t > 0$; az egyensúlyi helyzet (állapot) terminus is szokásos. Az x^* stacionárius pont aszimptotikusan stabil, ha van $\delta > 0$ úgy hogy $|x(0) - x^*| < \delta$ esetén $x(t) \to x^*$ amint $t \to +\infty$. A f függvény előjele jól tájékoztat a stabilitásról: ha f szigorúan monoton fogyó az x^* egyensúlyi helyzet egy környezetében, akkor azt várjuk hogy x^* aszimptotikusan stabil, az ellenkező esetben pedig instabil. Gyakran Gönwall lemmája segít a stabilitás vizsgálatakor.

Szétválasztható egyenletek: Az $\dot{x} = f(t)g(x)$ egyenlet az autonómhoz hasonlóan integrálható. Ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $x_0 = x(0)$ egy környezetében $\dot{x}/g(x) = f(t)$ integrálásával $G(x) - G(x_0) = F(t) - F(0)$ adódik, ahol F a f, G az $1/g$ primitív függvénye. A kérdés ismét az, hogy $t > 0$ növelésekor $G(x_0) + F(t) - F(0)$ benne marad-e a G inverzének értelmezési tartományában. Nincs gond ha G minden értéket felvesz, de ha F korlátos, akkor az ellenkező esetben sem biztos hogy a megoldás megszakad. Például, ha $\dot{x} = e^{-t} x^2$, és $x(0) = x_0 > 0$, akkor $1/x(t) = 1/x_0 - 1 + e^{-t}$. Látjuk hogy $x_0 > 1$ esetén a megoldás egy idő múlva megszakad, de ha $0 < x_0 \le 1$, akkor nem.

$**$ **A láncgörbe egyenlete:** A lánc furcsa dolog, nem nyúlik, és hajlításához erő nem szükséges, ezért még az egyensúlyi helyzetének megértése sem egyszerű. Tegyük fel hogy az $l > 2a > 0$

hosszúságú lánc két vége a $(-a,0)$ és az $(a,0)$ pontokban van rögzítve, és egyensúlyi alakja az $y(x)$ görbét követi. A $0<x<a$ helyen $F_g(x)=\rho g S(x)$ nehézségi erő hat lefelé, itt ρ a sűrűség, g a gravitációs állandó, $S(x):=\int_0^x(1+y'^2)^{1/2}\,dv$ a $(0,0)$ és (x,y) közötti láncdarab hossza. A láncban ébredő feszültség nagysága $F_l(x)=F_g(x)/\sin\alpha$, iránya az $y'(x)=\operatorname{tg}\alpha$ meredekségű érintővel párhuzamos. A feszültség függőleges komponensét a gravitáció ellensúlyozza, az $F_g(x)/\operatorname{tg}\alpha$ nagyságú vizszintes komponenst pedig a lánc felső szakaszában ható feszültség vizszintes komponense, tehát

$$\frac{S(x)}{y'(x)}=\frac{S(x+h)}{y'(x+h)}+o(h)=\frac{S(x)+S'(x)h+o(h)}{y'(x)+y''(x)h+o(h)}+o(h)\,.$$

A jobboldalon álló $o(h)$ tag fejezi ki a lánc hajlíthatóságáról szóló hipotézist; azt nyugodtan feltehetjük hogy $y'(x)>0$. Innen átrendezés és a $h\to 0$ határátmenet elvégzése után az $y'S'=y''S$ egyenletet kapjuk, tehát $\log y'=c+\log S$, vagyis

$$y'(x)=e^c\int_0^x\sqrt{1+y'^2(v)}\,dv\,,$$

ahol c konstans. Ezt deriválva $y''=e^c\,(1+y'^2)^{1/2}$ adódik, amiből $y'(x)=\operatorname{sh}(xe^c)$ mert $y'(0)=0$, tehát $y(x)=\gamma+e^{-c}\operatorname{ch}(xe^c)$. A c és γ konstansokat az $y(a)=\gamma+e^{-c}\operatorname{ch}(ae^c)=0$ és $l=2S(a)=2e^{-c}\operatorname{sh}(ae^c)$ peremfeltételekből kell, valamilyen numerikus eljárással meghatározni.

A fenti okoskodás szemléletes elemeket is tartalmaz, de az eredmény korrekt. A mechanika variációs elve szerint az egyensúlyi megoldást az az y függvény adja, amelynél a

$$V(\{y\}):=g\rho\int_{-a}^{a}y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

helyzeti energia minimális, a láncság itt azt jelenti hogy nincs megnyúlásból vagy hajlításból eredő rugalmassági energia. A variációs feladatot a 13. Fejezetben tárgyaljuk.

Biológiai példák: Az $\dot x=ax$ egyenlet nagylétszámú populáció korlátlan növekedésének modelljeként is értelmezhető, a szaporulat a létszámmal arányos. Reálisabb az $\dot x=bx-x^2$ logisztikus egyenlet, ami nem engedi meg a $b>0$ szint túllépését. Az egyenlet $(bx-x^2)^{-1}$ parciális törtekre való bontásával oldható meg, ha $0<x(0)<b$ akkor $x(t)(b-x(0))=x(0)(b-x(t))e^{bt}$, amiből kiolvasható hogy $x(t)\to b$ amint $t\to+\infty$. Ugyanez történik ha $x(0)>b$, tehát az $x^*=b$ stacionárius pont aszimptotikusan stabil, míg $x^*=0$ nem az.

Hasonló típus, de még érdekesebb az $\dot x=(2x-x^2)^{1/2}$ egyenlet, ennek 0 és 2 a stacionárius pontjai, és persze $0\le x(0)\le 2$ a megengedett kezdeti értékek halmaza. Ha $0<x(0)<2$ akkor $x(t)=1+\sin(\gamma+t)$ egészen addig amíg $\gamma+t<\pi/2$, ahol $\gamma:=\arcsin(x(0)-1)$. A $t=\pi/2-\gamma$ időpontban a megoldás folytonosan differenciálható módon olvad bele az $x(t)=2$ stacionárius állapotba. Azt mondjuk hogy információ vesztés történt, mert a megoldás későbbi értékeiből a kezdeti érték nem rekonstruálható. Az $x(0)=0$ kezdeti értékhez végtelen sok megoldás tartozik, és egyik sem stabil. Sőt ha $x_\delta(t)$ az $x(0)=\delta>0$ pontból kiinduló megoldás, akkor $\lim_{\delta\to 0}x_\delta(t)=x_0(t)$, ahol $x_0(t)=1-\cos t$ ha $0\le t\le\pi$, és $x_0(t)=2$ ha $t>\pi$. Ez az $x_0(t)$ az $x(0)=0$ pontból induló megoldások legnagyobbika.

$**$ **A Lotka-Volterra modell:** Rókák és nyulak, pontosabban ragadozó és szelidebb halak együttélését írja le: $x(t)$ a nyulak, $y(t)$ a rókák száma (összsúlya), és $\dot x=ax-bxy$, $\dot y=-cy+dxy$, ahol a,b,c,d adott pozitív számok. Az első egyenlet azt tükrözi hogy a nyulak rókák nélkül szépen szaporodnak, de a rókák megeszik őket, annál falánkabbak minél több a nyúl. A második szerint a rókák nyulak nélkül éhen halnak, viszont gyorsabban szaporodnak ha sok nyúl van. Az $x,y>0$ tartományban $x^*=c/d$ és $y^*=a/b$ a stacionárius állapot, de a rendszer általában nem oldható meg explicit módon. Ezért azt az $y=\phi(x)$ síkgörbét keressük, amit az $(x(t),y(t))$, $t\ge 0$ párok alkotnak. Ennek meredeksége $dy/dx=\dot y/\dot x=(dxy-cy)/(ax-bxy)$, és az így származtatott egyenlet az $(a/y-b)\,dy=(d-c/x)\,dx$ módon választható szét; az integrálás már nem gond. Igazából azt kaptuk hogy az $f(x,y):=c\log x-dx+a\log y-by$ függvény a Lotka-Volterra rendszer megoldásai mentén állandó: $f(x(t),y(t))=f(x(0),y(0))$. Képlettel a

ϕ görbék, vagyis az f szintvonalai sem adhatók meg, de a $g(u;\alpha,\beta) := \alpha\log u - \beta u$ függvény vizsgálata konkrét információhoz vezet.

Valóban, ha $\alpha, \beta > 0$ akkor g az $u^* := \alpha/\beta$ helyen éri el a maximumát, és minden ennél kisebb értéket kétszer vesz fel. Ez azt sejteti hogy az $x(0) = x^*$, $y(0) = z^*$ stacionárius helyzet kivételével a mozgás egyszerű zárt görbék mentén történik, és a idő periodikus függvénye. Ezt a jelenséget az els=o világháború idején, amikor nem lehetett halászni, az Adriai tenger halai be is mutatták.

Másodrendű egyenletek: Tömegpont egyenes menti mozgását írják le az $\ddot{x} = f(x)$ alakú egyenletek. Ezeket kétszer kell integrálni, az eredmény

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(x(\tau))\,d\tau\right) ds \\ &= x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)\, f(x(\tau))\,d\tau\,, \end{aligned} \tag{6.4}$$

tehát a megoldás meghatározásához az $x(t_0)$ kezdeti érték mellett az $\dot{x}(t_0)$ kezdeti sebességet is ismerni kell, ezért az egyenlet általános megoldása két paramétert tartalmaz.

A harmonikus oszcillátor: Ki lehet találni hogy a harmonikus rezgés $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ egyenletének minden megoldása $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ alakú, ahol $a \geq 0$ a rezgés amplitúdója, $\varphi \in [0, 2\pi)$ pedig a kezdeti fázis. Az általános megoldás persze az

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \dot{x}(0)\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \tag{6.5}$$

módon is megadható, ahol $\omega = 0$ esetében $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)\,t$.

Kényszerrezgés: Legegyszerűbb egyenlete $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = r\cos(\beta t)$ ahol $\omega \neq 0\,, r > 0$ és β adott valós paraméterek. A homogén egyenlet általános megoldását már ismerjük, és nem nehéz rájönni hogy van $b\cos(\beta t)$ alakú megoldás, éspedig $b = r/(\omega^2 - \beta^2)$. Eszerint az általános megoldás

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{r\cos(\beta t)}{\omega_0^2 - \beta^2}\,. \tag{6.6}$$

A $\beta^2 = \omega^2$ esetben ez a megoldás értelmét veszti, érdemes tehát nyomon követni a szingularitás kialakulását. Mivel

$$\tilde{x}(t) := \frac{r\cos(\beta t) - r\cos(\omega t)}{\omega^2 - \beta^2}$$

megoldás, azt várjuk hogy a $\beta \to \omega$ határátmenet után kapott $x^*(t) := (rt/2\omega)\sin(\omega t)$ is az lesz. Ez így is van, tehát az $\ddot{x} + \omega^2 x = r\cos(\omega t)$ egyenlet általános megoldása

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi) + \frac{rt}{2\omega}\sin(\omega t)\,. \tag{6.7}$$

Látjuk hogy a $\beta = \omega$ esetben a kényszerrezgés amplitudója az idővel arányosan nő, ezt a jelenséget nevezzük (külső) rezonanciának.

Nem könnyű rájönni, de igaz hogy

$$x(t) = x(0)\cos(\omega) + \dot{x}(0)\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin(\omega t - \omega s)\, f(s)\,ds \tag{6.8}$$

konvolúciós formula adja az $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ inhomogén másodrendű egyenlet általános megoldását. Ennek levezetése a $z := x + \imath\dot{x}/\omega$ komplex változó bevezetése után az elsőrendű esetre redukálódik. Valóban, $\dot{z} = -\imath\omega z + \imath f/\omega$, amit most az $e^{-\imath\omega t}$ tényezővel átszorozva

$$z(t) = z(0)e^{-\imath\omega t} + \frac{\imath}{\omega}\int_0^t e^{\imath\omega s - \imath\omega t}\, f(s)\,ds \tag{6.9}$$

adódik. A bizonyítandó képlet innen Euler formulájából, egyszerű számolással következik.

Szintén Euler segít az $\ddot{x} + 2\gamma c + \alpha x = 0$ lineáris egyenlet tárgyalásakor. A megoldást $x = e^{\lambda t}$ alakban keressük, behelyettesítés után $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 1$ adódik, tehát $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha}$, ami a $z_1(t) := e^{-\gamma t}\exp(t\sqrt{\gamma^2 - \alpha})$ és $z_2(t) := e^{-\gamma t}\exp(-t\sqrt{\gamma^2 - \alpha})$ *alapmegoldásokhoz* vezet,

vagyis $x(t) = c_1z_1(t) + c_2z_2(t)$ az általános megoldás. Semmi gond ha $\gamma^2 > \alpha$, míg a $\gamma^2 < \alpha$ esetben Euler képletével, a valós és képzetes részek szétválaszása után az alapmegoldások $x_1(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega t)$ és $x_2(t) = e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$, ahol $\omega := \sqrt{\alpha - \gamma^2}$.
Csillapított rezgések: Az $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ egyenletet érdemes az $e^{\gamma t}$ függvénnyel átszorozni. Valóban, az $y := e^{\gamma t}x$ helyettesítés után az egyenlet a már ismert $\ddot{y} + \omega^2 y = e^{\gamma t}f(t)$ alakot ölti, ahol $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, tehát

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t}\cos(\omega t) + \dot{x}(0)\, e^{-\gamma t}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\gamma s - \gamma t}\sin(\omega t - \omega s)\, f(s)\, ds \tag{6.10}$$

az általános megoldás, feltéve hogy $\gamma^2 \neq \omega_0^2$. A megoldóképlet az $\omega^2 < \gamma^2$ túlcsillapított esetben is érvényes; a $\cos(\imath x) = \operatorname{ch} x$ és $(1/\imath)\sin(\imath x) = \operatorname{sh} x$ összefüggések alkalmazandóak, ilyenkor tényleges rezgés nem jön létre. Ha $\gamma^2 < \omega_0^2$, akkor az oszcillátor ω_0 alapfrekvenciája az $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ értékre módosul. A megoldóképlet ismét elfajul ha $\gamma^2 = \omega_0^2$, ilyenkor azt mondjuk hogy belső rezonancia lép fel; ez a jelenség más mint az amit a kényszerrezgésnél tapasztaltunk. Mivel $(1/\omega)\sin(\omega t) \to t$ amint $\omega \to 0$, a $te^{-\gamma t}$ függvényhez jutunk, ami kielégíti a $\ddot{x}+2\gamma x+\gamma^2 x = 0$ egyenletet, tehát annak általános megoldása $x(t) = x(0)e^{-\gamma t} + \dot{x}(0)te^{-\gamma t}$. Az inhomogén esetben ilyenkor

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t} + \dot{x}(0)te^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s - \gamma t}(t-s)\, f(s)\, ds \tag{6.11}$$

az általános megoldás.

Az $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = r\cos(\beta t)$ csillapított kényszerrezgés esetében nincs szükség a (6.10) képletre. Partikuláris megoldását az $\tilde{x} = b\cos(\beta t + \delta)$ alakban kereshetjük, és azt találjuk hogy

$$\tan\delta = \frac{2\lambda\beta}{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{és} \quad b = \frac{r}{\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2}}\,, \tag{6.12}$$

tehát az általános megoldás a homogén egyenlet általános megoldásának, és a most kapott partikuláris megoldásnak az összege:

$$x(t) = ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) + b\cos(\beta t + \delta)\,, \tag{6.13}$$

ahol megint $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, míg a és φ értékét a kezdeti feltétel határozza meg.
Anharmonikus rezgések: A rugalmasság Hook féle lineáris erőtörvénye csak kis amplitudóknál érvényes, általában az erő $F = -U'(x)$ alakú, ahol x a deformáció (kitérés), és az U helyzeti (rugalmas) energia nem kvadratikus függvény. Pontosan meghatározható a matematikai inga helyzeti energiája, ami konstansoktól eltekintve $1 - \cos\varphi$, ahol φ a kitérés szöge; tehát $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$ a mozgás egyenlete. Az energia megmaradásának elve általános módszert ad az $\ddot{x} + U'(x) = 0$ alakú mozgásegyenletek integrálására. Azt kell észrevenni hogy $H(t) := \dot{x}^2/2 + U(x)$ minden megoldás mentén állandó mert $dH(t)/dt = -\dot{x}U'(x) + U'(x)\dot{x} = 0$, tehát $H(t) = H(0)$ $\forall t > 0$. Ehhez az energia fogalmának ismerete nélkül is eljuthatunk: az $y := \dot{x}$ változó bevezetése után $\dot{y} = -U'(x)$, tehát a Lotka-Volterra modell tárgyalásakor látott trükkel a $dy/dx = \dot{y}/\dot{x} = -U'(x)/y$ egyenletet kapjuk, aminek az $y\,dy + U'(x)\,dx$ alakja integrálható.

A $H(t) = H(0)$ energia egyenlet átrendezésével az $\dot{x} = \pm\sqrt{2H(0) - 2U(x)}$ adódik, ami a

$$t = t(x) := \pm\int_{x(0)}^{x}\frac{dy}{\sqrt{2H(0) - 2U(y)}} \tag{6.14}$$

függvény invertálásával oldható meg, ahol az integrál előjele attól függ, hogy $\dot{x} > 0$ vagy $\dot{x} < 0$ $x(0)$ és $x(t)$ között. Résen kell lenni ha a sebesség menet közben előjelet válthat, az integrál konvergenciája is problémás lehet. Sajnos, $U = ax^2$ az egyetlen olyan példa, amikor a megoldás elemi függvények segítségével kifejezhető. Az $a = \omega^2$ esetet már láttuk, ez a harmonikus rezgés. Ha $a = -\alpha^2$ akkor $x(t) = c_1\operatorname{ch}(\alpha t) + c_2\operatorname{sh}(\alpha t)$ az általános megoldás. Az inga helyzeti energiája $U(\varphi) = 1 - \cos\varphi$, és ha a $\varphi(0) = \phi$ helyzetből 0 szögsebességgel indítjuk, akkor a $T(\phi)$ lengésidő negyede alatt éri el a $\varphi = 0$ alsó helyzetet, tehát

$$T(\phi) = 4 \int_0^{\phi} \frac{dx}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\phi}} . \tag{6.15}$$

Ez az *elliptikus integrál* képlettel nem adható meg, de talán látható hogy, nem úgy mint a harmonikus rezgéseknél, a lengésidő függ az amplitudótól.

7. VÁLOGATOTT PROBLÉMÁK ÉS MEGJEGYZÉSEK

Ez a fejezet a törzsanyagot olykor messze meghaladó, lazán összefüggő részekből áll. Egyes bizonyításokat csak vázlatosan ismertetünk.

Néhány azonosság: Indukcióval könnyű megmutatni hogy

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} . \tag{7.1}$$

Valóban, az $n = 1$ esetben egyenlőség van, adjunk mindkét oldalhoz $(n+1)^2$-et. Mivel $n(2n+1) + 6n + 6 = (n+2)(2n+3)$, az $n+1$-hez tartozó állítást kapjuk.

Ugyanígy bizonyítható hogy

$$1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} . \tag{7.2}$$

Indukcióval is igazolható hogy

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin(nx + x/2)}{2\sin(x/2)} , \tag{7.3}$$

de átszorzás után, a $\sin(kx + x/2) - \sin(kx - x/2) = 2\sin(x/2)\cos(kx)$ azonosság teleszkópos összeghez vezet, ami közvetlenül adja az egyenletet.

Ugyanígy kapjuk hogy

$$\sin 2x + \sin(4x) + \sin(6x) + \cdots + \sin(2nx) = \frac{\sin(nx)\sin(nx+x)}{\sin x} , \tag{7.4}$$

valamint

$$\cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos(2nx - x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} . \tag{7.5}$$

Cauchy, Hölder és Minkowski egyenlőtlenségei: Tetszőleges $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ sorozatok, és $\alpha \geq 1$ esetén legyen

$$\|x\|_\alpha := \big(|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha + \cdots\big)^{1/\alpha} \quad \text{és } \langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n + \cdots ;$$

a második esetben feltesszük hogy a sor abszolút konvergens. A fenti Hölder egyenlőtlenségből $|xy| \leq |cx|^p/p + |y/c|^q/q$, ahol $p, q \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, míg $c > 0$ tetszőleges. Tehát

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \frac{c^p}{p} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \frac{1}{c^q q} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \frac{ac^p}{p} + \frac{b}{qc^q} ,$$

és a jobboldal a c paraméter konvex függvénye, ami akkor minimális ha $c^{p+q} = b/a = \|x\|_p^p \, \|y\|_q^{-q}$, ahol $p + q = pq$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk az $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$ Hölder egyenlőtlenséget. Az is látható hogy ha $\|x\|_p$ és $\|y\|_q$ véges, akkor az $\langle x, y\rangle$ sor abszolút konvergens. A $p = q = 2$ speciális eset Cauchy egyenlőtlensége.

Mivel $|x_n + y_n|^p \leq |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + |y_n||x_n + y_n|^{p-1}$, a Hölder egyenlőtlenségből $pq = p + q$ miatt a háromszög egyenlőtlenség Minkowskiról elnevezett $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ általánosítása következik, ahol $p \geq 1$.

A $0 < \alpha \leq 1$ esetben $\sum p_k \, x_k^\alpha \leq (\sum p_k \, x_k)^\alpha \leq \sum (p_k \alpha_k)^\alpha$, ahol $x_k, p_k \geq 0$ és $\sum p_k = 1$. Az első egyenlőtlenség azért igaz mert $f(x) = x^\alpha$ konkáv. A másodiknál feltehetjük hogy $\sum p_k x_k = 1$, de ekkor $p_k x_k \leq (p_k x_k)^\alpha$ mert $p_k x_k \leq 1$ és $0 < \alpha \leq 1$. Az $\|x\|_p < +\infty$ tulajdonságú sorozatok lineáris normált teret alkotnak, amit ℓ^p jelöl.

A diagonális módszer: *Ha* $|a_k(n)| \le K < +\infty\ \forall n,k \in \mathbb{N}$, *akkor van olyan* $n(m) \to \infty$ *részsorozat hogy mindegyik* $a_k := \lim_m a_k(n(m))$ *határék létezik.* ♡ Bolzano és Weierstrass szerint az $a_1(n)$ sorozatnak van konvergens részsorozata, például $a_1(n_1(m))$. Ezután az $a_2(n_1(m))$ sorozat konverges $a_2(n_2(m))$ részsorozatát választjuk ki, és így tovább. Az $n_{k+1}(m)$ sorozat mindig az $n_k(m)$ sorozat része, tehát az $n(m) := n_m(m)$ diagonális jelöli ki a konvergens részsorozatokat. □

A Cantor féle metszettétel: Az $F \subset \mathbb{R}$ halmaz zárt *ha minden torlódási pontját tartalmazza.* Az üres halmaz is zárt, tehát zárt halmazok közös része mindig zárt. Véges sok zárt halmaz egyesítése is zárt, de végtelen soké már nem biztos hogy az; ilyen a racionális számok halmaza. A számegyenes kompakt részhalmazai a korlátos és zárt halmazok, ezeknél érvényes Bolzano és Weierstrass kiválasztási tétele.

Cantor szerint *Kompakt halmazok fogyó sorozatának a közös része nem lehet üres.* ♡ Valóban, ha mindegyik halmazból kiválasztunk egy pontot, akkor ennek a sorozatnak van torlódási pontja, és az a metszetnek is eleme. □ Ez az állítás szintén alkalmas a számegyenes jellemzésére, de Arkhimédész axiómáját ilyenkor nem hagyhatjuk el.

Borel lefedési tétele: Az x pont az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontja ha van teljes egészében a halmazhoz tartozó környezete. A $G \subset \mathbb{R}$ halmaz nyilt, ha minden pontja belső pont, vagyis a komplementuma zárt. Nyilt halmazok egyesítése, és véges soknak a metszete is nyilt, és a számegyenesen minden nyilt halmaz egyértelműen bontható fel páronként diszjunkt nyilt intervallumok egyesítésére, ezek a halmaz komponensei. ♡ Ennek belátásához csak azt kell meggondolni hogy a halmaz minden pontja benne van egy olyan maximális nyilt intervallumban, ami teljes egészében része a halmaznak. Ez a nyilt intervallum nem más mint a pontot tartalmazó, és a halmazban foglalt nyilt intervallumok egyesítése. Ezek az intervallumok diszjunktak, mert különben nem lennének maximálisak, és egyesítésük az egész halmaz. □ Folytonos $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény $\{f > c\}$ és $\{f < c\}$ típusu szinthalmazai nyiltak, az $\{f \ge c\}$ és $\{f \le c\}$ típusuak pedig zártak.

Borel tétele is jellemzi a kompakt halmazokat: *Ha nyilt halmazok egy rendszerének egyesítése tartalmazza az* F *kompakt halmazt, akkor ezek közül véges sok is lefedi.* ♡ Az oroszlánfogás trükkje alkalmazható, mert van $F \subset [a,b]$ intervallum, amit felezgetni kezdünk. Ha a tétel nem volna igaz, akkor az F valamelyik félintervallumba eső részének nem lenne véges lefedése, és így egy $x^* \in F$ pontra összehúzódó zárt intervallumok sorozatát kapjuk. Ez az x^* pont egy teljes környezetével együtt benne van a lefedést alkotó nyílt halmazok valamelyikében, ami ellentmond a konstrukciónak, tehát Borel tétele a kompaktság szükséges feltételét adja. Az elégségesség igazolásához azt kell észrevenni, hogy minden $x_n \in F$, különbzõ elemekből álló sorozathoz vannak olyan $\delta_n > 0$ számok hogy a $K_{\delta_n}(x_n)$ nyilt környezetek páronként diszjunktak. Ha $x \in F$ a sorozatnak nem torlódási pontja, akkor van neki olyan környezete, ami a sorozat egyetlen pontját sem tartalmazza, és ha F minden pontja ilyen, akkor olyan nyílt lefedést kaptunk, amiből végeset nem lehet kiválasztani. □

Kronecker lemmája: Ha $\lim x_n = x$ és $S_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, akkor $\lim(1/n)S_n = x$. Az állítás akkor is igaz ha az x határérték nem véges, de a bizonyítást csak az $x \in \mathbb{R}$ esetben részletezzük. Feltehetjük hogy $x = 0$, mert a feladat átfogalmazható az $y_n := x_n - x$ sorozattal. Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy hogy $|x_n| < \varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$, tehát $|S_n - S_{n_\varepsilon}| < n\varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$. Másrészt, ha n_ε rögzített, akkor $S_{n_\varepsilon}/n \to 0$ mivel ez olyan véges összeg, aminek minden tagja 0-hoz tart, tehát van olyan n'_ε küszöb hogy $|S_{n_\varepsilon}/n| < \varepsilon$ ha $n > n'_\varepsilon$. Összefoglalva a két becslést, $|(1/n)\, S_n| \le (1/n)|S_n - S_{n_\varepsilon}| + |S_{n_\varepsilon}/n| < 2\varepsilon$ ha $n > \max\{n_\varepsilon\, n'_\varepsilon\}$, vagyis S_n/n tetszőlegesen közel lesz 0-hoz ha n elég nagy.

Az S_n/n sorozat akkor is konvergálhat ha x_n divergens; ezzel a módszerrel divergens sorozatok átlagos viselkedéséről lehet információt szerezni. Például, az $x_n := (-1)^n$ sorozat divergens, de az első n elem számtani közepe 0-hoz tart. Érdekesebb az $x_n := \cos(nx)$ példa; ez a sorozat az $x \in \mathbb{R}$ tipikus értékeinél szabálytalanul ingadozik a -1 és a $+1$ határok között, de az (7.3) azonosság szerint a kiátlagolás eredménye ismét 0; kivételesek az $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pontok.

Szubadditív sorozatok: Igy nevezzük az $s_{n+m} \le s_n + s_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ feltételnek eleget tevő sorozatokat. Legyen $s = \inf s_n/n$, ami $-\infty$ is lehet; megmutatjuk hogy $\lim s_n/n = s$. Ha $\alpha > s$ akkor biztosan van olyan $m \in \mathbb{N}$ hogy $s_m < m\alpha$. Másrészt minden $n \in \mathbb{N}$ felírható mint $n = km + r$, ahol $0 \le r < m$, tehát $s_n \le s_{km} + s_r \le ks_m + rs_1 \le km\alpha + rs_1$. Ezt az egyenlőtlenséget n-el osztva $\limsup s_n/n \le \alpha$ következik. Persze $\liminf s_n/n \ge s$, tehát $s_n/n \to s$. Például, ha a_n monoton fogyó sorozat, akkor $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ szubadditív, de az ennek megfelelő eredmény Kronecker lemmájával is következik. A statisztikus fizikából származik az alábbi példa. Legyen Ω_n az n hosszúságú $0-1$ sorozatok halmaza, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ az Ω_n általános eleme. Ha $\beta > 0$ akkor

$$s_n(\beta) := \log \sum_{\omega \in \Omega_n} \exp(-\beta\omega_1\omega_2 - \beta\omega_2\omega_3 - \cdots - \beta\omega_{n-1}\omega_n)$$

szubadditív sorozat, mert a kitevő nem csökken ha egy tagot elhagyunk belőle, és az így kapott összeg a kívánt tényerők szorzatára bomlik fel.

Az Euler féle C konstans: Legyen $S_n^* := 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n - \log(n+1)$. Tudjuk hogy $\log(1+x) \le x$, tehát $S_n^* - S_{n-1}^* = 1/n - \log(1 + 1/n) \ge 0$, vagyis a sorozat monoton nő; a korlátosság kicsit nehezebb. $e^x \ge 1 + x$, $1/k > \log(k+1) - \log k$, tehát $S_n^* > 0$, de ez $S_1^* = 1 - \log 2 > 0$ és a monotonitás miatt közvetlenül is látható. Másrészt $e^{-x} \ge 1 - x$, amiből $1/k < \log k - \log(k-1)$, vagyis $S_n^* < 1$, tehát létezik a $C = \lim S_n^*$ határérték. Ezek alapján integrálszámítás nélkül is látjuk hogy az $y = 1/x$ hiperbóla $x = 1$ és $x = l > 1$ szakasza alatti terület éppen $\log l$.

A faktoriális első közelítése: Mivel e^x és $\log x$ görbéi egymás tükörképei, $\log x$ görbéje és a $(0,1]$ szakasz közötti terület is 1, vagyis

$$\frac{1}{n}\left(\log(1/n) + \log(2/n) + \cdots + \log(k/n) + \cdots + \log(n/n)\right) = -1 + \varepsilon_n ,$$

ahol $\varepsilon_n \to 0$ amint $n \to +\infty$. Ezt átírva $(1/n)\log(n!/n^n) = -1 + \varepsilon_n$ adódik, tehát $n! = (n/e)^n e^{n\varepsilon_n}$. Egyenlőre nem tudjuk hogy ε_n milyen gyorsan tart nullához, de gyakran ez is elég.

A prímszámok sorozata: Euklidész igazolta hogy végtelen sok van belőlük, legyen $p_1 := 2$, $p_2 := 3$, és így tovább: p_n az n-ik prím. Már Euler is tudta, és valószínűleg Csebisev bizonyította először, hogy *a prímszámok reciprokainak* $\sum 1/p_n$ *összege divergens.* ♡ Ellenkező esetben a p_n után következő prímek reciprokainak összege,

$$R_n := \frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \cdots + \frac{1}{p_i} + \cdots$$

véges szám. Ha tehát A_n az olyan természetes számok halmaza, amelyek prímtényezős felbontásában csak az első n prím szerepelhet, akkor

$$\sum_{m \in A_n} \frac{1}{m} < Q_n := \prod_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^\alpha} = \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_k - 1} < +\infty ,$$

vagyis tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \le Q_n \sum_{k=0}^{\infty} (R_n)^k = +\infty,$$

ami kizárja hogy $\sum 1/p_n < +\infty$. Valóban, ha a sor konvergens, akkor $R_n < 1$ ha n elég nagy, tehát a $\sum R_n^k$ geometriai sor összege is véges. □

Ez a szép eredmény arra utal hogy a prímek elég sűrűn vannak a természetes számok között. Hasonlóan tanulságos a bizonyítás következő változata is. ♡ Legyen $P_n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ az első n prím szorzata, ekkor – Euklidész gondolatmenete szerint – az $1 + mP_n$, $m \in \mathbb{N}$ számok prímosztói csak p_n után következhetnek, tehát a

$$+\infty = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 + mP_n} \le \sum_{k=0}^{\infty} (R_n)^k$$

egyenlőtlenség megintcsak ellentmond a $\sum 1/p_n < \infty$ feltevésnek. □

Egy algoritmus: Az $x_{n+1} = qx_n + 1/x_n$, $x_1 > 0$ iteráció az általánosabb $0 < q < 1$ esetben is tárgyalható, itt $x^* := (1-q)^{-1/2}$ lesz a határérték. $q = 1/2$ azért olyan kellemes, mert az $f(x) := qx + 1/x$, $x > 0$ függvény minimumának $2q^{1/2}$ értéke ilyenkor megegyezik az x^* gyökkel, tehát az x_n , $n > 1$ sorozat monoton fogy. Ha viszont $q \neq 1/2$, akkor a minimum értéke, $c := 2q^{1/2} < (1-q)^{-1/2} = x^*$. A jelenséget csak az $x \geq c$ intervallumon kell vizsgálni mert $f(x)$ értékei itt vannak. Kitüntetett pont az f minimumának $x_* = q^{-1/2}$ helye, valamint az a $\gamma := (1/q)\sqrt{1+q}$ hely is, ahol $f(x) = f(x^*)$; $\gamma \neq x^*$ ha $q \neq 1/2$. Mindig igaz hogy $f(x) > x$ ha $x < x^*$, míg $f(x) < x$ ha $x > x^*$.

Először Molnár András elsős fizikus hallgató ügyes bizonyítását ismertetjük. ♡ Azt kell észrevenni hogy ha $0 < a < x^* < b$ és $\sqrt{ab} = x^*$, akkor f az $[a, b]$ intervallumot önmagába viszi, mert $f(x) > qa + 1/b > a$ és $f(x) < qb + 1/a < b$ ha $a \leq x \leq b$. Ha tehát $n > m$ és $x_m < x^*$, illetve $x_m > x^*$, akkor $x_n \geq x_m$, illetve $x_n \leq x_m$. Ezután legyen $A := \{n : x_n < x^* < x_{n+1}\}$ és $\alpha := \sup\{x_n : n \in A\}$, valamint $B := \{n : x_n > x^* > x_{n+1}\}$ és $\beta := \inf\{x_n : n \in B\}$. Nyilván $\alpha \leq x^* \leq \beta$, az egyenlőséget kell igazolni. Ha A és B közül az egyik véges vagy üres, akkor a másik is az, és ilyenkor nemigen van mit bizonygatni. Ha pedig mindkettő végtelen, akkor az A típusú sorozatból határátmenettel $\beta = f(\alpha)$, a másikból $\alpha = f(\beta)$ következik, vagyis $\alpha = f(f(\alpha))$. Innen most már tényleg $\alpha = f(\alpha) = \beta$ adódik. □

Nem ilyen elegáns, de részletesebb áttekintést ad a következő gondolatmenet. ♡ Rajz vagy konkrét számolás alapján látható hogy a sorozat másképp viselkedik a $q > 1/2$ és a $q < 1/2$ esetekben. Ha $q > 1/2$, akkor $x_* < c$, tehát f szigorúan monoton nő a $[c, +\infty)$ intervallumon. Emiatt $x_n < x_{n+1} < x^*$ ha $x_n < x^*$, míg $x_n > x_{n+1} > x^*$ ha $x_n > x^*$; mindkét esetben $x^* = f(x^*)$ a határérték.

Ha $q < 1/2$ és $c \leq x \leq x^*$, akkor $x^* \leq f(x) \leq \gamma$, míg $c \leq f(x) \leq x^*$ ha $x^* \leq x \leq \gamma$. Eszerint $c \leq x_1 \leq \gamma$ esetén az x_{2n+1} , és az x_{2n} sorozat is monoton, jelölje α és β a határértéküket. Mint fentebb, $\alpha = f(\beta)$, $\beta = f(\alpha)$, tehát $x_n \to x^*$. □

Az iterációs eljárások elméletében szeretik a következő konstrukciót. ♡ Legyen $C_0 := [c, K]$, ahol K olyan nagy hogy $f(c) < K$ és $f(K) < K$, ekkor $C_1 := \{f(x) : x \in C_0\} \subset C_0$, sőt $C_{n+1} := \{f(x) : x \in C_n\} \subset C_n$ is igaz; $C := \cap C_n$ a metszetük, $a := \inf C$, $b := \sup C$. Látható hogy $f : C \mapsto C$ és $x^* \in C$, megmutatjuk hogy minden $y \in C$ ponthoz van $x \in C$ úgy hogy $y = f(x)$. Mivel $y \in C_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, van olyan $x_n \in C_n$ hogy $y = f(x_n)$. Az x_n sorozat korlátos, ezért van valamilyen x torlódási pontja, amiből határátmenettel $y = f(x)$ következik. Mivel mindegyik C_n zárt intervallum, C is az, és így $x \in C$, tehát f a C halmazt önmagára képezi le. Ha $x_* \notin C$ akkor f a C-n monoton, tehát $a = f(a)$ és $b = f(b)$, vagy pedig $a = f(b)$ és $b = f(a)$; mindkét esetben $a = x^* = b$, és éppen ezt kellett igazolni. Érdekesebb az $a < x^* < b$ eset, mert ilyenkor $a = f(x_*) = c$ és $b = f(b) = x^*$ volna. Mivel c is képpont, $c = f(c)$, de ez csak a $q = 1/2$ esetben lehetséges, vagyis megint $a = x^*$. □

Minimum helyének keresése: Kézenfekvő az $x_{n+1} = x_n - hf'(x_n)$ algoritmus, ahol $h > 0$ alkalmas konstans. Tegyük fel hogy $f'' \leq C$, ekkor Lagrange második maradéktagjával $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - hf'^2(x_n) + (C/2)h^2 f'^2(x_n)$, tehát $hC < 2$ esetén az $f(x_n)$ sorozat monoton fogy. Ez még nem jelenti az algoritmus konvergenciáját, de ha az $f(x) \leq f(x_1)$ halmaz véges intervallum, és ott $f''(x) \geq c > 0$, akkor pontosan egy olyan x^* pont van hogy $f(x^*) < f(x)$ ha $f(x) \leq f(x_1)$ és $x \neq x^*$. Mivel $f'(x^*) = 0$, ismét Largange tételét alkalmazva

$$\begin{aligned}(x_{n+1} - x^*)^2 &= (x_n - x^*)^2 - 2h(x_n - x^*)(f'(x_n) - f'(x^*)) + h^2(f(x_n) - f(x^*))^2 \\ &\leq (x_n - x^*)^2(1 - 2hc + h^2C^2)\,.\end{aligned}$$

Ha tehát $hC^2 < 2c$ akkor $x_n \to x^*$, és a konvergencia sebessége exponenciális. Maximum helyének keresése az $x_{n+1} = x_n + hf'(x_n)$ algoritmussal történhet, a $h > 0$ lépésköz itt se lehet túl nagy.

Legendre transzformáció: A $g(z) := \sup\{zx - f(x) : x \in (a, b)\}$, $z \in \mathbb{R}$ függvény az $f \in C(a, b)$ konvex konjugáltja, ami a $+\infty$ értéket is felveheti, de alakját tekintve konvex kinézetű; szélsőséges az $f(x) := x$ példa. Tegyük fel hogy $f \in C^2(a, b)$ konvex, sőt $f''(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$, és legyen $\alpha := \inf\{f'(x) : x \in (a, b)\}$, $\beta := \sup\{f'(x) : x \in (a, b)\}$. Ekkor a $z = f'(x)$

egyenlet egyértelmű megoldással rendelkezik $\forall z \in (\alpha, \beta)$; ezt $x = h(z)$ jelöli, tehát h az f' inverze. Megjegyezzük hogy $zx - f(x)$ éppen az $x = h(z)$ helyen veszi fel a maximumát. Mivel $g(z) = zh(z) - f(h(z))$, g is differenciálható, és $g(z) = g(z_0) - z_0 x_0 + f(x_0) + zx - f(x)$, ahol $x_0 = h(z_0)$, $x = h(z)$. Tekintve hogy f konvex, innen

$$g(z) \geq g(z_0) - z_0 x_0 + f(x) + f'(x)(x_0 - x) + zx - f(x) = g(z_0) + h(z_0)(z - z_0)$$

adódik, vagyis $h = (f')^{-1} = g'$; g meghatározása ennek alapján történhet. Ha f konvex, és g a konjugáltja, akkor g konjugáltja éppen f, és Young $zx \leq f(x) + g(z)$ egyenlőtlensége is igaz. Például, $g(z) = z^2/2a$ ha $f(x) = ax^2/2$, $g(z) = |z|^q/q$ ha $f(x) = |x|^p/p$, $p, q \geq 1$ és $1/p + 1/q = 1$, végül $g(z) = z\log(z/e)$, $z > 0$ ha $f(x) = e^x$. A második példából Hölder $xz \leq |x|^p/p + |z|^q/q$ egyenlőtlenségét kapjuk, ami a $\log x$ konkáv függvényre vonatkozó Jensen egyenlőtlenségből is levezethető. Ez a konstrukció a mechanikában és a statisztikus fizikában is előjön, ott többnyire Legendre transzformációnak nevezik.

Entrópia: Ha $p_n \geq 0$, $q_n > 0$, $\sum p_n = \sum q_n = 1$ és $f_n := p_n/q_n$, akkor

$$S[p|q] := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \log \frac{p_n}{q_n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} q_n f_n \log f_n \tag{7.6}$$

a p relatív entrópiája q-ra vonatkozóan; $0 \log 0 = 0$. A fenti sorok negatív tagjainak összege $x \log x \geq 1/e$ miatt mindig véges, tehát a definíció értelmes. $S[p|q] = +\infty$ lehetséges, de ha $S < +\infty$, akkor a definiáló sor abszolút konvergens. Mivel $\log x \leq x - 1$, és $x = 1$ az egyenlőség feltétele, $f_n \log(1/f_n) \leq 1 - f_n$. Innen $\sum q_n f_n = 1$ miatt $S[p|q] \geq 0$ következik, és $p_k = q_k$ $\forall k$ az egyenlőség feltétele.

Az entrópia variációs elvvel is jellemezhető, ez a Legendre transzformáció egy változata.

$$S[p|q] = \sup_{\varphi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n \varphi_n - \log \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{\varphi_n} : \varphi_n \in \mathbb{R} \; \forall\, n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{7.7}$$

ahol a $\pm\infty \mp \infty$ alakú összegek nincsenek megengedve. A bizonyításhoz főleg azt kell észrevenni hogy $\varphi_n := \log f_n$ az optimális választás. Ismét a logaritmus konkáv volta miatt

$$p_n \log(q_n/p_n) = 2p_n \log \sqrt{q_n/p_n} \leq 2\sqrt{p_n q_n} - 2p_n = q_n - p_n - \left(\sqrt{p_n} - \sqrt{q_n}\right)^2,$$

tehát

$$\|\sqrt{p} - \sqrt{q}\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_n} - \sqrt{q_n}\right)^2 \leq S[p|q]. \tag{7.8}$$

Innen is látható hogy $S[p|q] \geq 0$, továbbá $p_n - q_n = (\sqrt{p_n} - \sqrt{q_n})(\sqrt{p_n} + \sqrt{q_n})$, amivel a Cauchy egyenlőtlenség alapján $\|p - q\|_1^2 \leq 4\|\sqrt{p} - \sqrt{q}\|_2^2$ következik. Ezzel Pinsker $\|p - q\|_1 \leq 2\sqrt{S[p|q]}$ egyenlőtlenségét is igazoltuk.

Logaritmikus Szoboljev egyenlőtlenség: A legegyszerűbb esetben legyenek a, b, α, β pozitív számok, $a + b = 1$ és $a\alpha^2 + b\beta^2 = 1$; ekkor

$$a\alpha^2 \log \alpha + b\beta^2 \log \beta \leq 2(\alpha - \beta)^2.$$

Mivel $\log x \leq x - 1$ és Cauchy szerint $(a\alpha + b\beta)^2 \leq (a + b)(a\alpha^2 + b\beta^2)^2 = 1$, irhatjuk hogy $a\alpha^2 \log \alpha + b\beta^2 \log \beta \leq a\alpha^2(\alpha - 1) + b\beta^2(\beta - 1) \leq a(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 + b(\beta + 1)(\beta - 1)^2 \leq (a\alpha + b\beta + 1)(\alpha - \beta)^2$, mert ha pl. $\alpha > 1$ akkor $\beta < 1$. Azt viszont már tudjuk hogy $a\alpha + b\beta + 1 \leq 2$.

Euler összegképlete: Összegek becslésére szolgál,

$$\sum_{k=1}^{n} f(n) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (2x - 2k - 1)\, f'(x)\,dx$$

hacsak $f \in C^1[1, n]$. Ennek igazolásához csak azt kell észrevenni hogy $(2x - 2k - 1)' = 2$, tehát

$$2 \int_k^{k+1} f(x)\,dx = f(k+1) + f(k) - \int_k^{k+1} (2x - 2k - 1)\, f'(x)\,dx,$$

és ezeket össze lehet adni. Az $f_1(x) := 1/x$ és az $f_2(x) := \log x$ esetben is a logaritmus

$$x - x^2/2 < \log(1+x) < x - x^2/2 + x^3/3 \quad \text{ha } 0 < x \le 1$$

közelítését használjuk az $x = 1/k$ helyen a jobboldali integrálok számolásakor. (5.3) alapján az első esetben az $1 + 1/2 + \cdots + 1/n = C + \log n + O(1/n^2)$, a másodikban a $\log n! = \log\sqrt{n} + n\log(n/e) + O(1/n)$ közelítést kapjuk; C az Euler féle szám. Az $n!$ pontosabb értékét Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp(\frac{c_n}{12n}) \tag{7.9}$$

formulája adja, ahol $0 < c_n < 1$; ezt később kicsit gyengébb formában igazoljuk.

Bináris sorozatok száma: A Stirling formula fontos alkalmazása a binomiális együtthatók becslése. Ha $k_n/n \to \rho$ és $0 < \rho < 1$, akkor a legegyszerűbb alakból is

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\binom{n}{k_n} = h(\rho), \quad \text{ahol } h(\rho) := \rho\log\frac{1}{\rho} + (1-\rho)\log\frac{1}{1-\rho} \tag{7.10}$$

entrópia jellegű mennyiség. Látható hogy $0 \le h(\rho) \le \log 2$, és $\rho = 1/2$ az egyenlőség feltétele.

Jelölje Ω_n az n hosszúságú $0,1$ sorozatok halmazát, $s_n(\omega)$ az $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ sorozatban szereplő egyesek száma, és $C_n(\rho)$ az $s_n(\omega) \ge \rho n$ tulajdonságú sorozatok száma. Megmutatjuk hogy ha $1/2 \le \rho \le 1$ akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log C_n(\rho) = h(\rho)\,. \tag{7.11}$$

Biztosan van olyan $k_n \ge \rho n$ sorozat hogy $k_n/n \to \rho$, tehát már az $s_n = k_n$ tulajdonságú sorozatok is olyan sokan vannak, hogy a darabszámuk logaritmusa eléri az $nh(\rho)$ nagyságrendet. Ezután a $C_n(\rho) \le \exp(nh(\rho))$ felső becslést kell még igazolni. Mivel $\exp(zs_n(\omega) - z\rho n) \ge 1$ ha $z \ge 0$ és $s_n(\omega) \ge \rho n$,

$$\begin{aligned} C_n(\rho) &= \sum_{\omega\in\Omega_n}\mathbf{1}_{[s_n\ge\rho n]}(\omega) \le \sum_{\omega\in\Omega_n}\exp(zs_n(\omega) - z\rho n) \\ &= e^{-z\rho n}\sum_{\omega_1=0}^{1}\sum_{\omega_2=0}^{1}\cdots\sum_{\omega_n=0}^{1}\prod_{k=1}^{n}e^{z\omega_k} = e^{-z\rho n}\prod_{k=1}^{n}\sum_{\omega_k=0}^{1}e^{z\omega_k} = e^{-z\rho n}\big(1+e^z\big)^n. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség minden $z \ge 0$ számmal igaz, az optimális $z = \log\rho - \log(1-\rho)$ választással kapjuk a bizonyítandó becslést.

A Schwarz egyenlőtlenség: A korábban bizonyított Cauchy egyenlőtlenség úgy is kimondható hogy ha $p_k > 0$ akkor

$$\Big(\sum_{k=0}^{m-1}p_k\,a_k\,b_k\Big)^2 \le \left(\sum_{k=0}^{m-1}p_k\,a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}p_k\,b_k^2\right),$$

ehhez az eredeti képletet a $a_k\sqrt{p_k}$ és $b_k\sqrt{p_k}$ számokkal kell felírni. Innen viszont $I_\gamma^2(fg) \le I_\gamma(f^2)\,I_\gamma(g^2)$ következik a $p_k := x_{k+1} - x_k$, $a_k := f(\xi_k)$ és $b_k = g(\xi_k)$ szereposztással. Határátmenet után, ha az elvégezhető, a

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\,\int_a^b g^2(x)\,dx$$

Schwarz egyenlőtlenséget kapjuk. Az hogy $f, g \in L_0^1[a,b]$ esetén f^2, g^2 és fg is integrálható, a Riemman kritérium egyszerű következménye, de a természetes feltétel itt az lenne hogy f^2 és g^2 integrálható. Ebből az fg szorzat Riemann integrálhatósága nem következik, ami a konstrukció lényeges gyengeségei közé sorolható.

Az $\langle f,g\rangle := \int_a^b fg\,dx$ és $\|f\| := \langle f,f\rangle^{1/2}$ jelölésekkel: $\langle f,g\rangle \le \|f\|\|g\|$, tehát a *négyzetesen integrálható függvények* $L^2(a,b)$ *tere Euklideszi tér.*

A Poisson mag: Trigonometrikus sorok öszegzésére és elliptikus feladatok megoldására való,

$$P(r,\varphi) := \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\varphi+r^2)} = \frac{1-r^2}{2(1-r)^2+8r\sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\varphi)\,,$$

ahol $|r|<1$. Az első egyenlet azonos átalakítás terméke, a második a $z=e^{\imath\varphi}$ helyettesítés után Euler képletével következik. A sor tagonkénti integrálásával $\int_0^\pi P(r,\varphi)\,d\varphi = \pi/2$, itt Lebesgue tételére is lehet hivatkozni.
A Dirac féle delta függvényről: Olyan függvény nincs, amivel az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\delta(y-x)\,dy = f(x)$$

azonosság például minden $f\in C_b(\mathbb{R})$ esetén teljesülne. Az így elképzelt, hipotetikus δ függvényre épülő kalkulus gyakran igencsak kényelmes, de óvatlan alkalmazása könnyen vezet téves eredményhez. Igaz viszont a

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\exp\bigl(-(y-x)^2/2\delta^2\bigr)\,dy = f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{7.12}$$

előállítás, ahol $\delta>0$, hacsak $f\in C_b(\mathbb{R})$. Ennek igazolásához csak azt kell észrevenni, hogy az $y=x+\delta u$ helyettesítés után a baloldalon álló integrál az

$$I_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\delta u)\,e^{-u^2/2}\,du = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(f(x+\delta u)-f(x)\bigr)\,e^{-u^2/2}\,du$$

alakba megy át. Lebesgue tételével már az első egyenletből következik az állítás, de az elemi bizonyítás sem nehéz. Mivel f folytonos, minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\gamma>0$ hogy $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ ha $|y-x|<\gamma$, tehát $|f(x+\delta u)-f(x)|<\varepsilon$ ha $|u|<\gamma/\delta$. Az $u\ge\gamma/\delta$ esetben f korlátosságát és a (4.24) becslést használjuk. Az integrálás tartományát a $(-\infty,-\gamma/\delta]$, $(-\gamma/\delta\,,\gamma/\delta)$ és $[\gamma/\delta\,,\infty)$ részekre bontva az $|I_\delta(x)-f(x)|\le\varepsilon+(2\gamma\|f\|/\delta)\exp(-\gamma^2/2\delta^2)$ becslést kapjuk, tehát a jobboldal δ-val együtt eltűnik.

(7.12) nem csak a Gauss sűrűséggel igaz. Ha $h\in C(\mathbb{R})$ eltűnik ha $|x|>1$, de az integrálja 1, akkor $f\in C(\mathbb{R})$ esetén

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y/\delta)\,dy = f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\,. \tag{7.13}$$

A bizonyítás ismét az $y=x+\delta u$ helyettesítéssel kezdődik, az integrál alatti határátmenethez most nem kell Lebesque tételére hivatkozni, elég az f egyenletes folytonossága az $[x-\delta,x+\delta]$ intervallumon.

(7.12) és (7.13) integráljai egyaránt konvolúcióként írhatók fel: az f és g valós függvények $h=f*g$ konvolúciója

$$h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy\,. \tag{7.14}$$

Nevezetes tény hogy két $p_{m,\sigma}(x) := (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)$ Gauss sűrűség konvolúciója is az, mégpedig $p_{m',\sigma'}*p_{m'',\sigma''} = p_{m,\sigma}$, ahol $m=m'+m''$ és $\sigma^2=(\sigma')^2+(\sigma'')^2$. Könnyű ellenőrizni hogy *konvolúció Fourier transzformációja a Fourier transzformáltak szorzata,* vagyis $\hat{h}=\hat{f}\hat{g}$ ha $h=f*g$.
Riemann lemmája: Ha f abszolút integrálható akkor

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\,f(x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x)\,f(x)\,dx = 0\,.$$

♡ Mivel $\int_a^b\cos(\omega x)\,dx = (1/\omega)(\sin(\omega b)-\sin(\omega a))$, az állítás minden olyan lépcsős függvényre is igaz, amely egy véges intervallumon kívül eltűnik. Legyen φ ilyen, akkor

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\,f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\,\varphi(x)\,dx\right| + \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|\,dx$$

jobboldalán a második integrál tetszőlegesen kicsi lesz ha φ elég jól megközelíti f-et az L^1 térben. Ezután rögzített φ mellett elvégezhetjük az $\omega \to \infty$ határátmenetet. A $\sin(\omega x)$-ről szóló állítás bizonyítása hasonló. □ Riemann lemmája szerint integrálható függvény Fourier transzformáltja a végtelenben eltűnik. Látható hogy $\|\hat{f}\| \le (2\pi)^{-1/2}\|f\|_1$, az $\hat{f}$ folytonossága Lebesgue tételének következménye. Eszerint a Fourier transzformáció az $L^1(\mathbb{R})$ teret a végtelenben eltűnő folytonos függvények $C_0(\mathbb{R})$ terébe képezi le.

A Fourier transzformáció inverze: A Gauss és a Fourier integrálokról szóló szakaszban példákat láthattunk az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x}\, \hat{f}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega x) + \imath \sin(\omega x))\, \hat{f}(\omega)\, d\omega \tag{7.15}$$

azonosságra, ahol $\hat{f}$ az f Fourier transzformáltja. Ez biztosan igaz ha f folytonos, és $\hat{f}$ is integrálható, a bizonyítás Gauss integrálokat használ. ♡ Valóban, ha $\delta > 0$ akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x}\, \hat{f}(\omega)\, d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\omega y}\, f(y)\, dy \right) d\omega \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\imath\omega\,(x-y) - \delta\omega^2/2)\, f(y)\, d\omega\, dy \\ &= \lim_{\delta\to 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-y)^2/2\delta)\, f(y)\, dy = f(x)\,, \end{aligned}$$

az utolsó lépés (7.12) következménye. □

Bizonyítását tekintve is hasonló természetű a Plancherel azonosság:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega)\, d\omega\,, \tag{7.16}$$

ahol $\bar{\hat{g}}$ a $\hat{g}$ komplex konjugáltja és $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Arról van itt szó hogy a Fourier transzformáció az L^2 térnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű, unitér leképezése. ♡ Legyen

$$f_\delta(y) := \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-(x-y)^2/2\delta)\, dx\,.$$

Az integrálás sorrendjének felcserélésével

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \bar{\hat{g}} \rangle &:= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega)\, d\omega \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y)\, \exp\big(\imath\omega\,(y-x) - \delta\omega^2/2\big)\, d\omega\, dy\, dx \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi\delta} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \bar{g}(y) \exp\big(-(x-y)^2/2\delta\big)\, dx\, dy = \lim_{\delta\to 0} \langle f_\delta, g \rangle = \langle f, g \rangle\,. \end{aligned}$$

A $\delta \to 0$ határátmenet jogosultsága egyáltalán nem nyilvánvaló, de könnyen ellenőrizhető olyankor amikor f az egész számegyenesen korlátos és egyenletesen folytonos, míg g integrálható.

A Cauchy egyenlet, Laplace transzformáció: *Az e^{at} exponenciális függvények úgy is jellemezhetőek, mint az $x(t)x(s) = x(t+s)$ $\forall t, s \ge 0$ Cauchy féle függvényegyenlet folytonos, de nem azonosan 0 megoldásai.* ♡ Tegyük fel hogy $x(t)$ ilyen megoldás. Az $x(t) = x(0)x(t)$ azonosság alapján $x(0) = 1$, és $x(t) = x^2(t/2)$ nem lehet negatív. Sőt, $x(t) = \big(x(t/n)\big)^n$ miatt $x(t) = 0$ sem lehetséges, mert akkor $x(0) = \lim x(t/n)$ is 0 volna. Eszerint $x(t) > 0$ $\forall t \ge 0$, tehát definiálható az $y(t) := \log x(t)$ függvény, amely a még egyszerűbb, $y(t+s) = y(t) + y(s)$ egyenletnek tesz eleget. Könnyen belátható hogy $y(t) = y(1)t$ a $t = k2^{-n}$, $k, n \in \mathbb{N}$ pontokban, de y folytonos, tehát ez a formula mindenütt érvényes. □

Kicsit hosszabb, de tanulságos a következő módszer. ♡ A differenciálható megoldásokat könnyű megtalálni, mert az $x(t+s) - x(t) = (x(s) - x(0))\, x(t)$ azonosságot s-el osztva, $s \to 0$ után az $\dot{x} = ax$ egyenlethez jutunk, ahol $a := \dot{x}(0)$. Ennek minden megoldása $x(t) = x(0)e^{at}$ alakú, de $x(t) = x(0)x(t)$ miatt $x(0) = 1$.

Az általános esetben először azt mutatjuk meg hogy az $x(t) > 0$ megoldásnak exponenciális korlátja van. Legyen c az $x(t)$ maximuma a $[0,1]$ intervallumon, míg $n = [t]$ a $t > 0$ egész része, vagyis a legnagyobb az $m \leq t$ egészek között. Ekkor $x(t) \leq c\,(x(1))^n$, tehát $0 < x(t) \leq ce^{z_0 t}$, ahol $z_0 := \log x(1)$. Eszerint az

$$R(z) := \int_0^\infty e^{-zt}\, x(t)\, dt \tag{7.17}$$

Laplace transzformált $z > z_0$ esetén véges és pozitív; az integrál abszolút konvergens. Továbbá

$$x(s)R(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, x(t+s)\, dt = e^{zs}\int_s^\infty e^{zt}\, x(t)\, dt = e^{zs}R(z) - e^{zs}\int_0^s e^{-zt}\, x(s)\, ds\,,$$

és a jobboldal az s differenciálható függvénye, tehát x is az. Ezzel a feladatot az előző esetre vezettük vissza. □

Nagy kitevők, Laplace módszere: Adott $h \in C(a,b)$ függvényhez és $\beta > 0$ számhoz definiáljuk az

$$F(\beta) := \log \int_a^b \exp(-\beta h(x))\, dx$$

szabad energia típusú mennyiséget, és a $\rho_\beta(x) := \exp(-\beta h(x) - F(\beta))$ sűrűségfüggvényt, feltéve hogy F véges; az (a,b) intervallum végtelen is lehet. A $\phi \in C(a,b)$ függvény ρ szerinti átlagát

$$\mu_\beta(\phi) := \int_a^b \phi(x)\rho_\beta(x)\, dx$$

definiálja. Könnyű kiszámolni hogy $F'(\beta) = -\mu_\beta(h)$ és $F''(\beta) = \mu_\beta(h'^2) - \mu_\beta^2(h')$. Mivel ρ_β integrálja 1, innen $F''(\beta) = \mu_\beta((h' - F')^2)$, tehát F a β konvex függvénye.

Laplace módszerének legegyszerűbb változata a következő. *Tegyük fel hogy $F(1) < +\infty$ és $h(x) \geq h(x_0)$ $\forall x \in (a,b)$, ekkor $F(\beta)/\beta \to -h(x_0)$ amint $\beta \to +\infty$. Ha még azt is tudjuk hogy minden $\delta > 0$ számhoz van $\gamma > 0$ úgy hogy $h(x) \geq h(x_0) + \gamma$ ha $|x - x_0| \geq \delta$, akkor $\mu_\beta(\phi) \to \phi(x_0)$ amint $\beta \to +\infty$, feltéve hogy $\phi \in C(a,b)$ és $\mu_1(|\phi|) < +\infty$.* ♡ Feltehetjük hogy $h(x_0) = 0$, ekkor $F(\beta) \leq F(1)$ ha $\beta > 1$, tehát $\limsup F(\beta)/\beta \leq 0$. Viszont h folytonos, tehát minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ úgy hogy $h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$ ha $|x - x_0| < \delta$ és $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$, tehát

$$\exp\left(F(\beta)\right) \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \exp(-\beta h(x))\, dx \geq 2\delta \exp(-\beta\varepsilon)\,,$$

aminek logaritmusát β-val osztva, $\beta \to 0$ után kapjuk az első állítást.

Ezután legyen $A_\delta := \{x \in (a,b) : |x - x_0| \geq \delta\}$ és $h(x) \geq \gamma > 0$ az A_δ halmazon, ekkor $\beta h(x) \geq (\beta - 1)\gamma + h(x)$ ha $\beta > 1$ és $x \in A_\delta$, tehát

$$\int_{A_\delta} |\phi(x)|\rho_\beta(x)\, dx \leq \exp\left(\gamma - \beta\gamma - F(\beta)\right) \int_a^b |\phi(x)| \exp\left(-h(x)\right)\, dx\,.$$

Az előző eredmény alapján minden $\gamma > 0$ számhoz van olyan β_γ hogy $F(\beta) \geq \beta\gamma/2$ ha $\beta > \beta_\gamma$, tehát

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_{A_\delta} |\phi(x)|\rho_\beta(x)\, dx = 0\,,$$

amiből a második állítás ϕ folytonossága miatt következik. □

Ez a tétel, és az alábbi élesítése is, magasabb dimenziókban is érvenyes. A statisztikus mechanikában mindkettő igen hasznos, mert ott h a rendszer energiája, és β az abszolút hőmérséklet reciproka.

Laplace tétele: Legyen h és ϕ ugyanaz mint az előző tétel második felében. *Ha h kétszer folytonosan differenciálható az x_0 szigorú minimumhely egy környezetében, sőt $h''(x_0) > 0$, akkor*

$$\lim_{\beta\to\infty} \sqrt{\beta}\, \exp(\beta h(x_0)) \int_a^b \phi(x) \exp(-\beta h(x))\, dx = \phi(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{h''(x_0)}}\,.$$

♡ Az integrált három részre kell bontani. Most is feltehetjük hogy $h(x_0) = 0$, ekkor $h(x) = \frac{1}{2} h''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$, ha tehát $\delta > 0$ elég kicsi akkor

$$\lim_{\beta\to\infty} \sqrt{\beta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \phi(x_0) \exp(-\beta h(x))\, dx = \lim_{\beta\to\infty} \phi(x_0) \int_{-\delta\sqrt{\beta}}^{\delta\sqrt{n}} \exp(-h''(x_0)y^2/2)\, dy$$
$$= \phi(x_0)\sqrt{2\pi/h''(x_0)}\,.$$

Mivel az integrálnak az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallumon kívüli járuléka exponenciálisan kicsi, megkaptuk az aszimptotika nagyságrendjét. Valóban, minden $0 < \varepsilon < h''(x_0)$ számhoz van olyan $\delta > 0$ hogy

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{és} \quad (h''(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)^2 \le 2h(x) \le (h''(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)^2$$

ha $|x - x_0| < \delta$, amiből a fenti határérték az integrál monotonitása miatt következik. Ezután a már rögzített $\delta > 0$ számhoz olyan $\gamma > 0$ is található, hogy ha $|x - x_0| \ge \delta$, akkor $h(x) \ge \gamma$, tehát

$$\left| \int_{x_0+\delta}^{b} \phi(x)e^{-\beta h(x)}\, dx \right| \le e^{\gamma - n\gamma} \int_a^b |\phi(x)|e^{-h(x)}\, dx = O(e^{-\beta\gamma})\,,$$

és az $(a, x_0 - \delta)$ intervallumon hasonló becslés érvényes. □

Ha x_0 az (a, b) intervallum valamelyik végesben lévő végpontjával esik egybe, akkor az integrál határértéke $\phi(x_0)(\pi/2h''(x_0))^{1/2}$, az eredeti fele.

Stirling formulája: Egyszerű következményként kapjuk a Laplace tételéből a nevezetes és hasznos $n! \approx (n/e)^n\sqrt{2n\pi}$ formulát. ♡ (4.13) alapján a $t = nx$ helyettesítés után

$$\frac{n!}{n^{n+1}} = n^{-n-1} \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = \int_0^\infty \exp(-nh(x))\, dx\,,$$

ahol $h(x) := x - \log x$ az $x_0 = 1$ pontban veszi fel a minimumát, ami éppen 1. Mivel $h''(x_0) = 1$, Laplace tételéből kapjuk az állítást. □

8. A VALÓS FÜGGVÉNYTAN ELEMEI

Ebben a fejezetben a modern analízis néhány egyszerű de hasznos elemét ismertetjük. Az egyes részek elég szorosan épülnek az előzményekre, és ezekre gyakran nem is hivatkozunk. A tárgyalás a 13. fejezetben folytatódik.

A Cantor féle halmaz: Úgy keletkezik hogy a $[0, 1]$ zárt intervallum közepéből először kivesszük az $(1/3, 2/3)$ nyilt intervallumot. Az így kapott C_1 halmaz két zárt intervallum egyesítése, a második lépésben mindegyik közepéből kivesszük az $1/9$ hosszúságú nyilt intervallumokat, így keletkezik C_2. Az eljárást folytatva kapjuk a C_n halmazt, ami 2^n darab 3^{-n} hosszúságú, páronként diszjunkt, zárt intervallum egyesítése; ezek közepéből 3^{-n-1} hosszúságú nyilt intervallumok elhagyásával kapjuk a C_{n+1} halmazt, végül metszetük: $C := \cap C_n$ maga a Cantor halmaz. Látható hogy az elhagyott intervallumok összhossza éppen 1, tehát C egyetlen intervallumot sem tartalmazhat, mégis rengeteg pont maradt. Például, a megtartott zárt intervallumok végpontjai mind a C elemei, de nem csak ezek. A Cantor halmaz pontjai kódolhatóak a végtelen 0 - 2 sorozatokkal úgy, hogy a sorozat n-ik jegye 0 ha az $n-1$-ik lépésben kapott 2^{n-1} hosszúságú zárt intervallum első, és 2 ha a harmadik harmadába esik. Minden ilyen sorozat a C egy pontját reprezentálja, tehát *ugyanannyian vannak* mint a $[0, 1]$ intervallum pontjai. Ennek alapján könnyű megmutatni hogy Cantor halmazának nincsenek izolált pontjai, és minden pontja torlódási pont, vagyis a Cantor féle halmaz perfekt.

Dirichlet típusú függvények: Legyen $\phi_1(x) := 1$ ha $x \in \mathbb{R}$ irracionális szám, $\phi_1(x) := -1$ ha x racionális. Mivel az I_γ közelítő összegek definiálásakor $\phi_1(\xi_k)$ értéke $+1$ vagy -1 egyaránt lehet, ez a függvény *egyetlen intervallumon sem integrálható.* A Riemann féle integrálfogalom egyik hibapontja az, hogy $|\phi_1| \equiv 1$ persze integrálható, tehát az abszolút konvergens sorok konvergenciájáról szóló tétel a Riemann integrálra nem menthető át.

Érdekesebb az a ϕ_2 függvény, amit $\phi_2(x) := 0$ ha x irracionális, míg $\phi_2(x) := 1/q$ ha $x = p/q$, $0 < q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, és a tört nem egyszerüsíthető. Ez a függvény a racionális helyeken biztosan nem folytonos, de ha x irracionális, akkor minden $q \in \mathbb{N}$ számhoz van $\delta_q > 0$ úgy hogy q nevezőjű racionális szám nem eshet az $(x - \delta_q, x + \delta_q)$ intervallumba, tehát ϕ_2 *az irracionális pontokban folytonos.* Nem nehéz megmutatni hogy d_2 seholsem differenciálható, de minden véges intervallumon Riemann szerint is lehet integrálni.

Seholsem differenciálható folytonos függvény: $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\{4^n x\}$, ahol $x \in [0,1)$ és $\{z\}$ a $z \in \mathbb{R}$ szám távolsága a hozzá legközelebb eső egész számtól. ♡ A sor egyenletesen konvergens, tehát f folytonos. A $D_h(x,f) := (1/h)(f(x+h) - f(x))$ differencia hányados $h \to 0$ léptékét az argumentum $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 4^{-n}$ kvartikus kifejtése szerint választjuk meg, ahol $x_n = 0,1,2,3$ lehet; egyértelműség kedvéért mindig a végtelen alakot használjuk. Például, $1/2$ első jegye 1, a többi 3. Legyen $h_m := 4^{-m}$ ha x_m páros szám, $h_m := -4^{-m}$ ha x_m páratlan. Mivel $\{4^n x\}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k}4^{-k}$ és a $\sum_{k=1}^{\infty}(3 - x_{n+k})4^{-k}$ számok minimuma, $\{4^n(x+h_m)\} = \{4^n x\}$ ha $n \geq m$, míg $\{4^n(x+h_m)\} = \{4^n x\} \pm 1$ ha $n < m$, és az előjel nem függ n-től mert $4^n\{4^{-n}x\} \leq 1/2$ pontosan akkor ha $4^n\{4^{-n}(x+h_m)\} \leq 1/2$. Látjuk hogy $D_{h_m}(x,f)$ páros vagy páratlan egész szám, aszerint hogy m páratlan vagy páros, tehát soha nem konvergálhat. □

A Volterra függvény: Cantor konstrukciójára épül a Volterra féle $V \in D[0,1]$ függvény definíciója, aminek az a nevezetessége hogy $V'(x)$ *Riemann szerint nem integrálható!* A Cantor típusú $D \subset [0,1]$ halmaz úgy készül, hogy $[0,1]$ közepéből most egy $1/4$ hosszúságú zárt intervallumot veszünk ki, majd a megmaradó kettőből egy - egy $1/16$ hosszúságút, és így tovább. Az n-ik lépes előtt 2^{n-1} darab egyforma zárt intervallumunk maradt, mindegyik közepéről elhagyjuk a 2^{-2n} nyílt intervallumot, D_n jelöli a maradékot, és $D := \cap D_n$. Az elhagyott intervallumok összhossza most $1/2$, és D sem tartalmaz intervallumot.

Most következik a Volterra függvény definíciója, kiinduló pontunk az az észrevétel hogy a $\phi(x) := x^2 \sin(1/x)$ függvény differenciálható, de a deriváltja az $x = 0$ közelében erősen ingadozik. A D halmazon legyen $V(x) \equiv 0$, a $[0,1] \cap D^c$ komplementer halmaz megszámlálhatóan sok egymásba nem nyúló nyilt intervallum egyesítése. Sorra mindegyik ilyen (α, β) intervallumon megadjuk V értékét úgy, hogy $V(\alpha) = V(\beta) = V'(\alpha) = V'(\beta) = 0$, továbbá V szimmetrikus az intervallum felezőpontjára vonatkozóan, vagyis $V(x) = V(y)$ ha $\alpha < x < y < \beta$ és $x + y = \alpha + \beta$. Konkrétan, legyen $V(x) := \phi(x - \alpha)$ ha $\alpha \leq x \leq \bar{\alpha}$, ahol $\bar{\alpha}$ a $g(x) = \phi(x - \alpha)$ utolsó lokális maximumának helye az $(\alpha + \beta)/2$ felezőpont előtt. Végül $V(x) := V(\alpha)$ ha $\bar{\alpha} \leq x \leq (\alpha + \beta)/2$, és $V(x) := V(\alpha + \beta - x)$ ha $(\alpha + \beta)/2 \leq x \leq \beta$.

Az közvetlenül látható hogy V mindenütt differenciálható, de V' a D halmaz egyetlen pontjában sem folytonos. Rövidesen megmutatjuk hogy ilyen függvényt, legalábbis Riemann szerint, nem lehet integrálni; túlságosan szűk a Riemann-integrálható függvények tere. Newton és Leibniz formulája természetesen érvényes az integrál modern (száz éves) elméletében. A továbbiakban ennek elemeit ismertetjük.

Nullahalmazok: Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz nullahalmaz ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van intervallumoknak olyan $I_n = (a_n, b_n)$ sorozata hogy $A \subset \cup I_n$, és az intervallumok összhossza, $\sum(b_n - a_n) < \varepsilon$. Minden megszámlálható halmaz nullahalmaz, és ugyanúgy igazolható hogy nullahalmazok sorozatának egyesítése is az. A Cantor halmaz nem megszámlálható, mégis nullahalmaz, mert $C \subset C_n$, és az utóbbi 2^n darab, összesen $(2/3)^n \to 0$ hosszúságú zárt intervallum egyesítése. Nem nullahalmaz a Volterra függvény definíciójában szereplő D, ennek lefedéséhez $1/2$-nél nagyobb összhosszúságú nyilt intervallum rendszer kell. Ha valamely tulajdonság csak egy nullahalmaz pontjaiban nem teljesül, akkor azt mondjuk hogy az majdnem mindenütt igaz.

Monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható: A monoton függvények szerkezete aránylag egyszerű: mindenhol léteznek az $f(x+0)$ és $f(x-0)$ féloldalas határértékek, és sok más örvendetes tény is ismert. ♡ Ha f korlátos egy intervalumon, akkor ott a $\delta_f(x) := f(x+0) - f(x-0)$ ugrások közül csak véges soknak az abszolút értéke haladhat meg egy pozitív szintet, □ tehát a szakadási helyek halmaza: $\{x : \delta_f(x) \neq 0\}$ megszámlálható, vagyis *monoton függvény, megszámlálható kivétellel, mindenütt folytonos.* Mindig feltehetjük, és ezt meg is tesszük, hogy az adott monoton függvény *balról folytonos:* $f(x-0) = f(x)$.

H. Lebesgue igazolta hogy *monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható.* Csak a folytonos esetet tárgyaljuk, [17] többre nem lesz szükségünk. ♡ Azt kell igazolni hogy a

$$D(x+0) := \limsup_{h\to+0} D_h(x,f)\,, \quad d(x+0) := \liminf_{h\to+0} D_h(x,f)\,,$$

jobboldali felső és alsó, valamint a

$$D(x-0) := \limsup_{h\to-0} D_h(x,f)\,, \quad d(x-0) := \liminf_{h\to-0} D_h(x,f)$$

baloldali felső és alsó deriváltak majdnem mindenütt végesek és egyenlők. Feltehetjük hogy $f \in C[a,b]$ monoton nő, ilyenkor a fenti félderiváltak nem lehetnek negatívak.

Kiinduló pontunk Riesz Frigyes következő észrevétele: *Legyen $g \in C[a,b]$ és jelölje U_g az olyan $x \in [a,b]$ pontok halmazát ahol $g(x) < \max\{g(y) : y \in [x,b]\}$. Ez az U_g halmaz nyilt, és az (α_k,β_k) komponenseinél $g(\alpha_k) \le g(\beta_k)$.* [18] Valóban, ha $\alpha_k < x < \beta_k$ akkor $g(x) \le g(\beta_k)$ mert $x \in U_g$, amiből határátmenettel kapjuk az állítást.

Először a $D(x+0)$ jobb felső deriváltat vizsgáljuk. Az a halmaz ahol $D(x+0) > C > 0$ biztosan része az U_g halmaznak, ahol $g(x) := f(x) - Cx$, tehát ennek (α_k,β_k) komponensei eleget tesznek az $f(\alpha_k) - C\alpha_k \le f(\beta_k) - C\beta_k$ egyenlőtlenségnek. Innen trendezéssel és összegezéssel $C\sum(\beta_k - \alpha_k) \le \sum(f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \le f(b) - f(a)$, tehát $D(x+0)$ majdnem mindenütt véges, de ennél sokkal több kell.

Legyen most $h(x) := f(-x) + cx$; az $U^* := \{-x : x \in U_h\}$ halmaz tartalmazza azokat a pontokat ahol $d(x) < c$, és az U^* nyilt halmaz (α_k^*,β_k^*) komponensein $f(\beta_k^*) - f(\alpha_k^*) \le c(\beta_k^* - \alpha_k^*)$. Ezután legyen $0 < c < C$ és jelölje $A_k(c,C)$ az olyan $x \in (\alpha_k^*,\beta_k^*)$ pontok halmazát ahol $D(x+0) > C$. Az $A(c,C) := \cup_k A_k(c,C)$ azokból az $x \in [a,b]$ pontokból áll ahol $d(x-0) < c$ és $D(x+0) > C$. Az előző szakasz gondolatmenete a csillagos intervallumok mindegyikén megismételhető, olyan $(\alpha_{k,l},\beta_{k,l}) \subset (\alpha_k^*,\beta_k^*)$ páronként diszjunkt intervallumokat kapunk hogy

$$C\sum_{k,l}(\beta_{k,l} - \alpha_{k,l}) \le \sum_{k,l}(f(\beta_{k,l}) - f(\alpha_{k,l})) \le \sum_k (f(\beta_k^*) - f(\alpha_k^*)) \le c\sum_k(\beta_k^* - \alpha_k^*)\,.$$

Jelölje Σ_1 a jobboldalon, Σ_2 pedig a baloldalon szereplő intervallumok összhosszát, $\Sigma_1 \le b - a$ míg $\Sigma_2 \le (c/C)\Sigma_1$. A kettős játékot a baloldali intervallumokkal folytatva olyan intervallum rendszereket kapunk, ahol a baloldaliak mindig lefedik az $A(c,C)$ halmazt, és n kettős lépés után az összhosszuk, $\Sigma_{2n} \le (c/C)(b-a) \to 0$, tehát mindegyik $A(c,C)$ nullahalmaz. De akkor az összes olyan $A(c,C)$ egyesítése is nullahalmaz ahol $0 < c < C$ racionális számok, vagyis $D(x+0) \le d(x-0)$ majdnem mindenütt. Mivel $d(x-0) \le D(x-0)$ és $d(x+0) \le D(x+0)$, folytonos függvények esetében ezzel igazoltuk Lebesgue tételét. Valóban, eddigi eredményünket az $f^*(x) := -f(-x)$ függvényre alkalmazva $D(x-0) \le d(x+0)$ m.m. is kijön, és ez már tényleg elegendő. □

Lebesgue kritériuma: *Véges intervallumon korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható Riemann szerint, ha majdnem mindenütt folytonos.* ♡ Valóban, ha a szóbanforgó $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény majdnem mindenütt folytonos, akkor a szakadási helyek halmaza lefedhető tetszőlegesen kis összhosszúságú nyilt intervallumokkal. Az $[a,b]$ intervallum ezek egyesítésén kívüli része a B kompakt halmaz, ahol f egyenletesen folytonos. Ezért minden $x \in B$ pontnak van olyan környezete, ahol f ingadozása bámely előírt szintnél kisebb. Nyílt intervallumok két típusát definiáltuk, ezek együttesen lefedik az $[a,b]$ intervallumot. Borel szerint ezt közülük véges sok is megteszi. A megmaradt intervallumok végpontjai olyan felosztást határoznak meg, amelyhez tetszőlegeses kicsi oszcillációs összegeket tudunk gyártani, vagyis f Riemann integrálható.

A szükségesség bizonyításához legyen $\delta(x) := \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y\to x} f(y)$, és jelölje A_n azt a halmazt ahol $\delta(x) \ge 1/n$. Ha f Riemann integrálható, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz

[17] Az ugrások leválasztásával minden f monoton függvény felbontható az $f = g + h$ módon, ahol g folytonos monoton függvény, míg $h(x) := \sum_{y<x} \delta_f(y)$ tiszta ugró függvény. Az összegben csak f szakadási helyei szerepelnek, ilyen legfeljebb megszámlálhatón sok lehet, és ha f korlátos, akkor a sor abszolút konvergens. Könnyū megmutatni hogy h m.m. differenciálható.

[18] Nyilt halmaz komponenseirōl Borel lefedési tételénél esett szó.

van n^{-2}-nél kisebb oszcillációs összeg. Ennek intervallumai közül csak kevésben lehet pontja az A_n halmaznak, összhosszuk nem haladhatja meg az $n/n^2 \to 0$ értéket. Azt igazoltuk hogy $A := \cap A_n$ nullahalmaz, de $A = \{x \in [a,b] : \delta(x) > 0\}$ éppen azokból a pontok áll, ahol f nem folytonos. $\square$

Mivel a Dirichlet féle ϕ_2 függvény a nullahalmazt alkotó racionális számok kivételével, vagyis majdnem mindenütt folytonos, véges intervallumokon ez a függvény Riemann szerint is integrálható. A Volterra függvény deriváltja nem folytonos majdnem mindenütt, tehát Riemann szerint nem lehet integrálni.

Egyenletes konvergencia: Az $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ függvények sorozata egyenletesen konvergál f-hez az X halmazon ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van n_ε úgy hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ha $x \in X$ $\forall\, n > n_\varepsilon$. Az $f \in C(\mathbb{R})$ korlátos függvény egyenletes normája $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$; a teljes számegyenes esetében az $f_n \to f$ egyenletes konvergencia pont azt jelenti, hogy $\|f_n - f\| \to 0$. *Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határértéke is folytonos,* ♡ mert $|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \le 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)|$ ha $n > n_\varepsilon$. $\square$

A folytonos és korlátos függvények terét $C_b(\mathbb{R})$ jelöli, nyilván $\|cf\| = |c|\,\|f\|$ ha $c \in \mathbb{R}$ konstans, és az $\|f+g\| \le \|f\|+\|g\|$ háromszög egyenlőtlenség is teljesül. ♡ Ha $f_n \in C_b(\mathbb{R})$ Cauchy sorozat, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε küszöb hogy $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ ha $n, m > n_\varepsilon$, akkor az $f(x) := \lim f_n(x)$ határérték mindenütt létezik, és $|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)|$, amiből az $m \to +\infty$ határátmenet után $\|f - f_n\| \le \varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$ adódik, $\square$ vagyis a *$C_b(\mathbb{R})$ tér teljes.*

$C_c(\mathbb{R})$ az olyan $f \in C_b(\mathbb{R})$ függvények tere, amelyek egy véges intervallumon kívül eltűnnek; $C_c(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}) \cap L^1_0(\mathbb{R})$. A definícó közvetlen következményeként $\lim \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx$ ha $\|f_n - f\| \to 0$ és f, f_n Riemann integrálható az (a,b) korlátos intervallumon, de ez nekünk nem elég.

Konvergencia majdnem mindenütt és átlagosan: Az $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ függvények sorozata, ahol $X \subset \mathbb{R}$, majdnem mindenütt (m.m.) konvergál f-hez, ha van olyan $A \subset X$ nullahalmaz hogy $\lim f_n(x) = f(x)$ ha $x \in X \cap A^c$; amit m.m. $\lim f_n = f$ jelöl. Olyan függvények integrálját is definiálni szeretnénk, amelyek folytonos függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatának határértékei; ezek a mérhető függvények. Látható hogy két mérhető függvény lineáris kombinációja, maximuma, minimuma is mérhető, sőt mérhető függvényt kapunk akkor is ha többváltozós folytonos függvénybe mérhető függvényeket helyettesítünk. Mérhető függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatait később tárgyaljuk.

Az $\int f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ funkcionált a $C_c(\mathbb{R})$ térről terjesztjük ki. $f \in C_c(\mathbb{R})$ esetén $\|f\|_1 := \int(|f|)$, az f függvény L^1 normája biztosan véges. Tudjuk hogy itt is teljesül az $\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$ háromszög egyenlőtlenség, tehát $\|f_n - f\|_1 \to 0$ esetén mondhatjuk azt hogy az *f_n sorozat L^1-ben (átlagosan) konvergál f-hez.* Mivel $|\int f_n - \int f_m| \le \|f_n - f_m\|_1$, az f_n integráljainak sorozata akkor is konvergens ha f_n Cauchy sorozat L^1-ben, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε küszöb hogy $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ ha $n, m > n_\varepsilon$.

Ahhoz hasonlóan ahogy a racionális számokból kiindulva, a Cauchy sorozatok elképzelt határértékeinek hozzávételével megkonstruálható a valós számok halmaza, az integrálható függvényeket a $C_c(\mathbb{R})$ tér L^1 norma szerint Cauchy sorozatainak határértékeiként gondoljuk azonosítani. Az egyenlőre egyáltalán nem világos hogy egy L^1 Cauchy sorozat milyen értelemben, és hova konvergál. Ugyanúgy mint a valós számok tárgyalásakor, kulcsszerepet játszanak az $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tulajdonságú monoton függvénysorozatok. A dolog lényegét tekintve Riesz Frigyes [14,15] gondolatmenetét követjük, bár ő nem a $C_c(\mathbb{R})$ térről, hanem a lépcsős függvények halmazáról terjesztette ki az integrált.

Dini tétele: *Ha kompakt halmazon folytonos függvények monoton sorozatának határértéke is folytonos, akkor a konvergencia egyenletes.* Az $f_n \to f$ függvényekkel foglalkozunk, ahol $f, f_n \in C(X)$ és $X \subset \mathbb{R}$ kompakt. ♡ Feltehetjük hogy $f \equiv 0$ és a sorozat fogyó, mert különben az $f_n - f$ vagy $f - f_n$ függvényekről beszélnénk. $C_n := \{x : f_n(x) \ge \varepsilon\}$ kompakt halmazok fogyó sorozata, és $\cap C_n = \emptyset$ ha $\varepsilon > 0$. Cantor szerint, véges kivétellel mindegyik üres. $\square$

A tétel állítása és bizonyítása változtatás nélkül vihető át $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ típusú monoton sorozatokra, feltéve hogy az $f := \lim f_n$ határérték is a $C_c(\mathbb{R})$ eleme. Ennek belátásához Dini tétele azzal az $X := [a,b]$ intervallummal alkalmazandó, amin kívül $f_1 - f$ eltűnik. Az se lényeges hogy a számegyenes kompakt részhalmazairól beszélünk, a bizonyítás minden metrikus térben működik.

Riesz lemmája: *Ha $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ monoton sorozat, és az integráljaik $\int f_n$ sorozata korátos, akkor $f := \lim f_n$ majdnem mindenütt véges. Rádásul, $\|g - f_n\|_1 \to 0$ ha $f = g$ m.m. és $g \in C_c(\mathbb{R})$.* ♡ Feltehetjük hogy $f_n \geq 0$ monoton növő sorozat, legyen $K := \lim \int f_n = \sup \int f_n$, jelölje A azt a halmazt ahol $f(x) = +\infty$, végül $G_{n,l} := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > l\}$ ha $l \in \mathbb{N}$ és $G_l := \cup_n G_{n,l}$. Mindegyik $G_{n,l}$ halmaz nyilt, tehát megszámlálhatóan sok diszjunkt nyilt intevallum (komponens) egyesítése, és ezeknek az intervallumoknak az összhossza legfeljebb K/l. [19] Másrészt $A \subset G_l$, és G_l is nyilt; megmutatjuk hogy a G_l komponenseinek Δ_l összhossza legfeljebb $4K/l \; \forall \, l \in \mathbb{N}$, tehát A valóban nullahalmaz. □

Feltehetjük hogy Δ_l véges, mert elég azt igazolni hogy az A halmaznak egy tetszőleges $[a,b]$ véges intervallumba eső része nullahalmaz. Ugyanis, mindegyik f_n kicserélhető a $g_n := \phi f_n$ függvényre, ahol $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ olyan hogy $\phi = 1$ ha $a \leq x \leq b$. A G_l komponensei közül tehát biztosan kiválasztható véges sok úgy, hogy az összhosszuk legalább $\Delta_l/2$; legyen (α,β) a G_l így kiválasztott komponensei közül az egyik. $(\alpha,\beta) = \cup_n(\alpha,\beta) \cap_n G_{n,l}$ miatt az (α,β) intervallum egyesítése a $G_{n,l}$, $n \in \mathbb{N}$ halmazok komponensei közül választott intervallumoknak. Ezek az intervallumok páronként diszjunktak, mert $f_{n+1} \geq f_n$ miatt a $G_{n,l}$ mindegyik komponense része a $G_{n+1,l}$ valamelyik komponensének, és közülük véges sok összhossza is nagyobb lesz mint $(\beta - \alpha)/2$. Az eljárást véges sokszor kell csak elvégezni ahhoz hogy olyan, páronként diszjunkt interallumokat kapjunk, amelyek mindegyike a G_l része, és az összhosszuk legalább $\Delta_l/4$. Van tehát $n^* \in \mathbb{N}$ úgy hogy $f_{n^*} > l$ mindegyik intervallumon, vagyis $l\Delta_l/4 \leq \int f_{n^*} \leq K$, amit bizonyítani kellett.

A ráadás bizonyításakor feltehetjük hogy $g \equiv 0$ és f_n fogyó sorozat. Az a B halmaz ahol nincs konvergencia nem tartalmaz intervallumot, tehát $f_n(x) \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. A kivételes B halmaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számnál kisebb összhosszúságú I_k nyilt intervallumokkal is lefedhető, ezek egyesítését G_ε jelöli. Van olyan $[a,b]$ intervallum amin kívül mindegyik f_n eltűnik, és az $F_\varepsilon := [a,b] \cap G_\varepsilon^c$ halmaz kompakt, tehát ezen a konvergencia egyenletes: minden $\varepsilon > 0$ számhoz van n_ε úgy hogy $|f_n(x)| < \varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$ és $x \in F_\varepsilon$. Az I_k intervallumokhoz az $x \in F_\varepsilon$ pontok $K_\varepsilon(x)$ környezeteit hozzávéve az $[a,b]$ intervallum olyan lefedését kapjuk, amiből Borel szerint véges lefedés is kiválasztható, tehát $\|f_n\|_1 \leq \varepsilon\|f_1\| + \varepsilon(b-a)$ ha $n > n_\varepsilon$.

Érdekes a Ráadás következő megfordítása is: *Ha $0 \leq f_n \in C_c(\mathbb{R})$ monoton sorozat, $f \in C_c(\mathbb{R})$ és $\|f_n - f\|_1 \to 0$, akkor $f_n \to f$ majdnem mindenütt.* ♡ Most is feltehetjük hogy $f \equiv 0$ és $f_n \geq 0$. Legyen $f := \lim f_n$ és $A_\delta := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \delta\}$, elég azt igazolni hogy ha $\delta > 0$ akkor A_δ nullahalmaz. Mivel $A_\delta \subset G_{n,\delta} := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \delta\}$, és a $G_{n,\delta}$ nyilt halmaz komponenseinek összhossza kevesebb mint $\int f_n/\delta$, az állítás $n \to +\infty$ után következik. □

A Lebesgue integrál: Most már sejthető hogy *a monoton konvergencia alkalmas az integrál értelmezésének kiterjesztésére.* Azonosítottuk az $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ monoton és L^1-ben Cauchy sorozatok határértékeit mint majdnem mindenütt véges, mérhető függvényeket, bár azt még nem tudjuk hogy minden mérhető függvény ilyen. Jelölje $L^1_+(\mathbb{R})$ az olyan $f \geq 0$ m.m. függvények halmazát, amelyekhez van $0 \leq f_n \in C_c(\mathbb{R})$ monoton növő sorozat úgy, hogy $f = \lim f_n$ m.m.; kézenfekvő az $\int f := \lim \int f_n$ definíció. Nincs kétértelműség, mert ha a g_n sorozat is alkalmas $\int f$ meghatározására, akkor $h_{m,n} := \min\{f_m, g_n\} \to f_m$, m.m. amint $n =\!\to +\infty$, továbbá $\int h_{m,n} \leq \int g_n$ és $h_{m,n} \leq h_{m,n+1}$, tehát $\int f_m \leq \lim \int g_n$, vagyis $\lim \int f_n \leq \lim \int g_n$. A fordított

[19] Többször is hasznát vesszük a következō egyszerū észrevételnek: Ha $0 \leq f \in C_b(\mathbb{R})$, és $f \geq c$ egy Δ összhosszúságu, páronként diszjunkt intervallumokból összeálló halmazon, akkor $c\Delta \leq \int f$, mert ha $g(x) := c$ az adott intervallumok közül véges soknak az egyesítésén, egyébként pedig $g(x) := 0$, akkor $g \leq f$ miatt $\int f \geq \int g = c\Delta'$, ahol Δ' a kiválasztott intervallumok összhossza. Ha végtelen sok intervallumunk van, akkor a végsō állítást határátmenettel kapjuk.

egyenlőtlenség ugyanígy jön ki, azaz $\lim \int f_n = \lim \int g_n$, és az is látható hogy ha $f \in C_c(\mathbb{R})$, akkor $\int f$ éppen az ő Riemann integrálja.

Nem jeltartó függvény integrálját az $|f(x)|_+ := \max\{f(x), 0\}$ és az $|f(x)|_- := \max\{-f(x), 0\}$ pozitív és negatív részre való felbontás segítségével definiáljuk. *Ha $|f|_+$ és $|f|_-$ is az $L^1_+(\mathbb{R})$ tér eleme, továbbá $\int(|f|_+)$ és $\int(|f|_-)$ közül legalább az egyik véges, akkor $\int f := \int(|f|_+) - \int(|f|_-)$.* Ha f, vagyis $|f| = |f|_+ + |f|_-$ integrálja véges, akkor f integrálható, amit $f \in L^1(\mathbb{R})$ jelöl; $\|f\|_1 := \int(|f|)$. Riesz lemmája szerint *integrálható függvény majdnem mindenütt véges.* Az nyilvánvaló *hogy $\int f = 0$ ha f majnem mindenütt nulla,* de a fordított állítás is igaz. Mivel $0 \le f \in C_c(\mathbb{R})$ és $\int f = 0$ esetén $f \equiv 0$, *ha $\|f\|_1 = 0$ akkor f majdnem mindenütt nulla.* [20] A konstrukció szerint minden $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvényhez van $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ úgy hogy $f = \lim f_n$ m.m. és $\int f = \lim \int f_n$, sőt $\|f - f_n\| \to 0$ is igaz.

Nemnegatív függvény közelítése a $C_c(\mathbb{R})$ tér elemeivel alulról történt, de ez felülről is lehetséges. *Ha f korlátos, integrálható, és az $[a, b]$ véges intervallumon kívül nulla, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $g, h \in C_c(\mathbb{R})$ úgy hogy $g \le f \le h$ m.m. és $\int h - \varepsilon < \int f < \int g + \varepsilon$.* ♡ Feltehetjük hogy $f \ge 0$, ekkor csak a h majoránst kell megtalálni. Biztosan vannak olyan $\phi, \psi \in C_c(\mathbb{R})$ függvények hogy $f \le \phi$, míg $0 \le \psi \le \phi - f$ és $\int(\phi - f) < \int \psi + \varepsilon$, tehát $h := \phi - \psi$ a keresett függvény. □

Az integrálhtó függvények lineáris teret alkotnak: ha $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható és $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$, továbbá $\int f \ge 0$ ha $f \ge 0$ m.m.; ezért mondjuk azt hogy az integrál pozitív lineáris funkcionál. Azt se nehéz megmutatni hogy két integrálható függvény maximuma és minimuma is az, vagyis L^1 vektorháló.

Nemcsak a számegyenesen lehet integrálni. Jelölje $\mathbf{1}_A$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz indikátorát: $\int_A f\,dx := \int(f\mathbf{1}_A)$, ha ez az integrál létezik. Ha A intervallum, akkor a hagyományos $\int_a^b f\,dx$ jelölést használjuk. Világos hogy $\int_{A\cup B} f\,dx = \int_A f\,dx + \int_B f\,dx$ ha A és B diszjunkt, vagyis *az integrál additív halmazfüggvény.* Az A halmazon integrálható függvények terét $L^1(A)$ jelöli, de erről külön nem kell beszélni, mert $f : A \mapsto \mathbb{R}$ értelmezését a $\tilde{f}(x) := f(x)$ ha $x \in A$, $\tilde{f}(x) = 0$ ha $x \notin A$ konvencióval kiterjeszthetjük a teljes számegyenesre, és ezzel az $L^1(A)$ teret beágyaztuk az $L^1(\mathbb{R})$ térbe. Ha az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény csak valamilyen $[a, b]$ intervallumon érdekel bennünket, akkor kicserélhetjük az $\mathbf{1}_{[a,b]}f$ szorzatra, vagy megszorozhatjuk olyan, elegendően sima $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ függvénnyel hogy $\phi(x) = 1$ ha $x \in [a, b]$.

A határátmenet és az integrál felcserélhetőségének tisztázása után tudjuk megmutatni hogy minden nemnegatív mérhető függvénynek van integrálja.

A monoton konvergencia tétele: *Ha $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ monoton függvénysorozat, és az $\int f_n$ sorozat korlátos, akkor az $f := \lim f_n$ m.m. integrálható, és $\int f = \lim \int f_n$.* ♡ Feltehetjük hogy az f_n sorozat monoton nő, és $f_n \ge 0$ m.m.; egyébként a $g_n = -f_n$, illetve a $g_n := f_n - f_1$ sorozatról beszélnénk. Legyen $0 \le \varphi_{n,k} \in C_c(\mathbb{R})$ olyan növekvő sorozat hogy $f_n = \lim \varphi_{n,k}$ m.m. amint $k \to \infty$, tehát $\int f_n = \lim_k \int \varphi_{n,k})$; a sorozatok ritkításával elérhetjük hogy $\int f_n \le \int \varphi_{n,n} + 1/n$. A $g_n := \max\{\varphi_{k,k} : 1 \le k \le n\}$ monoton sorozat még mindig a $C_c(\mathbb{R})$ térben halad, $g_n \le f_n$ m.m. és $\int f_n \le \int g_n + 1/n$. Mivel $\int g_n \le \sup \int f_n < +\infty$, a $g := \lim g_n$ függvény integrálható, $g \le f$ m.m., de $\int g = \lim \int f_n$. Azt kell igazolni hogy $f = g$ majdnem mindenütt, ami következik a $\lim |f_n - g|_+ = 0$ m.m. állításból. Viszont $|f_n - g|_+$ monoton növő sorozat, és $f_n - g_n \ge |f_n - g|_+$ miatt az integrálja eltünik amikor $n \to +\infty$. Ez csak úgy történhet meg ha $|f_n - g|_+ = 0$ m.m. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tehát m.m. $f = g$. □

Ez a tétel úgy is kimondható hogy *nemnegatív és integrálható függvényekből álló sor tagonként integrálható.* Az olaszok az eredményt többnyire Beppo Levi tételeként idézik, pedig a francia P. Fatou lemmája kicsit általánosabb, noha bizonyítása majdnem ugyanaz. Eszerint *ha $f_n \ge 0$ m.m. és $f = \liminf f_n$ m.m., akkor $\int f \le \liminf \int f_n$*, ami úgy értendő hogy ha a jobboldal véges, akkor f integrálható.

[20] Integrálás szempontjából semmi sem történik ha a függvények értelmezését nullahalmazon változtatjuk meg: a majdnem mindenütt egyenlō függvények azonosnak tekinthetōk. Például, ha $f \le g$ m.m., akkor a $\tilde{g}(x) := g(x)$ ha $f(x) \le g(x)$, $\tilde{g}(x) = f(x)$ ha $f(x) > g(x)$ módosítás után $f \le \tilde{g}$ már mindenütt igaz lesz.

A dominált konvergencia tétele: *Tegyük fel hogy $g, f_n \in L^1(\mathbb{R})$ és $|f_n| \le g$ m.m. $\forall n \in \mathbb{N}$, továbbá $f = \lim f_n$, szintén majdnem mindenütt. Ekkor $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $\lim \|f - f_n\|_1 = 0$, tehát $\int f_n \to \int f$ amint $n \to \infty$.* ♡ Legyen $\varphi_{n,m} := \min\{f_k : n \le k \le m\}$ ha $m > n$; $\varphi_{n,m+1} \le \varphi_{n,m}$ m.m., tehát $\lim_{m\to\infty} \varphi_{n,m} =: \varphi_n \in L^1(\mathbb{R})$, és a φ_n sorozat növekedve konvergál f-hez. Mivel $|\int \varphi_n| \le \int g$, az állítás a monoton konvergencia tételének következménye. □

Ez az eredmény H. Lebesgue nevéhez fűződik, és a sorokra vonatkozó Weierstrass tétel kiterjesztése. A Riemann integrálhatóság korábban elemi úton bizonyított Lebesgue kritériuma Lebesgue tételéből egyszerüen következik. Most már az is látható hogy *ha f mérhető, és van $g \in C_c(\mathbb{R})$ úgy hogy $|f| \le g$, akkor f integrálható.* ♡ Valóban, ha $f_n \to f$ m.m. és $f_n \in C_c(\mathbb{R})$, akkor az $\tilde{f}_n := f_n(x)$ ha $|f_n(x)| \le g(x)$, $\tilde{f}_n := g(x)$ ha $f_n(x) \ge g(x)$, $\tilde{f}_n := -g(x)$ ha $f_n(x) \le -g(x)$ definícióval olyan $\tilde{f}_n \in C_c(\mathbb{R})$ sorozatot kaptunk hogy $\tilde{f}_n \to f$ m.m. és $|\tilde{f}_n| \le g$, tehát f tényleg integrálható. □ Eszerint *minden nemnegatív mérhető függvénynek van Lebesque integrálja, legfeljebb $+\infty$ az értéke.* Igen sok mérhető függvény van mert *mérhető függvények m.m. konvergens sorozatának a határértéke is mérhető.* ♡ Azt tudjuk hogy minden integrálható függvény mérhető, ha tehát f_n mérhető és $f_n \to f$ m.m., akkor a dominált konvergencia tétele alkalmazható a $g_n := \exp(-|x|)\mathrm{arctg}(f_n(x))$ sorozatra. Azt kapjuk hogy $g = \lim g_n = \exp(-|x|)\mathrm{arctg}(f(x))$ integrálható, tehát $f(x) = \mathrm{tg}(\exp(|x|)g(x))$ mérhető. □

Az $L^1(\mathbb{R})$ tér teljes: ♡ Ha $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ Cauchy sorozat, akkor van olyan g_n részsorozata hogy $\|g_{n+1} - g_n\| < 2^{-n}$, tehát Beppo Levi szerint $g := |g_1| + |g_2 - g_1| + \cdots + |g_{n+1} - g_n| + \cdots$ integrálható, és így majdnem mindenütt véges. Persze $|g_n| \le g$ és az $f := \lim g_n$ határérték majdnem mindenütt létezik és véges. Lebesgue tétele alapján f integrálható, és g_n átlagosan is konvergál hozzá; a végleges $\|f_n - f\|_1 \to 0$ állítás a Cauchy tulajdonság következménye. □ Menet közben azt is megmutattuk hogy *átlagosan konverges (Cauchy) sorozatnak van majdnem mindenütt konvergens részsorozata.*

A Lebesgue mérték: Az (a, b) intervallum hosszát az $\mathbf{1}_{(a,b)}$ indikátorának integrálásával is megkaphatjuk: $b - a = \int \mathbf{1}_{(a,b)}$. Ennek kiterjesztéseként mondjuk hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz mérhető ha az $\mathbf{1}_A$ indikátora mérhető függvény, és ilyenkor $\lambda(A) := \int \mathbf{1}_A$ az ő Lebesque mértéke. Az intervallumok mind mérhetőek, az üres halmaz, és minden nullahalmaz mértéke persze 0, míg $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Mivel $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}$, $\mathbf{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}$ és $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$, mérhető halmazok egyesítése, közös része és a komplementuma is mérhető. A mérhető halmazok halmaza zárt a fent felsorolt műveletkre vonatkozóan, vagyis halmazalgebra, amit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ jelöl. Maga a $\lambda : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}_+$ mérték monoton és additív halmazfüggvény: $\lambda(A) \le \lambda(B)$ ha $A \subset B$ és $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap B}$ miatt $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B)$, tehát $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ ha A és B diszjunkt.

Ennél több is igaz: ha $A \subset \mathbb{R}$ az $A_n \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ páronként diszjunkt mérhető halmazok egyesítése, ♡ akkor $\mathbf{1}_A = \sum \mathbf{1}_{A_n}$, tehát Beppo Lévi tétele, vagy Fatou lemmája miatt A is mérhető és $\lambda(A) = \sum \lambda(A_n)$. □ Röviden: *a mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, amin a Lebesque mérték σ-additív.* $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ teljes abban az értelemben hogy nullahalmaz minden részhalmaza is mérhető, és ha két halmaz csak nullahalmazban különbözik egymástól, akkor egyszerre mérhetőek.

Minden nyilt halmaz intervallumok sorozatának egyesítése, tehát mérhető. A zárt halmazok mérhetősége onnan adódik hogy a komplementumük nyílt; ezek a folytonos függvények szinthalmazai. Az is igaz hogy *mérhető függvény minden szinthalmaza mérhető.* ♡ Feltehetjük hogy $f \ge 0$ integrálható, ekkor van olyan $0 \le f_n \in C_c(\mathbb{R})$ növekvő sorozat hogy $f_n \to f$ m.m. Legyen $A := \{x : f(x) > c\}$ és $G_n := \{x : f_n(x) > c\}$, ahol $f_n(x) \to f(x)$ ott $\mathbf{1}_A = \lim \mathbf{1}_{G_n}$. Mivel G_n nyilt, A tényleg mérhető. Végül $\{x : f(x) \ge c\} = \cap\{f > c - 1/n\}$, tehát ő is mérhető. □

A mérhető halmazok felülről jól közelíthetők nyilt, alulról pedig kompakt halmazokkal:

$$\inf\{\lambda(G) : G \supset A \text{ nyilt}\} = \lambda(A) = \sup\{\lambda(C) : C \subset A \text{ kompakt}\}. \tag{8.1}$$

♡ A mérték σ-additivitása miatt feltehetjük hogy A korlátos, de ilyenkor a közrefogás lemmája szerint minden $\delta > 0$ számhoz van $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ úgy hogy $0 \le f \le \mathbf{1}_A \le g$ és $\int g - \delta < \lambda(A) < \int f + \delta$. Legyen $0 < \gamma < 1$ és $C := \{x : f(x) \ge \gamma\}$, $G := \{x : g(x) > \gamma\}$, persze $C \subset A \subset G$, C kompakt míg G nyilt. Mivel $\gamma \mathbf{1}_G \le g$ a G halmazon, $\lambda(G) \le \int g/\gamma \le (\lambda(A) + \delta)/\gamma \le$

$\lambda(A) + (1-\gamma)\lambda(A)/\gamma + \delta/\gamma$, a baloldali egyenlőtlenség igazolásához először legyen $\gamma = 1-\delta$ majd $\delta \to 0$. Másrészt, $\lambda(A) \le \int f + \delta \le \lambda(C) + \gamma\lambda(A) - \gamma\lambda(C) + \delta$, tehát a jobboldal $\gamma = \delta$ majd $\delta \to 0$ után következik. □

Primitív függvény létezése: *Ha $f \in L^1(a,b)$ és $F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$, akkor $F' = f$ majdnem mindenütt az (a,b) intervallumon.*

♡ Feltehetjük hogy $f \ge 0$, de ekkor van olyan $0 \le f_n \in C_c(\mathbb{R})$ monoton növő sorozat hogy $F_n(x) := \int_a^x f_n(y)\,dy \to F(x)$ a teljes intervallumon; részsorozat kiválasztása révén elérhetjük hogy $F(b) - F_n(b) < 2^{-n}$. Mivel $D_h(x,F_n) = (1/h)\int_x^{x+h} f_n(y)\,dy$, a differencia hányadosok sorozata is monoton nő, és így $f_n(x) = F_n'(x) \le F_{n+1}'(x) \le F'(x)$ majdnem mindenütt. Legyen $G_n := F - F_n$ és $S_n := G_1 + G_2 + \cdots + G_n$; ekkor $0 \le G_n(x) \le G(x) \le G(b) < 2^{-n}$ miatt S_n monoton függvények egyenletesen konvergens monoton sorozata, tehát $S = \lim S_n$ is majdnem mindenütt differenciálható. Most már csak azt kell észrevenni hogy a $D_h(x,S_n) \le D_h(x,S)$ sorozat is monoton, tehát $0 \le S_n'(x) \le S_{n+1}'(x) \le S'(x)$ majdnem mindenütt. Eszerint a $\sum G'$ sor m.m. konvergens, vagyis $F' - f_n \to 0$ m.m. □

A Cantor halmaz eloszlásfüggvénye: A differenciálás és integrálás műveleteinek kapcsolata most sem felhőtlen. A tisztázást egy negatív példával kezdjük, ami a $C := \cap C_n$ Cantor halmaz konstrukciójára épül. ♡ Mivel $\lambda(C_n) = (2/3)^n$, legyen

$$F_n(x) := \frac{3^n}{2^n}\int_0^x \mathbf{1}_{C_n}(y)\,dy \quad \text{ha} \quad 0 \le x \le 1\,.$$

Nyilván $F_n(0) = 0$, $F_n(1) = 1$, és F_n folytonos, szakaszonként lineáris monoton függvény, amely a $G_n := [0,1] \cap C_n^c$ nyilt halmaz komponensein állandó, de $F_n'(x) = (3/2)^n$ ha $x \in C_n$. Az is látható hogy $F_{n+1}(x) = F_n(x)$ ha $x \in G_n$, míg $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \le 2^{-n}/6$ ha $x \in C_n$, vagyis $m > n$ esetén $|F_m(x) - F_n(x)| \le 2^{-n}/3$ az x értékétől függetlenül. Mivel a $C_b(\mathbb{R})$ tér teljes, az F_n sorozat egyenletesen konvergens, tehát létezik és folytonos az $F := \lim F_n$ határérték. Az előzmények szerint F állandó a $G := \cup G_n = [0,1] \cap C^c$ nyilt halmaz komponensein, de $\lambda(C) = 0$, □ tehát F *majdnem mindenütt differenciálható és $F'(x) = 0$, szintén manjdnem mindenütt.* Minthogy F monoton nő, a Newton - Leibniz formula csak majdnem mindenütt differenciálható függvényekkel nagyon nem igaz. Viszont a Volterra függvény deriváltja Lebesgue szerint integrálható, és $V(x) = \int_0^x V'(y)\,dy$ minden x helyen, de ezt még nem tudjuk bebizonyítani.

Abszolút folytonos függvények: A Newton - Leibniz tétel kiterjesztése érdekében először az $F(x) := \int_a^x f(z)\,dx$ és az $\mu(A) := \int_A f(x)\,dx$ integrálokat vizsgáljuk, ahol $f \in L^1(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. A $\mu(A) : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}$ halmazfüggvény előjeles mérték: ha A a páronként diszjunkt A_n, $n \in \mathbb{N}$ mérhető halmazok egyesítése, akkor $\mu(A) = \sum \mu(A_n)$, ami a dominált konvergencia tételének egyszerű folyománya. Megmutatjuk hogy μ erősen abszolút folytonos a Lebesgue mértékre vonatkozóan, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ úgy hogy $|\mu(A)| < \varepsilon$ ha $\lambda(A) < \delta$. ♡ Mindez nyilvánvaló ha f korlátos és eltűnik egy véges intervallumon kívül, mert ilyenkor $|\mu(A)| \le \int_A |f|\,dx \le K\lambda(A)$, ahol $K > 0$ az f korlátja. Az általános esetben legyen $f_n(x) = f(x)$ ha $|x| \le n \in \mathbb{N}$ és $|f(x)| \le n$, egyébként pedig $f(x) := 0$, míg $g_n := f - f_n$. A dominált konvergencia tétele miatt $\|g_n\|_1 \to 0$, tehát van $n = n^*$ úgy hogy $\|g_{n^*}\|_1 < \varepsilon/2$. Mivel $|\mu(A)\|_1 \le n^*\lambda(A) + \|g_{n^*}\|_1$, $\delta := 2n/\varepsilon$ jó lesz. □

Az $F : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ függvény *abszolút folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ úgy hogy ha $(a_n,b_n) \subset (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ egymásba nem nyúló intervallumok, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta\,. \tag{8.2}$$

Minden abszolút folytonos függvény egyenletesen folytonos, ♡ mert feltehető hogy a definícióban szereplő intervallumok az első kivételével mind üresek. □ Szorosabban kapcsolódik a mérték fogalmához a definició gyengébb alakja: *Ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ hogy* *tetszőleges $(a_n, b_n) \subset (a, b)$ páronként diszjunkt intervallumokkal*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n) - F(a_n))\right| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta\,, \tag{8.3}$$

akkor az $F : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos. ♡ Először azokra az intervalmokra kell felírni az (8.3) becslést amelyeken $F(b_k) - F(a_k) > 0$, majd azokra ahol ez a különbség negatív, ezzel a 2ε számhoz kapjuk meg a deltát. □

A második definíció direkt következménye, de nagyon fontos hogy: *ha $f \in L^1(a, b)$ akkor $F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$ abszolút folytonos az (a, b) intervallumon,* ♡ mert ha $A := \cup(a_n, b_n)$ akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n) - F(a_n)) = \int_A f(x)\,dx\,,$$

és így alkalmazható az előző szakasz eredménye. □ Nem nehéz megmutatni hogy a *Cantor eloszlásfüggvény nem abszolút folytonos.*

Korlátos változású függvények: Az $F : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ függvény teljes variációja az (a, b) intervallumon

$$V_a^b(F) := \sup_{\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)|\,, \tag{8.4}$$

ahol $\gamma := \{a < x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n < b\}$ az intervallum tetszőleges felosztása. Ha $V_a^b(F) < +\infty$, akkor azt mondjuk hogy F korlátos változású. Világos hogy *korlátos monoton függvény biztosan korlátos változású, sőt két ilyen függvény különbsége is az.* ♡ Fordítva, a $T(x) := V_a^x(F)$ függvény monoton nő, $G(x) := F(x) - T(x)$ monoton fogy, □ tehát minden *korlátos változású függvény két korlátos és monoton növekvő függvény különbségére bomlik fel.* Lebesgue tétele szerint tehát *korlátos változású függvény majdnem mindenütt differenciálható.* Látható hogy $T(x)$ folytonos ha F az, ezt az esetet tárgyaltuk részletesen.

Annak belátásához hogy *korlátos intervallumon minden abszolút folytonos függvény korlátos változású,* ♡ $V_a^b(F)$ becslésekor az $\varepsilon = 1$ értékhez először megkeressük az abszolút folytonosság $\delta(1)$ modulusát, majd a túl hosszú intervallumokat $\delta(1)/3$-nál rövidebb részekre daraboljuk. Ezután $\delta(1)$-nél kisebb, de $\delta(1)/2$-nél nagyobb összhosszú *maximális* csoportokat hozunk létre, ezek száma legfeljebb $(2b - 2a)/\delta(1)$ lehet, tehát a háromszög egyenlőtlenség miatt $V_a^b \leq (2b - 2a)/\delta(1)$. □ Most már azt is tudjuk hogy *abszolút folytonos függvény majdnem mindenütt differenciálható.*

Lebesgue NL tétele: *Legyen $f \in L^1(a, b)$ és $F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$, ekkor F abszolút folytonos és $F' = f$ majdnem mindenütt az (a, b) intervallumon. Másrészt, bármely $F : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ abszolút folytonos függvény majdnem mindenütt differenciálható, az F' deriváltja integrálható, és $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(y)\,dy$.*

Azt hogy abszolút folytonos függvény deriváltja integrálható, a 13. Fejezetben, a Radon - Nikodym tételből vezetjük le. A tétel többi állítását már igazoltuk.

A Lebesgue - Stieltjes integrál: $\int f\,dF$ típusú integrálok is definiálhatók, ahol $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ véges intervallumokon korlátos változású. [21] A valószínűségszámításból ismert $\mathsf{E}f(\xi) \equiv \int f\,dF$ várható érték problémáját részletezzük, ahol $F(x) := \mathsf{P}[\xi < x]$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, tehát F balról folytonos monoton növekvő függvény, $-\infty$-nél 0, $+\infty$-nél 1 a határértéke. A diszkrét változók esete is érdekes, itt $F(x) := \sum_{x_k < x} p_k$, ahol az $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ számok a ξ lehetséges értékei, $p_k := \mathsf{P}[\xi_k = x_k]$, tehát $p_k \geq 0$ és $\sum p_k = 1$. Értelmezésünk szerint $\mu[a, b) := F(b) - F(a) = \mathsf{P}[a \leq \xi < b]$ az $[a, b)$ balról zárt, jobbról nyilt intervallum mértéke vagy valószinűsége. Mindezek értelmében az $f \in C_c(\mathbb{R})$ függvény $\int f\,dF$ Riemann -

[21] Valamivel általánosabb az $\int_a^b f\,dF$ típus, ahol F az (a, b) intervallum zárt részintervallumain korlátos változású; a tárgyalás lényegében ugyanaz mint amit itt bemutatunk.

Stieltjes integráljának közelítő összegét például

$$\mathsf{E}_n f := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k/n)\,(F((k+1)/n) - F(k/n)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k/n)\mu[k/n,(k+1)/n) \tag{8.5}$$

definiálja, ahol $n \in \mathbb{N}$. Mivel f egyenletesen folytonos, $\mathsf{E}_n f$ Cauchy sorozat; ennek határértéke az $\mathsf{E}f \equiv \int f\,dF$ integrál. Ha F abszolút folytonos és $F' = f$ m.m., akkor persze $\int g\,dF = \int gf\,dx$ mint Lebesgue integrál.

Látható hogy, adott F integrátor mellett, E pozitív lineáris funkcionál a $C_b(\mathbb{R})$ téren, $|\mathsf{E}f| \le \|f\|$ miatt azt modjuk hogy E korlátos, vagy hogy folytonos. Ennek a funkcionálnak a kiterjesztése ugyanúgy történhet mint a Lebesgue integrál esetében, csak a nullahalmaz fogalmát kell módosítani. Azt mondjuk hogy $A \subset \mathbb{R}$ μ-nullahalmaz ha lefedhető akármilyen kis összmértékű $[a_k, b_k)$, $k \in \mathbb{N}$ intervallumokkal, vagyis $A \subset \cup[a_k, b_k)$ és $\sum(F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$. Mivel F balról folytonos, a definíció tartalma nem változik meg ha a lefedést az erősebb $A \subset \cup(a_k, b_k)$ formában követeljük meg. Ez az észrevétel megkönnyíti Borel lefedési t'etelének alkalmazását és a Riesz lemmák bizonyítását.

Mérhetőnek most a μ-m.m. konvergens sorozatok határfüggvényeit nevezzük. Az integrál kiterjesztése először azokra a függvényekre történik, amelyek a $C_c(\mathbb{R})$ térből vett μ-m.m. konvergens monoton sorozatok határértékei. A pozitív és negatív rész szétválasztása után definiáljuk az integrálható függvények $L^1(\mu)$ terét, aminek normája $\|f\|_{1,\mu} := \int |f|\,dF$. Ez a tér teljes, érvényes a monoton és a dominál konvergencia tétele, amiből következik a korlátos mérhető függvények integrálhatósága. Mivel $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$, az azonosan 1 függvény integrálja éppen 1. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor mérhető, ha $\mathbf{1}_A \in L^1(\mu)$, és ekkor $\mu(A) := \int \mathbf{1}_A\,dF$. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, amin a μ mérték, az F nemnegatív σ-additív halmazfüggvény, $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Egyáltalán nem volt lényeges hogy az F integrátor 0 és 1 között változik, vagyis $\mu(\mathbb{R}) = 1$, és az is csak konvenció hogy F balról folytonos. Mivel minden, a teljes számegyenesen korlátos változású függvény korlátos és monoton növő függvények különbsége: $F = G - H$, egy korlátos változású F szerinti Lebesgue - Stieltjes integrált az $\int f\,dF : \int f\,dG - \int f\,dH$ képlet definiálja. Noha F felbontása nem egyértelmű, a konstrukció kulcsa, a $\mu[a,b) := F(b) - F(a) = G(b) - G(a) - H(b) + H(a)$ mérték az, tehát a definíció korrekt. Az F korlátos változású függvényhez rendelt $\mu = \mu_F$ Lebesgue - Stieltjes mérték definíciója: $\mu_F(A) := \int \mathbf{1}_A\,dF$. A konstrukcióból az is látszik hogy $\int f\,dF \le \|f\| V_{-\infty}^{\infty}(F)$.

Riesz reprezentációs tétele: Riesz Frigyes módszere igen általános, keveset kell arról tudni hogy a folytonos függvények integrálját hogyan definiáltuk. Képzeljük el hogy adott egy $\ell : C_c(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál, vagyis $\ell(f) \ge 0$ ha $f \ge 0$ és $\ell(\alpha f + \beta g) = \alpha\ell(f) + \beta\ell(g)$ ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C_c(\mathbb{R})$. Azt is feltesszük hogy ℓ korlátos, pontosabban $\sup\{\ell(f) : f \le 1\} = 1$.

♡ Mivel $\ell(f) \ge \ell(g)$ ha $f \ge g$, a funkcionál kiterjeszthető monoton sorozatok határfüggvényeire is: $\ell(f) := \lim \ell(f_n)$ ha $f(x) = \lim f_n(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ és az $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ sorozat monoton nő. A kiterjesztés egyértelmű, és $\ell(f) \le K$ ha $f(x) \le K\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Az $\mathbf{1}_{(c,\infty)}$ függvény például az $f_n(x) := \min\{nx - nc, 1, n^2 - nx\}$ ha $c \le x < n$, egyébként $f_n(x) := 0$ módon definiált sorozat határértéke, legyen $F(c) := \ell(\mathbf{1}_{c,\infty})\ \forall c \in \mathbb{R}$. A konstrukció szerint $\ell(\mathbf{1}_{[a,b)}) = F(b) - F(a)$, F monoton nő, $F(-\infty) = 0$, végül $F(+\infty) = 1$ azért igaz mert ha $1 \ge f \in C_c(\mathbb{R})$ és $\ell(f) > 1 - \delta$, akkor is van akkora $n \in \mathbb{N}$ hogy $f \le \mathbf{1}_{[-n,n)}$. Most már csak azt kell észbevenni hogy az $\int f\,dF$ integrál (8.5) közelítő összege éppen $\mathsf{E}_n f = \ell(\phi_n)$, ahol $\phi_n(x) := f(k/n)$ ha $k/n \le x < (k+1)/n$, tehát $\ell(f) = \int f\,dF$ ha $f \in C_c(\mathbb{R})$. □

Riesz tétele ennél valamivel általánosabb, a nem feltétlenül pozitív, korlátos funkcionálokról szól. A $C_c(\mathbb{R})$ vagy $C_b(\mathbb{R})$ tér ℓ lineáris funkcionálja korátos ha a *funkcionál* $\|\ell\| := \sup\{\ell(f) : \|f\| \le 1\}$ normája véges. Maga a tétel: *Minden $\ell : C_c(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál $\ell(f) = \int f\,dF$ alakú, ahol F a teljes számegyenesen korlátos változású, és $\|\ell\| = V(F)$.* Az előző változat alkalmazásához az ℓ funkcionál pozitív és negatív részét kell szétválasztani. ♡ Ha $f \ge 0$ akkor a pozitív rész: $\ell_+(f) := \sup\{\ell(\varphi) : 0 \le \varphi \le f\}$. monoton, vagyis $\ell(f) \le \ell(g)$ ha $f \le g$, és az $\ell(\alpha f) = \alpha\ell(f)$ ha $\alpha \in \mathbb{R}$ azonosság, valamint az $\ell(f) \le \ell_+(f)$ és $\ell_+(f+g) \ge \ell_+(f) + \ell_+(g)$

egyenlőtlenségek is nyilvánvalóak. Ha viszont $0 \le \varphi \le f+g$ és $\ell_+(f+g) \le \ell(\varphi)+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, továbbá $\varphi_1 := \min\{f,\varphi\}$ míg $\varphi_2 := \varphi - \varphi_1$, akkor $\varphi_2 \le g$, tehát $\ell_+(f+g) \le \ell(\varphi_1)+\ell(\varphi_2)+\varepsilon \le \ell$, vagyis $\ell_+(f+g) = \ell_+(f)+\ell_+(g)$ is igaz. Mivel $0 \le \varphi \le f$ esetén $\|\varphi\| \le \|f\|$, ℓ_+ korlátos.

Ezután a függvény pozitív és negatív részét szétválasztva, $f = |f|_+ - |f|_-$ alapján, tulajdonságainak megtartásával terjeszthetjük ki az ℓ_+ funkcionált a teljes $C_c(\mathbb{R})$ térre. Mivel $\ell_- := \ell_+ - \ell$ is pozitív, az $\ell = \ell_+ - \ell_-$ felbontással a bizonyítást a pozitiv funkcionálok már tárgyalt speciális esetére vezettük vissza, tehát van olyan korlátos változású F hogy $\ell(f) = \int f\,dF$ $\forall f \in C_c(\mathbb{R})$. Az $\|\ell\| \le V(F)$ becslést már tudjuk, és ha F monoton nő, akkor az egyenlőség például az $f_n(x) := 0$ ha $|x| \ge n$, egyébként pedig $f_n(x) := \min\{x+n, 1, x-n\}$ sorozattal érhető el. Az általános esetben a $\sum |F(x_{k+1}) - F(x_k)|$ összeget, ahol $x_{k+1} > x_k$, kell ügyesen választott, $+1$ és -1 között ingadozó függvények integráljaival megközelételeni. □ Azonosítottuk a $C_c(\mathbb{R})$ téren adott lineáris korlátos funkcionálok terét a korlátos változású függvények lineáris terével, amin $V(F)$ a természetes norma. Ez a $C_c(\mathbb{R})$ tér duálisa, amit $C^*(\mathbb{R})$ jelöl.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Itt kezdődik a második szemeszter anyaga, sok benne az ismétlődés. A törzsanyaghoz nem tartozó részeket általában csillag jelöli, a 13. Fejezet teljes egészében ilyen, de ott nincs $**$.

9. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Már a síkon is számos olyan jelenséget tapasztalunk, amelyek a számegyenesen nem mutatják meg magukat, komplex függvények esetén ez különösen szembetűnő. Egyes nehezebb bizonyítások csak később kerülnek sorra.

9.1. **Görbék differeciálgeometriája.** Az $y = f(x)$ típusú síkgörbéknél bonyolultabbak is vannak, a térgörbék leírásához már mindenképpen kell valami vektorszámítás. Először a geometria és a lineáris algebra néhány alapfogalmát, és azok kapcsolatát tisztázzuk.
Geometria, a skaláris és a vektoriális szorzat: A sík és a tér Euklideszi geometriáját alapvetően az r helyvektorok $|\mathsf{r}|$ hossza, vagyis a távolság határozza meg, a koszinusz tétel szerint a távolság segítségével két vektor szöge is értelmezhető. A vektorok lineáris teret alkotnak, és az $|\alpha\mathsf{r}| = |\alpha||\mathsf{r}|\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ és $|\mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2| \le |\mathsf{r}_1| + |\mathsf{r}_2|$ tulajdonságok mellett az $|\mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2|^2 + |\mathsf{r}_1 - \mathsf{r}_2|^2 = 2|\mathsf{r}_1|^2 + 2|\mathsf{r}_2|^2$ paralelogramma azonosság is teljesül. Két vektor skaláris szorzatát $\langle \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2\rangle \equiv \mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2 := |\mathsf{r}_1||\mathsf{r}_2| \cos\phi$ definiálja, ahol ϕ a r_1 és r_2 vektorok szöge. Vektorok $\mathsf{r}_1 \perp \mathsf{r}_2$ merőlegességét $\mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2 = 0$ jellemzi. A $|\mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2| \le |\mathsf{r}_1||\mathsf{r}_2|$ Cauchy egyenlőtlenség mindig igaz, és az $\mathsf{r}_1 \parallel \mathsf{r}_2$ módon jelölt párhuzamosság, vagyis $\mathsf{r}_1 = \lambda \mathsf{r}_2\,, \lambda \in \mathbb{R}$ az egyenlőség feltétele. Világos hogy $|\mathsf{r}|^2 = \mathsf{r} \cdot \mathsf{r} \ge 0$, $\mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2 = \mathsf{r}_2 \cdot \mathsf{r}_1$ és $\langle \alpha \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2\rangle = \alpha\langle \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2\rangle$ ha $\alpha \in \mathbb{R}$. Egyszerű ábra segítségével az is igazolható hogy $\langle \mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2, \mathsf{r}\rangle = \mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r} + \mathsf{r}_2 \cdot \mathsf{r}$, vagyis az Euklideszi tér lineáris algebrából ismert axiómái teljesülnek. [22]
Ha most i , j és k a tér páronként merőleges egységvektorai, és $\mathsf{r}_i = x_i\mathsf{i} + y_i\mathsf{j} + z_i\mathsf{j}$, $i = 1, 2$, akkor a skaláris szorzat disztributív tulajdonsága miatt $\mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, ami a geometriai kép alapján *független a bázis megválasztásától.* A $\mathsf{r} = x\mathsf{i} + y\mathsf{j} + z\mathsf{j}$ vektor (x, y, z) koordinátáit $x = \mathsf{r} \cdot \mathsf{i}$, $y = \mathsf{r} \cdot \mathsf{j}$, $z = \mathsf{r} \cdot \mathsf{k}$ határozzák meg.

Két vektor, r_1 és r_2 vektoriális szorzatát $\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2$ jelöli, aminek

$$|\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2| = |\mathsf{r}_1||\mathsf{r}_2||\sin\phi| = \sqrt{|\mathsf{r}_1||\mathsf{r}_2| - \langle \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2\rangle^2}$$

a hossza, ahol ϕ megint a vektorok szöge, továbbá r_1 , r_2 és $\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2$ jobbrendszert alkotnak. Ha tehát az $\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}$ bázis jobbrendszer, amit mindig felteszünk, akkor $\mathsf{i} \times \mathsf{j} = \mathsf{k}$, $\mathsf{j} \times \mathsf{k} = \mathsf{i}$ és $\mathsf{k} \times \mathsf{i} = \mathsf{j}$, [23] továbbá $\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2 = 0$ ha $\mathsf{r}_1 \parallel \mathsf{r}_2$, $\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2 = -\mathsf{r}_2 \times \mathsf{r}_1$, $(\alpha\mathsf{r}_1) \times \mathsf{r}_2 = \alpha(\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2)$ ha $\alpha \in \mathbb{R}$. Ügyes rajz segítségével szemléltehtő hogy a *vektoriális szorzás disztributív:* $(\mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2) \times \mathsf{r} = \mathsf{r}_1 \times \mathsf{r} + \mathsf{r}_2 \times \mathsf{r}$. ♡ Ez utóbbinál feltehetjük hogy r merőleges r_1 és r_2 síkjára, de ekkor $\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}$ és $\mathsf{r}_2 \times \mathsf{r}$ is ebben a síkban van, és az azonosság arra redukálódik hogy háromszög oldalvektorainak összege nulla. □

A vektoriális szorzás disztributív tulajdonságából $\mathsf{r}_i = x_i\mathsf{i} + y_i\mathsf{j} + z_i\mathsf{j}$ esetén az

$$\mathsf{r}_1 \times \mathsf{r}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\,\mathsf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\,\mathsf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\mathsf{k} \tag{9.1}$$

determináns formulát kapjuk; ez a *vektoszorzat algebrai definíciója.*

[22] A paralelogramma azonossságnak köszönhetōen a skaláris szorzatot a $4\mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2 = |\mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2|^2 - |\mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2|^2$ képlettel is definiálhattuk volna.

[23] A geometria alapfogalmai közül a távolság (hosszúság) és a szög nagysága az Euklideszi terek lineáris algebrai elméletének keretin belül is értelmezhetōek, és ez a fogalmi konstrukció a dimenziótól független. Ezzel szemben síkbeli szög elōjele, vagyis a tengely körüli forgatás iránya, valamint három térbeli vektor irányítása tisztán geometriai fogalom. Amikor a síkon, illetve a térben megadjuk az i, j, illetve az $\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}$ bázisvektorok sorrendjét, akkor határozzuk meg az irányítást. A síkon j a i vektorból pozitív irányú, az óramutató járásával ellentétes forgatással keletkezik. A térben a kiválasztott bázis, a priori, jobbrendszert alkot, és $\mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2, \mathsf{r}_3$ akkor jobbrendszer ha a $\langle \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2 \times \mathsf{r}_3\rangle$ determinánsuk pozitív. A tér irányíthatóságához kapcsolódik az elemi részecskék fizikájńak paritás fogalma is, aminek két értéke lehet. Magasabb dimenziós tér kettōnél többféleképpen irányítható mert nagyobb a bázisvektorok ciklikus permutációinak száma.

Érdemes észrevenni hogy ha $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ jobbrendszer, akkor az $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \times \mathsf{c}\rangle = \langle \mathsf{a} \times \mathsf{b}, \mathsf{c}\rangle$ vegyes szorzat az $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ vektorok által kifeszített *ferde hasáb (paralelepipedon) térfogata*. Innen a disztributív azonosság félreérthetetlenül következik mert

$$\langle(\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2) \times \mathsf{b}, \mathsf{c}\rangle = \langle \mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2, \mathsf{b} \times \mathsf{c}\rangle = \langle \mathsf{a}_1, \mathsf{b} \times \mathsf{c}\rangle + \langle \mathsf{a}_2, \mathsf{b} \times \mathsf{c}\rangle = \langle \mathsf{a}_1 \times \mathsf{b}, \mathsf{c}\rangle + \langle \mathsf{a}_2 \times \mathsf{b}, \mathsf{c}\rangle ,$$

és itt c tetszőleges, tehát $(\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2) \times \mathsf{b} = \mathsf{a}_1 \times \mathsf{b} + \mathsf{a}_2 \times \mathsf{b}$ azonosság, amiből fentebb (9.1) következett. Végül, a determinás formulával $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \times \mathsf{c}\rangle = \det A$, ahol A az $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ vektorokból alkotott mátrix, vagyis a *determináns a mátrixot alkotó vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata,* az előjel akkor pozitív ha a vektorok jobbrendszert alkotnak. Az a lineáris algebrából is ismert hogy szorzat determinánsa a determinánsok szorzata, tehát a bázis cseréjekor a mátrix megváltozik, de a determinánst nem.

A vektoriális szorzat *nem asszociatív,* ezt az $\mathsf{a}\times(\mathsf{b}\times\mathsf{c}) = (\mathsf{a}\cdot\mathsf{c})\,\mathsf{b}-(\mathsf{a}\cdot\mathsf{b})\,\mathsf{c}$ kifejtési tétel is mutatja; a fenti hármas szorzat mindig a hátsó kettő síkjában van. A tétel jó rajzon is szemléltethető, de a disztributív tulajdonságra hivatkozva elég a bázisvektorokra igazolni. Például, $\mathsf{i} \times (\mathsf{i} \times \mathsf{j}) = -\mathsf{j}$ míg $\mathsf{j} \times (\mathsf{i} \times \mathsf{j}) = \mathsf{i}$; a szorzótábla igen egyszerű.

Térgörbék: Az általános $\mathsf{r}(t) = x(t)\,\mathsf{i} + y(t)\,\mathsf{j} + z(t)\,\mathsf{k}$, $0 \le t < T \le +\infty$ paraméteres megadás a $z \equiv 0$ választással, a síkon is használható. Például, az r sugarú és (x_0, y_0) középpontú kör kerületén lévő pontokat legjobb az $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ módon megadni, ahol φ az $\mathsf{r} = (x, y)$ helyvektornak az x tengellyel bezárt, pozitív irányú elforgatás szerinti szöge. Az $\mathsf{r}(t) := (t\cos t, t\sin t)$ görbe spirális mozgást ír le, $\mathsf{r}(t) := \cos t\,\mathsf{i} + \sin t\,\mathsf{j} + t\,\mathsf{k}$ csavarvonal egyenlete. Az $y = f(x)$ síkgörbét az $\mathsf{r}(t) := t\,\mathsf{i} + f(t)\,\mathsf{j}$ módon reprodukálhatjuk.

Az $\mathsf{r}(t)$ görbe t paramétere gyakran az idő, tehát $\dot{\mathsf{r}}(t) := \dot{x}(t)\,\mathsf{i} + \dot{y}(t)\,\mathsf{j} + \dot{z}(t)\,\mathsf{k})$ a mozgás sebességvektora, $\ddot{\mathsf{r}}(t) := \ddot{x}(t)\,\mathsf{i} + \ddot{y}(t)\,\mathsf{j} + \ddot{z}(t)\,\mathsf{k})$ pedig a gyorsulása. Az így jellemzett mozgás dinamikai (kinematikai) jelenség, meg kell tőle különböztetni a mozgás pályályát, ami az $\mathsf{r}(t)$ pontok halmaza, maga a görbe. Ha $\dot{r} \neq 0$ akkor definiálható $\mathsf{t}(t) := \dot{\mathsf{r}}(t)/|\dot{\mathsf{r}}(t)|$, az érintő egységvektor, ami már csak a pálya irányításától függ, a görbe geometriai jellemzője. Hasonlóan, a t változásának iránya az $\mathsf{n} := \dot{\mathsf{t}}/|\dot{\mathsf{t}}|$ normális egységvektor. Például, az $x(t) := r\cos(\omega t)$, $y(t) := r\sin(\omega t)$, ω szögsebességgel történő egyenletes körmozgás pályája az r sugarú kör kerülete, sebességének nagysága $v = r\omega$. Ha $\omega > 0$, akkor a gyorsulás, éppúgy mint n, a kör középpontja felé mutat, nagysága $r\omega^2 = v^2/r$.

Görbület és a centripetális gyorsulás: Az $\dot{\mathsf{r}}$ sebességvektor érintő irányú komponense $v := \dot{\mathsf{r}} \cdot \mathsf{t}$, a pályamenti sebesség, tehát $\dot{\mathsf{r}} = v\mathsf{t}$. A pályamenti gyorsulás értéke nyilván $a := \ddot{\mathsf{r}} \cdot \mathsf{t}$. Nemcsak a fenti példában igaz hogy $a = \dot{v}$; a $\dot{v} = \ddot{\mathsf{r}} \cdot \mathsf{t} + \dot{\mathsf{r}} \cdot \dot{\mathsf{t}}$ egyenletben $\dot{\mathsf{r}} \cdot \dot{\mathsf{t}} = 0$, vagyis a *normális mindig merőleges a sebességre.* ♡ Valóban, $d|\dot{\mathsf{r}}|/dt = \ddot{\mathsf{r}} \cdot \mathsf{t}$, tehát $\ddot{\mathsf{r}} - a\mathsf{t} = |\dot{\mathsf{r}}|\,\dot{\mathsf{t}}$, vagyis $\mathsf{t} \cdot \dot{\mathsf{t}} = 0$. □ Ezzel a pályamenti sebesség és gyorsulás $a = \dot{v}$ kapcsolatát is igazoltuk, de a gyorsulás $\ddot{\mathsf{r}} = a\mathsf{t} + v\dot{\mathsf{t}}$ felbontásához is eljutottunk. Mivel n a $\dot{\mathsf{t}}$ irányú egységvektor, $\mathsf{n} \perp \mathsf{t}$ és $\ddot{\mathsf{r}} = a\mathsf{t} + a_\perp\mathsf{n}$, ahol $a_\perp := \ddot{\mathsf{r}} \cdot \mathsf{n}$ a normális irányú (centripetális) gyorsulás. Körpályán haladó tömegpontnál ez éppen v^2/ρ, ahol ρ a kör sugara, v a pályamenti sebesség. Másrészt az $\dot{\mathsf{r}}$ és $\ddot{\mathsf{r}}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen $|\dot{\mathsf{r}}||\ddot{\mathsf{r}} - a\mathsf{t}|$, tehát $a_\perp = gv^2$, ahol

$$g(t) := \frac{|\dot{\mathsf{r}}(t) \times \ddot{\mathsf{r}}(t)|}{|\dot{\mathsf{r}}(t)|^3} = \frac{|\ddot{\mathsf{r}} - (\ddot{\mathsf{r}} \cdot \mathsf{t})\mathsf{t}|}{|\dot{\mathsf{r}}|^2} = \frac{|\ddot{\mathsf{r}} - a\mathsf{t}|}{v^2} \tag{9.2}$$

a görbe görbülete a t időpontban. A szóhasználatot a centripetális gyorsulás $a_\perp = v^2/r$ képlete indokolja: a görbület a görbéhez illeszkedő kör sugarának reciproka. $y = f(x)$ alakú síkgörbe görbületét korábban a simulókör sugarának reciprokaként definiáltuk. A képletek ránézésre különböznek, de könnyű ellenőrizni hogy az eredmény ugyanaz. Az eddig elmondottak értelemszerűen alkalmazhatók mindegyik $\mathbb{R}^d$ térben, kivéve azt hogy vektorok vektoriális szorzata háromnál magasabb dimenziós térben már nem definiálható. Ettől függetlenül, (9.2) második és harmadik képlete ilyenkor is érvényes. Ahol a görbület nulla, ott a normálvektor nem definiálható. Zérus görbületű görbe nyilván csak egyenes lehet.

Síkban haladó görbék: ♡ Ha az $\mathsf{r}(t)$ görbe minden pontja ugyanazon a síkon van, akkor az $\mathsf{r}(t+h) - \mathsf{r}(t)$ különbségek, és így az $\dot{\mathsf{r}}$ sebességvektorok is mind párhuzamosak a síkkal. Innen az $\ddot{\mathsf{r}}$ gyorsulásvektorok párhuzamossága is következik, vagyis az $(\dot{\mathsf{r}}(t) \times \ddot{\mathsf{r}}(t)) \cdot (\ddot{\mathsf{r}}(t+h) - \ddot{\mathsf{r}}(t))$ vegyes szorzat nulla. Ezt az egyenletet h-val osztva, határátmenettel kapjuk az $(\dot{\mathsf{r}}(t) \times \ddot{\mathsf{r}}(t)) \cdot \dddot{\mathsf{r}}(t) = 0$ feltételt. □ A szóbanforgó sík normálvektora, $\mathsf{b} := \mathsf{t} \times \mathsf{n}$ mindig egységvektor mert $\mathsf{t} \perp \mathsf{n}$, és az általános esetben is definiálható: neve binormális egységvektor. Ha $\mathsf{r}(t)$ nem síkgörbe, akkor $\mathsf{b}(t)$ iránya sem állandó, irányváltozásának sebességét a

$$\tau := \frac{(\dot{\mathsf{r}}(t) \times \ddot{\mathsf{r}}(t)) \cdot \dddot{\mathsf{r}}(t)}{|\dot{\mathsf{r}}(t) \times \ddot{\mathsf{r}}(t)|^2} \tag{9.3}$$

torzió jellemzi. [24]

Görbe ívhossza: Az $[a, b]$ szakaszon a görbére rajzolt törtvonal (poligon) hosszával közelítjük, tehát az $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ felosztáshoz tartozó közelítő összeg

$$s_\gamma(a, b) := \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)^2 + \big(y(t_{k+1}) - y(t_k)\big)^2 + \big(y(t_{k+1}) - y(t_k)\big)^2}\,.$$

Ha $\dot{x}$, $\dot{y}$ és $\dot{z}$ folytonos, akkor $x(t_{k+1}) - x(t_k) = \dot{x}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \varepsilon_{1,k}\,(t_{k+1} - t_k)$, $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \dot{y}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \varepsilon_{2,k}\,(t_{k+1} - t_k)$ és $z(t_{k+1}) - z(t_k) = \dot{z}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \varepsilon_{3,k}\,(t_{k+1} - t_k)$, ahol az egyenletes folytonosság miatt $\max\{\varepsilon_{i,k}| : i = 1, 2, 3\,, k = 0, 1, ..., m - 1\} \to 0$ amint a felosztás finomsága nullához tart. Nem szabványos integrál közelítő összegről van szó, de a háromszög egyenlőtlenség szerint $|\mathsf{a}| - |\mathsf{b}| \le |\mathsf{a} + \mathsf{b}| \le |\mathsf{a}| + \|\mathsf{b}\|$, tehát $s_\gamma = \sum_{k=1}^{m-1} |\dot{\mathsf{r}}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + r_\gamma$, ahol

$$|r_\gamma| \le \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\varepsilon_{1,k}^2 + \varepsilon_{2,k}^2 + \varepsilon_{3,k}^2}\,(t_{k+1} - t_k) \to 0 \quad \text{amint } \max(t_{k+1} - t_k) \to 0\,.$$

Mindezeket összefoglalva látjuk hogy

$$s(a, b) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt = \int_a^b |\dot{\mathsf{r}}(t)|\,dt \tag{9.4}$$

a *görbe* (a, b) *szakaszának ívhossza,* más szóval a mozgó test által megtett út; síkgörbénél persze $\dot{z} \equiv 0$. Definíciója szerint az *ívhossz nem függ a paraméterezéstől*, ez helyettesítéses integrálással is belátható. Viszont figyelembe kell venni azt, hogy az $\mathsf{r} : [a, b] \mapsto \Gamma := \{\mathsf{r}(t) : a \le t \le b\}$ leképezés nem biztos hogy kölcsönösen egyértelmű; az $\mathsf{r}(t)$ pont a Γ halmazt többször is befuthatja, sőt időnként vissza is fordulhat. A fenti képlet alapján az $y = f(x)$, $f \in C^1[a, b]$ függvény gráfjának hossza az $[a, b]$ szakaszon

$$s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,. \tag{9.5}$$

Nemcsak (szakaszonként) folytonosan differenciálható görbéknek van ívhossza, ez a legegyszerűbb eset, többre nincs szükségünk. Vannak olyan folytonos görbék, melyek véges szakaszának is végtelen az ívhossza. Például, az $f(x) := x \sin(1/x)$ ha $x \in (0, 1)$, és $f(0) = 1$ függvény folytonos, sőt a $(0, 1]$ intervallumon folytonosan differenciálható, de a gráfja végtelen hosszú.

Ugyanazt a görbét mint geometriai alakzatot többféleképpen is megadhatjuk, kitüntett szerepet játszik az ívhossz szerinti természetes paraméterezés. Tegyük fel hogy $\mathsf{r}(t)$ mindegyik koordinátája folytonosan differenciálható, és az $s(t) := s(0, t)$ függvény szigorúan monoton. Jelölje $t = t(s)$ az s inverz függvényét, ekkor $\mathsf{r}(s) := \mathsf{r}(t(s))$ a görbe természetes paraméterezése. Ilyenkor a pályamenti sebesség $v = 1$, a pályamenti gyorsulás $a = 0$, továbbá $\dot{s}(t) = |\dot{\mathsf{r}}(t)|$, $t'(s) = 1/s$, $\mathsf{r}'(s) = \mathsf{t}(s)$ éppen az érintő egységvektor, végül $\mathsf{n} = \mathsf{r}''/|\mathsf{r}''|$ a normális, ami merőleges az r' érintőre. A görbület $g = |\mathsf{r}''(s)|$ definíciója is szemléletes, azt a korábban már említett felfogást

---

[24] Térgörbe három pontja általában síkot határoz meg, ennek határhelyzete a simulósík, ami nyilván az érintō és a normális síkja, feltéve hogy az utóbbi értelmes. ♡ A $h^{-3}\,(\mathsf{r}(t + h) - \mathsf{r}(t)) \times (\mathsf{r}(t + h) + \mathsf{r}(t - h) - 2\mathsf{r}(t))$ vektor merōleges az $\mathsf{r}(t)$, $\mathsf{r}(t + h)$ és $\mathsf{r}(t - h)$ pontok síkjára, ha van ilyen. Ha tehát a görbület nem nulla, akkor a $h \to 0$ határátmenet során látjuk hogy a síknak van határhelyzete, amit az $\mathsf{r}(t)$ pont, és a sík $\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)$ normálvektora határoznak meg. Ez a vektor mindig párhuzamos a binormálissal. □

tükrözi, hogy a görbület az érintő irányszögének az ívhossz szerinti változásának sebessége, vagyis

$$g = \lim_{\tau\to 0} \frac{\arcsin|\mathsf{t}(t+\tau)\times\mathsf{t}(t)|}{s(t,t+\tau)} = \lim_{\tau\to 0} \frac{|(\dot{\mathsf{r}}(t+\tau)-\dot{\mathsf{r}}(t))\times\dot{\mathsf{r}}(t)|}{\tau\,|\dot{\mathsf{r}}(t)||\dot{\mathsf{r}}(t+\tau)||\dot{\mathsf{r}}(t)|} = \frac{|\ddot{\mathsf{r}}\times\dot{\mathsf{r}}|}{|\dot{\mathsf{r}}|^3}\,. \tag{9.6}$$

A levezetés során az $\arcsin' 0 = 1$ és $\dot{\mathsf{r}}\times\dot{\mathsf{r}} = 0$ összefüggéseket használtuk fel. Persze az (9.2) egyenletből a $g = |\mathsf{r}''(s)|$ képlet egyszerű behelyettesítéssel is következik.

∗∗ **Állandó görbületű görbék:** Célszerű a természetes paraméter, az s ívhossz használata. Mivel $\mathsf{r}'(s)$ egységvektor, a síkon kordinátái $x'(s) = \cos\varphi(s)$ és $y'(s) = \sin\varphi(s)$ alakúak, φ egyenlőre ismeretlen. Viszont a $g = |\mathsf{r}''(s)| = |\varphi'(s)|$ görbület nem függ az s-től, tehát $\varphi'(s)$ is állandó, vagyis $\varphi(s) = \varphi_0 + gs$. A $g > 0$ esetben kör, a $g = 0$ esetben egyenes egyenletét kapjuk.

A tér geometriája bonyolultabb, az $|\mathsf{r}'| = 1$ egyenlet megoldása $z'(s) = \sin\alpha(s)$, $x'(s) = \cos\alpha(s)\,\cos\beta(s)$ és $y'(s) = \cos\alpha(s)\,\sin\beta(s)$, ahol α és β elvileg tetszőleges függvények. $|\mathsf{r}''| = g$ most az $\alpha'^2 + \beta'^2\cos^2\alpha = g^2$ egyenlethez vezet, amiből α megválasztása után β már meghatározható. Például, az $\alpha(s) =$const választással szabályos csavargörbéhez jutunk, ami körré fajul ha $\alpha = 0$. ∗∗

Integrálás görbe mentén: Az $\mathsf{r}(t) = x(t)\,\mathsf{i} + y(t)\,\mathsf{j} + z(t)\,\mathsf{k}$, térgörbe $t \in [a,b]$ szakaszán az $\mathsf{f}(\mathsf{r}) = \varphi(x,y,z)\,\mathsf{i} + \phi(x,y,z)\,\mathsf{j} + \psi(x,y,z)\,\mathsf{k}$ erőtér (vektormező) által végzett munka közelítő értéke a $\gamma := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ felosztásnál

$$W_\gamma(a,b) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{f}(\mathsf{r}(t_k))\cdot(\mathsf{r}(t_{k+1}) - \mathsf{r}(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x(t_k),y(t_k),z(t_k))\,(x(t_{k+1}) - x(t_k))$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} \phi(x(t_k),y(t_k),z(t_k))\,(y(t_{k+1}) - y(t_k)) + \sum_{k=0}^{n-1} \psi(x(t_k),y(t_k),z(t_k))\,(z(t_{k+1}) - z(t_k))$$

mert kis elmozdulásnál a munka az út és az elmozdulás irányába eső erő szorzatával közelíthető. Az ívhossz levezetésekor használt okoskodás megismétlésével, az integrálra áttérve kapjuk a

$$\begin{aligned} W(a,b) &= \int_0^t \mathsf{f}(\mathsf{r}(\tau))\cdot\dot{\mathsf{r}}(\tau)\,d\tau \qquad (9.7) \\ &= \int_0^t \left(\varphi(x(\tau),y(\tau),z(\tau))\dot{x}(\tau) + \phi(x(\tau),y(\tau),z(\tau))\dot{y}(\tau) + \psi(x(\tau),y(\tau),z(\tau))\dot{z}(\tau)\right)\,d\tau \end{aligned}$$

képletet; természetesen feltesszük hogy $\mathsf{F}(\mathsf{r})$ folytonos, $\mathsf{r}(t)$ pedig folytonosan differenciálható. Az eredmény nem függ a görbe paraméterezésétől, gyakran az s ívhossz segítségével írjuk fel. Mivel $|\dot{\mathsf{r}}|\,dt = ds$, (9.7)-ban $\mathsf{f}(\mathsf{r}(\tau))\cdot\dot{\mathsf{r}}(\tau)\,d\tau = \mathsf{f}(\mathsf{r})\cdot\mathsf{t}\,ds$, ahol t az érintő egységvektor.

Centrális erőtér munkája: Minden centrális erőtér $\mathsf{f}(\mathsf{r}) = -(1/r)U'(r)\mathsf{r}$ alakú, ahol $r := |\mathsf{r}|$ és $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ a tér potenciálja. Mivel $\dot{r} = d|\mathsf{r}(t)|/dt = (1/r)\dot{\mathsf{r}}\cdot\mathsf{r}$, Newton és Leibniz tételével kapjuk hogy centrális erőtér munkája

$$W(t) = -\int_0^t U'(r(\tau))\,\dot{r}(\tau)\,d\tau = -\int_0^t dU(r(\tau))/d\tau\,d\tau = U(|\mathsf{r}(0)|) - U(|\mathsf{r}(t)|)\,, \tag{9.8}$$

ami csak a görbe kezdő- és végpontjától függ. Gravitácós tér potenciálja az $U(r) := -\gamma/r$ Newton potenciál, $\gamma > 0$ a gravitációs állandó. Ez a számolás nem függ a tér dimenziójától, de meg kell jegyezni hogy kétdimenziós világban a Newton potenciál $U = \log|\mathsf{r}|$ volna, mert ez a $\Delta U = 0$ Laplace egyenlet megoldása.

9.2. **Az Euklideszi sík és tér.** Az $\mathbb{R}^2$ sík pontjait egyrészt (x,y) számpárokkal reprezentáljuk, ahol x és y a pont két koordinátája, másrészt a koordinátarendszer kezdőpontjából a pontba mutató $\mathsf{r} = x\mathsf{i} + y\mathsf{j}$ helyvektorral, ahol i és j a koordináta rendszer bázisvektorai. A kétfajta ábrázolás természetesen egyenértékű, mindkettőt használjuk $\mathsf{r} \equiv (x,y)$ figyelembevételével. A valódi, háromdimenziós térben ugyanez az $\mathsf{r} = x\mathsf{i} + y\mathsf{j} + z\mathsf{k} \equiv (x,y,z)$ alakban jelenik meg. Az $\mathsf{r}_1 = (x_1,y_1)$ és $\mathsf{r}_2 = (x_2,y_2)$ pontok távolsága $\rho(\mathsf{r}_1,\mathsf{r}_2) \equiv |\mathsf{r}_1 - \mathsf{r}_2| := \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$;

az $|\mathsf{r}_1 + \mathsf{r}_2| \le |\mathsf{r}_1| + |\mathsf{r}_2|$ háromszög egyenlőtlenség itt is kulcsszerepet játszik. Az $\mathsf{r}_1 = (x_1, y_1)$ és $\mathsf{r}_2 = (x_2, y_2)$ vektorok skaláris szorzata $\langle \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2 \rangle \equiv \mathsf{r}_1 \cdot \mathsf{r}_2 := x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Konvergens sorozatok a síkon: Az $(x_n, y_n) = \mathsf{r}_n$ pontsorozat konvergenciáját kétféleképpen is definiálhatjuk. Kézenfekvő azt mondani hogy $(x_n, y_n) \to (x, y)$ amint $n \to +\infty$, ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ egyszerre teljesül. Az sem vitatható hogy az $\mathsf{r}_n \to \mathsf{r}$ ha $\lim_{n\to\infty} |\mathsf{r}_n - \mathsf{r}| = 0$ definíció is indokolt. Szerencsére, amint az könnyen ellenőrizhető, a két definíció ekvivalens. Az $\mathsf{r}_0 = (x_0, y_0)$ pont $\delta > 0$ sugarú környezete a $K_\delta(\mathsf{r}_0) := \{\mathsf{r} : |\mathsf{r} - \mathsf{r}_0| < \delta\}$ nyilt körlap. Ennek segítségével az $\mathsf{r}_n \to \mathsf{r}$ reláció úgy is fogalmazható hogy r mindegyik környezete, véges számú kivétellel, a sorozat valamennyi pontját tartalmazza.

Folytonos függvények: Az $f(\mathsf{r})$ függvény az értelmezési tartomány r_0 pontjában folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ hogy $\mathsf{r} \in K_\delta(\mathsf{r}_0)$ esetén $|f(\mathsf{r}) - f(\mathsf{r}_0)| < \varepsilon$; a tényállást $f \in C(\mathsf{r}_0)$ jelöli, míg $f \in C(A)$ ha f az $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában folytonos. Ha $f \in C(\mathsf{r}_0)$ akkor $f(\mathsf{r}_n) \to f(\mathsf{r})$ amint $\mathsf{r}_n \to \mathsf{r}$, és ez a tulajdonság a folytonosság ekvivalens definícióját adja. Azt hogy a folytonosság kérdése összetettebb mint a számegyenesen, jól illusztrálja a következő három példa,

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \quad f_2(x,y) := \frac{x^2+y^2}{y-x}\,, \quad f_3(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\,. \tag{9.9}$$

Az első esetben az $y = \alpha x$ egyenesek mentén tartva a $(0,0)$ ponthoz azt látjuk, hogy a határérték, $\alpha/(1+\alpha^2)$ függ az α iránytangenstől. A második esetben ez a fajta határérték mindig 0, de az $y = x + \alpha x^2$ parabolák mentén, $x \to 0$ után a határérték $2/\alpha$, tehát f_2 határértéke sem létezik a $(0,0)$ pontban. Az f_3 függvény az $f(0,0) = 0$ konvencióval folytonossá tehető a $(0,0)$ helyen is, itt a deriváltakkal lesz probléma.

9.3. **Parciális deriváltak.** Ha az f valós függvény értelmezve van az (x,y) pont egy környezetében, akkor az f parciális deriváltjait a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\,, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \tag{9.10}$$

határértékek definiálják, ha azok léteznek; a $\partial_x f \equiv f'_x := \partial f/\partial x$ jelölések is szokásosak. Többváltozós függvény parciális deriváltjait ugyanígy definiáljuk és jelöljük. Az f függvény folytonosan differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha annak egy teljes környezetében értelmezve van, és $f'_x, f'_y \in C(x_0, y_0)$; ezt $f \in C^1(x,y)$ jelöli. A $\nabla f \equiv \mathrm{grad} f \equiv f' := (f'_x, f'_y)$ vektort az f gradiensének nevezzük. Hasznos tudnivaló hogy az origótól való $r = \sqrt{x^2+y^2}$ távolság gradiense $\nabla r = (x/r, y/r)$, az (x,y) pont felé mutató egységvektor, ami a $(0,0)$ pontban nem értelmezhető.

Az $f(\mathsf{r})$ függvénynek az $\mathsf{r}_0 = (x_0, y_0)$ pontban lokális maximuma, illetve lokális minimuma van, ha f értelmezve van r_0 egy környezetében, és ott $f(\mathsf{r}) \le f(\mathsf{r}_0)$, illetve $f(\mathsf{r}) \ge f(\mathsf{r}_0)$. Az egyváltozós eredmény alkalmazásával kapjuk a lokális szélsőérték szükséges feltételét: ha a parciális deriváltak léteznek, akkor a lokális szélsőérték helyén $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$, vagyis $\nabla f(\mathsf{r}_0) = 0$. [25] Ha f az (x_0, y_0) egy teljes környezetében folytonosan differenciálható, akkor *az $f(x_0,y_0)$ érték, és az f'_x, f'_y parciális deriváltak együttesen meghatározzák f-et* ebben a környezetben. Ennek belátásához csak a Newton - Leibniz formulát kell egyszer az x tengely, majd az y tengely irányában alkalmazni:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} f'_x(u,y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} f'_y(x,v)\,dv\,. \tag{9.11}$$

Érdekes az $f(x,y) := \mathrm{arctg}(y/x)$ példa, f az $\mathsf{r} := (x,y)$ helyvektor irányszöge. Itt $f'_x = -y/(x^2 + y^2)$, $f'_y = x/(x^2+y^2)$, de ha az integráláskor átlépjük az $x = 0$ egyenest, akkor π nagyságú ugrást tapasztalunk.

[25] Óvatosságra int Peano $f(x,y) := (y^2 - x)(y^2 - 2x)$ példája. $\nabla f(0,0) = 0$, sőt ennek a függvénynek a $(0,0)$ pontban mindegyik $x = \alpha t$, $y = \beta t$ egyenes mentén lokális minimuma van, de $(0,0)$ minden környezetében pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz.

A második és további parciális deriváltakat a korábbiak deriválásával képezzük, például

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} := \partial_x\partial_x f(x,y) \equiv f''_{xx}(x,y)\,, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} := \partial_x\partial_y f(x,y) \equiv f''_{yx}(x,y)\,. \tag{9.12}$$

Az $f \in C^2(x,y)$ reláció arra utal hogy f második parciális deriváltjai mind folytonosak az (x,y) pontban. Young tétele szerint a ∂_x és a ∂_y operátorok felcserélhetőek.

Tétel 9.1. *Ha* $f \in C^2(x,y)$, *akkor* $\partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y)$.

Bizony: Legyen $g(y) := f(x+h,y) - f(x,y)$. Lagrange tétele szerint

$$\begin{aligned} f(x+h,y+h) - f(x,y+h) - f(x+h,y) + f(x,y) &= g(y+h) - g(y) \\ = g'(\eta)h = \left(f'_y(x+h,\eta) - f'_y(x,\eta)\right)h &= f''_{yx}(\xi,\eta)\,h^2\,. \end{aligned}$$

A $\tilde{g}(x) := f(x,y+h) - f(x,y)$ függvénnyel ugyanígy $f''_{yx}(\xi,\eta)\,h^2 = f''_{xy}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\,h^2$ adódik, amiből egyszerűsítés után a $h \to 0$ határátmenettel $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ következik. □

Ezt a nevezetes tételt úgy is kimondhatjuk hogy a folytonosan differenciálható f függvény második parciális deriváltjaiból alkotott

$$\nabla^2 f \equiv f'' := \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

Hesse mátrix szimmetrikus. A Hesse mátrix nyoma a $\Delta f := f''_{xx} + f''_{yy}$ Laplace operátor. A (9.9) tanpéldák közül az f_3 függvény egyszer folytonosan differenciálható a $(0,0)$ pontban is, de kétszer már nem, és így nem csoda hogy $\partial_x\partial_y f_3(0,0) \neq \partial_y\partial_x f_3(0,0)$.

9.4. **Differenciálható függvények.** Abból hogy egy függvény egy pontban parciálisan differenciálható, még a folytonossága sem következik, tartalmasabb a következő fogalom. Az f függvény differenciálható ($f \in D^1(x_0,y_0)$) az (x_0,y_0) pontban, ha annak egy teljes környezetében értelmezve van, és vannak olyan a_1 és a_2 számok, hogy érvényes az

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a_1\,(x-x_0) + a_2\,(y-y_0) + \varepsilon_0(x,y)\,\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tag{9.14}$$

lineáris közelítés, vagyis $\varepsilon_0(x,y) \to 0$ amint $(x,y) \to (x_0,y_0)$; a_1 , a_2 és ε_0 a rögzített $\mathsf{r}_0 = (x_0,y_0)$ helytől is függ. Az $y = y_0$, illetve $x = x_0$ speciális esetek mutatják hogy differenciálható függvénynek léteznek a parciális deriváltjai: $f'_x(x_0,y_0) = a_1$, $f'_y(x_0,y_0) = a_2$. A vektoros jelölést használva (9.14) az $f(\mathsf{r}) = f(\mathsf{r}_0) + \nabla f(\mathsf{r}_0)\cdot(\mathsf{r}-\mathsf{r}_0) + o(|\mathsf{r}-\mathsf{r}_0|)$ alakot ölti. A $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy \equiv \nabla f\cdot d\mathsf{r}$ lineáris formát az f (első) differenciáljának nevezzük.

Tétel 9.2. *Ha* $f \in D^1(x_0,y_0)$, *akkor* $a_1 = f'_x(x_0,y_0)$ *és* $a_2 = f'_y(x_0,y_0)$. *Folytonosan differenciálható függvény differenciálható, vagyis* $C^1(x_0,y_0) \subset D^1(x_0,y_0)$.

Bizony: Az első, nyilvánvaló állítást már tisztáztuk. Lagrange tétele szerint

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \\ &= f'_x(\xi,y)(x-x_0) + f'_y(x_0,\eta)(y-y_0) \\ &= f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1\,(x-x_0) + \varepsilon_2\,(y-y_0)\,, \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_1 := f'_x(\xi,y) - f'_x(x_0,y_0) \to 0$ és $\varepsilon_2 := f'_y(x_0,\eta) - f'_y(x_0,y_0) \to 0$ amint $(x,y) \to (x_0,y_0)$, tehát $|\varepsilon_1|\,|x-x_0| + |\varepsilon_2|\,|y-y_0| = o(|\mathsf{r}-\mathsf{r}_0|)$. □

Az érintősík, konvex függvények: Az $f \in D^1(x_0,y_0)$ *függvény érintősíkja az* (x_0,y_0) *pontban* a $z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ egyenletű sík. Látható hogy az érintősík normálvektora az $\mathsf{n} := -f'_x(x_0,y_0)\mathsf{i} - f'_y(x_0,y_0)\mathsf{j} + \mathsf{k}$ iránnyal párhuzamos; n nem egységvektor. Érdemes meggondolni hogy az érintősík azoknak a síkoknak a határhelyzete, amelyeket a $z = f(x,y)$ felület három egymáshoz közelítő pontja határoz meg. Ugyanis, a parciális deriváltak az $\mathsf{r}_1(t) := (x_0+t)\mathsf{i} + y_0\mathsf{j} + f(x_0+t,y_0)\mathsf{k}$ és $\mathsf{r}_2(t) := x_0\mathsf{i} + (y_0+t)\mathsf{j} + f(x_0,y_0+t)\mathsf{k}$ térgörbék érintője harmadik komponenseiként is származtathatóak: $\dot{\mathsf{r}}_1(0) = \mathsf{i} + f'_x(x_0,y_0)\mathsf{k}$, $\dot{\mathsf{r}}_2(0) = \mathsf{j} + f'_y(x_0,y_0)\mathsf{k}$.

Ez a két vektor nyilván párhuzamos az érintősíkkal, tehát a vektoriális szorzatuk párhuzamos a normálvektorral. A számolás eredménye éppen a fenti n vektor.

A $C \subset \mathbb{R}^2$ halmaz konvex ha két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is mindig tartalmazza. A C konvex halmazon értelmezett $f \in D^1(C)$ függvény konvex ha soha nem kerül az érintősíkja alá, vagyis $f(\mathsf{r}) \geq f(\mathsf{r}_0) + \nabla f(\mathsf{r}_0) \cdot (\mathsf{r} - \mathsf{r}_0)\ \forall\, \mathsf{r}, \mathsf{r}_0 \in C$. Legyen $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ és $\bar{\mathsf{r}} := p_1\mathsf{r}_1 + p_2\mathsf{r}_2 + \cdots + p_n\mathsf{r}_n$, ahol $p_k > 0$ és $\mathsf{r}_k \in C$. Az $f : C \mapsto \mathbb{R}$ konvex függvényre vonatkozó $f(\bar{\mathsf{r}}) \leq p_1 f(\mathsf{r}_1) + p_2 f(\mathsf{r}_2) + \cdots + p_n f(\mathsf{r}_n)$ Jensen egyenlőtlenség ugyanúgy igazolható mint az egyváltozós esetben.

A láncszabály esetei: Differenciálható függvényekből összetett függvény szintén differenciálható, a differenciálok számolását meghatározó láncszabály alkalmazását megkönnyíti a df formák használata. A láncszabálynak több változata van, a legegyszerűbb a $g(x,y) = h(f(x,y))$ eset. A $dg = h'(f)\,df = h'(f)\,f'_x\,dx + h'(f)\,f'_y\,dy$ séma nyomán megmutatjuk hogy ha $f \in D^1(x,y)$, és $h \in D^1(z)$ a $z := f(x,y)$ helyen, akkor $g \in D^1(x,y)$, végül

$$g'_x(x,y) = h'(f(x,y))f'_x(x,y)\,, \quad \text{és } g'_y(x,y) = h'(f(x,y))f'_y(x,y). \tag{9.15}$$

A parciális deriváltak azonosítása nyilvánvaló, $g \in D^1(x,y)$ bizonyítása sem nehéz. Mivel g változása két helyről jön, ha $w := f(u,v)$ akkor

$$\begin{aligned} g(u,v) - g(x,y) &= h(w) - h(z) = h'(z)(w-z) + \varepsilon_h\,|w-z| \\ &= h'(z)\left(f'_x(x,y)(u-x) + f'_y(x,y)(v-y) + \varepsilon_f\,|\tilde{\mathsf{r}} - \mathsf{r}|\right) + \varepsilon_h\,|w-z|\,, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{\mathsf{r}} = (u,v)$, $\mathsf{r} = (x,y)$. $f \in D^1(\mathsf{r})$ miatt van olyan $K = K(\mathsf{r})$ szám hogy $|f(u,v) - f(x,y)| \leq K|\tilde{\mathsf{r}} - \mathsf{r}|$ a r pont egy környezetében, tehát $\varepsilon_h \to 0$ amint $\tilde{\mathsf{r}} \to \mathsf{r}$, vagyis $g \in D^1(p)$.

A következő láncszabály a $g(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$ helyettesítésre vonatkozik. Ha $\varphi, \psi \in D^1(t)$ és $f \in D^1(\mathsf{r})$ a $\mathsf{r} = (x,y) := (\varphi(t), \psi(t))$ helyen, akkor $g \in D^1(t)$, és $dg = f'_x\,d\varphi + f'_y\,d\psi = f'_x\,\dot\varphi\,dt + f'_y\,\dot\psi\,dt$, vagyis

$$g'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\dot\varphi(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\dot\psi(t)\,. \tag{9.16}$$

Ennek bizonyítása is a szokásos sémát követi,

$$\begin{aligned} g(\tau) - g(t) &= f(\varphi(\tau), \psi(\tau)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \\ &= f'_x(x,y)(u-x) + f'_y(x,y)(v-y) + \varepsilon_f\,|\tilde{\mathsf{r}} - \mathsf{r}|\,, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{\mathsf{r}} = (u,v) := (\varphi(\tau), \psi(\tau))$, és $\varepsilon_f \to 0$ amint $\tilde{\mathsf{r}} \to \mathsf{r}$. Mivel $u - x = \dot\varphi(t)(\tau - t) + \varepsilon_\varphi\,|\tau - t|$ és $v - y = \dot\psi(t)(\tau - t) + \varepsilon_\psi\,|\tau - t|$, ahol $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi \to 0$ amikor $\tau \to t$, továbbá $\tilde{\mathsf{r}} \to \mathsf{r}$ amint $\tau \to t$, látjuk hogy $g \in D^1(t)$.

A következő szabály speciális esetként tartalmazza az előző kettőt, bizonyítása lényegében ugyanaz. Az $x = \varphi(u,v)$ és $y = \psi(u,v)$ helyettesítéssel kapott $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ összetett függvény differenciálja

$$\begin{aligned} dg &= f'_x\,d\varphi + f'_y\,d\psi = f'_x\,\varphi'_u\,du + f'_x\,\varphi'_v\,dv + f'_y\,\psi'_u\,du + f'_y\,\psi'_v\,dv \\ &= (f'_x\,\varphi'_u + f'_y\,\psi'_u)\,du + (f'_x\,\varphi'_v + f'_y\,\psi'_v)\,dv\,, \end{aligned} \tag{9.17}$$

ha tehát $\varphi, \psi \in D^1(u,v)$ és $f \in D^1(x,y)$, $(x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$, akkor $g \in D^1(u,v)$, és

$$\begin{aligned} g'_u(u,v) &= f'(x,y)\,\varphi'_u(u,v) + f'_y(x,y)\,\psi'_u(u,v)\,, \\ g'_v(u,v) &= f'(x,y)\,\varphi'_v(u,v) + f'_y(x,y)\,\psi'_u(u,v)\,. \end{aligned} \tag{9.18}$$

A láncszabály legáltalánosabb alakját később tárgyaljuk.

Például, a sík φ szöggel történő elforgatását az $u = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $v = x\sin\varphi + y\cos\varphi$ *ortogonális transzformáció* adja, aminek $x = u\cos\varphi + v\sin\varphi$, $y = -u\sin\varphi + v\cos\varphi$ az inverze. Az $f(x,y)$ függvény képe $g(u,v) := f(u\cos\varphi + v\sin\varphi, -u\sin\varphi + v\cos\varphi)$, és a parciális deriváltak transzformációs szabálya: $f'_x = g'_u\cos\varphi + g'_v\sin\varphi$, $f'_y = -g'_u\sin\varphi + g'_v\cos\varphi$, ugyanaz mint a változóké. Δf számolásakor g''_{uv} együtthatója nulla, tehát

$$\Delta f(x,y) = g''_{uu}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + g''_{vv}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \Delta g(u,v)\,, \tag{9.19}$$

vagyis a Laplace operátor a forgatásokkal szemben invariáns. A Hesse mátrix transzformációs képlete $\nabla^2 f = U_\varphi \nabla^2 g U_\varphi^*$, ahol U_φ az $(x,y) \to (u,v)$ forgatás mátrixa.

Az $r(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ függvény parciális deriváltjai $r'_x = x/r$ és $r'_y = y/r$, $r''_{xx} = 1/r - x^2/r^3$ és $r''_{yy} = 1/r - y^2/r^3$, ha tehát $f(x,y) = \phi(r)$ *radiális függvény* akkor $\Delta f = \phi''(r) + \phi'(r)/r = 0$ teljesül a $\phi(r) = \log(1/r)$ esetben. Nem kevésbé érdekes a $\varphi(x,y) := \operatorname{arctg}(y/x)$ függvény, ami az $\mathsf{r} = (x,y)$ helyvektor *irányszöge.* Most $\varphi'_x = -y/r$ és $\varphi'_y = x/r$, tehát ∇r és $\nabla\varphi$ egymásra merőleges egységvektorok. Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ poláris transzformációnál a $g(r,\varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ jelöléssel

$$\Delta f(x,y) = \phi''_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\,g'_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\,g''_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial g(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} \tag{9.20}$$

a Laplace operátor poláris alakja.

Iránymenti deriváltak: Legyen $g(t) := f(\mathsf{r}_0 + t\mathsf{e})$, ahol $\mathsf{e} = (\cos\phi, \sin\phi)$ a ϕ irányszögű egységvektor. Ha $f \in D^1(\mathsf{r}_0)$, $\mathsf{r}_0 = (x_0, y_0)$, akkor a (9.16) láncszabály egyszerű következménye

$$\dot g(0) = \nabla f(\mathsf{r}_0) \cdot \mathsf{e} = f'_x(x_0,y_0)\cos\phi + f'_y(x_0,y_0)\sin\phi\,; \tag{9.21}$$

a jobboldalon álló $\nabla_{\mathsf{e}} f(\mathsf{r}_0) := \nabla f(\mathsf{r}_0) \cdot \mathsf{e}$ mennyiség az f e-irányú iránymenti deriváltja a r_0 pontban. A parciális deriváltakat az $\mathsf{e} = \mathsf{i}$, illetve $\mathsf{e} = \mathsf{j}$ esetben kapjuk: $f'_x = \nabla_{\mathsf{i}} f$ és $f'_y = \nabla_{\mathsf{j}} f$. Látható hogy az iránymenti derivált akkor maximális ha $\mathsf{e} \parallel \nabla f$, vagyis *a gradiens a függvény leggyorsabb növekedésének iránya.*

Konzervatív erőtér: Az $\mathsf{F} = (g(x,y), h(x,y))$ vektormező akkor konzervatív ha van olyan U potenciál hogy valamely $G \subset \mathbb{R}^2$ tartományban $g(x,y) = -U'_x(x,y)$ és $h(x,y) = -U'_y(x,y)$. Az előjel konvenció terméke: az erőtér a potenciál legyorsabb csökkenésének irányába mutat. *Konzervatív erőtér munkája az úttól független, és a potenciál csökkenésével egyenlő.* Pontosabban, ha az $\mathsf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t_1 \le t \le t_2$ szakaszonként folytonosan differenciálható görbe az $(x_1,y_1) = \mathsf{r}(t_1)$ és $(x_2,y_2) = \mathsf{r}(t_2)$ pontokat köti össze, akkor ezen a szakaszon az erőtér munkája

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{F}(\mathsf{r}(t)) \cdot \dot{\mathsf{r}}(t)\,dt = U(x_1,y_1) - U(x_2,y_2)\,. \tag{9.22}$$

Valóban, részletesen kiírva látjuk hogy

$$W = -\int_{t_1}^{t_2} \left(U'_x(x(t),y(t))\dot x(t) + U'_y(x(t),y(t))\dot y(t)\right)\,dt\,,$$

és a láncszabály szerint az integrandus éppen $-U(x(t),y(t))$ idő szerinti deriváltja, tehát (9.22) NL következménye. Ha tehát egy zárt görbe olyan tartományban halad ahol az erőtérnek van potenciálja, akkor a görbe mentén számolt munka mindig nulla.

Potenciál létezése: Young tétele szerint minden folytonosan differenciálható (g,h) konzervatív erőtér eleget tesz a $g'_y = h'_x = -U''_{x,y}$ feltételnek, és ez a szimmetria tulajdonság jellemzi is őket.

Tétel 9.3. *Ha g és h folytonosan differenciálható az (x_0,y_0) pont egy környezetében, és ott $g'_y = h'_x$, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ számhoz pontosan egy olyan f függvény van hogy a környezetben $f'_x = g$, $f'_y = h$, és $f(x_0,y_0) = c$.*

Bizony: (9.11) szellemében legyen

$$f(x,y) := c + \int_{x_0}^{x} g(u,y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} h(x,v)\,dv\,.$$

Az integrálok differenciálása után látható hogy

$$f'_x(x,y) = g(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} h'_x(x,v)\,dv = g(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} g'_y(x,v)\,dv = g(x,y)\,;$$

$f'_y = h$ igazolása hasonló, az egyértelműség (9.11) következménye. □

Az így meghatározott $U(x,y) = -f(x,y)$ függvény a $\mathsf{F} = (g,h)$ vektormező (erőtér) potenciálja: $\mathsf{F} = -\nabla U$. Tanulságosak az

$$\mathsf{F}_1 := (x/r, y/r)\,, \quad \mathsf{F}_2 := (x/r^2, y/r^2)\,, \quad \mathsf{F}_3 := (-y/r^2, x/r^2)$$

példák, ahol $r := \sqrt{x^2+y^2}$. Az origóban egyik mező sem folytonos, azon kívül mindhárom eleget tesz a tétel feltételének, és potenciáljuk is van. Rendre $U_1(x,y) := -r$ és $U_2(x,y) = \log(1/r)$ ha $r \neq 0$, míg $U_3(x,y) := -\mathrm{arctg}(y/x)$ csak az $x \neq 0$ esetben van definiálva, de itt sok más lehetőség is van. Például, a $(0,1)$ pontból kiindulva, az $x = 0\,, y \leq 0$ félegyenes kivételével

$$U_3^*(x,y) := \int_0^x \frac{du}{1+u^2} - \int_1^y \frac{x\,dv}{x^2+v^2} = \mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arctg}(y/x) + \mathrm{arctg}(1/x)$$

adódik; $U_3^*(0+0,y) = U_3^*(0-0,y) = 0$ ha $y > 0$, $U_3^*(0+0,y) = \pi$, de $= U_3^*(0-0,y) = -\pi$ ha $y \leq 0$.

A dolog lényegét jól mutatja a bizonyítás következő változata. A (g,h) erőtér potenciálját az $\mathsf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $x(t) := x_0 + (x-x_0)t$, $y(t) := y_0 + (y-y_0)t$ egyenes mentén végzett munkával számolhatjuk. Mivel $\dot{\mathsf{r}} = \mathsf{r} - \mathsf{r}_0 = (x-x_0, y-y_0)$,

$$W(x,y) := \int_0^1 \left(g(x(t),y(t))(x-x_0) + h(x(t),y(t))(y-y_0)\right)\,dt$$

a munka. A differenciálást megint az integrál mögött végezve

$$W_x'(x,y) = \int_0^1 \left(g(x(t),y(t) + g_x'(x(t),y(t))(x-x_0)t + h_x'(x(t),y(t))(y-y_0)t\right)\,dt$$

adódik, és itt $h_x' = g_y'$ Young feltétel miatt az integrandus második és harmadik tagjának összege éppen $t(d/dt)g(x(t),y(t))$. A felkínálkozó parciális integrálás után kapjuk hogy $W_x' = g$, $W_y' = h$ ugyanígy jön ki.

Ez a konstrukció miden olyan $G \subset \mathbb{R}^2$ nyilt tartományban megadja a potenciált ahol az erőtér folytonosan differenciálható, és van olyan $\mathsf{r}_0 \in G$ pont hogy a $[\mathsf{r}_0, \mathsf{r}]$ szakasz mindig G-ben halad hacsak $\mathsf{r} \in G$; ezek a csillagszerű tartományok. A fenti példák közül az első erőtér olyan görbék mentén is integrálható, amelyek átmennek az origón, a potenciál mindenhol folytonos, de az origóban nem differenciálható. Az F_2 tér az origón áthaladó görbék mentén nem integrálható, az (9.22) NL formula ezzel a korlátozással érvényes. Ezzel szemben F_3 potenciálja csak "felhasított" síkon definiálható, és NL csak ennek belsejében alkalmazható.

9.5. **Lagrange tételei és következményeik.** Az (9.16) szabályt a $\varphi(t) := x_0 + (x-x_0)\,t$ és $\psi(t) := y_0 + (y-y_0)\,t$ függvényekkel alkalmazva kapjuk Lagrange első tételét.

Tétel 9.4. *Ha f differenciálható az $\mathsf{r}_0 = (x_0,y_0)$ és $\mathsf{r} = (x,y)$ szakasz belső pontjaiban, és a végpontokban is folytonos, akkor*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x'(\xi,\eta)(x-x_0) + f_y'(\xi,\eta)(y-y_0)\,,$$

ahol (ξ,η) az (x_0,y_0) és (x,y) pontokat összekötő szakasz belső pontja; röviden $f(\mathsf{r}) = f(\mathsf{r}_0) + \nabla f(\mathsf{q}) \cdot (\mathsf{r} - \mathsf{r}_0)$, ahol $\mathsf{q} := (\xi,\eta)$.

Bizony: $g(0) = f(x_0,y_0)$, $g(1) = f(x,y)$, továbbá

$$\dot{g}(t) = f_x'(\varphi(t),\psi(t))(x-x_0) + f_y'(\varphi(t),\psi(t))(y-y_0)\,.$$

Az egyváltozós tétel szerint $g(1) = g(0) + g'(\tau)(1-0)$, vagyis $\xi := x_0 + (x-x_0)\,\tau$, $\eta := y_0 + (y-y_0)\,\tau$. □

Ugyanígy kapjuk Lagrange második maradéktagját.

Tétel 9.5. *Ha f kétszer differenciálható az $\mathsf{r}_0 = (x_0,y_0)$ és $\mathsf{r} = (x,y)$ pontokat összkötő egyenes mentén, akkor*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}''(\xi,\eta)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}''(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}''(\xi,\eta)(y-y_0)^2\right)\,, \end{aligned}$$

ahol (ξ,η) *az* (x_0,y_0) *és* (x,y) *pontokat összekötő szakasz pontja. A vektoros írásmóddal*

$$f(\mathsf{r}) = f(\mathsf{r}_0) + \langle \nabla f(\mathsf{r}_0), \mathsf{r}-\mathsf{r}_0\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathsf{r}-\mathsf{r}_0, \nabla^2 f(\mathsf{q})(\mathsf{r}-\mathsf{r}_0)\rangle\,,$$

ahol $\mathsf{q} = (\xi,\eta)$ *és* $\nabla^2 f$ *a Hesse mátrix.*

Bizony: Az előző tétel jelöléseit használva, csak azt kell meggondolni hogy

$$\ddot g(t) = f''_{xx}(\varphi,\psi)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(\varphi,\psi)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(\varphi,\psi)(y-y_0)^2\,,$$

ahol az f'' parciális deriváltak argumentuma $\mathsf{r}_0 + t\,(\mathsf{r}-\mathsf{r}_0)$. □

A tételben szereplő $d^2 f(x_0,y_0) := f''_{xx}(x_0,y_0)\,dx\,dx + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{yy}(x_0,y_0)\,dy\,dy$ kvadratikus alak az f kétszer folytonosan differenciálható függvény második differenciálja az (x_0,y_0) pontban. A $Q(u,v) := au^2 + 2buv + cv^2$ kvadratikus alak (szigorúan) pozitív definit, amit $Q>0$ jelöl, illetve (szigorúan) negatív definit, amit $Q<0$ jelöl, ha $Q(u,v)>0$, illetve $Q(u,v)<0$ $\forall u,v\in\mathbb{R}$, kivéve az $u=v=0$ triviális esetet. Szemidefinit alakról akkor beszélünk ha csak $Q\ge 0$, illetve $Q\le 0$ ismert. Ha Q pozitív és negatív értéket egyaránt felvehet, akkor Q indefinit. Ugyanezeket mondjuk és írjuk a Q-t meghatározó szimmetrikus mátrixról is. Tudjuk hogy $Q>0$ acsak $a,c>0$ és $ac>b^2$; $Q<0$ feltétele $a,c<0$ és $ac>b^2$. Az első esetben a mátrixnak két pozitív, a másodikban két negatív sajátértéke van.

Lagrange második tételének első következménye a konvexitás elégséges feltétele. Ha $A\subset\mathbb{R}^2$ konvex, $f\in D^2(A)$ és $\nabla^2 f$ *pozitív szemidefinit az* A *halmaz minden pontjában, akkor* f *konvex.* Második a lokális szélsőérték elégséges feltétele: Ha $\nabla f(\mathsf{r}_0)=0$, $f\in C^2(\mathsf{r}_0)$ és $\nabla^2 f(\mathsf{r}_0)$ pozitív definit, akkor r_0 szigoú lokális minimum helye. Ha viszont $\nabla^2 f(\mathsf{r}_0)$ negatív definit, akkor f-nek szigorú lokális maximuma van. A bizonyításhoz csak azt kell meggondolni hogy a második deriváltak folytonossága miatt úgy f''_{xx}, mint az $f''_{xx}f''_{yy} - f''_x y f''_x y$ determináns előjele az (x_0,y_0) az (x_0,y_0) pont egy teljes környezetében ugyanaz, tehát a 9.5. Tétel alkalmazható.

** **A legkisebb négyzetek módszere:** Amikor az $\eta = a + b\xi$ (fizikai) törvény konstansait az $\mathsf{x} = (x_1,x_2,...,x_n)$ mérési pontokhoz tartozó $\mathsf{y} = (y_1,y_2,...,y_n)$ értékek alapján kell meghatározni, kézenfekvő vonalzót illeszteni az (x_k,y_k) pontokhoz. Ennél pontosabb a következő numerikus eljárás. Előfordul hogy az egyes mérések nem egyformán pontosak, ezt $w_1,w_2,...,w_n$ súlyok szerint vesszük figyelembe, ahol $w_k>0$ és $w_1+w_2+\cdots+w_n = 1$. A feladat a $Q(a,b) := \sum_{k=1}^n w_k\,(y_k - bx_k - a)^2$ négyzetes veszteség minimalizálása. Q konvex függvények összege, tehát maga is konvex; elvi probléma nincs, csak ügyesen kell számolni. Ha b értékét ismernénk, akkor alkalmazhatnánk Steiner tételét:

$$\sum_{k=1}^n w_k\,(z_k-a)^2 = \sum_{k=1}^n w_k\,(z_k-\bar{\mathsf{z}})^2 + (\bar{\mathsf{z}}-a)^2\,,\quad \bar{\mathsf{z}} := \sum_{k=1}^n w_k\,z_k\,. \tag{9.23}$$

Eszerint a z_k számokat *legjobban közelítő konstans a súlyozott számtani közepük,* tehát az optimális esetben $a = \bar{\mathsf{y}} - b\bar{\mathsf{x}}$. Ezzel a feladat $\bar Q(b) := \sum_{k=1}^n w_k\,(\tilde y_k - b\tilde x_k)^2$ minimalizálására redukálódott, ahol $\tilde y_k = y_k - \bar{\mathsf{y}}$ és $\tilde x_k = x_k - \bar{\mathsf{x}}$. A megoldás: $b = C(\mathsf{x},\mathsf{y})/\sigma^2(\mathsf{x})$, ahol

$$C(\mathsf{x},\mathsf{y}) := \sum_{k=1}^n w_k\,(y_k-\bar{\mathsf{y}})(x_k-\bar{\mathsf{x}})\,,\quad \sigma^2(\mathsf{x}) := \sum_{k=1}^n w_k\,(x_k-\bar{\mathsf{x}})^2\,, \tag{9.24}$$

végül $a = \bar{\mathsf{y}} - C(\mathsf{x},\mathsf{y})\sigma^{-2}(\mathsf{x})\,\bar{\mathsf{x}}$. [26] **

---

[26] A matematikai statisztikában a módszer neve lineáris regresszió, és az eredményt gyakran az $(\eta-\bar{\mathsf{y}})/\mathsf{i}(\mathsf{y}) \approx R(\mathsf{x},\mathsf{y})(\xi-\bar{\mathsf{x}})/\mathsf{i}(\mathsf{x})$ formában írják fel, ahol $R(\mathsf{x},\mathsf{y}) := C(\mathsf{x},\mathsf{y})\mathsf{i}^{-1}(\mathsf{x})\mathsf{i}^{-1}(\mathsf{y})$ a (becsült) regressziós együttható. Az eljárás a *normális eloszláshoz* kapcsolódik, és jelentōs szakmai háttere van. A feladat úgy is megfogalmazható, hogy keressük az y vektornak az x és $\mathsf{e} = (1,1,...,1)$ vektorok által kifeszített síkra esō vetületét olyankor, amikor $|\mathsf{z}|_w^2 := \sum w_k\,z_k^2$ definiálja a z vektor hosszát. Valóban, $Q(a,b) = |\mathsf{y} - b\mathsf{x} - a\mathsf{e}|_w^2$.

9.6. **Feltételes szélsőérték, implicit függvények.** Tegyük fel hogy az f és g függvények folytonosan differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban, és $g(x_0, y_0) = 0$. Arra keresünk választ, hogy mikor van f-nek lokális szélsőértéke az (x_0, y_0) pontban a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett, vagyis $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (illetve $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) az (x_0, y_0) egy környezetének minden olyan pontjában, ahol $g(x, y) = 0$. Ha találunk olyan ϕ függvényt amely megoldja a $g(x, y) = 0$ egyenletet, vagyis például $\phi(x_0) = y_0$ és $g(x, \phi(x)) = 0$ az x_0 egy környezetében, akkor a feladatot a $h(x) = f(x, \phi(x))$ egyváltozós esetre vezettük vissza. A szükséges feltétel $h'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\, \phi'(x_0) = 0$. Mivel $g'_x(x_0, y_0) + g'_y(x_0, y_0)\, \phi'(x_0) = 0$ is teljesül, látható hogy a *feltételes szélsőérték helyén f és g gradiense párhuzamos,* legalábbis akkor ha $\phi'(x_0) \neq 0$. [27] Rövidesen arról is lesz szó hogy $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ éppen a ϕ implicit függvény létezésének feltétele.

Lagrange általános módszert javasolt feltételes szélsőérték-feladatok megoldására, ez akkor is működik ha az f célfüggvénynek sok változója van, és a mellékfeltétel is több egyenletből áll. A mi esetünkben Lagrange az $L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$ háromváltozós függvény lokális szélsőértékeinek vizsgálatára vezette vissza a kérdést, ez a Lagrange féle multiplikátorok módszere. Az L lokális szélsőértékének szükséges feltétele az

$$f'_x(x_0, y_0) = \lambda g'_x(x_0, y_0)\,, \quad f'_y(x_0, y_0) = \lambda g'_y(x_0, y_0) \quad \text{és} \quad g(x_0, y_0) = 0 \tag{9.25}$$

egyenletek teljesülése, vagyis $\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0)$. Ugyanazt kaptuk mint korábban, a gradiensek párhuzamosságának feltétele szemléletes jelentéssel bír: a $g(x, y) = 0$ szintvonal mentén haladva az f célfüggvény változása ott "kicsi" ahol az f aktuális szintvonala érinti az előírt $g = 0$ szintvonalat. A logika nem tiszta, abból hogy (x_0, y_0) a feladat megoldása, nem következik hogy van olyan λ_0 hogy (x_0, y_0, λ_0) az L függvény lokális szélső értékének helye. Például, ha $f(x, y) := x^2 + y^2$ és $g(x, y) := 2x + 2y - 2$, akkor $L = (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 + 2\lambda - 2\lambda^2$, és az $x_0 = y_0 = \lambda_0 = 1$ megoldás az L függvénynek nem extremális, hanem (stacionárius) nyeregpontja. Persze, ha $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ akkor az (x_0, y_0, λ_0) megoldás mindig stacionárius pontja az L függvénynek. A $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ szinguláris eset többnyire felismerhető, mert (9.25) nem oldható meg.

$**$ **Elégséges feltételek:** Látható hogy ha az L háromváltozós függvénynek az (x_0, y_0, λ_0) helyen lokális szélső értéke van, akkor (x_0, y_0) az eredeti feltételes szélsőérték feladat megoldása, tehát az L Hesse mátrixának pozitív, illetve negatív definit voltát kell eldönteni. Ez az elégséges feltétel nem teljesértékű, előfordulhat hogy a Hesse mátrix indefinit, de (x_0, y_0) megoldása a feltételes szélsőérték feladatnak.

Jobb feltételt kapunk a feltétel feloldása után. Ha $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$ miatt van olyan ϕ hogy $g(x, \phi(x)) = 0$ az (x_0, y_0) pont egy környezetében, akkor a feladat a $h(x) := f(x, \phi(x))$ függvény lokális extrémumának meghatározására redukálódik. Ennek szükséges feltétele a jól ismert $h'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\phi'(x_0) = 0$, az elégséges feltétel pedig az hogy

$$h''(x_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\phi'(x_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)\phi'^2(x_0) + f'_y(x_0, y_0)\phi''(x_0)$$

határozottan pozitív, illetve negatív. Mivel $g'_x + g'_y\phi' = 0$ és $g''_{xx} + 2g''_{xy}\phi^2 + g''_{yy}\phi'^2 + g'_y\phi'' = 0$ az (x_0, y_0) egy környezetében, $\phi'(x_0)$ és $\phi''(x_0)$ értéke, vagyis $h''(x_0)$ előjele a ϕ ismerete nélkül is meghatározható. Feltevésünk szerint $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$, tehát

$$g'^2_y(x_0, y_0)\, h''(x_0) = (f''_{xx} - \lambda_0\, g''_{xx})\, g'^2_{yy} - 2(f''_{xy} - \lambda_0\, g''_{xy})\, g'_y\, g'_x + (f''_{yy} - \lambda_0\, g''_{yy})\, g'^2_{xx}\,, \tag{9.26}$$

ahol $\lambda_0 := f'_y(x_0, y_0)/g'_y(x_0, y_0)$, és az egyenletben szereplő második deriváltak argumentuma is mindenütt (x_0, y_0). *Ha a jobboldal pozitív akkor lokális feltételes minimum, ha negatív akkor maximum van.* Ha még azt is tudjuk hogy $f - \lambda_0 g$ Hesse mátrixa az (x_0, y_0) helyen definit, akkor $g'_x(x_0, y_0)$ és $g'_y(x_0, y_0)$ értékét nem is kell ismernünk $h''(x_0)$ előjelének meghatározásához. Az persze előfordulhat hogy $f - \lambda_0 g$ Hesse mátrixa indefinit, míg $h'(x_0) \neq 0$, vagyis lokális

[27] A $\nabla f \parallel \nabla g$ feltétel szimmetrikus az f és g vonatkozásában, ugyanezt kapjuk amikor g szélsō értékét keressük az f adott szintvonalán. Gyakori hogy a $g = \min!$ ha $f = \text{const}$ duális feladatnak ugyanaz a megoldása mint az eredeti $f = \max!$ ha $g = \text{const}$ problémának. Például, adott felszínū tégletestek között a kocka térfogata a legnagyobb, míg adott térfogatú téglatestek között szintén a kocka felszíne a legkisebb.

szélsőérték van az (x_0, y_0) helyen. [28] Hasonló, de még bonyolultabb a helyzet amikor sokváltozós célfüggvény szélső értékeit több feltétel mellett keressük. ∗∗
Implicit függvények: A $g(x,y)=0$ egyenlet nem mindig oldható fel az $y=\phi(x)$ módon, máskor több megoldás is lehet. *Ha viszont* $g(x_0,y_0)=0$, $g\in C^1_\delta(x_0,y_0)$ *és* $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$, *akkor egyértelmű lokális megoldás van.* A $g'_y(x_0,y_0)\neq 0$, esetben adott $x\in K_\delta(x_0)$ számhoz van, méghozzá egyértelműen meghatározott $y=\phi(x)$ úgy hogy $g(x,\phi(x))=0$, feltéve hogy $\delta>0$ elég kicsi. Ezt a következő fejezetben, Banach fixpontról szóló tételével bizonyítjuk. Ha már tudjuk hogy ez az implicit ϕ létezik, akkor Lagrange tételével $g'_x(\xi,\eta)h+f'_y(\xi,\eta)(\phi(x+h)-\phi(x))=0$ az adott környezetben. Mivel $f'_y(\xi,\eta)$ a $h\to 0$ határátmenet során nem közelíti meg a nullát, ϕ folytonos kell hogy legyen. Ezután a fenti égyeletet h-val osztva látjuk hogy ϕ differenciálható, és $g'_x(x,\phi(x))+g'_y(x,\phi(x))\phi'(x)=0$. A $g(x,y)=0$ egyenlet $y=\phi(x)$ megoldása a $\phi'=-g'_x(x,\phi)/g'_y(x,\phi)$ differenciálegyenlet megoldásként is meghatározható. Ennek létezése szintén Banach tételével bizonyítható; de itt a fixpontot függvénytérben kell megtalálni. Az ellenkező eljárás a gyakoribb: differenciálegyenletet oldunk meg az implicit függvény segítségével.
Egzakt egyenletek: Elsőrendű differenciálegyenlet gyakran a $g(x,y)\,dx+h(x,y)\,dy=0$ alakban keletkezik, vagy szándékosan így írjuk át, mert ha $g'_y(x,y)=h'_x(x,y)$ akkor van olyan f függvény hogy $g(x,y)=f'_x(x,y)$ és $h(x,y)=f'_x(x,y)$. Ezek a címben említett egzakt egyenletek. Ha sikerült megtalálni ezt az f függvényt, akkor a $g\,dx+h\,dy$ differenciál forma teljes differenciál, vagyis $g\,dx+h\,dy=df$, tehát a feladat az $f(x,y)=c$ egyenlet megoldására redukálódott. A szétválasztható egyenletek mind ilyenek, de sok más példa is van. Az is előfordul hogy $g'_y=h'_x$ nem teljesül, de található olyan $\psi(x,y)$ integráló tényező, amivel az eredeti egyenletet átszorozva egzakt egyenletet kapunk, vagyis $\partial_y(\psi g)=\partial_x(\psi h)$. Ez történt a Lotka-Volterra modell tárgyalásakor, de jó példa az $(x+2y)\,dx+y\,dy=0$ egyenlet is, amit a $\psi=(x^2+y^2)^{-1}$ multiplikátorral kezelve df teljes differenciált kapunk: $f(x,y)=\log(x+y)-(x+2y)/(x+y)$. Az $\ddot{x}+U'(x)=0$ anharmonikus rezgés esetében is hasonlóan, bár nem teljesen azonos módon járhatunk el, itt is teljes differenciált keresünk. Az $y:=\dot{x}$ változó bevezetésével kapott $dy+U'(x)\,dt=0$ egyenlet közvetlenül még nem integrálható, de azt y-nal átszorozva, $dx=y\,dt$ miatt $dH=y\,dy+U'(x)\,dx=0$ adódik, tehát a $H:=y^2/2+U(y)$ teljes energia a megoldások mentén állandó. Innen az $y=\dot{x}=\pm\sqrt{2H_0-2U(x)}$ autonóm egyenletet kapjuk, ahol H_0 az energia kezdeti értéke.
Felületek: A $z=f(x,y)$ alaknál általánosabb a háromváltozós függvény $\Sigma:=\{(x,y,z):f(x,y,z)=c\}$ szintfelületeként történő megadás. Például, $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ tengelyállású ellipszoid egyenlete. Felület érintősíkját, ha van neki, a felületen haladó görbék érintői alkotják, tehát $f'_x(\mathsf{r})\dot{x}+f'_y(\mathsf{r})\dot{y}+f'_z(\mathsf{r})\dot{y}=0$ ha $\mathsf{r}=x(t)\mathsf{i}+y(t)\mathsf{j}+z(t)\mathsf{k}$ felületi görbe. A $\nabla f:=f'_x\mathsf{i}+f'_y\mathsf{j}+f'_z\mathsf{k}$ gradiens mindegyik érintőre merőleges, tehát ő adja az érintősík normálvektorának irányát. Az hogy vannak a felületen haladó görbék, az implicit függvény tételének következménye, legalábbis a $\nabla f\neq 0$ tulajdonságú pontok környezetében. Ha például $f'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ akkor, rögzített $y=y_0$ mellett, van olyan $z=\phi(x)$ függvény hogy $f(x,y_0,\phi(x))=c$, tehát $\mathsf{r}(t):=t\,\mathsf{i}+y_0\,\mathsf{j}+\phi(t)\,\mathsf{k}$ a görbe. $x=x_0$ rögzítésével másikat kapunk, és ha $(x(t),y(t))$ az (x_0,y_0) ponton áthaladó síkgörbe, akkor az $f(x(t),y(t),z)=c$ egyenlet $z=\phi(t)$ feloldásával egész görbesereg keletkezik.

Térbeli felület kétdimenziós objektum, legáltalánosabb megadása a $\Sigma:=\{\mathsf{r}(u,v):(u,v)\in G\}$ kétparaméteres alak, ahol $G\subset\mathbb{R}^2$ és $\mathsf{r}:G\mapsto\mathbb{R}^3$. A felület $\mathsf{r}(u,v)$ pontja szinguláris ha ott $\mathsf{r}'_u\times\mathsf{r}'_v=0$, ezt a helyzetet lehetőleg elkerüljük. Sík egyenlete lineáris,

$$\mathsf{r}:=r\sin\vartheta\,\cos\varphi\,\mathsf{i}+r\sin\vartheta\,\sin\varphi\,\mathsf{j}+r\cos\vartheta\mathsf{k}\,,\quad 0\le\varphi<2\pi\,,0\le\vartheta\le\pi$$

$r>0$ sugarú, origó középpontú gömböt határoz meg. Az r,φ,ϑ számok az $\mathsf{r}\in\mathbb{R}^3$ vektor gömbi koordinátái. A koordináták r szorzóit a különböző a,b,c számokra cserélve ellipszoid egyenletét

[28] Most már három elégséges feltételünk van, amik egymásból következnek. Az L Hesse mátrixa akkor definit ha mindhárom sajátértékének ugyanaz az elojele, tehát ez az elégséges feltétel három egyenlotlenség teljesülését igényeli, és következik belole az $f-\lambda_0 g$ Hesse mátrixának definit volta, ami két egyenlotlenséget jelent. Mindkettonél hatékonyabb az egyetlen szám elojelérol szóló (9.26).

kapjuk. Az

$$\mathsf{r} := a\,\mathrm{sh}(u)\,\mathsf{i} + b\,\mathrm{ch}(u)\mathrm{sh}(v)\,\mathsf{j} + c\,\mathrm{ch}(u)\mathrm{ch}(v)\,\mathsf{k}\,, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

formula hiperboloidot (nyeregfelület) határoz meg, aminek $z^2/c^2 = 1 + x^2/a^2 + y^2/b^2$ a hagyományos egyenlete.

Felület kétparaméteres megadásakor kétségkívül felületi görbét kapunk ha csak az egyik paramétert változtatjuk, tehát $\mathsf{r}'_u \times \mathsf{r}'_v$ a felületi normális iránya, ami persze az érintősík normálvektora. Az $f(x,y,z) = c$ felületek akkor írhatók ebbe az alakba ha létezik a $z = \phi(x,y)$ implicit függvény, vagyis $f(x,y,\phi(x,y)) = c$ a vizsgált pont egy környezetében; ekkor $\mathsf{r}(u,v) := u\,\mathsf{i} + v\,\mathsf{j} + \phi(u,v)\,\mathsf{k}$ a felület kétparaméteres egyenlete.

$**$ **Felületi görbék:** Az $\mathsf{r} : G \mapsto \mathbb{R}^3$ függvénnyel adott Σ felületen haladó $\Gamma \subset \Sigma$ görbéket vizsgáljuk, ezek paraméteres alakja $\mathsf{q}(t) = \mathsf{r}(u(t), v(t))$, ahol $\mathsf{w}(t) = (u(t), v(t))$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ tartományban haladó síkgörbe. A q mozgás sebessége $\dot{\mathsf{q}} = \mathsf{r}'_u(\mathsf{w})\dot{u} + \mathsf{r}'_v(\mathsf{w})\dot{v}$, és a gyorsulása

$$\ddot{\mathsf{q}} = \mathsf{r}'_u(\mathsf{w})\ddot{u} + \mathsf{r}'_v(\mathsf{w})\ddot{v} + \mathsf{r}''_{uu}(\mathsf{w})\dot{u}^2 + 2\mathsf{r}''_{uv}(\mathsf{w})\dot{u}\dot{v} + \mathsf{r}''_{vv}(\mathsf{w})\dot{v}^2\,.$$

Megmutatjuk hogy ha $\mathsf{n}(\mathsf{w}) \cdot \mathsf{m}(\mathsf{w}) \neq 0$ akkor q görbülete

$$g(\mathsf{w}) = \frac{\langle \mathsf{r}''_{uu}(\mathsf{w}), \mathsf{m}(\mathsf{w})\rangle\, \dot{u}^2 + 2\,\langle \mathsf{r}''_{uv}(\mathsf{w}), \mathsf{m}(\mathsf{w})\rangle\, \dot{u}\dot{v} + \langle \mathsf{r}''_{vv}(\mathsf{w}), \mathsf{m}(\mathsf{w})\rangle\, \dot{v}^2}{\langle \mathsf{n}(\mathsf{w}), \mathsf{m}(\mathsf{w})\rangle\, |\dot{\mathsf{q}}(\mathsf{w})|^2} \tag{9.27}$$

ahol $\mathsf{n}(\mathsf{w})$ a görbe, $\mathsf{m}(\mathsf{w})$ pedig a felület normális egységvektora. A q görbét paraméterezhetjük az s ívhosszával, ekkor $\mathsf{q}''(s) = g\mathsf{n}$, tehát $g = (\mathsf{r}'' \cdot \mathsf{m})/(\mathsf{n} \cdot \mathsf{m})$. Mivel $\mathsf{q}'' = \ddot{\mathsf{q}}t'^2 + \dot{\mathsf{q}}t''$ ahol $t' := dt/ds = 1/|\dot{\mathsf{q}}|$, továbbá m a $\dot{\mathsf{q}}$, r'_u és r'_v vektorok mindegyikére merőleges, a tört számlálója éppen $\ddot{\mathsf{q}} \cdot \mathsf{m}$. $\square$

Eulert a számláló geometriai jelentése is érdekelte, ennek megértéséhez a vizsgált $\mathsf{w}_0 = (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$ pont környezetében új, a feladathoz illeszkedő koordinátákat vezetünk be. Az $\mathsf{w} = \mathsf{w}_0 + A\mathsf{z}$, $\mathsf{z} = (x,y)$ lineáris transzformáció után a $\ddot{\mathsf{q}} \cdot \mathsf{m} = \langle \dot{\mathsf{w}}, Q(\mathsf{w})\dot{\mathsf{w}}\rangle$ kvadratikus alak a $\ddot{\mathsf{q}} \cdot \mathsf{m} = \langle A\dot{\mathsf{z}}, Q(\mathsf{w})A\dot{\mathsf{z}}\rangle$ alakot ölti, míg az r'_x, r'_y oszlopvektorokból álló mátrix: $(\mathsf{r}'_x, \mathsf{r}'_y) = (\mathsf{r}'_x, \mathsf{r}'_y)A$. Jelölje w_1 és w_2 a $Q(\mathsf{w}_0)$ mátrix ortonormált sajátvektorait, olyan α_1, α_2 számokat keresünk hogy $A\dot{\mathsf{w}}(t_0) = \alpha\mathsf{w}_1 + \beta\mathsf{w}_2$, míg $\mathsf{r}'_x \perp \mathsf{r}'_y$ egységvektorok. Mivel $\mathsf{r}' := (\mathsf{r}'_u(\mathsf{w}_0), \mathsf{r}'_v(\mathsf{w}_0))$ invertálható, mindössze a $\dot{\mathsf{w}}(t_0) = \alpha_1\mathsf{r}'\mathsf{w}_1 + \alpha_2\mathsf{r}'\mathsf{w}_2$ egyenletet kell megoldani. Ha tehát $\mathsf{n} \parallel \mathsf{m}$ akkor $g = g_1\cos\phi + g_2\sin\phi$, ahol ϕ a $\dot{\mathsf{q}}$ és r'_x szöge, g_1 és g_2 pedig az $\mathsf{n} \parallel \mathsf{m}$ tulajdonságú görbék görbületeinek szélső értékei. A g_1 és g_2 főgörbületek a felület geometriai jellemzői, ha $g_1g_2 > 0$ akkor a kiválasztott pont környezetében ellipszoidhoz, ha $g_1g_2 < 0$ akkor hiperboloidhoz hasonlít a felület. $**$

$**$ **Geodetikus görbék:** Γ geodetikus görbe ha a normálvektora mindenhol merőleges a felületre, vagyis $\dot{\mathsf{q}} \times \ddot{\mathsf{q}} \parallel \mathsf{r}'_u \times \mathsf{r}'_v$. A felületen pusztán tehetetlensége miatt mozgó tömegpont halad ilyen pályán, és az előző szakasz végén említett főgörbületek geodetikus görbékhez rendelhetők. Az egységgömb esetében a görbe normálisa az origó felé mutat, tehát az ívhossz szerinti paraméterezés a $\mathsf{q}''(s) + \omega^2\mathsf{q}(s) = 0$ egyenlethez vezet, amit meg tudunk oldani. A gömb szimmetriája miatt feltehetjük hogy $\mathsf{r}(0) = \mathsf{i}$ és $\mathsf{r}'(0) = \alpha\mathsf{j}$, tehát $\mathsf{r}(s) = \cos(\omega s)\,\mathsf{i} + (\alpha/\omega)\sin(\omega s)\,\mathsf{j}$. Ez mindig egységvektor, és r' is az, tehát $\alpha^2 = \omega^2 = 1$, vagyis a görbe éppen az egyenlítő. Azt láttuk be hogy *gömbön minden geodetikus görbe főkörön fut.* $**$

9.7. **Komplex függvények.** Komplex számsorozat $z_n \to z$ konvergenciáját $|z_n - z| \to 0$ definiálja, tehát a folytonosság és a differenciálhatóság fogalmai kézenfekvő módon terjeszthetőek ki $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvényekre is. A legegyszerűbb komplex függvények a polinomok, és a két polinom hányadosaként származtatott racionális törtfüggványek, ezeket algebrai képletük definiálja. Polinom mindenütt, racionális függvény ott folytonos, ahol a nevezője nem nulla. Kitüntetett szerepet játszik a $w = 1/z$ függvény, először azt mutatjuk meg, hogy ez a függvény a z síkon adott kört a w sík körébe vagy egyenesébe viszi át. A $z_0 \in \mathbb{C}$ középpontú és $r > 0$ sugarú kör egyenlete $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)) = r^2$, amiből a $z = 1/w$ helyettesítés és átrendezés után $(r^2 - |z_0|^2)w\bar{w} + z_0w + \bar{z}_0\bar{w} = 1$ lesz. Két eset van. Ha $r^2 = |z_0|^2$ akkor az eredeti kör átmegy a $z = 0$ ponton, és w a $z_0w + \bar{z}_0\bar{w} = 1$ egyenletnek tesz eleget, ami egyenest ír le. Ha viszont $r^2 \neq |z_0|$, akkor kör egyenlete, $(w - w_0)(\bar{w} - \bar{w_0}) = R^2$ adódik, ahol $w_0 := z_0/(|z_0|^2 - r^2)$ és

$R := r\,||z_0|^2 - r^2|^{-1}$. Általánosabb a $w = (a+bz)/(c+dz)$ lineáris törtleképezés, ami az $ad = cd$ esetben konstanssá degenerálódik, egyébként $z = (a-cw)/(dw-b)$ az inverze. A $d = 0$ esetben egyszerű lineáris transzformációt kapunk, szám hozzáadása a komplex sík eltolását, komplex számmal való szorzás pedig a sík hasonlósági transzformációját (forgatás és nyújtás) jelenti. A $d \neq 0 \neq ad - bc$ esetben a törtleképezés a $w = 1/z$ transzformációból lineáris leképezésekkel előállítható, tehát kört ő is körbe vagy egyenesbe visz át. A $w := (1 - \imath z)/(z - \imath)$ leképezésnél $0 \to \imath$, $\imath \to \infty$, $-\imath \to 0$ és $1 \to 1$, $-1 \to -1$, tehát az egységkörlapot a felső félsíkra képezi le. Ennek inverze, $z := (1 + \imath w)/(\imath + w)$ a felső félsíkot viszi az egységkörbe.

Differenciálás: Mivel a vektorokkal ellentétben, komplex számokkal lehet osztani, a differenciálás művelete ugyanúgy definiálható mint a számegyenesen. A $z \in \mathbb{C}$ pontnak egy teljes környezetében értelmezett f komplex függvény differenciálható a z helyen, ha létezik az

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{9.28}$$

határérték; f' az f deriváltja, $f \in D^1(z_0)$. Az definíció $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$ átírása adja a $df = f'(z)\,dz$ szimbolikus írásmód jelentését. A differenciálás elemi szabályai is ugyanazok, és ugyanúgy igazolhatók mint az egyváltozós esetben. Ennek az az oka hogy ezek a szabályok az algebrai műveletek változatlanul érvényes alaptulajdonságaira épülnek. Például, differenciálható függvények szorzata is az, és $(fg)' = f'g + fg'$, tehát $dz^n/dz = nz^{n-1}$. Hasonlóan, differenciálható függvényekből összetett függvény is differenciálható, és ha $h(z) := f(g(z))$, akkor $h' = f'(g)g'$. A nagyon egyszerű $f(z) = \bar{z}$ függvény nem differenciálható: $(z - z_0)/(\bar{z} - \bar{z}_0)$ olyan egységvektor amelynek iránya $z \to z_0$ során tetszőlegesen ingadozhat.

Cauchy - Riemann egyenletek: Érdemes megnézni hogy egy $f(z)$ komplex függvény differenciálhatósága mit is jelent. Az $f'(z)$ deriváltat formálisan ugyanúgy definiáltuk mint az egyváltozós valós esetben, de a helyzet mégis egész más. Legyen $f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$ és $f'(z) = \varphi(x, y) + \imath\psi(x, y)$, ahol $z = x + \imath y$, továbbá $z_0 = x_0 + \imath y_0$ és $h \in \mathbb{R}$. A határátmenetet, ugyanúgy mint a parciális deriváltak számolásakor, egyrészt a $z = z_0 + h$ valós, másrészt a $z = z_0 + \imath h$ képzetes irányból is elvégezve, az

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + \imath v'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - \imath u'_y(x_0, y_0) \tag{9.29}$$

összefüggést kapjuk, tehát $f \in D^1(z_0)$ esetén teljesülnek az $u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$ és $v'_x(x_0, y_0) = -u'_y(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0)$ Cauchy - Riemann egyenletek. Ennél több is igaz, a

$$df = f'(z)\,dz = (\varphi + \imath\psi)(dx + \imath dy) = u'_x\,dx + u'_y\,dy + \imath(v'_x\,dx + v'_y\,dy)$$

formulát értelmezve látjuk hogy $f'(z)$ létezéséből az u és v differenciálhatósága is következik. Az egyenlet jobboldalától balra haladva viszont az állítás megfordítását kapjuk: ha $u, v \in D^1(x_0, y_0)$ eleget tesznek a CR egenleteknek, akkor $f \in D^1(z_0)$ és (9.29) is teljesül. Még egyszer differenciálva $\Delta u = \Delta v = 0$ adódik, ahol $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$ a Laplace operátor. Ilyenkor azt mondjuk hogy u és v harmonikus függvények. [29]

A fenti gondolatmenet azt mutatja hogy ha f egy környezetben differenciálható, akkor ott van neki primitív függvénye, vagyis olyan F hogy $F' = f$. Valóban, ha $F = \varphi + \imath\psi$ és $f = u + \imath v$ mellett $dF = f\,dz$, $dz = dx + \imath dy$ volna, akkor

$$(\varphi'_x + \imath\psi'_x)\,dx + (\varphi'_y + \imath\psi'_y)\,dy = (u + \imath v)\,dx + (\imath u - v)\,dy\,,$$

tehát $\varphi'_x = u$, $\varphi'_y = -v$ és $\psi'_x = v$, $\psi'_y = u$, lenne. Viszont a Cauchy - Riemann egyenletek garantálják a $\varphi''_{xy} = u'_y = -v'_x = \varphi''_{yx}$ és $\psi''_{xy} = v'_y = u'_x = \psi''_{yx}$ szimmetriát, tehát u és v ismeretében ϕ és ψ meghatározható a 9.3. Tétel alapján.

Komplex hatványsorok: Ezeket is a sorfejtés $z_0 \in \mathbb{C}$ középpontja és a sor $c_0, c_1, ..., c_n, ...$, szintén komplex együtthatói definiálják; függetlenül a sor konvergenciájától az

$$f(z) \sim c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{9.30}$$

[29]Később megmutatjuk hogy ha egy komplex függvény egy körlap minden pontjában differenciálható, akkor ott akárhányszor is differenciálható és hatványsorba fejthető.

jelölést használjuk; ahol a sor konvergens, ott egyenlőséget írunk.

Tétel 9.6. *Ha az $f(z)$ hatványsor a $w \in \mathbb{C}$ helyen konvergens, akkor $|z-z_0|<|w-z_0|$ esetén abszolút konvergens, tehát az abszolút konvergencia tartománya olyan z_0 középpontú kör belseje, melynek R sugara 0 és $+\infty$ is lehet. A körön kívül a sor mindenütt divergens, a határán feltételes konvergencia és divergencia egyaránt előfordulhat. A kör a belsejében a hatványsorral adott függvény folytonos, és tagonként differenciálható.*

Bizony: Feltehetjük hogy $z_0 = 0$, legyen $q := |z|/|w|$. Ekkor $q < 1$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||w|^n q^n \leq \frac{K}{1-q}\,, \tag{9.31}$$

ahol $K := \sup |c_n||w|^n < +\infty$ mivel az $f(w)$ sor konvergens, tehát az általános tagja nullához tart. Tehát a sor $|z| < |w|$ esetén abszolút konvergens, és ez így lesz az összes ilyen koncentrikus kör egyesítésének belsejében is. R az egyesítéssel kapott kör sugara, $R = +\infty$ ha a sor a teljes síkon konvergens. Ugyanígy kapjuk hogy a tagonkénti differenciálással kapott $g(z) := \sum nc_n z^{n-1}$ sor is konvergens, tehát

$$f(z+h) - f(z) - hg(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}\right)$$

is abszolút konvergens, megmutatjuk hogy a jobboldal nagyságrendje $O(|h|^2)$. A binomiális tétellel

$$\begin{aligned} |(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}| &\leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-2}|z|^{n-k} \\ &\leq n(n-1)|h|^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{n-2-k} = n(n-1)|h|^2 \left(|z|+|h|\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Feltehetjük hogy $|z| + |h| < R$, de $0 < q < 1$ esetén $\sum n(n-1)q^{n-2} < +\infty$, amiből állításunk (9.31) mintájára egyszerűen következik. □

A tételben leírt kör neve konvergenciakör, melynek R sugarát Cauchy és Hadamard $1/R = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$ képlete határozza meg. Ha ugyanis $|z| > R$ akkor $|c_n z^n| > 1$ végtelen sokszor teljesül, tehát a konvergenciakörön kívül a sor mindenütt divergens. Ha viszont $|z| < R$ és $q = |z|/R$, akkor $q < q' < 1$ esetén, véges sok tag kivételével, $|c_n z^n| < (q')^n$, tehát a sornak geometriai majoránsa van, és így abszolút konvergens. Ismeretes hogy az exponenciális és a trigonometrikus függvények hatványsorának konvergenciasugara végtelen, vagyis ezek a sorok mindenütt abszolút konvergensek. A geometriai, a $\log(1+z)$ és a binomiális sor konvergenciasugara egyaránt 1. Ugyanúgy mint a valós esetben, itt is érvényes Taylor (pontosabban Euler) $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ formulája, ami a sorfejtés együtthatóit határozza meg.

$**$ **Analitikus függvények:** Az $f : G \mapsto \mathbb{C}$ függvény a $G \subset \mathbb{C}$ nyilt halmazon analitikus ha minden $z_0 \in G$ pont egy környezetében hatványsorral állítható elő.

Tétel 9.7. *Hatványsorral adott komplex függvény a konvergenciakör belsejében analitikus.*

Bizony: Jelölje R a konvergenciakör sugarát, feltehetjük hogy 0 a középpontja. Megmutatjuk hogy $|z_0| + r < R$ és $|z - z_0| < r$ esetén az $f(z) = \sum c_n z^n$ hatványsor átírható az $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ alakba, és ez a sor is abszolút konvergens. Mivel

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0 + z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_n \binom{n}{k} (z-z_0)^k z_0^{n-k}\,,$$

a sor formális átrendezésével

$$a_k = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}$$

adódik, amit nem szeretnénk megbecsülni, de nem is kell. Az is elég, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|c_n||z-z_0|^k|z_0|^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\left(|z_0|+|z-z_0|\right)^n<+\infty,$$

ami $|z-z_0|<r$ és $|z_0|+r<R$ miatt igaz. Abszolút konvergens sor tetszés szerint átrendezhető, ami bizonyítja a fenti lépések korrektségét. □ **

Ha egy hatványsor az egész komplex számsíkon konvergens, akkor azt mondjuk hogy a sor f összege (analitikus) egész függvény. Ilyenek az exponenciális és a trigonometrikus függvények, de például $f(z):=\sqrt{z}$ csak egy szektorban analitikus.

Euler képlete: Az exponenciális függvény

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

hatványsora az egész komplex számsíkon abszolút konvergens, tehát a binomiális kifejtés átrendezésével, majd az $m=n-k$ helyettesítéssel $e^{z+w}=e^ze^w$ adódik. Vegyük észre hogy ha x valós, akkor $e^{\imath x}=\mathrm{Cos}(x)+\imath\,\mathrm{Sin}(x)$, ahol

$$\mathrm{Cos}(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,\quad \mathrm{Sin}(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{9.32}$$

Ezek kísértetiesen azonosak a $\cos x$ és a $\sin x$ hatványsoraival, további egybeesések is felismerhetőek. $\mathrm{Cos}(x)=\mathrm{Cos}(-x)$, $\mathrm{Sin}(x)=-\mathrm{Sin}(x)$, és a sorok differenciálásával $\mathrm{Sin}'(x)=\mathrm{Cos}(x)$ és $\mathrm{Cos}'(x)=-\mathrm{Sin}(x)$ adódik. Az $e^{\imath x+\imath y}=e^{\imath x}e^{\imath y}$ azonosságból a Cos és a Sin függvények definíciója szerint, a valós és képzetes részek összehasonlítása után a

$$\mathrm{Cos}(x+y)=\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Cos}(y)-\mathrm{Sin}(x)\,\mathrm{Sin}(y)\,,$$
$$\mathrm{Sin}(x+y)=\mathrm{Cos}(x)\,\mathrm{Sin}(y)+\mathrm{Sin}(x)\,\mathrm{Cos}(y)$$

jól ismert azonosságok következnek. Mivel $\mathrm{Cos}(0)=1$, a $(\mathrm{Cos}\ x)^2+(\mathrm{Sin}\ x)^2=1$ azonosság is igaz, vagyis $|e^{\imath x}|=1$ ha $x\in\mathbb{R}$. Ezután már nyugodtan kimondhatjuk hogy az e^{ix} egységvektor irányszöge x, és így a $\mathrm{Cos}(x)\equiv\cos x$ és $\mathrm{Sin}(x)\equiv\sin x$ azonosítással írhatjuk hogy $e^{ix}=\cos x+\imath\sin x$. Ez Euler nevezetes képlete, ami az x változó komplex értékeinél is érvényes, tehát $\mathrm{ch}\,z:=(e^z+e^{-z})/2=\cos\imath z$ és $\mathrm{sh}\,z:=(e^z-e^{-z})/2=\imath\sin z$, tehát $e^z=e^x(\cos y+\imath\sin y)$ ha x és y a $z\in\mathbb{C}$ valós és képzetes része, továbbá $\cos z=\cos(x)\mathrm{ch}(y)-\imath\mathrm{sh}(x)\sin(y)$ és $\sin z=\sin(x)\mathrm{ch}(y)+\imath\cos(x)\mathrm{sh}(y)$.

Az Euler képlethez vezető okoskodás még nem tökéletes, rejtélyes a π szám szerepe; (9.32) alapján még nem látható hogy Cos és Sin 2π szerint periodikus függvények. A konfúziónak az az oka hogy a π számot geometriai kép alapján definiáltuk, ő az egységkör kerületének a fele. [30]

Hatványok és a logaritmus: Most már nyugodtan használhatjuk a komplex számok $z=|z|e^{\imath\varphi}$ poláris alakját, ahol φ a z vektor irányszöge, a valós tengeltől az óramutató járásával ellentétes, pozitív irányba mért szög. Mivel $e^{2\pi\imath}=1$, teljesen mindegy hogy a szög melyik 2π hosszúságú intervallumba tartozik, általában $0\le\varphi<2\pi$.

[30]Akkor válna teljessé a trigonometrikus függvények geometriai és analitikus definícióinak egyenértékūségénem magyarázata, ha azt is tudnánk hogy $\mathrm{Sin}(\pi)=0$ de $\mathrm{Sin}(x)\neq 0$ ha $x\in(0,\pi)$. Az addíciós képletekkel innen már következne hogy $e^{\imath\,\varphi}$ pontosan egyszer járja be az egységkört amikor φ 0-tól π-ig növekszik. A gond az hogy a π számot eddig csak szemléletesen, mint az egységkör kerületének a felét definiáltuk; felejtsük ezt el egy pillanatra. Jelölje ezután π a $\mathrm{Sin}(x)$ függvény legkisebb pozitív gyökét, elōször persze azt kell igazolni hogy van ilyen. A bizonyítás tipikusan indirekt. Ha pozitív gyök egyáltalán nincs, akkor például $\mathrm{Sin}(x)>0$ ha $x>0$, tehát $\mathrm{Cos}'(x)=-\mathrm{Sin}(x)$ miatt $\mathrm{Cos}(x)$ szigorúan fogy a teljes pozitív félegyenesen, de a nullát nem érheti el, mert ha $\mathrm{Cos}(x_0)=0$, akkor $\mathrm{Sin}(2x_0)=0$ volna. Mivel ilyenformán $\mathrm{Sin}'(x)=\mathrm{Cos}(x)>0$ $\mathbb{R}_+$-on, $\mathrm{Sin}(x)$ monoton nō, amibōl a Newton - Leibniz képlettel az következik hogy Cos nem lehet alulról korátos. Ez az ellentmondás azt igazolja, hogy a Sin függvénynek van pozitív gyöke. Ha ezek között nincs legkisebb, akkor a 0-hoz torlódnak, és így $\mathrm{Cos}(0)=\mathrm{Sin}'(0)=0$ volna, holott $\mathrm{Cos}(0)=1$. Ezzel megadtuk a π szám analitikus definícióját, ami a geometriai szemlélettel teljes összhangban van. Az ívhossz képletével, most már az analitikus definícióból kiindulva kapjuk hogy az egységkör kerülete éppen 2π.

A logaritmust és a hatványfüggvényeket poláris alakban a legegyszerűbb megadni: ha $z = |z|e^{\imath\varphi}$, ahol $-\pi < \varphi \leq \pi$, akkor $\log z := \log|z| + \imath\,\varphi$, míg $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $z^\alpha := |z|^\alpha e^{\imath\alpha\varphi}$, tehát $\sqrt{-1} = \imath$. Ezek a függvények mindenütt definiálva vannak, de a negatív számoknál képzetes irányba haladva ugrásuk van. A negatív valós félegyenes kivételével $\log z^\alpha = \alpha \log z$, $\log' z = 1/z$ és $dz^\alpha/dz = \alpha z^{\alpha-1}$. Euler nyomán az exponenciális függvény $e^z := e^x\,(\cos y + \imath\,\sin y)$ ha $x = \operatorname{Re} z$ és $y = \operatorname{Im} z$. Sok más függvénnyel együtt e^z a hatványsorával is definiálható.
Komplex integrálok: Komplex függvény kettős integrálját a valós és képzetes részek integráljainak összegeként számoljuk. Ennél sokkal érdekesebbek a komplex értékű (görbe menti) vonalintegrálok. A $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ pontokat összekötő, folytonosan differenciálható Γ görbe mentén a közelítő összegeket

$$I_\gamma := \sum_{k=0}^{n} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \tag{9.33}$$

definiálja, ahol a $\gamma = \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}, z_n\}$ felosztás pontjai a görbén vannak, $z_0 = w_1$, $z_n = w_2$, $\delta(\gamma) := \max\{|z_{k+1} - z_k|\}$, és

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = I := \lim_{\delta(\gamma)\to 0} I_\gamma\,, \tag{9.34}$$

úgy értve hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ úgy hogy $|I - I_\gamma| < \varepsilon$ ha $\delta(\gamma) < \delta$. Az f folytonossága itt is elég az integrálhatósághoz, a valós és képzetes részek kiírásával az integrál négy részre bomlik. Ennél hasznosabb Newton és Leibniz formulája, amit ők még nem ismerhettek. Ha f folytonos, F pedig differenciálható a Γ görbe minden pontjának egy környezetében, és ott $F'(z) = f(z)$, akkor $\int_\Gamma f\,dz = F(w_2) - F(w_1)$. Ennek alakja és bizonyítása is lényegében ugyanaz mint az egyváltozós esetben. Például, integráljuk az $f(z) := 1/z$ függvényt az egységkörön! Euler szerint ott $z = \cos\varphi + \imath \sin\varphi$, $1/z = \cos\varphi - \imath\sin\varphi$ és $dz = -\sin\varphi\,d\varphi + \imath\cos\varphi\,d\varphi$, tehát $dz/z = \imath\,d\varphi$. Innen a körintgrál értéke $2\pi\imath$, pedig $\log' z = 1/z$.

A számegyenesen minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, a komplex síkon ez már csak a differenciálható függvények esetében igaz. Tegyük fel hogy f differenciálható a G konvex halmaz belsejében és jelölje Γ^z a $z_0 \in G$ és $z \in G$ pontokat összekötő szakaszt, amit $\zeta(t) := z_0 + t(z - z_0)$, $0 \leq t \leq 1$ fut be. Ekkor $\dot{\zeta} = (z - z_0)$ miatt

$$F(z) := \int_{\Gamma^z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\,dt\,,$$

tehát az integrál mögött differenciálva, ami itt is megendedett,

$$F'(z) = \int_0^1 \left(f'(\zeta(t))(z - z_0)t + f(\zeta(t))\right)\,dt = \int_0^1 \left(t\partial_t f(\zeta(t)) + f(\zeta(t))\right)\,dt$$

adódik, amiből parciális integrálással $F'(z) = f(z)$. Tehát *konvex halmaz belsejében mindenütt differenciálható függvénynek a halmazon van primitív függvénye.* A bizonyítás nem működik ha f mindössze folytonos, mert a differenciálást nem csak z_0 irányába kell elvégezni.

A síkból a $z = 0$ pont elhagyásával kapott halmaz nem konvex, így történhet meg az hogy $1/z$ integrálja az egységkörön nem 0. A NL szabály azért nem alkalmazható mert $\log z$, az $1/z$ primitív függvénye a negatív valós tengelyen nemcsak hogy nem differenciálható, de nem is folytonos, és a körintegrál számolásakor ezt a féltengelyt mindenképpen át kell lépnünk. [31]

Az eddig elmondottak is sejtetik hogy a komplex integrálok további tulajdonságai egész más természetűek mint a valós egyenesen. Ezek megértéséhez már nélkülözhetetlen a geometria és a topológia néhány fogalma.

[31] A primitív függvény létezéséről szóló tétel minden olyan tartományra kiterjeszthető, aminek van olyan z_0 pontja, amivel minden más pont a halmazban haladó szakasszal köthető össze. Ezek a csillagszerű halmazok.

9.8. **Kettős integrálok.** Alapfeladat folytonos függvény integrálása valamely $G = (a,b)\times(c,d)$ téglalapon. Szemléletesen az integrál a függvény által megadott felület alatti (előjeles) térfogatot jelenti, definiálása és számolása az

$$I_\gamma := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)(y_{j+1}-y_j) \tag{9.35}$$

közelítő összegek segítségével történik, ahol $a = x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$ és $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$ a felosztást definiáló osztópontok, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ és $\eta_j \in [y_j, y_{j+1}]$ pedig tetszőleges közbülső értékek. A γ felosztás $\delta(\gamma)$ finomsága az $x_{k+1}-x_k$ és $y_{j+1}-y_j$ számok közül a legnagyobb. Ezután maga az integrál ugyanúgy definiálható mint az egyenesen:

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \equiv \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = I := \lim_{\delta(\gamma)\to 0} I_\gamma\,, \tag{9.36}$$

ami úgy értendő, hogy létezik olyan I véges szám hogy minden $\varepsilon > 0$ értékhez van olyan $\delta > 0$ hogy $|I - I_\gamma| < \delta$ ha $\delta(\gamma) < \delta$.

A definíció általánosabban is kimondható: a közelítő összegek készítésekor az integrálás tartományát tetszés szerint oszthatjuk fel olyan kis részekre, amiknek ismerjük a területét. Ha a $G \subset \mathbb{R}^2$ halmazt a $\gamma = \{G_0, G_1, G_2, ..., G_n\}$, páronként diszjunkt részekre osztjuk fel, akkor

$$I_\gamma := \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\,\lambda(G_k) \tag{9.37}$$

a hozzárendelt közelítő összeg, ahol $(\xi_k,\eta_k) \in G_k$, míg $\lambda(G_k)$ a G_k halmaz területe. A γ felosztás $\delta(\gamma)$ finomsága ilyenkor a G_k halmazok átmérői közül a legnagyobb. Az integrálról szóló fejezetben megmutatjuk hogy $\delta(\gamma) \to 0$ esetén a közelítő összegek biztosan konvergálnak, és a határérték is mindig ugyanaz ha f egyenletesen folytonos a G halmazon; a bizonyítás lényegében ugyanaz mint az egyváltozós Riemann integrál esetében volt. A (9.36) képletben félreértésre adhat okot az integráljelek sorrendje.

Fubini tétele: A változók szerinti *integrálás sorrendjének felcserélhetőségét* mondja ki. Ha f folytonos az $[a,b]\times[c,d]$ téglalapon, akkor

$$I = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx\,. \tag{9.38}$$

Az állítás egyáltalán nem meglepő, az I_γ közelítő összeg számolásakor is mindegy hogy először a k, majd a j index szerint összegzünk, vagy fordítva. Az 4.1. Lemma segítségével Fubini tétele egyszerűen bizonyítható, az integrálról szóló fejezetben erre a kérdésre még visszatérünk.

Nemcsak téglalapon alkalmazható Fubini tétele. A $G := \{(x,y) : g(x) < y < h(x), a < x < b\}$ normáltartomány esetében

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx\,. \tag{9.39}$$

Az x és y változók felcserélésével kapjuk az integrált a $\widetilde{G} := \{(x,y) : g(y) < x < h(y), c < y < d\}$ halmazon.

Integrálok deriválása: Fubini tételével rokon, és abból következik a deriválás és az integrálás műveleteinek felcserélhetőségéről szóló tanítás, ami a NL formulánál többet mond. Nézzük a $\phi(t) := \int_a^b f(t,x)\,dx$ integrált, ahol f folytonos a $[\tau_1,\tau_2]\times[a,b]$ intervallumon. Ha ezen $f_t'(t,x)$ is folytonos, akkor

$$\phi'(t) = \int_a^b f_t'(t,x)\,dx \quad \text{ha } \tau_1 < t < \tau_2\,.$$

Valóban, Fubini tétele miatt

$$\phi(t) = \phi(\tau_1) + \int_a^b\left(\int_{\tau_1}^t f_t'(\tau,x)\,d\tau\right)dx = \phi(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t\left(\int_a^b f_t'(\tau,x)\,dx\right)d\tau\,,$$

amiből az állítás Newton és Leibniz formulájával következik. Nevezetes alkalmazás Young tételének megfordítása, a 9.3. Tétel.

Improprius integrálok: Nemcsak korlátos halmazon lehet integrálni. Ha G_n korlátos halmazok növekvő sorozata, az f függvény mindegyiken integrálható, és $G = \cup G_n$, akkor

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy) := \lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} f(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{9.40}$$

feltéve hogy a határérték mindig létezik és ugyanaz. Ez a konstrukció akkor is alkalmazható ha G korlátos ugyan, de f nem az, vagy egyik sem korlátos. A síkon már nagyon ritkán beszélünk feltételesen konvergens improprius integrálokról, azt szeretjük ha $|f|$ is integrálható.

Poláris transzformáció: Kör alakú tartomány, vagy *forgásszimmetrikus* függvény esetében célszerű az (r,φ) poláris koordináták bevezetése, vagyis $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ a helyettesítés sémája. A $G = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ körlapot *körcikkszeletekre* osztva kapjuk az

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr \tag{9.41}$$

képletet. Arról van szó hogy az (x,y) síkon az origótól r távolságra fekő $d\varphi$ nyílásszögű és dr szélességű körcikkszelet területe első közelítében $r\,dr\,d\varphi$, és ez az alakzat a transzformáció során dr és $d\varphi$ oldalakkal rendelkező téglalapba megy át.

Nevezetes mintapélda az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,dx = \sqrt{2\pi} \tag{9.42}$$

Gauss integrál számolása. Jelölje I az integrál értékét, ekkor Fubini tételét, majd poláris transzformációt alkalmazva

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2 - y^2/2)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} r\exp(-r^2/2)\,d\varphi\right)dr = 2\pi$$

következik.

Lineáris transzformáció: Az $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$ leképezés az (u,v) síkra rajzolt h méretű négyzetrácsot olyan paralelogramma rácsba viszi, amin az u futtatásával, rögzített v mellett nyert elmozdulás vektora $(\alpha h, \beta h)$, míg a v megváltozásához tartozó elmozdulás $(\gamma h, \delta h)$, tehát ez a transzformáció a h oldalú négyzeteket olyan paralelogrammákba viszi át, amelyek területe éppen $h^2|\alpha\delta - \beta\gamma|$. Nem véletlen hogy a *transzformáció determinánsának abszolút értéke a területváltozás szorzója*, éppen ez a determináns geometriai jelentése. Az akció persze csak akkor értelmes ha a transzformáció nem degenerált, vagyis az $\alpha\delta - \beta\gamma$ determinánsa nem nulla. Például, az $u = ax + by$, $v = cx + dy$ helyettesítés inverze $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$, ahol $\alpha = d/D$, $\beta = -b/D$, $\gamma = -c/D$, $\delta = a/D$ és $D = ad - bc$. Mivel az inverz transzformáció determinánsa az eredeti determinánsának reciproka,

$$\iint_G f(ax + by, cx + dy)\,dx\,dy = \frac{1}{|ad - bc|}\iint_J f(u,v)\,du\,dv\,, \tag{9.43}$$

ahol $J := \{(u,v) : u = ax + by, v = cx + dy\,, (x,y) \in G\}$.

Integrálás helyettesítéssel: Ahol az $\mathsf{F} := (\varphi, \psi)$ leképezés (vektormező) differenciálható, vagyis $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ differenciálható függvénnyek, ott F lineáris közelítését a

$$\nabla\mathsf{F} :== \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} \tag{9.44}$$

Jacobi mátrix adja. Pontosabban, ha $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$ és ρ az (u,v) és (u_0, v_0) pontok távolsága, akkor

$$x = x_0 + \varphi'_u(u_0,v_0)(u - u_0) + \varphi'_v(u_0,v_0)(v - v_0) + o(\rho)\,,$$
$$y = y_0 + \psi'_u(u_0,v_0)(u - u_0) + \psi'_v(u_0,v_0)(v - v_0) + o(\rho)\,,$$

amit tömören az $\mathsf{F}(\mathsf{r}) = \mathsf{F}(\mathsf{r}_0) + \nabla\mathsf{F}(\mathsf{r}_0)(\mathsf{r} - \mathsf{r}_0) + o(|\mathsf{r} - \mathsf{r}_0|)$ módon írunk le. Ha tehát a Jacobi mátrix nem szinguláris, vagyis a $|\nabla\mathsf{F}|$ determinánsa nem nulla, akkor a lineáris közelítés elsőrendben pontos, és így a terület deformálódásának mértékét is vele számolhatjuk. Tegyük fel hogy F folytonosan differenciálható, a Jacobi determinánsa seholsem nulla, és kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a J és G síkbeli tartományok között, akkor

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_J f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|\varphi'_u(u,v)\psi'_v(u,v) - \varphi'_v(u,v)\psi'_u(u,v)|\,du\,dv\,. \quad (9.45)$$

A hagyományos bizonyítás igen hosszadalmas, lényegét már elmondtuk. Az $x = x_0 + ar\cos\phi$, $y = y_0 + br\sin\phi$ általános poláris transzformáció Jacobi mátrixa

$$\nabla\mathsf{F} = \begin{pmatrix} a\cos\phi & -ar\sin\phi \\ b\sin\phi & br\cos\phi \end{pmatrix} \quad (9.46)$$

tehát a Jacobi determináns éppen abr.

Gauss és Green formulái: Ha g és h folytonosan differenciálható, akkor egyszerű parciális integrálással

$$\int_c^d\int_a^b (g'_x(x,y) + h'_y(x,y))\,dx\,dy$$
$$= \int_c^d g(b,y)\,dy - \int_c^d g(a,y)\,dy + \int_a^b h(x,d)\,dx - \int_a^b h(x,c)\,dx$$

adódik. Ez az egyenlet úgy értelmezhető, hogy $g'_x + h'_y$ integrálja a téglalapon ugyanaz, mint az $\mathsf{f} = g\mathsf{i} + h\mathsf{j}$ síkbeli vektormezőnek a téglalap határvonalára merőleges, kifelé mutató komponensének integrálja a határ mentén pozitív irányban haladva; ezt nevezzük fluxusnak. Igen tanulságos ugyanez a számolás háromszögön, nézzuk azt a H háromszöget aminek, a bejárás sorrendje szerint, $(0,0)$, $(a,0)$ és $(0,b)$ a három csúcsa, $a,b > 0$.

$$\iint_H \big(g'_x(x,y) + h'_y(x,y)\big)\,dx\,dy = \int_0^b g(a - ay/b, y)\,dy$$
$$-\int_0^b g(0,y)\,dy + \int_0^a h(x, b - bx/a)\,dx - \int_0^a h(x,0)\,dx\,.$$

A jobboldali második és negyedik integrál jelentése világos, a másik kettőt a ferde oldal közös paraméterezésével vonhatjuk össze. Legyen $x(t) := a - at$ és $y(t) := bt$, ekkor $dy = b\,dt$, míg $dx = -a\,dt$ de itt az integrálás határai is felcserélődnek, tehát

$$\int_0^b g(a - ay/b, y)\,dy + \int_0^a h(x, b - bx/a)\,dx = \int_0^1 (bg(x(t),y(t)) + ah(x(t),y(t)))\,dt$$
$$= \int_0^1 (n_1 g(x(t),y(t)) + n_2 h(x(t),y(t)))\sqrt{a^2+b^2}\,dt\,,$$

ahol $n_1 := b/\sqrt{a^2+b^2}$, $n_2 := a/\sqrt{a^2+b^2}$, tehát $\mathsf{n} := n_1\mathsf{i} + n_2\mathsf{j}$ a ferde oldalról merőlegesen kifelé mutató egységységvektor, míg $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$ az ívhosszelem, tehát itt is a

$$\iint_G \big(f'_x(x,y) + g'_y(x,y)\big)\,dx\,dy = \oint_\Gamma \mathsf{f}(x,y)\cdots\mathsf{n}(x,y)\,ds \quad (9.47)$$

képletet kaptuk, ahol $\mathsf{n}(x,y)$ a G tartományt határoló Γ zárt görbe (x,y) pontjából kifelé mutató normális egységvektor, és a vonalmenti integrálás az s ívhossz szerint történik. Az $a,b > 0$ feltételt csak a szemléltetés kedvéért tettük, (9.47) ugyanigy bizonyítható bármeny tengelyállású derékszögű háromszög esetében. Általános alakú háromszögnél három ferde egyenes mentén kellene az integrálokat felírni, de erre nincs szükség. Azt kell, és érdemes is észrevenni hogy minden háromszög felbontható tengelyállású derékszögüekre, amelyekre (9.47) biztosan igaz, és amikor az így kapott egyenleteket összeadjuk, az egész háromszögről szóló tételt kapjuk. A kettős integrálok egyszerűen összeadódnak, a háromszög belsejében haladó szakaszokon pedig kétszer megyünk végig, és az ellentétes iránytású vonalintegrálok kiejtik egymást.

Általános alakú, szakaszonként folytonosan differenciálható görbívekkel határolt G tartományt téglalapok és háromszögek egyesítéseivel közelítve, és az egyes részek járulékait összeadva, határátmenet után kapjuk Gauss nevezetes divergencia tételének síkbeli változatát, a (9.47) formulát. Azt kell látni hogy a felosztás belső élei mentén mindegyik vonalintegrált kétszer számoljuk, de ezek ellekező előjelűek, és így kiejtik egymást. A külső élek a Γ görbéhez illeszkednek, és járulékuk – határátmenet után – a teljes vonalintegrált adja. Az $\oint$ integrált a Γ görbe valamilyen $\mathsf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ paraméterezése után számoljuk. Az $\dot{\mathsf{r}} = \dot{x}\mathsf{i} + \dot{y}\mathsf{j}$ sebességhez a normálvektor: $\mathsf{n} = |\dot{\mathsf{r}}|^{-1}(\dot{y}\mathsf{i} - \dot{x}\mathsf{j})$. Mivel $ds = |\dot{\mathsf{r}}|\,dt$, a praktikus

$$\begin{aligned}\iint_G (g'_x(x,y) + h'_y(x,y))\,dx\,dy &= \int_\Gamma \mathsf{f}(x,y)\cdot\mathsf{n}(x,y)\,ds \qquad (9.48)\\ &= \int_{t_1}^{t_2} (g(x(t),y(t))\dot{y}(t) - h(x(t),y(t))\dot{x}(t))\,dt\end{aligned}$$

képletet kapjuk.

A fluxus igazából a háromdimenziós térben érdekes, erről később lesz szó. Green (Stokes) síkbeli formulája matematikailag azonos Gauss képletével, de más a fizikai jelentése. Azt kell észrevenni hogy görbe mentén az $\mathsf{f} = g\mathsf{i} + h\mathsf{j}$ erőtér munkája ugyanaz mint $\mathsf{f}^\top := h\mathsf{i} - g\mathsf{j}$ fluxusa, tehát (9.47) az

$$\begin{aligned}\iint_G (h'_x(x,y) - g'_y(x,y))\,dx\,dy &= \oint_\Gamma \mathsf{f}(\mathsf{r})\cdot d\mathsf{r} \qquad (9.49)\\ &= \int_{t_1}^{t_2} (g(x(t),y(t))\dot{x}(t) + h(x(t),y(t))\dot{y}(t))\;dt\,,\end{aligned}$$

alakot ölti, ahol $\mathsf{r} = x(t)\mathsf{i} + y(t)\mathsf{j}$, $t_1 \le t \le t_2$ megint a Γ kontúr paraméteres előállítsa. Az $f = -y$, $g = x$ speciális esetben

$$T = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (x\,dy - y\,dx) \qquad (9.50)$$

a Γ tartomány területe, de sok más lehetőség is van.

Felületi integrálok, a fluxus: Térbeli felület $z = f(x,y)$ típusú megadásánál általánosabb és kényelmesebb az $\mathsf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathsf{i} + y(u,v)\,\mathsf{j} + z(u,v)\,\mathsf{k}$ kétparaméteres alak, ahol x, y, z a $G \subset \mathbb{R}^2$ nyilt halmazon adott folytonosan differenciálható függvények. Amint u és v végigfut a G tartományon, az $\mathsf{r}(u,v)$ pont is bejárja az általa definiált Σ felületet. Ha valamelyik paramétert rögzítjük, és csak a másikat változtatjuk, akkor a Σ felületen haladó térgörbéket kapunk. Ezek érintővektorai az $\mathsf{r}'_u(u,v)$ és $\mathsf{r}'_v(u,v)$ parciális deriváltak, tehát az általuk kijelölt sík a felület érintősíkja, az

$$\mathsf{n}(u,v) := \frac{\mathsf{r}'_u(u,v)\times\mathsf{r}'_v(u,v)}{|\mathsf{r}'_u(u,v)\times\mathsf{r}'_v(u,v)|}$$

egységvektor pedig a felületi normális az (u,v) helyen. Ugyanakkor $|\mathsf{r}'_u \times \mathsf{r}'_v|$ a felületre illeszkedő parallelogramma területe, ezért $dS := |\mathsf{r}'_u(u,v)\times\mathsf{r}'_v(u,v)|\,du\,dv$, jó közelítéssel, a felület egy kis darabkájának a felszíne. Ha tehát $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, akkor

$$\iint_\Sigma f\,dS := \iint_G f(\mathsf{r}(u,v))\,|\mathsf{r}'_u(u,v)\times\mathsf{r}'_v(u,v)|\,du\,dv \qquad (9.51)$$

az f integrálja a felületen; az $f \equiv 1$ esetben a felület felszínét kapjuk. Ez az a mérték ami szerint a fenti és az alábbi integrálokat képezzük. A $z = f(x,y)$ felületnek a $G \subset \mathbb{R}^2$ tartomány feletti részének a felszínét a vegyes szorzat (determináns) kiszámolása után az

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)}\,dx\,dy \qquad (9.52)$$

formula adja meg, ez feltűnően hasonlít az ívhossz képletére.

A felület elemeinek térbeli állása is van, ezért $d\vec{S} = \mathsf{n}\, dS = (\mathsf{r}'_u \times \mathsf{r}'_v)\, du\, dv$ a vektor értékű elemi felszín, és így az $\mathsf{f} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ vektormező fluxusát

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathsf{f} \cdot d\vec{S} := \iint_G \mathsf{f}(\mathsf{r}(u,v)) \cdot \big(\mathsf{r}'_u(u,v) \times \mathsf{r}'_v(u,v)\big)\, du\, dv = \iint_G |\mathsf{f}, \mathsf{r}'_u, \mathsf{r}'_v|\, du\, dv \tag{9.53}$$

definiálja, ahol $|\mathsf{f}, \mathsf{r}'_u, \mathsf{r}'_v|$ a három vektorból alkotott mátrix determinánsa. Ha például f folyadék áramlásának sebessége, akkor a fluxus a Σ felületdarabon időegység alatt átáramló folyadék menynyisége.
Stokes tétele: Az $\mathsf{f} = \varphi(x,y,z)\,\mathsf{i} + \phi(x,y,z)\,\mathsf{j} + \psi(x,y,z)\,\mathsf{k}$ térbeli vektormező rotációja

$$\operatorname{rot} \mathsf{f}(\mathsf{r}) := (\psi'_y - \phi'_z)\,\mathsf{i} + (\varphi'_z - \psi'_x)\,\mathsf{j} + (\phi'_x - \varphi'_y)\,\mathsf{k}\,, \tag{9.54}$$

tehát Green tétele úgy is kimondható hogy síkbeli vektormező rotációjának fluxusa egy síkdarabon az azt határoló zárt görbe mentén végzett munkával egyenlő. Mivel a rotáció is geometriai - fizikai fogalom, lásd később, ez az állítás tetszőleges állású síkra vonatkozóan is igaz. Innen a Σ felületet apró háromszögekkel parkettázva kapjuk Stokes

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \mathsf{f}(\mathsf{r})\, d\vec{S} = \oint_\Gamma (\mathsf{r})\, d\mathsf{r} \tag{9.55}$$

formuláját, ahol Γ a felületdarab zárt határvonala. A vonalintegrált a felületi normális irányába nézve, pozitív irányú bejárással számoljuk. A felületek geometriája rendkívül komoly tudomány, vázolni se próbáljuk. Stokes tételénél olyan felületre gondolunk mint például a gömbről zárt görbével lemetszett süveg.

10. METRIKUS TEREK, TOPOLÓGIA

Absztrakt formában ismertetjük a határértékkel és a folytonossággal kapcsolatos fogalmakat, ez az Általános topológia nevű tudományág tárgya, ahol a pontok környezeteit axiómákkal jellemzik.

10.1. **Metrikus terek.** A címszereplő (X,ρ) objektum olyan X halmaz, melyben bármely két $x, y \in X$ pontnak van távolsága, $\rho(x,y)$, ami pozitív, szimmetrikus és teljesül a háromszög egyenlőtlenség, vagyis

$$\begin{aligned} &\rho(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in X, \quad \rho(x,y) = 0 \text{ acsak } x = y\,,\\ &\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x,y \in X\,,\\ &\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall x,y,z \in X\,. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Az $x_n \in X$ sorozat konvergens és $x \in X$ a határértéke ha $\lim \rho(x_n, x) = 0$ amint $n \to +\infty$, a tényállást $x_n \to x$ jelöli. A $K_\delta(x) := \{y \in X : \rho(y,x) < \delta\}$ halmaz az $x \in X$ pont $\delta > 0$ sugarú környezete, nevezhetük x középpontú, δ sugarú gömbnek. Eszerint $x_n \to x$ akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén igaz hogy $x_n \in K_\varepsilon(x)$ véges kivétellel, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan n_ε küszöb hogy $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$. $x_n \in X\,, n \in \mathbb{N}$ Cauchy sorozat ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε küszöbszám hogy ha $n, m > n_\varepsilon$, akkor $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Minden konvergens sorozat Cauchy, mert $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$. Az X metrikus tér teljes ha benne minden Cauchy sorozat konvergens. Az X tér kompakt – precízen sorozatkompakt – ha igaz a Bolzano - Weierstrass tétel: minden sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. Minden kompakt tér teljes, mert Cauchy sorozat a belőle kiválasztott konvergens részsorozat határértékéhez konvergál. Az $A \subset X$ halmaz korlátos ha az átmérője, $\operatorname{diam} A := \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$ véges.
Zárt és nyilt halmazok: Az $x \in X$ pont az $A \subset X$ halmaz torlódási pontja ha x minden környezete az A végtelen sok pontját tartalmazza, tehát van olyan különböző $x_n \in A$ elemekből álló sorozat, hogy $x_n \to x$. Pontsorozat részsorozatának határértékét is szokás a sorozat torlódási pontjának nevezni. Az $A \subset X$ halmaz ∂A határa azokból a pontokból áll, amelyek minden környezetében a halmazhoz tartozó, és a halmazhoz nem tartozó pont egyaránt található; ezek az A határpontjai. Az A lezárása az $\bar{A} := A \cup \partial A$ halmaz, amit úgy is megkaphatunk hogy A-hoz

hozzávesszük a torlódási pontjait. x az $A \subset X$ belső pontja ha A az x egy teljes környezetét is tartalmazza, A belseje, Int A az A belső pontjainak halmaza. Periférikusak az izolált pontok, melyek ugyan a halmazhoz taroznak, de van olyan környezetük, amely a pontot kivéve, teljesen kívül esik a halmazon. Az izolált pontok határpontok. Zárt az a halmaz, amely minden torlódási pontját tartalmazza, vagyis $A = \bar{A}$, illetve $A \supset \partial A$. Nyilt halmaz minden pontja belső pont, vagyis $A = \mathrm{Int}\ A$. Zárt halmaz komplementuma nyilt, és viszont, az üres halmaz és az egész tér egyszerre zárt és nyilt. Az X tér összefüggő ha csak az $X = X \cup \emptyset$ módon bontható fel diszjunkt nyilt halmazok egyesítésére, vagyis csak az üres halmaz és az egész tér lehet benne zárt is meg nyilt is.

Alterek: Metrikus tér bármely részhalmaza – ugyanazzal a távolsággal felszerelve – szintén metrikus tér, az eredeti tér altere. Az $X_0 \subset X$ altér nyilt, illeteve zárt halmazai $X_0 \cap G$, illetve $X_0 \cap F$ alakúak, ahol G nyilt, F zárt az eredeti X térben. Előfordul hogy az $x_n \in X_0 \subset X$ sorozat az (X, ρ) térben konvergens, de az (X_0, ρ) altérben nem, mert a határértéke nem esik X_0-ba. Sorozatok Cauchy tulajdonsága abszolút, vagyis nem függ attól hogy melyik altérben nézzük őket. Részhalmaz kompaktsága is abszolút fogalom. Teljes, illetve kompakt tér zárt részhalmaza, mint altér, szintén teljes, illetve kompakt. [32] Az összefüggőség fogalmát legtöbbször altereknél használjuk. Nevezetes altér valamely $\phi : [a, b] \mapsto X$ függvény $\Gamma := \{\phi(t) : a \le b\}$ képe, amit X-ben haladó görbének nevezünk.

10.2. **Folytonos függvények.** Az (X, ρ) metrikus térnek az $(Y, \tilde{\rho})$ metrikus térbe történő $f : X \mapsto Y$ leképezése folytonos az $x \in X$ helyen ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta = \delta_{\varepsilon,x} > 0$ hogy $\rho(x, y) < \delta$ esetén $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) < \varepsilon$, ezt $f \in C(x)$ jelöli. Az X minden pontjában folytonos függények tere $C(X \to Y)$; $C(X) := C(X \to Y)$, míg $C_b(X) \subset C(X)$ a korlátos függvények tere.

Tétel 10.1. *$f \in C(X \to Y)$ akkor és csak akkor igaz, ha f a határátmenettel mindig felcserélhető, vagyis $f(x_n) \to f(x)$ ha $x_n \to x$.*

Bizony: A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha viszont f nem folytonos, akkor van olyan $x \in X$, pont, $\varepsilon > 0$ szám, és $x_n \in X$ sorozat hogy $\rho(x_n, x) < 1/n$, de $\tilde{\rho}(f(x_n), f(x)) \ge \varepsilon$. Ez az ellentmondás a tétel igaz voltát bizonyítja. $\square$

Az $A \subset X$ halmazon értelmezett $f : A \mapsto X$ függvénynek az A halmaz a torlódási pontjában létezik a $b \in Y$ határértéke, ha $x_n \in A$, $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to b$. Tehát egy függvény ott folytonos, ahol létezik a határértéke, és az megegyezik a helyettesítési értékkel. Egészen általános szokás az, hogy függvények értelmezését automatikusan terjesztjük ki mindazokra a pontokra, ahol van határértékük. A folytonosság definíciójához kapcsolódóan azt mondjuk hogy az $f : X \mapsto Y$ függvény egyenletesen folytonos ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta_\varepsilon > 0$ hogy $\rho(x, y) < \delta_\varepsilon$ esetén $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.

A távolság bármelyik változójának folytonos, sőt egyenletesen folytonos függvénye, mert a háromszög egyenlőtlenség miatt $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y)| \le \rho(x, x_0)$. Ráadásul, ρ mint kétváltozós függvény is folytonos, ugyanis $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \le \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0)$. Az $x \in X$ pont és az $A \subset X$ halmaz távolságát $\rho(x, A) := \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$ jelöli. A fentiekhez hasonlóan $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \le \rho(x, y)$, tehát ez a függvény is egyenletesen (sőt Lipschitz szerint is) folytonos.

Weierstrass tétele a következő formában is igaz. [33]

Tétel 10.2. *Ha $f \in C(X)$ és X kompakt, akkor $f \in C_b(X)$, vagyis korlátos, és vannak olyan $a, b \in X$ pontok hogy $f(a) \le f(x) \le f(b) \quad \forall x \in X$.*

---

[32] Az $x_n \to x$ reláció igaz volta pusztán a nyílt (illetve a zárt) halmazok segítségével, a ρ távolság ismerete nélkül is eldönthetō, mert $x_n \to x$ pontosan annyit jelent hogy minden $G \ni x$ nyilt halmaz, véges számú kivétellel, tartalmazza az x_n sorozatot. Viszont az az állítás hogy az x_n sorozat Cauchy, nem dönthetō el csupán a zárt (nyilt) halmazok alapján. Borel tétele szerint az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor kompakt ha nyilt halmazokkal történō lefedésébōl mindig kiválasztható véges sok úgy hogy azok egyesítése is lefedi (tartalmazza) A-t.

[33] Weierstrass tétele még általánosabban, úgy is kimondható hogy kompakt tér folytonos képe is kompakt. A közbülsō értékrōl szóló Bolzano tétel szerint összefüggō tér folytonos képe is összefüggō. Ez utóbbihoz csak a folytonosság következō, harmadik definícióját kell megérteni: $f \in C(X \to Y)$ acsak $U := \{x \in X : f(x) \in V\}$ mindig nyilt ha $V \subset Y$ nyilt, illetve mindig zárt ha V zárt.

Bizony: Ugyanaz mint a számegyenesen. Legyen $\alpha := \inf\{f(x) : x \in X\}$, ami akár $-\infty$ is lehetne. Minden $\alpha_n > \alpha$ számhoz van $a_n \in X$ úgy hogy $f(a_n) < \alpha_n$. Az a_n sorozat bármely konvergens részsorozatának a határértékével $\alpha = f(a)$. □

Az $A, B \subset X$ halmazok távolsága $\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in A\,, y \in B\}$. Ha tehát $C \subset G$ és C kompakt míg G nyilt, akkor $\rho(C, G^c) > 0$ mert $\rho(C, G^c) = \inf\{\rho(x, G^c) : x \in C\}$. Ha a Γ görbét megadó $\phi : [a, b] \mapsto X$ leképezés folytonos, akkor Γ az X kompakt részhalmaza, tehát $\rho(\Gamma, G^c) > 0$ ha $\Gamma \subset G$ és G nyilt. Ez az észrevétel a vonalintegrálok elméletében lehetne hasznos.

Tétel 10.3. *Kompakt téren folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

Bizony: Ha az állítás nem lenne igaz, akkor volna olyan $\varepsilon_0 > 0$ szám, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén olyan $x_n, y_n \in X$ pár hogy $\tilde{\rho}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$, noha $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Az x_n sorozatnak van konvergens részsorozata, $x_{n(k)}$, ennek határértékét x jelöli, $x'_k := x_{n(k)}$, $y'_k := y_{n(k)}$. Mivel $\rho(x'_k, y'_k) \leq 1/n(k)$ és $n(k) \to +\infty$ amikor $k \to +\infty$, a háromszög egyenlőtlenség miatt $y'_k \to x$, vagyis $f(x'_k) \to f(x)$ és $f(y'_k) \to f(x)$. Innen $\tilde{\rho}$ folytonossága miatt a $\tilde{\rho}(f(x'_k), f(y'_k)) \to 0$ ellentmondáshoz jutunk; indirekt feltevésünk szerint ugyanis $\tilde{\rho}(f(x'_k), f(y'_k)) \geq \varepsilon_0 > 0\ \forall k$. □

∗∗ **Egyenletes konvergencia:** Az (X, ρ) metrikus téren értelmezett $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ függvények sorozata egyenletesen konvergál az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε hogy $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X$ ha $n > n_\varepsilon$.

Tétel 10.4. *Ha az $f_n \in C(X)$ sorozat egyenletesen konvergens, akkor a határértéke is folytonos.*

Bizony: Legyen $f(x) := \lim f_n(x)$, $\varepsilon > 0$,és n olyan nagy hogy $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $x_0 \in X$, továbbá $\delta > 0$ olyan kicsi hogy $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ ha $\rho(x, x_0) < \delta$; itt n és x_0 rögzített. Ekkor $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$. □

A $\rho(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ képlet távolságot definiál a folytonos és korlátos függvények $C_b(X)$ halmazában, tehát C_b *metrikus tér,* és benne $\rho(f_n, f) \to 0$, pontosan annyit jelent hogy $f_n \to f$ egyenletesen.

Tétel 10.5. *A $C_b(X)$ tér teljes.*

Bizony: Ha f_n Cauchy sorozat a C_b térben akkor $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|\ \forall x \in X$, tehát minden pontban létezik az $f(x) := \lim f_n(x)$ határérték. Azt kell bizonyítani hogy az $f_n \to f$ konvergencia egyenletes, ehhez jelölje n_ε az $\varepsilon > 0$ számhoz tartozó küszöböt, vagyis $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ ha $n, m > n_\varepsilon$. Ekkor $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < |f_m(x) - f(x)| + \varepsilon$ ha $n, m > n_\varepsilon$. Mivel a jobboldal nem függ n-től, az $m \to \infty$ határátmenet után $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ adódik hacsak $n > n_\varepsilon$, és ez minden $x \in X$ esetén igaz, tehát $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ ha $n > n_\varepsilon$. Azt viszont már tudjuk hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának a határértéke is folytonos. □ ∗∗

Banach fixpont tétele: A $\phi : X \mapsto Y$ leképezés Lipschitz folytonos ha van olyan $L < +\infty$ szám hogy

$$\rho\left(\phi(x), \phi(y)\right) \leq L\tilde{\rho}(x, y) \quad \forall x, y \in X\,.$$

Ha $X = Y$ és $L < 1$ akkor azt mondjuk hogy ϕ kontrakció az (X, ρ) metrikus térben. Az alábbi, Banach féle fixpont tétel alkalmas számos, közvetlenül nem definiálható objektum létezésének és egyértelmű meghatározottságának a bizonyítására.

Tétel 10.6. *Ha az (X, ρ) metrikus tér teljes, és a $\phi : X \mapsto X$ leképezés kontrakció, akkor az $x = \phi(x)$ fixpont egyenletnek pontosan egy megoldása van.*

Bizony: Két megoldás nem lehet, mert akkor $\rho(x, \bar{x}) \leq L\rho(x, \bar{x})$, tehát $L < 1$ miatt $\rho(x, \bar{x}) = 0$. A fixpont létezését iterációval (szukcesszív approximáció) bizonyítjuk. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, és vegyük szemügyre az $x_{n+1} := \phi(x_n)$ rekurzióval definiált x_n sorozatot. Mivel $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq L\rho(x_n, x_{n-1})$, indukcióval $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq L^n\rho(x_1, x_0)$ következik, vagyis bármely $m > n$ esetén

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \cdots + \rho(x_{k+1}, x_k) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n)\,,$$

tehát

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_1, x_0)(L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}) \le \frac{L^n}{1-L}\, \rho(x_1, x_0)\,.$$

Eszerint az x_n sorozat Cauchy, legyen $x := \lim x_n$ a határértéke. Mivel ϕ folytonos, az $x_{n+1} = \phi(x_n)$ egyenlet mindkét oldalán elvégezhető a határátmenet, és az annyira kívánt $x = \phi(x)$ egyenlőség adódik. □

Illusztrációként igazoljuk az implicit függvény létezéséről szóló tételt.

Tétel 10.7. *Ha $g(x_0, y_0) = 0$, $g \in C^1_\delta(x_0, y_0)$, és $g'_y(x_0, y_0) \ne 0$, akkor az x_0 pont egy környezetében egyértelműen adható meg olyan differenciálható ϕ függvény hogy ott $g(x, \phi(x)) = 0$ és $g'_x(x, \phi(x)) + g'_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$.*

Bizony: Tekintve hogy g differenciálható,

$$0 = g(x, y) = g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r_0(x, y)\,,$$

ahol $r_0(x, y) = o(|\mathsf{r} - \mathsf{r}_0|)$, $\mathsf{r} = (x, y)$, $\mathsf{r}_0 = (x_0, y_0)$, az

$$y = \phi(y) := y_0 - \frac{g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + r_0(x, y)}{g'_y(x_0, y_0)}$$

alakba írható át, és így már alkalmazható Banach tétele. Az az X teljes metrikus tér melyben ϕ kontrakció, egy alkalmasan választott $X := [y_0 - \gamma, y_0 + \gamma]$ zárt intervallum, és persze $\rho(y, \tilde{y}) := |y - \tilde{y}|$. Valóban, ha $\gamma > 0$ és $\delta > 0$ elég kicsi, akkor elérhető hogy $y, \tilde{y} \in X$ és $|x - x_0| < \delta$ esetén $|y - \phi(y)| \le \gamma$ legyen, ehhez csak az $r_0(x, y) = o(\gamma + \delta)$ becslést kell figyelembe venni. Mivel

$$r_0(x, y) := g(x, y) - g(x_0, y_0) - g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - g'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\,,$$

és Lagrange szerint $r_0(x, \tilde{y}) - r_0(x, y) = (g'_y(x, \eta) - g'_y(x_0, y_0))(\tilde{y} - y)$, tehát

$$\phi(\tilde{y}) - \phi(y) = \frac{g'_y(x, \eta) - g'_y(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}(\tilde{y} - y)\,.$$

Legyen $q \in (0, 1)$ adott, például $q = 3/4$. Mivel $g'_y \in C(x_0, y_0)$ és $g'_y(x_0, y_0) \ne 0$, a γ, δ számok úgy is megválaszthatóak hogy $|x - x_0| \le \delta$ és $y, \tilde{y} \in [y_0 - \gamma, y_0 + \gamma]$ esetén $|\phi(\tilde{y}) - \phi(y)| \le q|\tilde{y} - y|$ is teljesüljön. Tehát pontosan egy olyan $y = \phi(x)$ szám van hogy $y = \phi(y)$, vagyis $g(x, \phi(x)) = 0$. Az implicit függvény differenciálhatóságát már korábban igazoltuk. □

A bizonyítás gondolatmenete absztrakt formában is működik, igazából nem is kell módosítani ha x véges dimenziós vektor.

10.3. **Lineáris terek.** Az $\mathbb{X}$ valós vagy komplex lineáris tér normált tér ha adott a $\varphi \in \mathbb{X}$ elemek (vektorok) $\|\varphi\| \in \mathbb{R}_+$ hossza (normája). A norma pozitív, homogén, és eleget tesz a háromszög (Minkowski) egyenlőtlenségnek, vagyis

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \ge 0 \ \ \forall \varphi \in \mathbb{X}, \text{ és } \|\varphi\| = 0 \text{ acsak } \varphi = 0\,, \\ \|c\varphi\| = |c|\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathbb{X} \text{ és } c \in \mathbb{R} \text{ vagy } c \in \mathbb{C}, \\ \|\varphi + \psi\| \le \|\varphi\| + \|\psi\| \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

A norma tulajdonságait általában a következő alakban használjuk:

$$\|c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n\| \le |c_1|\|\varphi_1\| + |c_2|\|\varphi_2\| + \cdots |c_n|\|\varphi_n\|\,, \tag{10.3}$$

ahol $\varphi_k \in \mathbb{X}$, c_k pedig valós vagy komplex szám, aszerint hogy a tér valós vagy komplex. A jelölések szintjén a valós és a komplex terek között nincs szembetűnő különbség. Mivel $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, a komplex számokra utaló definíciók és jelölések a valós esetben is érvényesek.

Minden lineáris normált tér egyben metrikus tér is, mert $\rho(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|$ nyilván távolság, tehát a kapcsolódó definíciók értelemszerűen alkalmazhatóak. Metrikus tér a leggyakrabban mint valamely lineáris normált tér altere bukkan fel. Az $A \subset \mathbb{X}$ halmaz korlátos, ha van olyan R szám hogy $\|x\| \le R$ minden $x \in A$ esetén. Az $x_n \in \mathbb{X}$ sorozat akkor korátos, ha az $\|x_n\|$ normák sorozata korlátos. A $\varphi_n \in \mathbb{X}$ sorozat Cauchy ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε küszöb hogy $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ ha $n, m > n_\varepsilon$. A tér teljes ha benne minden Cauchy sorozat konvergens, a teljes lineáris normált terek neve: Banach tér. Az $\mathbb{X}$ lineáris tér véges dimenziós ha van olyan véges részhalmaza, hogy a belőle készített lineáris kombinációk kiadják az egész teret. Véges dimenzióju normált tér mindig teljes. A 7. fejezetben definiált ℓ^p terek a végtelen dimenziós Banach tér legegyszerűbb példái.

Függvényterek: Az X metrikus téren folytonos és korlátos függvények $C_b(X)$ tere lineáris normált tér, $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ a norma, amint már láttuk, ez a tér teljes. Nevezetesek az integrálható függvények terei is. Az (a,b) intervallumon integrálható függvények $L^1(a,b)$ terében $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ a norma, a négyzetesen integrálható függvények is normált teret alkotnak az $\|f\|_2$ normára vonatkozóan, amit $\|f\|_2^2 := \int_a^b |f(x)|^2\,dx$ definiál. [34]

$**$ **Korlátos funkcionálok és operátorok:** Az $\ell : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ homogén lineáris függvény korlátos ha van olyan K szám hogy $\|\ell(x)\| \le K\|x\|$. A legkisebb K korlát az ℓ normája, $\|\ell\| := \sup\{|\ell(x)| : \|x\| \le 1\}$. Lineáris függvény *korlátossága és folytonossága ugyanazt jelenti.* Véges dimenziós téren minden lineáris függvény korlátos, a végtelen dimenziós esetben a lineáris korlátos funkcionál terminus használatos. *Ezek szintén lineáris normált teret alkotnak,* amit $\mathbb{X}^*$ jelöl, és duális tér a neve. Gyakran kényelmes az $\ell(x) \equiv \langle \ell, x\rangle$ írásmód, ahol $\ell \in \mathbb{X}^*$ míg $x \in \mathbb{X}$. Világos hogy $\langle \ell, x\rangle \le \|\ell\|\,\|x\|$, és Banach és Hahn tétele szerint $\|x\| := \sup\{\ell(x) : \ell \in \mathbb{X}^*, \|\ell\| \le 1\}$. Adott $x \in \mathbb{X}$ elemhez keressük azt az $\ell \in \mathbb{X}^*$ elemet, amelynél $\ell(x) = \|x\|$ és $\|\ell\| = 1$. Az $\{\alpha x, \alpha \in \mathbb{C}\}$ altéren $\ell(\alpha x) := \alpha\ell(x) = \alpha\|x\|$. Ha ℓ már az $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ zárt altéren is elkészült, és $z \notin \mathbb{Y}$, akkor a $\mathbb{Z} := \{y + \alpha z : y \in \mathbb{Y}, \alpha \in \mathbb{C}\}$ altéren legyen $\ell(y + \alpha z) := \ell(y)$. Ezzel az eljárással alterek növekvő rendszeréhez jutunk, és ha $\mathbb{X}$ szeparábilis, akkor ℓ indukcióval terjeszthető ki az egész térre. Az általános esetben Hausdorff maximum elvére kell hivatkoznunk, ami a 13. Fejezet elején található. $\square$

Az $f : K_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{C}$ nem feltétlenül lineáris funkcionál differenciálható az $x_0 \in \mathbb{X}$ pontban ha $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + \varepsilon(x_0, x)\|x - x_0\|$, ahol *ell* $\in \mathbb{X}^*$ és $\varepsilon(x_0, x) \to 0$ amint $\|x - x_0\| \to 0$. Az ℓ *elsőrendű lineáris közelítés egyértelmű* mert ha ℓ_1 és ℓ_2 is jó akkor $\langle \ell_1 - \ell_2, x - x_0\rangle = o\|x - x_0\|$. $\square$ Ez az ℓ az f deriváltja az x_0 helyen, amit $\nabla f(x_0) \equiv f'_x(x_0)$ jelöl. Ha $f(x) = \langle \ell, x\rangle$ akkor $f'_x \equiv \ell$. Lagrange tétele iránymenti differenciálással adódik.

Az $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ lineáris leképezés (operátor, transzformáció, tenzor) korlátos ha az $\|\mathsf{A}\| := \sup\{\|\mathsf{A}x\| : \|x\| \le 1\}$ normája véges. Ugyanannak a térnek az operátorait össze lehet szorozni, és a háromszög egyenlőtlenség mellett a definíció egyszerű következménye az $\|\mathsf{AB}\| \le \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{B}\|$ Cauchy egyenlőtlenség is, ami persze mátrixoknál is alkalmazható. Az $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ lineáris korátos operátorok terét $L(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ jelöli. *Ha $\mathbb{X}$ Banach tér akkor $L(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ teljes.* $\heartsuit$ Legyen A_n Cauchy az $L(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ térben, ekkor $\|\mathsf{A}_n x - \mathsf{A}_m x\| \le \|A_n - A_m\|\|x\|$ miatt $\mathsf{A}_n x$ Cauchy, tehát mindig létezik az $\mathsf{A}x := \lim \mathsf{A}_n x$ határérték, ami persze lineáris korlátos operátort definiál mert $\|\mathsf{A}x\| \le K\|x\|$ ha $\|A_n\| \le K\ \forall n \in \mathbb{N}$. Mivel $\|\mathsf{A}x - \mathsf{A}_n x\| = \lim \|\mathsf{A}_m x - \mathsf{A}_n x\|$ amint $m \to \infty$, és $\|\mathsf{A}_n x - \mathsf{A}_m x\| \le \|A_n - A_m\|\|x\| \le \varepsilon\|x\|$ ha n és m elég nagy, $\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_n\| \to 0$ is igaz. $\square$ Ennek alapján mondhatjuk hogy *ha az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor $|z| < R$ esetén abszolút konvergens, és $\|\mathsf{A}\| < R$, akkor $f(\mathsf{A}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathsf{A}^n$ egyértelműen definiált lineáris operátor, és $\|f(\mathsf{A})\| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\,\|\mathsf{A}\|^n$.* $\heartsuit$ Jelölje $f_n(\mathsf{A})$ a sor n-ik részletösszegét, ha $m > n$ akkor a háromszög egyenlőltlenség miatt $\|f_m(\mathsf{A}) - f_n(\mathsf{A})\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|\mathsf{A}\|^k$, tehát $f_n(\mathsf{A})$ Cauchy. $\square$

A $\Phi : K_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{X}$ leképezés akkor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{X}$ helyen, ha van olyan $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ lineáris korlátos operátor hogy $\Phi(x) = \Phi(x_0) + \mathsf{A}\,(x - x_0) + \varepsilon(x_0, x)\|x - x_0\|$, és $\varepsilon(x_0, x) \to 0$ amint $x \to x_0$. Ez az A lineáris közelítés is egyértelmű; $\nabla\Phi(x_0) \equiv \Phi'(x_0)$ jelöli. Ha $\Phi(x) = \mathsf{A}x$ akkor $\Phi' \equiv \mathsf{A}$. Lagrange tétele itt már nem igaz, de az $f_\ell(x) := \langle \ell, \Phi(x)\rangle$, $\ell \in \mathbb{X}^*$ funkcionálra alkalmazva adódik hogy *ha $\|\Phi'(x)\| \le M$ a $C \subset \mathbb{X}$ konvex halmazon, akkor ott* $\|\Phi(y) - \Phi(x)| \le M\|y - x\|$. $\heartsuit$ Lagrange szerint az (x, y) szakaszon van olyan ξ pont hogy

$$f_\ell(y) - f_\ell(x) = \langle f'_\ell(\xi), y - x\rangle = \langle \ell, \Phi'(\xi)(y - x)\rangle \le \|\Phi'(\xi)\|\|y - x\| \le M\|y - x\|$$

[34] Ha az integrált nem Riemann hanem Lebesgue nyomán definiájuk, akkor elmondhatjuk hogy az L^1 és L^2 tér egyaránt teljes; ez is indokolta az integrál modern elméletének kidolgozását.

ha $\|\ell\| \leq 1$, de a becslés már nem függ ℓ-től. $\Box$ A folytonos differenciálhatóság feltétele annyit jelent hogy Φ differenciálható egy $U \subset \mathbb{X}$ halmazon, és ott $\|\Phi'(x) - \Phi'(\tilde{x})\| \to 0$ amint $\|x - \tilde{x}\| \to 0$. [35] $**$

$**$ **Inverz leképezés:** A $\Phi(x) = y$ egyenlet megoldását keressük, Φ az $\mathbb{X}$ Banach tér x_0 pontjának egy környezetében van értelmezve: $\Phi : K_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{X}$ folytonosan differenciálható, $\Phi(x_0) = y_0$ $\Phi'(x_0) \in L(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ invertálható, és a $\Theta : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ inverze is korlátos. [36] *Az y_0 egy környezetében létezik a $\Psi(y)$ inverz függvény, ami az y_0 helyen differenciálható, és $\Psi'(y_0) = \Theta$ éppen a $\Phi'(x_0)$ lineáris operátor inverze.* $\heartsuit$ Feltehetjük hogy $x_0 = y_0 = 0$ és $\Phi'(0) = \mathsf{I}$, ez utóbbi az $x = \Theta\tilde{x}$ helyettesítés terméke. Φ' folytonossága miatt $\|\Phi'(x) - \mathsf{I}\| < 1/2$, ha $\|x\| \leq \delta$ ís elérhető; a fixpont tételt a $D := \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq \delta\}$ zárt gömbben, rögzített y, $\|y\| < \delta/2$ mellett a $T(x) := x + y - \Phi(x)$ leképezésre kívánjuk alkalmazi. A feltételek szerint $T : D \mapsto D$ és $\|T(\tilde{x}) - T(x)\| \leq \|\tilde{x} - x\|/2$, tehát létezík a $\Psi : K_{\delta/2}(0) \mapsto D$ inverz függvény, és az $y_0 = 0$ helyen folytonos. $x = \Psi(y)$ esetén $\|x\| \leq \|y\| + \|x\|/2$, vagyis $\|x\| \leq 2\|y\|$, tehát $\Psi'(0)$ létezése, és $\Psi'(0) = \mathsf{I}$ a Φ differenciálhatóságának $y = x + \varepsilon(0, x)x$ egyenletéből következík. $\Box$

Azt kell még megmutatni hogy az adott környezetben $\Phi'(x)$ invertálható, és az inverze is korlátos. $\heartsuit$ Mivel $\|\mathsf{I} - \Phi'(x)\| \leq 1/2$, a $\sum_{n=0}^\infty (\mathsf{I} - \Phi'(x))$ sor normában konvergens, és az $L(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ tér teljessége miatt létező összege éppen a $\Phi'(x)$ inverze, $\Psi'(y)$. $\Box$ $**$

$**$ **Perturbációszámítás:** Lineáris normált térben gyakori az $x = \Phi(\theta, x) + y$ típusú feladat, ahol $y \in \mathbb{X}$ és $\theta \in \mathbb{R}$ adott, $x \in \mathbb{X}$ az ismeretlen. Tegyük fel hogy a $\theta = 0$ esetben x_0 a megoldás, és differenciálással vagy másképp, $\Phi(\theta, x) - \Phi(0, x_0) = a(\theta) + \mathsf{A}\,(x - x_0) + r(\theta, x)$ adódik, ahol $a \in \mathbb{X}$, $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ lineáris leképezés, és az r maradéktag a $(0, x_0)$ pont egy környezetében eleget tesz az $\|r(\theta, x) - r(\theta, \bar{x})\| \leq c(\theta)\|x - \bar{x}\|$ Lipschitz feltételnek úgy, hogy $c(\theta) \to 0$ amint $\theta \to 0$. Ha létezik és korlátos az $(\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}$ rezolvens, vagyis az eredeti egyenlet az

$$x = x_0 + (\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} a(\theta) + (\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} r(\theta, x) + (\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} y$$

alakba írható át, és $\|(\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} x\| \leq K\|x\|$, akkor $\|x - \bar{x}\| \leq c(\theta)K\|x - \bar{x}\|$, tehát a fixpont tétel alkalmazható az $x = \phi(\theta, y)$ megoldás meghatározására a $\theta = 0$ és $x = x_0$ hely egy környezetében. $**$

Euklideszi terek: Euklideszi az olyan valós vagy komplex $\mathbb{X}$ lineáris normált tér, amelyben a normát a $\langle\varphi, \psi\rangle$ skaláris szorzat segítségével definiáljuk: $\|\varphi\|^2 := \langle\varphi, \varphi\rangle$. A skaláris szorzat valós vagy komplex értékű pozitív bilineáris forma, vagyis

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, \varphi\rangle &\geq 0 \ \ \forall\varphi \in \mathbb{X}, \text{ és } \langle\varphi, \varphi\rangle = 0 \text{ acsak } \varphi = 0\,, \\
\langle\varphi, \psi\rangle &= \overline{\langle\psi, \varphi\rangle} \quad \forall\,\varphi, \psi \in \mathbb{X}\,, \\
\langle c\varphi, \psi\rangle &= c\langle\varphi, \psi\rangle \text{ vagyis } \langle\varphi, c\psi\rangle = \bar{c}\langle\varphi, \psi\rangle \ \ \forall\varphi \in \mathbb{X} \text{ és } c \in \mathbb{C}\,, \\
\langle\varphi_1 + \varphi_2, \psi\rangle &= \langle\varphi_1, \psi\rangle + \langle\varphi_2, \psi\rangle \quad \text{vagyis} \\
\langle\varphi, \psi_1 + \psi_2\rangle &= \langle\varphi, \psi_1\rangle + \langle\varphi, \psi_2\rangle \ \forall\ \varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in \mathbb{X}\,.
\end{aligned} \tag{10.4}$$

A második és harmadik sorban $\bar{z}$ a $z \in \mathbb{C}$ konjugáltja, persze $z = \bar{z}$ ha z valós szám. Hasznos a

$$2\|\varphi\|^2 + 2\|\psi\|^2 = \|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 \tag{10.5}$$

paralelogramma egyenlőség is, ami a norma axiómáival együtt ekvivalens a (10.4) posztulátumokkal, lásd 13. fejezet.

Cauchy egyenlőtlenség: Mivel $\langle\varphi + \alpha\lambda\psi, \varphi + \alpha\lambda\psi\rangle \geq 0$ akkor is ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\lambda := \langle\varphi, \psi\rangle$,

$$0 \leq \|\varphi\|^2 + \alpha\lambda\langle\psi, \varphi\rangle + \alpha\bar{\lambda}\langle\varphi, \psi\rangle + \alpha^2|\lambda|^2\|\psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2\alpha|\lambda|^2 + \alpha^2|\lambda|^2\|\psi\|^2\,.$$

Az utolsó sor végén látható α ismeretlenű másodfokú egyenletnek nem lehet két valós gyöke, tehát $|\lambda|^4 - |\lambda|^2\|\varphi\|^2\|\psi\|^2 \leq 0$, vagyis minden $\varphi, \psi \in \mathbb{X}$ pár eleget tesz a nevezetes $|\langle\varphi, \psi\rangle| \leq$

---

[35] Gyenge differenciálhatósagról beszélünk olyankor, amikor csak az $f_\varphi(x) := \langle\varphi, \Phi(x)\rangle$, $\varphi \in \mathbb{X}^*$ funkcionálok diferenciálhatóságát követeljük meg.

[36] Θ korlátossága következik Banach egyik tételéből: *Ha $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ kölcsönösen egyértelmű és $\mathbb{X}$ a képtere, akkor az inverze is korlátos.*

$\|\varphi\|\|\psi\|$ Cauchy egyenlőtlenségnek. Azt is látjuk hogy az egyenlőség feltétele a φ és ψ párhuzamossága, $\varphi\|\psi$, vagyis $\varphi = c\psi$ valamilyen $c \in \mathbb{C}$ szorzóval. Innen már egyszerűen következik a távolság definíciójához nélkülözhetetlen

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \quad \forall\, \varphi, \psi \in \mathbb{X} \tag{10.6}$$

Minkowski (háromszög) egyenlőtlenség. Valóban, a skaláris szorzat kifejtésével

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\varphi, \psi\rangle \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|\|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$$

adódik, és éppen ezt kellett bizonyítani. Tehát minden Euklideszi tér egyben lineáris normált tér is, az ott bevezetett fogalmak értelemszerűen alkalmazhatóak. Cauchy egyenlőtlensége szerint a minden $\phi \in \mathbb{X}$ elemhez hozzárendelhető $\ell_\phi(\varphi) := \langle\phi, \varphi\rangle$ lineáris funkcionál korlátos, és $\|\ell_\phi\| = \|\phi\|$. Az is látható hogy $\|\phi\| = \sup\{\mathrm{Re}\,\langle\phi, \varphi\rangle : \|\varphi\| \leq 1\}$, ha tehát $\langle\varphi, \psi\rangle = \langle\phi, \varphi\rangle \;\forall\, \psi \in \mathbb{X}$, akkor $\varphi = \phi$.

Euklideszi térnek geometriai szerkezete van, például ha $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$, akkor azt mondjuk hogy φ és ψ ortogonális (merőleges) egymásra, amit $\varphi \perp \psi$ jelöl. Mivel két vektor mindig egy síkban fekszik, $\langle\varphi, \psi\rangle = \|\varphi\|\,\|\psi\|\cos\alpha$ a φ és ψ vektorok α szögét is definiálja. Pitagórasz tétele is igaz: ha $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$, ahol $\varphi_k \perp \varphi_j$ ha $k \neq j$, akkor $\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\| + \cdots + \|\varphi_n\|^2$. Ha $\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n$, ahol $\{\varphi_k\}$ ortonormált rendszer, vagyis $\|\varphi_k\| = 1$ és $\langle\varphi_k, \varphi_j\rangle = 0$ ha $k \neq j$, akkor $c_k = \langle\psi, \varphi_k\rangle$. A c_k együtthatókat minden $\psi \in \mathbb{X}$ elemhez hozzá lehet rendelni, de az nem biztos hogy $\psi = \phi := \sum c_k\varphi_k$; általában csak annyit mondhatunk hogy $\psi - \phi$ a φ_k rendszer mindegyik elemére merőleges. *Véges dimenziós térben mindig van olyan véges ortonormált rendszer (bázis) ami szerint a fenti módon minden elem előállítható.* A végtelen dimenziós teljes Euklideszi terek neve: Hilbert tér.

$**$ **Teljes ortonormált rendszer:** Pitagorasz tételéből következik hogy ha $\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ ortonormált rendszer a H Hilbert térben, és $\sum |c_k|^2 < +\infty$, akkor a $\sum c_k\varphi_k$ sor részletösszegei Cauchy sorozatot alkotnak, tehát *az ilyen sor konvergens, és* $c_k = \langle f, \varphi_k\rangle$ *ha* f *az összege.* A $\{\varphi_k\}$ ortonormált rendszer teljes ha $\langle\phi, \varphi_k\rangle = 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}$ csak úgy lehetséges ha $\phi = 0$. A fentiek szerint *Hilbert térben teljes ortonormált rendszer szerint minden elem kifejthető:* $f = \sum c_k\varphi_k$, ahol $c_k := \langle f, \varphi_k\rangle$, mert ♡ Pitagorasz tétele miatt az együtthatók sora négyzetesen konvergens, tehát létezik a $g := \sum c_k\varphi_k$ összeg. Mivel $f - g$ mindegyik báziselemre merőleges, $f = g$. $\square$ $**$

A d-dimenziós tér: Legtöbbet az $\mathbb{R}^d$ d-dimenziós térről lesz szó, ennek elemei a d hosszúságú valós sorozatok (vektorok); $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ a tér általános eleme. Az x_k komponenseket akkor is koordinátáknak nevezzük ha koordináta rendszerre nem hivatkozunk. A sík, illetve a tér pontjait $\mathsf{r} = (x, y)$, illetve $\mathsf{r} = (x, y, z)$ alakban reprezentáljuk. Ha azt akarjuk hangsúlyozni hogy az $\mathbb{R}^3$ tér (x, y, z) pontja vektor, akkor az $\mathsf{r} = x\,\sigma + y\,\mathsf{j} + z\,\mathsf{k}$ jelölést használjuk. Az elemek összeadása koordinátánként történik, és a valós számmal való szorzást is így végezzük. Az $\mathbb{R}^d$ tér normáját $|\mathsf{x}| := (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ definiálja. A norma pozitív és homogén tulajdonsága nyilvánvaló, a Minkowski egyenlőtlenséget az Euklideszi tereknél tárgyaltuk. Két pont távolsága

$$\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = |\mathsf{x} - \mathsf{y}| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}\,, \tag{10.7}$$

ahol, szokás szerint, $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ míg $\mathsf{y} = (y_1, y_2, ..., y_d)$. Látjuk hogy $|x_k - y_k| \leq |\mathsf{x} - \mathsf{y}|$, és $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ esetén $|\mathsf{x}_n| \to |\mathsf{x}|$. Az is nyilvánvaló hogy az $\mathsf{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, ..., x_{n,d})$ sorozat pontosan akkor konvergál az $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ határértékhez ha mindegyik koordináta konvergál, vagyis mindegyik $k = 1, 2, ..., d$ mellett $x_{n,k} \to x_k$ amikor $n \to +\infty$. Innen az is látszik hogy az $\mathbb{R}^d$ tér teljes. Valóban, ha x_n Cauchy sorozat $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq |\mathsf{x}_n - \mathsf{x}_m|$, vagyis mindegyik koordináta Cauchy sorozat $\mathbb{R}$-ben, és mint ilyen konvergens. Ha viszont $x_{n,k} \to x_k \;\forall k$, akkor $|\mathsf{x}_n - \mathsf{x}| \to 0$, ahol $\mathsf{x} := (x_1, x_2, ..., x_d)$.

Bolzano és Weirstrass tétele a következő formában igaz.

Tétel 10.8. *Minden* $\mathsf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ *korlátos sorozatnak van torlódási pontja.*

Bizony: Az egydimenziós tétel szerint mindegyik koordináta sorozat tartalmaz konvergens részsorozatot, de nekünk egyidejűleg konvergáló koordináták kellenek. Ezért először az első koordináták alapján kiválasztjuk az $n_1 < n_2 < \cdots$ sorszámokat, amelyek mentén $x_{n,1}$ konvergál, a sorozat többi elemét elhagyjuk. Igy olyan sorozatot kapunk, ahol az első koordináták sorozata már konvergens. A sorozat ritkítását a második koordináták szerint folytava olyan sorozathoz jutunk, ahol a második koordináták is konvergálnak, és így tovább. d lépés után olyan részsorozatot kapunk, melynek mindegyik koordinátája konvergens. □

Ez a tétel úgy is megfogalmazható, hogy az $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz, mint az $\mathbb{R}^d$ metrikus tér altere, akkor és csak akkor kompakt ha korlátos és zárt. A halmaz zártsága azért fontos, hogy a kiválasztott sorozat határértéke is a halmazhoz tartozzon. Ha viszont A nem korlátos, akkor van olyan $\mathsf{x}_n \in A$ sorozat hogy $|\mathsf{x}_n| \to +\infty$, tehát biztosan nincs konvergens részsorozata.

Az $\mathbb{R}^d$ téren sok más norma is definiálható, például $|\mathsf{x}|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|$ ha $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, vagy $\|\mathsf{x}\|_\infty := \max |x_k|$. Ezek a normák nem származtathatóak skaláris szorzatból, de a konvergencia fogalma mindegyiknél ugyanaz, véges dimenziós térben ez az egyes koordináták konvergenciáját jelenti.

Az $L^2(a, b)$ tér $\|f\|_2$ normája az $\langle f, g\rangle_2 := \int_a^b fg\, dx$ skaláris szorzatból keletkezik, $\|f\|_2^2 := \langle f, f\rangle$, tehát igaz a Schwarz egyenlőtlenség:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx \tag{10.8}$$

11. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

A kétváltozós függvényekhez képest kevés az érdemi ujdonság, a változók elszaporodása miatt egyre fontosabbak a jelölések. Az $\mathbb{R}^d$ tér általános eleme $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$.

11.1. **Többváltozós függvények differenciálása.**

Az $f(\mathsf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_d)$ függvény parciális deriváltjait

$$\frac{\partial f(\mathsf{x})}{\partial x_k} := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_1, x_2, ..., x_k + h, ..., x_d) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_d)\right)$$

definiálja, $\partial f/\partial x_k \equiv f'_{x_k} \equiv f'_k \equiv \partial_{x_k} f \equiv \partial_k f$, továbbá $\nabla f := (f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_d})$ a gradiens, $\nabla^2 f := \left(f''_{x_k x_j}\right), k, j = 1, 2, ..., d$ a Hesse mátrix. Az f függvény differenciálható a $G \subset \mathbb{R}^d$ értelmezési tartományának egy $\mathsf{x} \in G$ belső pontjában, ha van olyan $\mathsf{a}(\mathsf{x}) \in \mathbb{R}^d$ vektor hogy

$$f(\mathsf{y}) = f(\mathsf{x}) + \langle \mathsf{a}(\mathsf{x}), \mathsf{y} - \mathsf{x}\rangle + o(|\mathsf{y} - \mathsf{x}|), \tag{11.1}$$

amit $f \in D^1(\mathsf{x})$ jelöl; $f \in C^1(\mathsf{x})$ az első, $f \in C^2(\mathsf{x})$ a második parciális deriváltak folytonosságát jelenti az x pontban. A következő tételek lényegében ugyanúgy bizonyíthatók, mint a kétváltozós esetben. Ha $f \in D^1(\mathsf{x})$ akkor a definícióban szereplő $\mathsf{a}(\mathsf{x})$ vektor egyértelműen meghatározott, és $\mathsf{a}(\mathsf{x}) = \nabla f(\mathsf{x})$, tehát $df(\mathsf{x}) = \langle \nabla f(\mathsf{x}), d\mathsf{x}\rangle \equiv \nabla f \cdot d\mathsf{x}$. Folytonosan differenciálható függvény mindig differenciálható, vagyis $D^1(\mathsf{x}) \subset C^1(\mathsf{x})$, és Young tétele szerint kétszer folytonosan differenciálható függvény Hesse mátrixa szimmetrikus.

Az $y = f(\mathsf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathsf{x}_0), \mathsf{x} - \mathsf{x}_0\rangle$ lineáris függvény gráfja az f függvény érintő hipersíkja az x_0 pontban. A függvény gráfja, és az érintő hipersík is, az $\mathbb{R}^{d+1}$ tér részhalmaza. Látható hogy az érintősík normálvektora éppen a $(-\nabla f(\mathsf{x}_0), -1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektor. Legyen $\mathsf{h} \in \mathbb{R}^d$ egységvektor, és $g_\mathsf{h}(t) := f(\mathsf{x}_0 + t\mathsf{h})$, ekkor $g'_\mathsf{h}(0) = \langle \nabla f(\mathsf{x}_0), \mathsf{h}\rangle$ az f iránymenti deriváltja. A Cauchy egyenlőtlenség szerint $\langle \nabla f(\mathsf{x}_0), \mathsf{h}\rangle \leq |\nabla f(x_0, y_0)|$, és $\mathsf{h} = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$, $\lambda > 0$ az egyenlőség feltétele, tehát a gradiens a függvény leggyorsabb növekedésének iránya.

Konvex függvények: Azt mondjuk hogy f konvex, ha mindenütt az érintő hipersikja felett van, de a szóhasználat pontosításra szorul. $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex halmaz ha bármely két $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in K$ ponttal együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza. A $K \subset \mathbb{R}^d$ nyilt konvex halmazon értelmezett f valós függvény konvex függvény ha minden $\mathsf{x}_0 \in K$ ponthoz van olyan $\mathsf{a}_0 \in \mathbb{R}^d$ vektor hogy $f(\mathsf{x}) \geq f(\mathsf{x}_0) + \langle \mathsf{a}_0, \mathsf{x} - \mathsf{x}_0\rangle$ $\forall \mathsf{x} \in K$. Ha $f \in D^1(\mathsf{x}_0)$, akkor persze $\mathsf{a}_0 = \nabla f(\mathsf{x}_0)$. A $d = 1$ esetben is igen hasznos volt a Jensen egyenlőtlenség.

Tétel 11.1. *Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ és $f : K \mapsto \mathbb{R}$ konvex, továbbá $\mathsf{x}_k \in K$, $p_k \geq 0$, $k = 1,2,...,n$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ és $\bar{\mathsf{x}} := p_1\mathsf{x}_1 + p_2\mathsf{x}_2 + \cdots + p_n\mathsf{x}_n$, akkor $\bar{\mathsf{x}} \in K$ és*

$$p_1 f(\mathsf{x}_1) + p_2 f(\mathsf{x}_2) + \cdots + p_n f(\mathsf{x}_n) \geq f(\bar{\mathsf{x}}).$$

Bizony: Mivel definíció szerint $f(\mathsf{x}_k) \geq f(\bar{\mathsf{x}}) + \langle \mathsf{a}_0, \mathsf{x}_k - \bar{\mathsf{x}} \rangle$, ezeket p_k-val átszorozva és összeadva kapjuk az állítást. □

A lineáris, és a pozitív definit mátrixu kvadratikus függvények mind konvexek. A definícióból látszik az is hogy konvex függvény egyváltozós, monoton növő konvex függvénye szintén konvex. Tehát $f_1(\mathsf{x}) := \exp\langle \mathsf{a}, \mathsf{x} \rangle$ és $f_2(\mathsf{x}) := \exp\langle \mathsf{x}, A\mathsf{x} \rangle$ konvex függvények ha $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^d$, illetve $A > 0$ mátrix.

A láncszabály: Az összetett függvények differenciálását megadó láncszabályok megértését és megjegyzését megkönnyíti az a konvenció, hogy a tér elemei, és a $d\mathsf{x}$ szimbólum is oszlopvektor, míg ∇ és ∇f sorvektornak tekintendő. Az $\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \equiv \mathsf{x} \cdot \mathsf{y}$ skaláris szorzat értelmezésekor persze közömbös hogy a vektorok sor/oszlop természetéről mit képzelünk. Meg kell jegyezni hogy a $\nabla^2 f$ jelölés esetében ∇^2 a ∇ vektor önmagával képezett diadikus szorzata, míg $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, vagyis

$$\Delta f(\mathsf{x}) := \frac{\partial^2 f(\mathsf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(\mathsf{x})}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f(\mathsf{x})}{\partial x_d^2} \tag{11.2}$$

a Laplace operátor.

Valamennyi láncszabály úgy szól, hogy differenciálható függvényekből összetett függvény is differenciálható, és ha $h(\mathsf{x}) := f(g(\mathsf{x}))$ akkor

$$dh(\mathsf{x}) = \nabla h(\mathsf{x}) \cdot d\mathsf{x} = \nabla f(g) \cdot dg = \nabla f(g(\mathsf{x})) \cdot \nabla g(\mathsf{x}) \cdot d\mathsf{x}, \tag{11.3}$$

ahol x többnyire vektor, de f, g, h is lehet az. Ilyenkor a gradiensük mátrix, és (11.3) jobboldalát a mátrixok szorzási szabálya szerint képezzük. Az x, $d\mathsf{x}$, f, g, h vektorokat oszlopvektorként érdemes elképzelni, míg ∇ sorvektor, és ∇ a $\nabla\cdot$ formális szorzás elvégzése után kapott mátrix lesz. Például, ha $\mathsf{f} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^n$, vagyis $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \big(f_1(\mathsf{x}), f_2(\mathsf{x}), ..., f_n(\mathsf{x})\big)$, akkor $\nabla \mathsf{f}(\mathsf{x})$ n sorból és d oszlopból álló mátrix, melynek sorai rendre a $\nabla f_1(\mathsf{x})$, $\nabla f_2(\mathsf{x})$,...,$\nabla f_n(\mathsf{x})$ sorvektorok,

$$\nabla f_k(\mathsf{x}) = \left(\frac{\partial f_k(\mathsf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f_k(\mathsf{x})}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f_k(\mathsf{x})}{\partial x_d} \right) \tag{11.4}$$

a $\nabla \mathsf{f}$ mátrix k-adik sora. Az így kapott Jacobi mátrix oszlopai a

$$\partial \mathsf{f}(\mathsf{x})/\partial x_1, \partial \mathsf{f}(\mathsf{x})/\partial x_2, ..., \partial \mathsf{f}(\mathsf{x})/\partial x_d \tag{11.5}$$

vektorok, a j-edik oszlop pedig

$$\frac{\partial \mathsf{f}(\mathsf{x})}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1(\mathsf{x})}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2(\mathsf{x})}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial f_n(\mathsf{x})}{\partial x_j} \right). \tag{11.6}$$

A legegyszerűbb esetben $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tehát $h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Ilyenkor

$$\nabla h(\mathsf{x}) = f'(g(\mathsf{x})) \nabla g(\mathsf{x}). \tag{11.7}$$

Ha $\mathsf{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ és $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, akkor $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és

$$h'(t) = \nabla f(\mathsf{g}(t)) \cdot \mathsf{g}'(t) = \langle \nabla f, \mathsf{g}' \rangle = f'_{x_1}(\mathsf{g}) g'_1(t) + f'_{x_2}(\mathsf{g}) g'_2(t) + \cdots + f'_{x_d}(\mathsf{g}) g'_d(t), \tag{11.8}$$

ahol $\mathsf{g} = (g_1, g_2, ..., g_d)$ és $g_k = g_k(t)$. Innen a $\mathsf{g}(t) := \mathsf{x}_0 + t(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0)$ választással kapjuk Lagrange tételét, és a maradéktagot. Valóban, $h(0) = f(\mathsf{x}_0)$, $h(1) = f(\mathsf{x})$ és $h'(t) = \langle \nabla f(\mathsf{g}(t)), \mathsf{x} - \mathsf{x}_0 \rangle$, tehát $f \in D^1(\mathsf{x}_0)$ esetén

$$f(\mathsf{x}) = f(\mathsf{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{\xi}), \mathsf{x} - \mathsf{x}_0 \rangle, \tag{11.9}$$

ahol $\boldsymbol{\xi}$ az x_0 és x pontokat összekötő szakasz pontja. Ha most $f'_{x_k} \in D^1(\mathsf{x}_0)$ $\forall k = 1,2,...,d$, akkor $h''(t) = \langle \mathsf{x} - \mathsf{x}_0, \nabla^2 f(g(t))(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0) \rangle$, tehát

$$f(\mathsf{x}) = f(\mathsf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathsf{x}_0), \mathsf{x} - \mathsf{x}_0 \rangle \; + \frac{1}{2} \langle \mathsf{x} - \mathsf{x}_0, \nabla^2 f(\boldsymbol{\xi})(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0) \rangle, \tag{11.10}$$

ahol ξ közbülső érték, míg a szokásos jelölésekkel

$$\langle \mathsf{x}-\mathsf{x}_0, \nabla^2 f(\boldsymbol{\xi})(\mathsf{x}-\mathsf{x}_0)\rangle = \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} f''_{x_k x_j}(\boldsymbol{\xi})(x_k - x_{0,k})(x_j - x_{0,j})\,. \tag{11.11}$$

A $d^2 f := \langle dx, \nabla^2 f\, dx\rangle$ kvadratikus formát az f második differenciáljának nevezzük.

A láncszabály harmadik esete az, amikor $g:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ és $\mathsf{f}:\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^n$, tehát $h:\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Ilyenkor $\nabla\mathsf{f}$ n sorból és d oszlopból álló mátrix, és $\nabla h(\mathsf{x}) = \nabla g(\mathsf{f}(\mathsf{x}))\nabla\mathsf{f}(\mathsf{x})$, vagyis ha $g = g(y_1, y_2, ..., y_n)$ és $\mathsf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$, akkor

$$\frac{\partial h(\mathsf{x})}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(\mathsf{f})}{\partial y_j}\frac{\partial f_j(\mathsf{x})}{\partial x_k} \tag{11.12}$$

Végül, ha g vektor, akkor h is az lesz, és a fenti szabályt koordinátáként alkalmazva $\nabla\mathsf{h}(\mathsf{x}) = \nabla\mathsf{g}(\mathsf{f})\nabla\mathsf{f}(\mathsf{x})$ adódik, ahol most már mindhárom ∇ mátrixot eredményez.

A poláris transzformációhoz hasonlóan alkalmazzuk a térben a $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$ és $h = z$ hengerkoordinátákat, vagyis $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ és $z = h$. A nullától különböző parciális deriváltak most is $\rho'_x = x/\rho$, $\rho'_y = y/'rho$ és $\varphi'_x = -y/\rho^2$, $\varphi'_y = x/\rho^2$, ha tehát $g(\rho,\varphi,h) := f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h)$, akkor a Laplace operátor (9.20) poláris alakjából kapjuk hogy

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial g(\rho,\varphi,h)}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g(\rho,\varphi,h)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 g(\rho,\varphi,h)}{\partial h^2}\,. \tag{11.13}$$

Az r,φ,ϑ gömbi koordinátáknál $x = r\sin\vartheta\,\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\,\sin\varphi$ és $z = h$, vagyis $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, φ $=\mathrm{arctg}(y/x)$ és ϑ $=\mathrm{arctg}(\rho/z)$, ahol $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ugyanaz mint a hengerkoordinátáknál. Mivel $r = \sqrt{\rho^2+h^2}$ és ϑ $=\mathrm{arctg}(\rho/h)$, $r'_\rho = \rho/r$, $r'_h = h/r$ és $\vartheta'_\rho = \rho/r$, $\vartheta'_h = -h/r$, (11.13) alapján, a $g(r,\varphi,\vartheta) = f(r\sin\vartheta\,\cos\varphi, r\sin\vartheta\,\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ jelöléssel

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial g}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} \tag{11.14}$$

lesz a Laplace operátor gömbi koordinátás alakja.

Lagrange tétele szerint konvex halmazon kétszer folytonosan differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, ha a Hesse mátrixa mindenütt (de nem feltétlenül szigorú értelemben) pozitív definit. Ha az $f: G \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek az értelmezési tartomány x belső pontjában lokális szélsőértéke van, akkor $\nabla f(\mathsf{x}) = 0$, vagyis x az f stacionárius (kritikus) pontja. Ez a szükséges feltétel az egyváltozós tétel egyszerű következménye. Az (11.10) formula a szélsőérték elégséges feltételét is megadja. Ha $f \in C^2(\mathsf{x})$, $\nabla f(\mathsf{x}) = 0$, és a $\nabla^2 f(\mathsf{x})$ mátrix szigorúan pozitív, illetve negatív definit, akkor f-nek az x pontban szigorú lokális minimuma, illetve maximuma van.

Inverz leképezés: Az előző fejezetben Banach térben is igazoltuk inverz leképezés lokális létezését és differenciálhatóságát: Ha $\mathsf{f} \in C^1(\mathsf{y}_0)$ és a $\nabla\mathsf{f}(\mathsf{y}_0)$ Jacobi mátrix nem szinguláris, akkor az x_0 egy környezetében létezik az $\mathsf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathsf{x})$ inverz leképezés, vagyis ott $\mathsf{f}(\boldsymbol{\psi}(\mathsf{x}))$, és a $\nabla\boldsymbol{\psi}(\mathsf{x})$ mátrix a $\nabla\mathsf{f}(\mathsf{y})$ mátrix inverze.

Implicit függvényrendszer: A $\Gamma := \{(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in G : \mathsf{g}(\mathsf{x},\mathsf{y}) = 0\}$ halmazt (felület) vizsgáljuk, ahol $G \subset \mathbb{R}^{d+r}$, $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $\mathsf{y} = (y_1, y_2, ..., y_r)$, és $\mathsf{g} = (g_1, g_2, ..., g_r)$. Legyen $(\mathsf{x}_0, \mathsf{y}_0) \in \Gamma$ a $g_k : G \mapsto \mathbb{R}$ függvények közös G értelmezési tartományának belső pontja. Feltesszük hogy mindegyik $g_k \in C^1(\mathsf{x}_0, \mathsf{y}_0)$, és hogy Γ üres ne legyen, $r \le d$. Olyan $\mathsf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathsf{x})$ vektor értékű függvényt keresünk hogy $\mathsf{g}(\mathsf{x}, \boldsymbol{\psi}(\mathsf{x})) = 0$, legalábbis az x_0 pont egy környezetében. Jelölje $\nabla_x\mathsf{g}$ és $\nabla_y\mathsf{g}$ a $\partial g_k/\partial x_j$, $j = 1, 2, ..., d$, illetve $\partial g_k/\partial y_i$, $i = 1, 2, ..., r$ parciális deriváltakból álló Jacobi mátrixokat. *Ha* $\nabla_y\mathsf{g}(\mathsf{x}_0, \mathsf{y}_0)$ *nem szinguláris, akkor az* x_0 *egy környezetében létezik és differenciálható a* $\boldsymbol{\psi}$ *implicit függvény, és* $\nabla_x\mathsf{g}(\mathsf{x}, \boldsymbol{\psi}(\mathsf{x})) + \nabla_y\mathsf{g}(\mathsf{x}, \boldsymbol{\psi}(\mathsf{x}))\nabla_x\boldsymbol{\psi}(\mathsf{x}) = 0$.

Ez a tétel a kétváltozós mintájára is bizonyítható, de egyszerűbb az inverz függvény tételéből levezetni. Ehhez csak a $g_k(\mathsf{x},\mathsf{y}) = 0$, $k = 1, 2, ..., r$ egyenletek elé kell az $x_j = x_j$, $j = 1, 2, ..., d$ triviális egyenleteket beírni. Az így kapott rendszer inverze éppen $\mathsf{x} = \mathsf{x}$ és $\mathsf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathsf{x})$ lesz.

Feltételes szélsőérték: Ez a probléma elég bonyolult, de nem nehéz. Mindenesetre csak a szükséges feltételt ismertetjük, a feladat a következő. Az $f: G \mapsto \mathbb{R}$ n-változós függvény szélső értékeit keressük a $g_1(\mathsf{x}) = g_2(\mathsf{x}) = \cdots = g_r(\mathsf{x}) = 0$ feltételek mellett, ahol $r < n$ és $g_k : G \mapsto \mathbb{R}$ $\forall k$; feltesszük hogy valamennyi függvény folytonosan differenciálható az $\mathsf{x} \in G$ belső pontban. Ha itt feltételes lokális szélsőérték van, akkor $\nabla f(\mathsf{x})$ eleme a $\nabla g_1(\mathsf{x})$, $\nabla g_2(\mathsf{x})$,...,$\nabla g_r(\mathsf{x})$ vektorok által kifeszített altérnek, vagyis találhatók olyan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ számok hogy

$$\nabla f(\mathsf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathsf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathsf{x}) + \cdots + \lambda_r \nabla g_r(\mathsf{x})\,, \tag{11.15}$$

továbbá a $g_1(\mathsf{x}) = g_2(\mathsf{x}) = \cdots = g_r(\mathsf{x}) = 0$ feltételek is teljesülnek. Eszerint $n + r$ egyenletünk van ugyanannyi valós ismeretlen meghatározására. Ez az eljárás úgy is felfogható, hogy a

$$h(\mathsf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathsf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathsf{x}) - \lambda_2 g_2(\mathsf{x}) - \cdots - \lambda_r g_r(\mathsf{x})$$

$n + r$-változós függvény stacionárius pontjait keressük, ahol $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$. Ha tehát az $(\mathsf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+r}$ helyen a $h(\mathsf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ függvénynek lokális szélsőértéke van, és a $g_k(\mathsf{x})$ feltételek is teljesülnek, akkor x a lokális szélsőérték feladat (egyik) megoldása, de az már nem biztos hogy mindegyik megoldás szerepel a h stacionárius pontjainak x komponensei között. Az (11.15) feltétel szükségessége csak további megszorítások mellett igazolható.

Mivel (11.15) a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ segédváltozókra (Lagrange multiplikátorok) felírt, n egyenletből álló lineáris rendszer, a számolást többnyire ennek megoldásával kezdjük. Mind az n egyenlet persze nem lesz minden $\mathsf{x} \in G$ esetén kielégíthető $r < n$ darab λ_k számmal, tehát $n - r$ egyenletünk marad a szóbajöhető x értékek halmazának szűkítésére, amit aztán a $g_k(\mathsf{x}) = 0$ feltételek felhasználásával fejezhetünk be.

A (11.15) formula alkalmazhatóságához tegyük fel hogy a $\nabla \mathsf{g}(\mathsf{x})$ $r < n$ sorból és n oszlopból álló Jacobi mátrix rangja r, és válasszunk ki $x_1, x_2, ..., x_n$ közül r darabot úgy hogy a hozzájuk tartozó négyzetes mátrix rangja éppen r, tehát van inverze. Ezeket $\mathsf{y} = (y_1, y_2, ..., y_r)$ jelöli, a maradék $\mathsf{u} = (u_1, u_2, ..., u_d)$, ahol $d = n - r$, tehát az x vektort $\mathsf{x} = (\mathsf{u}, \mathsf{y})$ módon particionáltuk; az x_k változók eredeti sorrendje nem érdekes. Ennek megfelelően $f(\mathsf{u}, \mathsf{y}) \equiv f(\mathsf{x})$ és $g_k(\mathsf{u}, \mathsf{y}) \equiv g_k(\mathsf{x})$, $k = 1, 2, ..., r$, továbbá a $\nabla_y \mathsf{g}(\mathsf{u}, \mathsf{y})$, $r \times r$ méretű mátrix invertálható. Az implicit függvényekről szóló tétel szerint az u pont egy kis környezetében van olyan $\mathsf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathsf{u})$ leképezés hogy $g_k(\mathsf{u}, \boldsymbol{\psi}(\mathsf{u})) = 0 \; \forall\, k$. Ha tehát a G halmaz (u, y) belső pontja a lokális szélsőérték feladat megoldása, akkor u az $\tilde{f}(\mathsf{u}) := f(\mathsf{u}, \boldsymbol{\psi}(\mathsf{u}))$ függvény stacionárius pontja, vagyis $\nabla_u \tilde{f} = \nabla_u f + \nabla_y f \nabla \boldsymbol{\psi} = 0$. Ugyanakkor $\nabla_u \mathsf{g} + \nabla_y \mathsf{g} \nabla \boldsymbol{\psi} = 0$, tehát $\nabla_u f = \nabla_y f A^{-1} \nabla_u \mathsf{g}$, ahol $A := \nabla_y \mathsf{g}$. Ezzel (11.15) n egyenletéből d darabot kielégítettünk a $\boldsymbol{\lambda} := \nabla_y f A^{-1}$ választással. A maradék ezután automatikusan teljesül, mert $\nabla_y f = \nabla_y f A^{-1} A = \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla_y \mathsf{g}$. Azt igazoltuk hogy *ha a lokális szélsőérték feladat* x *megoldása a* G *tartomány belső pontja, és a* $\nabla \mathsf{g}$ *mátrix rangja* r*, akkor* (11.15) *teljesül.*

11.2. **Lineáris transzformációk.** Röviden ismertetünk néhány, a lineáris algebrából ismert tényt, ezek a vektoranalízis alapfogalmainak geometriai jelentését világítják meg. Lényegében csak valós terekről beszélünk, de sok definíció és következmény a komplex esetben is érvényes.

Véges dimenziós terek, bázistranszformáció: Az $\mathbb{E}$ Euklideszi tér dimenziója akkor $d \in \mathbb{N}$, ha van benne d elemű lineárisan független rendszer, de ennél nagyobb nincs. Ilyenkor minden lineárisan független rendszerből elkészíthető egymásra páronként merőleges $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d$ egységvektorokból álló ortonormált bázis (röviden bázis), és *minden* x *elem egyértelműen állítható elő ezek lineáris kombinációjaként:* $\mathsf{x} = x_1 \mathsf{e}_1 + x_2 \mathsf{e}_2 + \cdots + x_d \mathsf{e}_d$, ahol $x_k := \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle$ az x vektor k-ik koordinátája az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban. Látjuk hogy *az* $\mathbb{E}_d$ d*-dimenziós valós Euklideszi tér azonosítható a* d *hosszúságú sorozatok* $\mathbb{R}^d$ *terével.* Ennek számos módja van, az $\mathbb{E}_d$ tér minden ortogonális bázisa ad egyet. Mivel konkrét számolást rendszerint a koordináták segítségével hajtunk végre, fontosak azok a mennyiségek és tulajdonságok, amelyek nem függenek a bázis megválasztásától. Ezek közül is a skaláris szorzás viszi a prímet pontok távolságának és egyenesek szögének, vagyis a tér geometriájának meghatározásával. Ennek megfelelően értéke *a priori független a bázistól:*

$$\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle = \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_1 \rangle \langle \mathsf{y}, \mathsf{e}_1 \rangle + \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_2 \rangle \langle \mathsf{y}, \mathsf{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_d \rangle \langle \mathsf{y}, \mathsf{e}_d \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d\,,$$

ahol $z_k := \langle \mathsf{z}, \mathsf{e}_k \rangle$. Emiatt az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisról az $\{\mathsf{e}'_k\}$ bázisra való átmenet $U = (u_{k,j})$ mátrixa sem lehet akármilyen. Mivel $\langle \mathsf{e}'_k, \mathsf{e}'_j \rangle = \delta_{k,j}$, ahol $I = (\delta_{k,j})$ az egységmátrix,

$$\mathsf{e}'_k = \sum_{l=1}^{d} u_{k,l}\, \mathsf{e}_l \quad \text{esetén} \quad \sum_{l=1}^{d} u_{k,l}\, u_{j,l} = \delta_{k,j} ,$$

vagyis $UU^\top = U^\top U = I$, ahol $U^\top$ az U mátrix transzponáltja, tehát a bázistranszformáció U mátrixa ortogonális. Komplex térben a transzponáláshoz konjugálás is járul: $A^* := \bar{A}^\top$ az A adjungáltja. Többnyire ezt a jelölést használjuk, és az $\mathsf{U}^*\mathsf{U} = I$ tulajdonságú mátrixot olykor unitérnek nevezzük. Jelölje $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ az $\mathsf{x} \in \mathbb{E}_d$ vektor $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban számolt koordinátáinak sorozatát, ekkor $\boldsymbol{\xi}' = U\boldsymbol{\xi}$ adja az x koordinátáinak sorozatát az $\{\mathsf{e}'_k\}$ új bázisban, tehát a *koordináták transzformációs szabálya ugyanaz mint a bázisvektoroké.*

Lineáris függvények és operátorok: Az $\ell : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{R}$ függvény lineáris ha $\ell(\alpha\mathsf{x} + \beta\mathsf{y}) = \alpha\ell(\mathsf{x}) + \beta\ell(\mathsf{y})$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{E}_d$ esetén. Minden lineáris függvényhez van olyan, egyértelműen meghatározott $\mathsf{y} \in \mathbb{E}_d$ vektor, hogy $\ell(\mathsf{x}) = \langle \mathsf{y}, \mathsf{x} \rangle$ $\forall \mathsf{x} \in \mathbb{E}_d$; az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban y koordinátái éppen az $y_k := \ell(\mathsf{e}_k)$ számok.

Az $\mathsf{A} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_d$ leképezés lineáris, ha $\mathsf{A}(\alpha\mathsf{x} + \beta\mathsf{y}) = \alpha\mathsf{A}(\mathsf{x}) + \beta\mathsf{A}(\mathsf{y})$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{E}_d$ esetén, ilyenkor az $\mathsf{A}(\mathsf{x}) \equiv \mathsf{A}\mathsf{x}$ jelölést, és a (lineáris) operátor (tenzor) megnevezést használjuk. Az A operátor szinguláris ha az $\mathsf{A}\mathsf{x} = 0$ homogén egyenletnek van $\mathsf{x} \neq 0$ megoldása. Ellenkező esetben A invertálható, az inverzét A^{-1} jelöli. Az A operátor $\mathsf{A}^* \equiv \mathsf{A}^\top$ adjungáltját (transzponáltját) az $\langle \mathsf{x}, \mathsf{A}\mathsf{y} \rangle = \langle \mathsf{A}^*\mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle$ azonosság jellemzi. Mivel $\ell_{\mathsf{x}}(\mathsf{y}) := \langle \mathsf{x}, \mathsf{A}\mathsf{y} \rangle$ az y lineáris függvénye, van olyan z vektor hogy $\ell_{\mathsf{x}}(\mathsf{y}) = \langle \mathsf{z}, \mathsf{y} \rangle$, tehát $\mathsf{A}^*\mathsf{x} := \mathsf{z}$ az egész téren definiálva van. Az S operátor akkor szimmetrikus (önadjungált) ha $\mathsf{S} = \mathsf{S}^*$, vagyis teljesül az $\langle \mathsf{x}, \mathsf{S}\mathsf{y} \rangle = \langle \mathsf{S}\mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle$ azonosság. Az antiszimmetrikus operátorokat $\langle \mathsf{x}, \mathsf{A}\mathsf{y} \rangle = -\langle \mathsf{A}\mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle$ $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{E}_d$ jellemzi, vagyis $\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}$. Az $\mathsf{S} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_d$ szimmetrikus operátor akkor pozitív ha $\langle \mathsf{x}, \mathsf{S}\mathsf{x} \rangle \geq 0$; szigorúan pozitív operátornak mindig van inverze mert ilyenkor $\langle \mathsf{x}, \mathbb{S}\mathsf{x} \rangle > 0$ ha $\mathsf{x} \neq 0$, tehát $\mathsf{S}\mathsf{x} = 0$ csak úgy lehet ha $\mathsf{x} = 0$. Ortogonális (unitér) az a transzformáció amelyik *megtartja a skaláris szorzatot:* $\langle \mathsf{U}\mathsf{x}, \mathsf{U}\mathsf{y} \rangle = \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle$ $\forall$ $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{E}_d$, tehát $\mathsf{U}\mathsf{U}^* = \mathsf{U}^*\mathsf{U} = \mathsf{I}$, ahol I az egység operátor (identitás): $\mathsf{I}\mathsf{x} = \mathsf{x}$ $\forall \mathsf{x} \in \mathbb{E}_d$. *Minden unitér (ortogonális) transzformáció invertálható:* $\mathsf{U}^{-1} = \mathsf{U}^*$. A $\{\mathsf{e}_k\} \to \{\mathsf{e}'_k\}$ báziscsere az $\mathsf{U}\mathsf{x} := x_1\mathsf{e}'_1 + x_2\mathsf{e}'_2 + \cdots + x_d\mathsf{e}'_d$ ha $\mathsf{x} = x_1\mathsf{e}_1 + x_2\mathsf{e}_2 + \cdots + x_d\mathsf{e}_d$ képlettel unitér operátort definiál, és megfordítva, *unitér operátor ortogonális bázist mindig ortogonális bázisba visz át:* ezek a transzformációk a *tér forgatásai és/vagy tükrözései.*

Sajátérték feladat: Az $\mathsf{A}\mathsf{u} = \lambda\mathsf{u}$, $\mathsf{u} \neq 0$ egyenletben $\lambda \in \mathbb{C}$ az A operátor sajátértéke és $\mathsf{u} \neq 0$ a hozzá tartozó sajátvektor, ami általában $\mathsf{x} + \imath\mathsf{y}$, $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{E}_d$ alakú, tehát az ilyen vektorokból álló $\mathbb{C}_d$ komplex Euklideszi tér eleme. Emiatt a skaláris szorzat használatakor a komplex térben érvényes szabályok alkalmazandók. Ha A invertálható akkor a 0 nem lehet sajátérték, és $\mathsf{A}\mathsf{u} = \lambda\mathsf{u}$ esetén $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{u} = (1/\lambda)\mathsf{u}$. Ha S szimmetrikus és $\mathsf{S}\mathsf{u} = \lambda\mathsf{u}$, akkor $\langle \mathsf{u}, \mathsf{S}\mathsf{u} \rangle = \lambda|\mathsf{u}\|^2 = \bar{\lambda}|\mathsf{u}|^2$ miatt $\lambda \in \mathbb{R}$, és igy $S\bar{\mathsf{u}} = \lambda\bar{\mathsf{u}}$ miatt $\mathsf{u} + \bar{\mathsf{u}}$ vagy $\imath\mathsf{u} - \imath\bar{\mathsf{u}}$ biztosan valós sajátvektor. Különböző sajátértékhez egymásra merőleges sajátvektorok tartoznak mert $\langle \mathsf{u}, \mathsf{S}\mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathsf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathsf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ha $\mathsf{S}\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$. Szimmetrikus operátor sajátvektorai a tér ortogonális bázisát alkotják. A 11.3 pontban megmutatjuk hogy a $\lambda = \max\langle \mathsf{x}, \mathsf{S}\mathsf{x} \rangle$ ha $|\mathsf{x}| = 1$ feltételes szélsőérték feladat megoldása az $S = S^*$ operátor legnagyobb sajátértéke, és ha u a hozzá rendelt sajátvektor, akkor a $\mathsf{x} \perp \mathsf{u}$ kiegészítő feltétellel kapjuk a másodikat, és így tovább.

Unitér operátor sajátétékeinek mindig 1 az abszolút értéke mert $|\mathsf{u}|^2 = \langle \mathsf{U}\mathsf{u}, \mathsf{U}\mathsf{u} \rangle = \lambda\bar{\lambda}|\mathsf{u}|^2$. Ha mindegyik sajátérték komplex, akkor nem lehet valós sajátvektor, ilyenek a tér olyan U forgatásai amelyekkel $\mathsf{U}^n = \mathsf{I}$, $n \in \mathbb{N}$ nem fordulhat elő. Tükrözés sajátvektorai valósak, a sajátértékek a ± 1 számok közül kerülnek ki, de nem lehet mind ugyanaz.

Operátor mátrixa: Az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban valamely $\mathsf{A} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_d$ lineáris transzformáció (operátor) A mátrixának elemeit $a_{k,j} = \langle \mathsf{e}_k, \mathsf{A}\mathsf{e}_j \rangle$ határozza meg, $a_{k,j}$ a mátrix k-ik sorában a j-ik elem. Másszóval, ha $\mathsf{a}_j := \mathsf{A}\mathsf{e}_j$, akkor $a_{k,j} = \langle \mathsf{e}_k, \mathsf{A}\mathsf{e}_j \rangle = \langle \mathsf{a}_j, \mathsf{e}_k \rangle$, tehát az A operátor A mátrixa úgy keletkezik, hogy a j-ik oszlopba rendre beírjuk az a_j képvektor koordinátáit. Az $\mathsf{e}'_k = \mathsf{U}\mathsf{e}_k$ bázistranszformáció után A mátrixa az $A' = U^*AU$ alakot ölti, ahol U az U mátrixa az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban. Az A lineáris operátor A^* adjungáltjának mátrixa az A mátrixának adjungáltja, szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus operátorok mátrixai szimmetrikusak, illetve antiszimmetrikusak a szokásos értelemben. A sík ϕ szögű elforgatásának U_ϕ, az x tegelyre történő tükrözésének mátrixa $U_\top$:

$$U_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad U_\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

Az $\mathsf{Au} = \lambda\mathsf{u}$ sajátérték feladat megoldásait A mátrixának segítségével számoljuk; az eredmény csak akkor függ a bázistól ha hibáztunk.

Operátor poláris alakja: A komplex számok $z = |z|e^{\imath\varphi}$ felírásához hasonlóan, *minden invertálható operátor előállítható az* $\mathsf{A} = \mathsf{US}$ *alakban, ahol* U *unitér,* S *pedig pozitív definit, szimmetrikus operátor.* Az $\mathsf{S} = |\mathsf{A}|$ operátort $\mathsf{S} := (\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{1/2}$ definiálja, tehát $\mathsf{U} := \mathsf{AS}^{-1}$. [37] Valóban, ha $S^* = S$ és $\mathsf{S}^2 = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$, akkor

$$\mathsf{UU}^* = \mathsf{AS}^{-1}\mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}^* = \mathsf{AS}^{-2}\mathsf{A}^* = \mathsf{A}(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^* = \mathsf{AA}^{-1}(\mathsf{A}^*)^{-1}\mathsf{A}^* = \mathsf{I}.$$

Az $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ operátor négyzetgyökét a következőképpen definiáljuk. Általában, ha Q pozitív definit és szimmetrikus operátor, akkor a normalizált u_k sajátvektorai bázist alkotnak, és a λ_k sajátértékek pozitívak, tehát minden x vektor megadható az $\mathsf{x} = x_1\mathsf{u}_1 + x_2\mathsf{u}_2 + \cdots + x_d\mathsf{u}_d$ alakban. Közvetlenül ellenőrizhető hogy a $\mathsf{Q}^{1/2}\,\mathsf{x} := \sqrt{\lambda_1}\,x_1\mathsf{u}_1 + \sqrt{\lambda_2}\,x_2\mathsf{u}_2 + \cdots + \sqrt{\lambda_d}\,x_d\mathsf{u}_d$ képlettel adott $\mathsf{Q}^{1/2}$ operátor szimmetrikus, pozitív, invertálható, és a négyzete tényleg Q.

Az S pozitív definit operátor hatása jól szemléltethető: az egymásra merőleges sajátvektorainak irányában, a megfelelő sajátértékkel mint szorzóval történő nyújtást végez. A sajátvektorokkal párhuzamos állású egységkocka képe páronként merőleges élekkel rendenkező téglatest, aminek élhosszai a sajátértékek, tehát térfogata a sajátértékek szorzata, és ezt a térfogatot U már nem változtatja meg.

A determináns: Az A operátor $\det\mathsf{A}$ determinánsa az adott bázisban az operátorhoz rendelt mátrix determinánsa; ez a szám *nem függ a bázistól.* Mátrixokról ugyanis tudjuk hogy $\det A^* = \det A$, és szorzat determinánsa a determinánsok szorzata, tehát ortogonális mátrix determinánsa mindig 1 vagy -1. Ha tehát A az A mátrixa az eredeti, A' pedig az új bázisban, és U a bázistranszformáció mátrixa, akkor $\det A' = \det A$ ha $A' = U^*AU$. Ezt persze onnan is tudhattuk volna hogy mátrix determinánsa a sajátértékek multiplicitással vett szorzata. Az is kijött hogy A *invertálhatóságának* $\det\mathsf{A} \neq 0$ *a szükséges és elégséges feltétele.*

A determinánsnak geometriai jelentése van: ha A nem szinguláris akkor $\det\mathsf{A}$ az A transzformáció által előidézett *térfogatváltozás szorzószáma.* Ez a megállapítás akár a térfogat definíciója is lehetne; síkon és a térben már ellenőriztük. Magasabb dimenziókba indukcióval juthatnánk el, az előző szakasz direkt választ ad. Legyen $\mathsf{A} = \mathsf{US}$ az A poláris alakja, és jelölje $\mathsf{u}_1\,\mathsf{u}_2, \cdots, \mathsf{u}_d$ az S normált sajátvektorait. Mivel S az u_k élekkel rendelkező d-dimenziós egységkockát olyan téglába viszi át aminek $\det\mathsf{S}$ a térfogata, majd U ezt a téglát egy vele *egybevágó* téglává transzformálja, a fentemlített egységkocka A által létrehozott képe olyan tégla aminek $|\det\mathsf{A}| = \det\mathsf{S}$ a térfogata.

Transzformáció nyoma: Az A operátor $\mathrm{Tr}\,\mathsf{A}$ nyomát a tetszőleges bázisban számolható

$$\mathrm{Tr}\,\mathsf{A} := \sum_{k=1}^{d}\langle \mathsf{e}_k, \mathsf{A}\,\mathsf{e}_k\rangle = \mathrm{Tr}\,A \tag{11.17}$$

összeg definiálja, ahol A az A mátrixa az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban, $\mathrm{Tr}\,A$ pedig az A mátrix főátlójában álló elemek összege. A jobboldal nem függ a bázistól mert

$$\sum_{k=1}^{d}\langle \mathsf{e}'_k, \mathsf{A}\,\mathsf{e}'_k\rangle = \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} u_{k,j}u_{k,l}\langle \mathsf{e}_j, \mathsf{A}\,\mathsf{e}_l\rangle = \sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\delta_{j,l}\langle \mathsf{e}_j, \mathsf{A}\,\mathsf{e}_l\rangle = \sum_{k=1}^{d}\langle \mathsf{e}_k, \mathsf{A}\,\mathsf{e}_k\rangle\,,$$

de ezt onnan is lehet tudni hogy $\mathrm{Tr}\,A$ éppen a *sajátértékek összege.* Ezért mondjuk hogy $\mathrm{Tr}\,\mathsf{A}$ az A operátor (tenzor) skalárinvariánsa.

[37] Az $|A| := (\mathsf{AA}^*)^{1/2}$ definíció is jogos, de $\mathsf{AA}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$ csak akkor teljesül ha A normális operátor. Ez a választás $\mathsf{A} = \mathsf{SU}$ alakú felbontáshoz vezet.

A vektorinvariáns: Minden A operátor felbontható egy szimmetrikus (önadjungált) A_s és egy antiszimmetrikus (anti-önadjungált) A_a operátor összegére: $\mathsf{A} = \mathsf{A}_s + \mathsf{A}_a$ ahol $\mathsf{A}_s^* = \mathsf{A}_s$ és $\mathsf{A}_a^* = -\mathsf{A}_a$ tehát $\mathsf{A}_s = (1/2)(\mathsf{A} + \mathsf{A}^*)$, $\mathsf{A}_a = (1/2)(\mathsf{A} - \mathsf{A}^*)$; hasonló művelet történik a mátrixokkal. Az önadjungált komponens (normált) sajátvektorai bázist alkotnak, tehát A_s a sajátvektorok irányában a megfelelő sajátértékkel arányos nyújtást végez. [38]

Az antiszimmetrikus rész szemléltetése bonyolultabb, háromdimenziós valós térben segít a vektoriális szorzás fogalma, amit az 5. fejezetben tárgyaltunk.

Az $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{E}_3$ vektorral adott $\mathsf{Ax} := \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{x}$ operátor $\langle \mathsf{y}, \mathsf{Ax} \rangle = \langle (\mathsf{y} \times \boldsymbol{\omega}), \mathsf{x} \rangle = -\langle \mathsf{Ay}, \mathsf{x} \rangle$ miatt antiszimmetrikus,és minden antiszimmetrikus A operátor ilyen alakú. Valóban, az $\{\sigma, \mathsf{j}, \mathsf{k}\}$ bázisban A mátrixának sorai rendre $(0, \alpha, \beta)$, $(-\alpha, 0, \gamma)$ és $(-\beta, -\gamma, 0)$, tehát az $\omega := -\gamma\sigma + \beta\mathsf{j} - \alpha\mathsf{k}$ választással $\mathsf{Ax} = \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{x}\ \forall \mathsf{x} \in \mathbb{E}_3$. Az A operátor $\mathsf{A}_a = (\mathsf{A} - \mathsf{A}^*)/2$ antiszimmetrikus komponensét előállító $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathsf{A})$ vektor az A vektorinvariánsa. Ha tehát az $\{\sigma, \mathsf{j}, \mathsf{k}\}$ bázisban A mátrixa $(a_{k,j})$, akkor

$$\boldsymbol{\omega}(\mathsf{A}) = \tfrac{1}{2}(a_{3,2} - a_{2,3})\,\sigma + \tfrac{1}{2}(a_{1,3} - a_{3,1})\,\mathsf{j} + \tfrac{1}{2}(a_{2,1} - a_{1,2})\,\mathsf{k}\,. \tag{11.18}$$

A definícióból adódóan az $\boldsymbol{\omega}(\mathsf{A})$ *vektorinvariáns nem függ a bázistól.* Az itt elmondottak a vektoranalízis szempontjából érdekesek.

11.3. **Skaláris és vektormezők.** A differenciálszámítás alapfogalmai az $\mathbb{E}_d$ téren értelmezett függvényekre is kiterjeszthetőek.

Skaláris mező gradiensvektora: Az $f : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{R}$ függvény differenciálható az x_0 helyen, amit $f \in D(\mathsf{x}_0)$ jelöl, ha van olyan $\mathsf{a} \in \mathbb{E}_d$ vektor, hogy x_0 egy környezetében

$$f(\mathsf{x}) = f(\mathsf{x}_0) + \langle \mathsf{a}, \mathsf{x} - \mathsf{x}_0 \rangle + \varepsilon(\mathsf{x}_0, \mathsf{x})\,|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0|\,,$$

ahol $\varepsilon(\mathsf{x}_0, \mathsf{x}) \to 0$ amint $\mathsf{x} \to \mathsf{x}_0$. Ez az a vektor egyértelműen lett meghatározva, mert ha a' is jó, akkor az $\mathsf{e} := (\mathsf{x} - \mathsf{x}_0)/|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0|$ választással $\langle \mathsf{a} - \mathsf{a}', \mathsf{e} \rangle = 0$ adódik. Mivel e itt akármelyik egységvektor lehet, $\mathsf{a} = \mathsf{a}'$. Az így definiált a vektor az f gradiense, $\nabla f(\mathsf{x}_0)$ az x_0 helyen. A $df = \langle \nabla f, d\mathsf{x} \rangle$ *formula a definíció tömör összefoglalásaként értelmezendő!* Ez a definíció ránézésre ugyanaz mint többváltozós függvény differerenciálhatóságáé, de elvi különbség van; ugyanúgy mint maga f, ∇f is koordináta rendszertől függetlenül létezik.

Az $\ell(\mathsf{x}) := \langle \mathsf{a}, \mathsf{x} \rangle$ lineáris függvény gradiense nyilván $\nabla \ell \equiv \mathsf{a}$. Az S szimmetrikus operátorhoz rendelt $Q(\mathsf{x}) := \langle \mathsf{x}, \mathsf{Sx} \rangle$ kvadratikus alak is differenciálható, a $Q(\mathsf{x} + \mathsf{h}) = Q(\mathsf{x}) + 2\langle \mathsf{h}, \mathsf{Sx} \rangle + Q(\mathsf{h})$ azonosságból $\nabla Q(\mathsf{x}) = 2\mathsf{Sx}$. Ennek alapján Lagrange multiplikátorával $\mathsf{Su} = \lambda \mathsf{u}$ adódik a $\max\{Q(\mathsf{x}) : |\mathsf{x}| = 1\}$ feladat megoldásaként. ♡ Q felveszi a maximumát az egységgömbön, mert az kompakt, tehát van megoldás. Másrészt $\nabla |\mathsf{x}|^2 = 2\mathsf{x} \neq 0$ a gömbön, tehát az implicit függvént tétele szerint a $|\mathsf{x}| = |\mathsf{x}|^2 = 1$ mellékfeltétel a maximumhely környezetében felodható, tehát Lagrange módszere korrekt: *a maximum értéke* S *legnagyobb sajátértéke, és a maximum helye ehhez rendelt sajátvektor.* Rendkívül fontosak a $\nabla |\mathsf{x}| = \mathsf{x}/|\mathsf{x}|$, és az általánosabb $\nabla f(|\mathsf{x}|) = \mathsf{x}\, f'(|\mathsf{x}|)/|\mathsf{x}|$ példák. Ha f kétszer differenciálható akkor innen $\Delta f(|\mathsf{x}|) = f''(|\mathsf{x}|) + (d-1) f'(|\mathsf{x}|)/|\mathsf{x}|$ adódik. Az $f''(r) + (d-1) f'(r)/r = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk az $U_d(\mathsf{x}) := |\mathsf{x}|^{2-d}$ ha $d > 2$, $U_2(\mathsf{x}) := \log(1/|\mathsf{x}|)$ Newton potenciált.

Vektormező deriválttenzora: Az $\mathsf{f} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_d$ vektormező differenciálható az x_0 helyen, amit $\mathsf{f} \in D(\mathsf{x}_0)$ jelöl, ha van olyan $\mathsf{A} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_d$ lineáris operátor (tenzor), hogy x_0 egy környezetében

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{f}(\mathsf{x}_0) + \mathsf{Ax} - \mathsf{Ax}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathsf{x}_0, \mathsf{x})\,|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0|\,,$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathsf{x}_0, \mathsf{x}) \to 0$ amint $\mathsf{x} \to \mathsf{x}_0$. Ez a definíció is egyértelmű, és $\nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}_0) := \mathsf{A}$ az f deriválttenzora az x_0 helyen. Itt is hasznos a $d\mathsf{f} = \nabla \mathsf{f}\, d\mathsf{x}$ formalizmus. Például, ha A lineáris operátor, és $\mathsf{f}(\mathsf{x}) := \mathsf{Ax}$, akkor $\nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{A}\ \forall \mathsf{x} \in \mathbb{E}_d$, vagyis $d\mathsf{Ax} = \mathsf{A}\, d\mathsf{x}$. Természetesen $\mathbb{R}^d$ is Euklideszi tér, tehát a fenti definíciók a korábbiak általánosításai. Ha $\mathsf{f}(\mathsf{r}) = -\nabla U(\mathsf{r})$, akkor azt mondjuk hogy $U : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{R}$ az vektormező potenciálja. Young tétele szerint *potenciállal rendelkező*

[38] Az az észrevétel hogy $\mathsf{A}_a^2 = -\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ negatív, ismét a komplex számokkal való analógiára utal: $z = \mathrm{Re}\, z + \imath \mathrm{Im}\, z$, ahol $\mathrm{Re}\, z = (1/2)(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\, z = (1/2)(z - \bar{z})$, és képzetes szám négyzete is negatív. A $\mathbb{C}$ komplex sík kétdimenzós valós Euklideszi tér, amin a (homogén) lineáris transzformációk komplex számmal való szorzással reprezentálhatók. Az $\mathsf{W}z := wz$ operátor mátrixának sorai $(\mathrm{Re}\, w, -\mathrm{Im}\, w)$ és $(\mathrm{Im}\, w, \mathrm{Re}\, w)$, tehát $\mathsf{W}_s z = z \mathrm{Re}\, w$ és $\mathsf{W}_a z = z\imath \mathrm{Im}\, w$.

vektormező deriválttenzora szimmetrikus. Az állítás megfordítható, később megmutatjuk hogy *ha* f *egy pont valamely környezetében folytonosan differenciálható, és ott* $\nabla\mathsf{f}$ *szimmetrikus, akkor a környezetben* f*-nek van potenciálja.*

A láncszabály: A definíciók közvetlen alkalmazásával kapjuk a láncszabály koordináta rendszertől független alakját. Ha $\mathsf{f} \in D(\mathsf{x}_0)$, $\mathsf{y}_0 = \mathsf{f}(\mathsf{x}_0)$ és $g \in D(\mathsf{y}_0)$, akkor a $h(\mathsf{x}) := g(\mathsf{f}(\mathsf{x}))$ összetett függvény is differenciálható az x_0 helyen, és

$$dh = \langle \nabla g, d\mathsf{f} \rangle = \langle \nabla g, \nabla \mathsf{f}\, d\mathsf{x} \rangle = \langle (\nabla \mathsf{f})^* \nabla g, d\mathsf{x} \rangle = \langle \nabla h, d\mathsf{x} \rangle$$

alapján $\nabla h(\mathsf{x}_0) = (\nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}_0))^* \, \nabla g(\mathsf{f}(\mathsf{x}_0))$. Ugyanezt a formulát kapjuk abban az esetben is amikor g vektormező, tehát $\mathsf{h}(\mathsf{x}) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{x}))$ is az: $\nabla \mathsf{h}(\mathsf{x}_0) = (\nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}_0))^* \, (\nabla \mathsf{g})(\mathsf{y}_0)$. A láncszabály utóbbi képlete változatlanul érvényes akkor is, amikor a x és y vektorváltozók dimenziója nem ugyanaz, $\mathsf{f} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_m$ és $\mathsf{g} : \mathbb{E}_m \mapsto \mathbb{E}_n$, vagyis $\mathsf{h} : \mathbb{E}_d \mapsto \mathbb{E}_n$. Ez a formula az összes korábbit speciális esetként tartalmazza. A transzponálás miatt a deriválttenzorok (mátrixok) pont úgy kerülnek egymás mellé hogy össze lehet őket szorozni.

A Jacobi mátrix transzformációja: Adott $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban az $\mathsf{y} = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ vektormező az

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \boldsymbol{\phi}(x_1, x_2, ..., x_d) = f_1(x_1, x_2, ..., x_d)\, \mathsf{e}_1 + f_2(x_1, x_2, ..., x_d)\, \mathsf{e}_2 + \cdots + f_d(x_1, x_2, ..., x_d)\, \mathsf{e}_d$$

módon adható meg, ahol $x_k := \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle$, $f_k := \langle \mathsf{f}, \mathsf{e}_k \rangle$. Ugyanebben a bázisban $\langle \mathsf{e}_k, \nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mathsf{e}_j \rangle = \partial f_k / \partial x_j$ a $\nabla \boldsymbol{\phi}$ Jacobi mátrix k-ik sorának j-ik eleme. Térjünk most át az U ortogonális transzformációval az $\mathsf{e}'_k := \mathsf{U}\mathsf{e}_k$, $k = 1, 2, ..., d$ bázisra, ekkor

$$\langle \mathsf{e}'_k, \nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mathsf{e}_j \rangle = \langle \mathsf{U}\mathsf{e}_k, \nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mathsf{e}_j \rangle = \langle \mathsf{e}_k, \mathsf{U}^* \nabla \mathsf{f}(\mathsf{x}) \mathsf{U} \mathsf{e}_j \rangle$$

az új Jacobi mátrix k-ik sorában a j-ik elem, tehát $U^*(\nabla \boldsymbol{\phi})U$ lesz $\nabla \mathsf{f}$ mátrixa az $\{\mathsf{e}'_k\}$ bázisban, ahol U az U bázistranszformáció mátrixa az eredeti, $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban. Persze ugyanezt kapjuk a láncszabály segítségével az $\mathsf{x}' = \mathsf{U}\mathsf{x}$ és $\mathsf{y}' = \mathsf{U}\mathsf{y}$ helyettesítés koordinátánkénti kiírása után. Tehát *Jacobi mátrixa a bázis cseréjekor ugyanúgy transzformálódik mint minden más mátrix.*

Divergencia és rotáció: Az f vektormező divergenciája az $\mathsf{x} \in \mathbb{E}_d$ pontban a deriválttenzor skalárinvariánsa: $\operatorname{div} \mathsf{f}(\mathsf{x}) := \operatorname{Tr} \nabla \mathsf{f}(\mathsf{x})$, ami az $\{\mathsf{e}_k\}$ bázisban, az előző szakasz jelöléseivel:

$$\operatorname{div} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2, ..., x_d)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2, ..., x_d)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_d(x_1, x_2, ..., x_d)}{\partial x_d}.$$

Mivel $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$, a Laplace operátor is a koordináta rendszertől független objektum.

Vektormező rotációját csak háromdimenziós térben definiáljuk: $\operatorname{rot} \phi := 2\boldsymbol{\omega}(\nabla \boldsymbol{\phi})$ a $\nabla \boldsymbol{\phi}$ deriválttenzor vektorinvariánsának kétszerese, szintén független a koordináta rendszer megválasztásától. A determináns formula szerint az $\{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}\}$ bázisban

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\phi}(\mathsf{r}) = (h'_y(x,y,z) - g'_z(x,y,z))\, \mathsf{i} + (f'_z(x,y,z) - h'_x(x,y,z))\, \mathsf{j} + (g'_x(x,y,z) - f'_y(x,y,z))\, \mathsf{k},$$

ahol $\mathsf{r} = x\mathsf{i} + y\mathsf{j} + z\mathsf{k}$ és $\boldsymbol{\phi} = f\mathsf{i} + g\mathsf{j} + h\mathsf{k}$. Természetesen síkbeli mezőnek is van rotációja, csak ott a harmadik komponens nulla, és így a rotáció vektora merőleges a síkra.

A ∇ operátor segítségével $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}$ és $\operatorname{rot} \boldsymbol{\phi} \equiv \nabla \times \boldsymbol{\phi}$. Ez a formalizmus megkönnyíti a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \boldsymbol{\phi} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{\phi} = 0$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$ és $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\phi} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} - \Delta \boldsymbol{\phi}$ azonosságok, valamint a szorzat differenciálásával analóg

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{\phi}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{\phi} + f \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \quad \text{és} \quad \operatorname{rot}(f\boldsymbol{\phi}) = \nabla f \times \boldsymbol{\phi} + f \operatorname{rot} \boldsymbol{\phi} \tag{11.19}$$

szabályok megjegyzését, ahol f skaláris, $\boldsymbol{\phi}$ pedig vektormező. Ha most $\boldsymbol{\phi}$ és $\boldsymbol{\psi}$ is vektor, akkor

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\phi} \nabla \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi} \nabla \boldsymbol{\phi} = (\nabla \boldsymbol{\psi})^* \boldsymbol{\phi} + (\nabla \boldsymbol{\phi})^* \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\phi} \cdot \nabla) \boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla) \boldsymbol{\phi}; \tag{11.20}$$

a szokatlan jelöléseket az indokolja hogy a Jacobi tenzorokat balról kell vektorral szorozni. Vektoriális szorzat divergenciája vegyesszorzat, vagyis

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\psi}) = (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\psi} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}. \tag{11.21}$$

A rotáció számolásakor az $\mathsf{a} \times (\mathsf{b} \times \mathsf{c}) = (\mathsf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathsf{b} - (\mathsf{a} \cdot \mathsf{b})\, \mathbf{c}$ kifejtési tételt is fel kell használni, ∇ mindkét tényezőn hat: $\nabla \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\psi}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{\phi} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\phi} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{\psi} - (\boldsymbol{\phi} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\psi}$, tehát

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\psi}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{\phi} - (\operatorname{div} \boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{\psi} + (\nabla \boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{\phi} - (\nabla \boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{\psi}. \tag{11.22}$$

Látható hogy a $\boldsymbol{\phi} := f(|\mathsf{r}|)\,\mathsf{r}$ *centrális erőtér rotációja nulla,* és $\operatorname{div}\boldsymbol{\phi} = f'(|\mathsf{r}|)|\mathsf{r}| + 3f(|\mathsf{r}|)$. *Centrális erőtér potenciálja:* $U(\mathsf{r}) = -F(|\mathsf{r}|)$, ahol F az $rf(r)$ primitív függvénye: $F'(r) = rf(r)$ ha $r > 0$.

A nevezetes $\boldsymbol{\phi}(\mathsf{r}) := \boldsymbol{\omega}\times\mathsf{r}$ mező deriválttenzora az $\boldsymbol{\omega}\times\mathsf{r} = \mathsf{A}_\omega\mathsf{r}$ reprezentácó alapján éppen A_ω, lásd a vektorinvariánsról szóló szakaszt. Ez az A_ω operátor antiszimmetrikus, tehát $\operatorname{div}\boldsymbol{\phi} = 0$ míg $\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi} = 2\boldsymbol{\omega}$. Az általánosabb $\boldsymbol{\psi} := f(\mathsf{r})(\boldsymbol{\omega}\times\mathsf{r})$ mező rotációja a szorzat képletével $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} = (\mathsf{r}\cdot\nabla f(\mathsf{r}) + 2f(\mathsf{r}))\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla f(\mathsf{r}))\mathsf{r}$. Az $\boldsymbol{\omega}$ tengely körüli hengerszimmetrikus esetben $f(\mathsf{r}) = \varphi(\rho)$, ahol ρ a tengelytől való távolság, tehát $\nabla f \perp \boldsymbol{\omega}$, vagyis $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} = (\rho\varphi'(\rho) + 2\varphi(\rho))\,\boldsymbol{\omega}$; a divergencia most is nulla. A $\rho > 0$ esetben a rotáció akkor nulla ha $\varphi(\rho) = \gamma\rho^{-2}$, ami egyenes vezető mágneses terének Biot - Savart törvényére utal.

12. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Egységes elmélete van az egyenesen, görbék mentén, síkon, térben, felületeken stb. történő integrálásnak. Emiatt érdemes mindezt összefoglalni, hogy ne kelljen ismétlésekbe bocsájtkozni. A fizikában és a műszaki tudományokban egyaránt fontos parciális differenciálegyenletek, valamint a véletlen jelenségek matematikai elmélete sem képzelhető el az integrál modern (100 éves) fogalma nélkül.

12.1. **Mértéktér és a Riemann integrál.** Mérhető tér az $(X, \mathfrak{X}_0)$ pár neve ha $\mathfrak{X}_0$ az X részhalmazaiból áll gyűrű, vagyis $A, B \in \mathfrak{X}_0$ esetén $A\cap B$, $A\cup B$ és $A\backslash B \equiv A\cap A^c$ mind az $\mathfrak{X}_0$ eleme. Az $(X, \mathfrak{X}_0, \lambda)$ trió mértéktér ha a $\lambda : \mathfrak{X} \mapsto [0, +\infty)$ halmazfüggvény additív és folytonos. A λ mérték posztulált tulajdonságai a következők:

$$\begin{aligned} \lambda(\emptyset) = 0 \text{ és } 0 \le \lambda(A) < +\infty\,,\ \forall\, A \in \mathfrak{X}_0\,,\\ \lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A\cup B) + \lambda(A\cap B) \quad \text{ha } A, B \in \mathfrak{X}_0\,,\\ \lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) = \lambda(A) \text{ ha } A_n \subset A_{n+1}\,, A, A_n \in \mathfrak{X}_0\,, \text{ és } \cup A_n = A\,. \end{aligned} \tag{12.1}$$

A mérték monoton halmazfüggvény: $\lambda(A) \le \lambda(B)$, ha $A \subset B$, mert A és $B\cap A^c =: C \in \mathfrak{X}_0$ olyan diszjunkt halmazok hogy $B = A\cup C$, tehát $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(C)$. Innen az is látszik hogy $\lambda(A\cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A\cap B)$ ha A és B nem diszjunkt. Az első kettő érvényessége mellett a harmadik posztulátum a következőkkel ekvivalens.

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n) \text{ ha } A_n\,, A \in \mathfrak{X}_0\,, A = \cup A_n\,, \text{ és } A_k\cap A_j \text{ ha } j \ne k\,,\\ \lambda(A) &= \lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) \text{ ha } A_{n+1} \subset A_n\,, A, A_n \in \mathfrak{X}_0\,, \text{ és } \cap A_n = A\,,\\ 0 &= \lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) \text{ ha } A_{n+1} \subset A_n\,, A, A_n \in \mathfrak{X}_0\,, \text{ és } \cap A_n = \emptyset\,. \end{aligned} \tag{12.2}$$

♡ Az első helyen említett σ-additívitás a folytonosságból a $B_n := A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ választással, $A = \cup B_n$ és $\lambda(B_n) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \cdots + \lambda(A_n)$ miatt következik. Mivel $\lambda(A) = \lambda(A_n) - \lambda(A_n\cap A_n^c)$, és ha λ σ-additív akkor $A_{k+1} \subset A_k$ esetén

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda(A_k\cap A_{k+1}^c) = \lambda(A_n\cap A_n^c) \to 0 \text{ amint } n \to +\infty\,,$$

tehát a folytonosság második alakja a σ-additivitás következménye. A harmadik sor a második speciális esete, és $\cap(A\cup A_n^c) = \emptyset$ ha $A = \cup A_n$ és $A_n \subset A_{n+1}$ miatt a folytonosság eredeti alakja következik belőle. □

A $\mathfrak{X}_0$ halmazgyűrű általában azokból a halmazokból áll, amelyek mértékét (hosszúság, terület, térfogat, ívhossz, felszín, valószinűség, stb.) eleve ismerjük. Az $\mathfrak{X}_0$ gyűrű halmazalgebra ha $X \in \mathfrak{X}_0$, vagyis mindegyik elemének a komplementer halmazát is tartalmazza. Az $\mathfrak{X}_0$ konstrukciója, és a mérték additív tulajdonságának érvényessége többnyire nyilvánvaló. [39] Ha valamely konkrét esetben az (12.1) lista utolsó helyén szereplő folytonosságot, vagy (12.2) valamelyik pontját is bizonyítani tudjuk, akkor a mérték az $\mathcal{X}_0$-ről a halmazok egy sokkal bővebb $\mathcal{X}$ osztályára is kiterjeszthető, de ez bizonyításra szorul. [40]

Mérték leképezése: Minden $\xi : X \mapsto Y$ leképezés inverze a $\xi^{-1}(U) := \{x \in X : \xi(x)\}$ képlettel minden $U \subset Y$ halmazhoz az X egy részhalmazát rendeli. Ez a megfeleltetés *megtartja a halmazalgebrai műveleteket:* ha $U, U_k \subset Y$ akkor $\xi^{-1}(U^c)$ a $\xi^{-1}(U)$ komplementuma, és $\xi^{-1}(\cup U_k) = \cup \xi^{-1}(U_k)$, $\xi^{-1}(\cap U_k) = \cap \xi^{-1}(U_k)$. Legyen ezután $(X, \mathcal{X}_0, \lambda)$ mértéktér, $\mathcal{Y}_0$ pedig az Y részhalmazaiból álló gyűrű. Az $\xi : X \mapsto Y$ függvény mérhető ha $U \in \mathcal{Y}$ esetén $\xi^{-1}(U) \in \mathcal{X}_0$, ilyenkor $\mu(U) := \lambda(\xi^{-1}(U))$ *mérték lesz a* $\mathcal{Y}_0$ *gyűrűn,* ez λ vetülete.

Lépcsős függvények: Az X részhalmazainak $\gamma := \{C_1, ..., C_n\}$ páronként diszjunkt rendszere az $A \subset X$ halmaz felosztását (osztályozását) alkotja ha $A = \cup C_k$. Ha $C_k \in \mathcal{X}_0$, akkor persze $A \in \mathcal{X}_0$, és $\lambda(A) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2) + \cdots + \lambda(C_n)$. A $\gamma' = \{C'_1 C'_2, ..., C'_m\}$ feloszás a γ finomítása ha mindegyik $C'_j \in \gamma'$ osztály része valamelyik $C_k \in \gamma$ osztálynak. A γ és γ' felosztás közös finomítása a $C''_{k,j} := C_k \cap C'_j$ halmazokból álló γ'' felosztás. Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ leképezés lépcsős függvény ha az X alaphalmaznak van olyan $\gamma = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ felosztása hogy $C_k \in \mathcal{X}_0$ ha $k > 0$, és vannak olyan $y_1, y_2, ...y_n$ számok, hogy $f(x) = 0$ ha $x \in C_0$, míg $f(x) = y_k$ ha $x \in C_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Ennek a speciális függvénynek az integrálja nyilván

$$\int_X f(x)\, d\lambda(x) \equiv \int_X f(x)\, \lambda(dx) \equiv \int_X f\, d\lambda := y_1\lambda(C_1) + y_2\lambda(C_2) + \cdots + y_n\lambda(C_n).$$

Az f lépcsős függvényhez tartozó γ felosztás nincs egyértelműen meghatározva, minden γ' finomítás is megfelel ha a $C'_j \in \gamma'$ osztályokhoz rendelt y'_j számokat úgy adjuk meg, hogy $C'_j \subset C_k$ esetén $y'_j = y_k$. Egy ilyen γ' finomítás úgy keletkezik hogy egyes $C_k \in \gamma$ halmazokat további, diszjunkt részekre bontunk. A mérték additív tulajdonsága miatt C_k mértéke is összegre bomlik fel,

$$\lambda(C_k) = \sum_{j : C'_j \subset C_k} \lambda(C'_j),$$

tehát $\int_X f\, d\lambda$ értéke nem függ az őt definiáló felosztástól. Ha $A \in \mathcal{X}_0$ akkor tetszőleges $f : A \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, és az A γ felosztásához elkészíthetjük az

$$I_{A,\gamma}(f) := f(\xi_1)\lambda(C_1) + f(\xi_2)\lambda(C_2) + \cdots + f(\xi_n)\lambda(C_n) \tag{12.3}$$

integrálközelítő összegeket, ahol $\xi_k \in C_k$ megválasztása is ránk van bízva. Látható hogy $I_{A,\gamma}$ voltaképp egy lépcsős függvény integrálja, olyané amely az A halmazon kívül 0.

A Riemann integrál: Ebben a szakaszban feltesszük hogy $\lambda(X) < +\infty$. Ha X egyben metrikus tér is, [41] akkor $\delta(\gamma) := \max_k \operatorname{diam}(C_k)$ a $\gamma = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ felosztás finomága. Természetesen feltesszük hogy az $\mathcal{X}_0$ halmazgyűrű tartalmaz minden határon túl finomodó $\gamma(n)$

[39] Az a kikötés hogy λ véges értékū, természetes ugyan, de egyáltalán nem lényeges; a véges mértékū halmazok egyébként mindig gyūrūt alkotnak. A különbség csak annyi hogy (12.2) második és harmadik sorában a $\lambda(A_1)$ feltétel is szükséges.

[40] Az X alaphalmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{X}$ halmazgyūrū σ-gyūrū ha tetszōleges $A_n \in \mathcal{X}$ sorozat egyesítését (metszetét) is tartalmazza, és ha maga X is benne van, akkor σ-algebra a neve. Ilyen az X összes részhalmazának halmaza, tehát a $\mathcal{X}_0$ gyūrū rengeteg σ-gyūrū része lehet, az összes ilyen közös része az $\mathcal{X}_0$ által generált σ-gyūrū; algebra által generált σ-gyūrū az egész teret biztosan tartalmazza, tehát ō σ-algebra. C. Caratheodory már a huszadik században bizonyította hogy halmazgyūrūn adott folytonos (σ-additív) mérték egyértelmūen terjeszthetō ki az $\mathcal{X}_0$ által generált σ-gyūrūre, és ott is σ-additív. Ez általános igazság, mindig a konkrét tények bizonyítása a nehéz.

[41] Metrikus tér nyilt halmazai nem alkotnak gyūrūt, de a nyilt és zárt halmazok metszeteinek rendszere már algebra. Általában nem könnyū ezek mértékét megadni, de a számegyenes nyilt részhalmazai egyértelmūen bonthatók fel páronként diszjunkt nyilt intervalumok sorozatának egyesítésére mert ♡ minden pont benne van az ōt tartalmazó, és a halmazban fekv=o nyilt intervallmok egyesítésében, ezek a komponensek páronként diszjunktak, és csak megszámlálható sokan lehetnek. □ Eszerint egy $G \subset \mathbb{R}$ nyilt halmaz $\lambda(G)$ mértéke a komponenseinek összhossza. Ha $F \subset \mathbb{R}$ zárt, akkor $\lambda(G \cap F) := \lambda(G) - \lambda(G \cap F^c)$ a konzekvens definíció. Igazolható hogy λ mérték.

felosztás sorozatot, vagyis $\delta(\gamma(n)) \to 0$ megvalósítható. A Riemann integrált (12.3) típusú összegekkel közelítjük, $I_\gamma(f) := I_{X,\gamma}(f)$. Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann szerint integrálható ha minden határon túl finomodó $\gamma(n)$ felosztás sorozat esetén mindig lézik az $I = \lim I_{\gamma(n)}(f)$ határérték, és az nem függ a közelítés megválasztásától; ekkor $I := \int_X f\,d\lambda$, és $\int_A f\,d\lambda := \int_X \mathbf{1}_A f\,d\lambda$, ahol $\mathbf{1}_A$ az $A \in \mathfrak{X}_0$ halmaz indikátora, $\mathbf{1}_A(x) = 1$ ha $x \in A$, $\mathbf{1}_A(x) = 0$ ha $x \in A^c$. Az A halmazon Riemann szerint integrálható függvények terét $L_0^1(A,\lambda)$ jelöli.

Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény egyenletes folytonosságának modulusa

$$c_f(\delta, X) := \sup\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) \le \delta\},$$

a folytonos függvények Riemann integráljának elmélete gyakorlatilag ugyanaz mint az egyváltozós függvényeké.

Lemma 12.1. *Ha $\delta(\gamma) \le \delta$ és γ' a γ finomítása, akkor $|I_\gamma(f) - I_{\gamma'}(f)| \le c(\delta, f)\lambda(X)$.*

Bizony: A feltétel szerint

$$I_\gamma(f) = \sum_k \sum_j f(\xi_k)\lambda(C_k \cap C_j'), \quad I_{\gamma'}(f) = \sum_k \sum_j f(\xi_j')\lambda(C_k \cap C_j'),$$

ahol $'$ a γ' felosztásra utal. Mivel $\rho(\xi_k, \xi_j') \le \delta$ ha $C_j' \subset C_k$, egyébként pedig $\lambda(C_k \cap C_j') = 0$, a két egyenlet különbsége adja az eredményt. □

A lemma következményeként $|I_\gamma(f) - I_{\gamma'}(f)| \le 2c(\delta, f)\lambda(X)$ ha $\delta(\gamma), \delta(\gamma') \le \delta$ mert a $\gamma'' := \{C_k \cap C_j''\}$ felosztás mindkettőnél finomabb. Innen az alaptétel már azonnal következik:

Tétel 12.1. *Ha $f : X \mapsto \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos akkor Riemann szerint integrálható.*

A Riemann integrál improproius változatát határátmenettel definiáljuk. Feltételesen konvergens integrálról csak az $X = \mathbb{R}$ essetben szokás beszélni, de a legjobb mindent a Lebesgue integrál keretében gondolni át.

12.2. **Az Integrál.** $**$ A lépcsős függvények valós lineáris teret alkotnak, amit L_0 jelöl. Közvetlenül ellenőrizhető hogy az integrál monoton lineáris funkcionál ezen a téren, vagyis

$$\begin{gathered}\int_X f\,d\lambda \le \int g\,d\lambda \text{ ha } f(x) \le g(x) \ \ \forall x \in X, \\ \int_X (f+g)\,d\lambda = \int_X f\,d\lambda + \int_X g\,d\lambda, \\ \int_X cf\,d\lambda = c\int_X f\,d\lambda \ \ \forall c \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{12.4}$$

A monotonitás miatt $|\int_X f\,d\lambda| \le \int_X |f|\,d\lambda$. Az is nyilvánvaló hogy $\|f\|_1 := \int_X |f(x)|\,\lambda(dx)$ norma az L_0 térben. Igaz ugyan hogy $\|f\|_1 = 0$ akkor is lehetséges, ha f formálisan nem nulla, mert olyan C_k halmazokon vesz fel nullától különböző értékeket, melyek mértéke nulla, de az ilyen lépcsős függvényeket a mindenütt eltűnő függvénnyel azonosítjuk. Az így kapott $L_{00}^1(X,\lambda)$ lineáris normált tér nem teljes. Ahhoz hasonlóan, ahogy a racionális számokból a racionális Cauchy sorozatok elképzelt határárértékeinek kooptálásával megkaptuk a valós számokat, az integrálható függvények $L^1(X,\lambda)$ tere az $L_{00}^1(X,\lambda)$ térben Cauchy sorozatot alkotó f_n sorozatok f határértékeiből áll majd össze. Ha most f_n Cauchy sorozat az $L_{00}^1(X,\lambda)$ térben, akkor

$$\left|\int_X f_m\,d\lambda - \int_X f_n\,d\lambda\right| = \left|\int_X (f_m - f_n)\,d\lambda\right| \le \int_X |f_m - f_n|\,d\lambda = \|f_m - f_n\|_1$$

miatt az integrálok sorozata konvergens, tehát lehetséges az

$$\int_X f(x)\,d\lambda(x) := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,d\lambda(x) \tag{12.5}$$

definíció. A nehézséget az okozza hogy nem minden integrálható függvény állítható elő lépcsős függvények mindenütt konvergens sorozatának határértékeként. Az alábbi konstrukció, amit korrektségének bizonyítása nélkül ismertetünk, lényegében H. Lebesgue és Riesz Frigyes nevéhez fűződik. Az $A \subset X$ halmaz nullahalmaz (nullmértékü) ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $A_n \in \mathfrak{X}_0$ sorozat hogy $A \subset \cup A_n$ és $\sum \lambda(A_n) < \varepsilon$. Hangsúlyozzuk hogy itt $A \in \mathfrak{X}_0$ nem szükséges. Például, a Cantor halmaz nem megszámlálható, mégis nullahalmaz. Nullahalmaz minden részhalmaza is az, és ha $\lambda(A_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, akkor $\lambda(\cup A_n) = 0$. Az utóbbi állítás bizonyításra szorul, de az nem nehéz. Minden $\varepsilon > 0$ számhoz és $n \in \mathbb{N}$ indexhez van olyan $A_{n,m} \in \mathfrak{X}_0$ sorozat hogy $A_n \subset \cup_m A_{n,m}$, és $\sum_m \lambda(A_{n,m}) < \varepsilon/2^n$, tehát $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(A_{n,m}) < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon$. Ha egy állítás, például függvénysorazat konvergenciája nullahalmaztól eltekintve igaz, akkor azt mondjuk hogy az λ szerint majdnem mindenütt (rövidítve λ-m.m.) igaz.

Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény akkor majdnem mérhető ha van olyan $f_n \in L^1_{00}(X, \lambda)$ sorozat hogy $f_n \to f$ λ-m.m. igaz. A majdnem mérhető függvények lineáris teret alkotnak, amit $L(X, \lambda)$ jelöl. Az $f \in L(X, \lambda)$ függvény integrálható, ha található olyan $f_n \in L^1_{00}(X, \lambda)$ Cauchy sorozat hogy $f_n \to f$ λ-m.m., és ilyenkor az f integrálját (12.5) definiálja. Cauchy sorozatot nem is olyan nehéz találni, mert ha például f_n monoton növő sorozat, vagyis $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ λ-m.m., és az integráljaik sorozata korlátos, akkor $m > n$ esetén $f_m \ge f_n$ λ-m.m., tehát

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_X |f_m - f_n|\, d\lambda = \int_X (f_m - f_n)\, d\lambda = \int_X f_m\, d\lambda - \int f_n\, d\lambda\,,$$

tehát az ilyen sorozat Cauchy az $L^1_{00}(X, \lambda)$ térben. Célszerű először a nemnegatív függvények integrálját definiálni, az általános esetet a pozitív és negatív részek szétválasztásával kezeljük. Nem egyszerű, de bizonyítható hogy ha f integrálható, akkor $\int_X f\, d\lambda$ értéke nem függ a közelítő lépcsős függvények megválasztásától. Az integrál (12.4) tulajdonságai határátmenettel terjeszthetők ki általános integrálható függvényekre. Bizonyítható hogy $\|f\|_1 = 0$ acsak $f = 0$ λ-m.m. Az integrál folytonosságát fejezi ki az alábbi, dominált konvergencia (Lebesgue) tétel.

Tétel 12.2. *Ha az $f_n \in L^1(X, \lambda)$ sorozat majdnem mindenütt konvergál az f függvényhez, és van olyan $g \in L^1(X, \lambda)$ hogy $|f_n(x)| \le g(x)$ λ-m.m. $x \in X$ esetén, akkor $f \in L^1(X, \lambda)$, és $\int_X f_n\, d\lambda \to \int_X f\, d\lambda$.*

A tétel ekvivalens alakja, a monoton konvergencia tétel pozitív tagú sorok tagonkénti integrálhatóságáról szól. Legyen $f := \sum f_n$, ahol $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ nemnegatív integrálható függvények. Ekkor

$$\int_X f(x)\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\, d\lambda\,. \tag{12.6}$$

Ez a tétel akkor is igaz ha f nem integrálható, mert az integráljának értéke $+\infty$. Ha ugyanis $f \ge 0$ mérhető, de nem integrálható, akkor konstruálható, például csonkítással, olyan $0 \le f_n \le f$ sorozat hogy $\int_X f_n\, d\lambda > n$, tehát ésszerű az $\int_X f\, d\lambda = +\infty$ definíció. Nem csak az egész téren lehet integrálni, mert ha $A \in \mathfrak{X}_0$, és $\mathbf{1}_A(x)$ az A halmaz indikátora, akkor $\mathbf{1}_A f \in L^1(X, \lambda)$ esetén írhatjuk hogy

$$\int_A f(x)\, \lambda(dx) := \int_X \mathbf{1}_A(x) f(x)\, \lambda(dx)\,. \tag{12.7}$$

Ha most C az $A, B \in \mathfrak{X}_0$ diszjunkt halmazok egyesítése, akkor $\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ miatt

$$\int_C f(x)\, \lambda(dx) = \int_A f(x)\, \lambda(dx) + \int_B f(x)\, \lambda(dx)\,,$$

tehát az integrál az integrálás tartományának additív függvénye. Ha $f \ge 0$ integrálható, akkor $\mu(A) := \int_A f\, d\lambda$ nemnegatív és additív halmazfügvény az $\mathfrak{X}_0$ gyűrűn, az hogy μ *folytonos, tehát mérték,* a monoton (vagy dominált) konvergencia tételének következménye.

A részhalmazon történő integrálást úgy is definiálhatjuk, hogy az eredeti $(X, \mathfrak{X}_0, \lambda)$ mértéktér helyett annak $(A, \mathfrak{X}_{A,0}, \lambda_A)$ alterében számolunk, ahol $A \in \mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_{A,0} := \{B \cap A : B \in \mathfrak{X}_0\}$ és $\lambda_A(B) := \lambda(A \cap B) = \lambda(B)$ ha $B \in \mathfrak{X}_{A,0}$. Ekkor $\int_A f\, d\lambda := \int_A f\, d\lambda_A$. Ha az integrálás az egész téren történik, akkor gyakran az $\int f\, d\lambda$ rövidítést használjuk, sőt $\int f$ és a $\lambda(f) \equiv \int_X f\, d\lambda$ jelölés is is előfordul. Ha fontos az intgrációs változó megjelölése, mert több is lehet belőlük, akkor $d\lambda$ helyére $\lambda(dx)$ irandó. Riemann szerint integrálható függvény természetesen Lebesgue szerint is integrálható, és az integrál értéke is ugyanaz. A különbség mindössze annyi, hogy

Riemman integrálható függvények határértéke nem biztos hogy megint Riemann integrálható lesz. A Lebesgue integrál kidolgozása során olyan tényeket ismertek fel, mint például a dominált konvergencia tétel vagy a Fubini tétel, amelyek jelentősen megkönnyítik az integrálok kezelését.
Mértékterek szorzata: Az $(X, \mathcal{X}_0, \lambda_1)$ és $(Y, \mathcal{Y}_0, \lambda_2)$ mértékterek $(Z, \mathcal{Z}_0, \lambda)$ szorzatánál $Z := X \times Y$ az (x, y) párok halmaza, $\mathcal{X}_0$ az $A \times B$, $A \in \mathcal{X}_0$, $B \in \mathcal{Y}_0$ típusú "téglák" véges egyesítéseiből áll, és a $\lambda = \lambda_1 \times \lambda_2$ mértéket $\lambda(A \times B) := \lambda_1(A)\lambda_2(B)$ definiálja. Megjegyezzük hogy

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)\,, \quad \text{és} \quad (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) =$$
$$(A_1 \cap A_2^c) \times (B_1 \cap B_2^c) \cup (A_1 \cap A_2^c) \times (B_2 \cap B_1^c) \cup (A_2 \cap A_1^c) \times (B_1 \cap B_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c) \times (B_2 \cap B_1^c)\,,$$

ahol persze üres halmazok is előfordulhatnak. A második azonosság szerint véges sok tégla egyesítése páronként diszjunkt téglákra bontható. Ez az azonosság lehetővé teszi a $\lambda(C) := \lambda(C_1) + \lambda(C_2) + \cdots + \lambda(C_n)$ definíciót, ahol $\mathcal{Z}_0 \ni C = \cup C_k$, és a $C_k \in \mathcal{Z}_0$ téglák páronként diszjunktak. A felbontás ugyan nem egyértelmű, de $\lambda(C)$ *értéke mindig ugyanaz,* $\heartsuit$ mert ha egy $A \times B$ tégla a páronként diszjunkt D_j téglák egyesítése akkor $A = \cup A_l$, $B = \cup B_l$, és $A_i \cap A_l = B_i \cap B_l = \emptyset$ ha $j \neq l$, ahol az $A_i \in \mathcal{X}_0$ és $B_l \in \mathcal{Y}_0$ halmazok a $D_j = A'_j \times B'_j$ szorzat megfelelő tényezői közül kerúlnek ki. Ráadásul mindegyik D_j tégla $A'_i \times B'l$ alakú, és mindegyik kombináció pontosan egyszer fordul elő, tehát

$$A \times B = \cup_i \cup_l A'_i \times B'_l \quad \text{és így} \quad \lambda(A \times B) = \sum_i \sum_l \lambda_1(A'_i)\lambda_2(B'_l) = \sum_j \lambda(D_j)\,.$$

Innen az is látható hogy ez a λ additív halmazfüggvény $\square$, azt kell még megmutatni hogy *a* $\mathcal{Z}_0$ *gyűrün* λ *folytonos, tehát* σ*-additív.* $\heartsuit$ Elég téglák megszmlálható sok páronként diszjunkt téglára történő felbontásait vizsgálni, de a fenti logika itt is működik. $\square$

Ezután az integrált az olyan lépcsős függvények halmazáról terjesztjük ki, amelyek "lépcsői" téglák. Mivel minden $C \in \mathcal{Z}_0$ halmaz diszjunkt téglák egyesítése, nincs szó az általánosság csorbításáról. Az így definiált integrált

$$\int_Z f(z)\,\lambda(dz) = \iint_{X \times Y} f(x, y)\,\lambda(dx, dy) = \int_Y \int_X f(x, y)\,\lambda_1(dx)\,\lambda_2(dy)$$

jelölheti.
Fubini tétele: Legyen

$$I_{12} : = \int_Z |f(z)|\,\lambda(dz)\,, \quad I_1 =: \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|\,\lambda_1(dx)\right) \lambda_2(dy)$$
$$I_2 =: \int_X \left(\int_Y |f(x, y)|\,\lambda_2(dy)\right) \lambda_1(dx)\,.$$

Ha a fenti integrálok közül valamelyik véges akkor mindegyik az, és

$$\int_Z f(z)\,\lambda(dz) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\,\lambda_1(dx)\right) \lambda_2(dy) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\lambda_2(dy)\right) \lambda_1(dx)\,.$$

Lépcsős függvényeknél az állítás nyilvánvaló, az általános eset a dominált konvergencia tétel következménye, elég az $f \geq 0$ esetet tisztázni.
Paraméteres integrálok: Tegyük fel hogy az $(X, \mathcal{X}_0, \lambda)$ mértéktéren értelmezett f függvény a $t \in (a, b)$ valós paramétertől is függ, vagyis $f = f(t, x)$. Ha f minden rögzített t esetén integrálható, akkor felvethető az a kérdés hogy hogyan lehet a

$$\phi(t) := \int_X f(t, x)\,\lambda(dx)$$

függvényt t szerint differenciálni. Fubini tétele, és a 8. Fejezetben igazolt Lebesgue - féle NL formula segítségével kapjuk hogy

Tétel 12.3. *Ha $f(t,x)$ a t paraméter szerint parciálisan differenciálható, és $f(t,x) = f(a,x) + \int_a^t f_t'(s,x)\,ds$, továbbá*

$$\int_a^b \left(\int_X |f(t,x)|\,\lambda(dx) \right) dt < +\infty, \text{ akkor } \phi'(t) = \int_X f_t'(t,x)\,\lambda(dx) \text{ m.m.}$$

Bizony: Fubini tétele szerint

$$\phi(t) = \phi(a) + \int_a^t \left(\int_X f_t'(s,x)\,\lambda(dx) \right) ds\,,$$

és az integrált most is szabad a felső határ szerint differenciálni. □ **

Ennek a tételnek számos hasznos következménye van, például $t > 0$ esetén $1/t = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx$ differenciálásával kapjuk az

$$\int_0^\infty t^{n+1}\,\frac{x^n}{n!}\,e^{-tx}\,dx = 1 \tag{12.8}$$

képleteket.

12.3. **Integrálok kiszámítása.** Az itt tárgyalandó integrálok mind a számegyenes mérhető részhalmazain adott Lebesgue mértékre és a Fubini tételre épülnek.
Integrál a számegyenesen: $X = \mathbb{R}$ és az $\mathfrak{X}_0$ halmazgyűrű a véges számú félig zárt $[a,b)$, $a\,,b \in \mathbb{R}$ intervallum diszjunkt egyesítéseként előállítható halmazokból áll. Közvetlenül belátható hogy így tényleg halmazgyűrűt kapunk, és az $A \subset \mathfrak{X}_0$ halmaz $\lambda(A)$ mértéke egyértelműen definiĺható az A-t egyesítésként kiadó diszjunkt intervallumok hosszának összegével. Annak bizonyítása hogy λ additív, egyszerű, a folytonosságé (σ-additivitás) a nehéz, a 8. és 13. fejezeteket. Integrálokat általában intervallumokon számolunk, tehát $\int_a^b f\,dx \equiv \int_{(a,b)} f, d\lambda$, ahol a λ a Lebesgue mérték. A jól ismert Newton - Leibniz formula a következő formában is igaz.

Tétel 12.4. *Ha f integrálható az (a,b) intervallumon, és $F(x) := \int_a^x f(y)\,,dy$ akkor F majdnem minden $x \in (a,b)$ pontban differenciálható, és $F'(x) = f(x)$ majdnem mindenütt igaz.*

A Cantor halmazból kiindulva konstruálható olyan szigorúan monoton F függvény hogy $F'(x)$ majdnem mindenütt létezik, és ott 0 az értéke, tehát a Newton - Leibniz formula fenti alakja sem korlátlanul alkalmazható.
Integrálás görbe mentén: Az $\mathsf{r}(t) = x(t)\,\sigma + y(t)\,\mathsf{j} + z(t)\,\mathsf{k}$ $t \geq 0$ formulával adott térgörbe $s(t)$ ívhosszát a görbébe írt poligonok összhosszának határértékeként definiáltuk. Ha $\mathsf{r}(t)$ mindegyik komponense szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor a $[0,t)$ szakasz ívhossza

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathsf{r}}(\tau)|\,d\tau = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)}\,d\tau\,, \tag{12.9}$$

formálisan $ds = |\dot{\mathsf{r}}|\,dt$. Ugyanazt a görbét, mint geometriai alakzatot többféle paraméterezéssel is megadhatjuk, az ívhossz ettől nem függ. Ha esetleg többször járjuk be a pályát, akkor a fenti formulák is többszörösen számolják a görbe hosszát. Célszerű a vizsgált Γ görbét olyan $\mathsf{r} : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^3$ függvénnyel megadni, ami kölcsönösen egyértelmű, [42] legalábbis majdnem mindenütt differenciálható, és $|\dot{\mathsf{r}}|$ integrálható. (12.9) megadja a $\Gamma := \{\mathsf{r}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ görbe $\Gamma(u,v) := \{\mathsf{r}(t) : u \leq t \leq v\}$ ívének $\nu(\Gamma(u,v)) := s(v) - s(u)$ mértékét, amely az $X = \Gamma$ halmaz részhalmazain adott. Tulajdonképpen a $[0,T]$ intervallum részhalmazain a Lebesgue mérték segítségével készített $\mu(A) := \int_A |\dot{\mathsf{r}}|\,dt$ mértéket vetítettük fel a görbére.

Az $f \in C(\mathbb{R}^3)$ függvénynek a $\mathsf{r}(u)$ és $\mathsf{r}(v)$ pontokat összekötő $\Gamma(u,v)$ görbedarab mentén az ívhossz szerinti integrálja

$$\int_{\Gamma(u,v)} f(\mathsf{r})\,ds := \int_{\Gamma(u,v)} f(\mathsf{r})\,d\lambda = \int_u^v f(\mathsf{r}(\tau))\,|\dot{\mathsf{r}}(\tau)|\,d\tau\,. \tag{12.10}$$

[42] Vanak zárt görbék is, de az $\mathsf{r}(0) = \mathsf{r}(T)$ kivétel nem okoz zavart.

A $\mathsf{r} = x\,\sigma + y\,\mathsf{j} + z\,\mathsf{k}$ konvenció szellemében írhatjuk hogy $f(\mathsf{r}) = f(x,y,z)$, ilyenkor a fenti I integrált az

$$I = \int_u^v f\big(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\big)\,\sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)}\,d\tau \tag{12.11}$$

képlettel számoljuk. Sokkal érdekesebb az $\mathsf{f} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ vektormezők integrálása. Az f erőtérnek a Γ görbe mentén végzett munkáját

$$W(\Gamma(u,v)) = \int_{\Gamma(u,v)} \mathsf{f}(\mathsf{r}) \cdot d\mathsf{r} := \int_{\Gamma(u,v)} \langle \mathsf{f}(\mathsf{r}(s)), \mathsf{r}'(s)\rangle\,ds = \int_u^v \langle \mathsf{f}(\mathsf{r}(\tau)), \dot{\mathsf{r}}(\tau)\rangle\,d\tau \tag{12.12}$$

adja. Ha $\mathsf{f}(\mathsf{r}) = \varphi(x,y,z)\,\sigma + \phi(z,y,z)\,\mathsf{k} + \psi(x,y,z)\,\mathsf{k}$ akkor

$$W = \int_u^v \big(\varphi(x(\tau),y(\tau),z(\tau))\dot{x}(\tau) + \phi(x(\tau),y(\tau),z(\tau))\dot{y}(\tau) + \psi(x(\tau),y(\tau),z(\tau))\dot{z}(\tau)\big)\,d\tau\,. \tag{12.13}$$

Az $\mathsf{f}(\mathsf{r})$ erőtér konzervatív ha van olyan folytonosan differenciálható $U : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ potenciál hogy $\mathsf{f} = -\nabla U$; itt is az $U(\mathsf{r}) = U(x,y,z)$ konvenciót használjuk.

Tétel 12.5. *Ha $\mathsf{f} = -\nabla U$ folytonos a $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon, akkor a $\Gamma \subset G$ görbe mentén $W(\Gamma(u,v)) = U(\mathsf{r}(u)) - U(\mathsf{r}(v))$, tehát konzervatív erőtér munkája csak a görbe végpontjaitól függ.*

Bizony: Mivel $\langle \nabla U(\mathsf{r}), \dot{\mathsf{r}}\rangle = dU(\mathsf{r}(t))/dt$, az állítás a Newton - Leibniz szabály direkt következménye. □

Ha a $\mathsf{f}(\mathsf{r})$ erőtér konzervatív, akkor Young tétele miatt a $\nabla\mathsf{f}$ Jacobi mátrix szimmetrikus, és ez az állítás megfordítható.

Tétel 12.6. *Ha a f erőtér Jacobi mátrixa szimmetrikus, és valamely konvex tartományban folytonos, akkor ott van olyan folytonosan differenciálható $U : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ potenciál hogy $\mathsf{f} = -\nabla U$, tehát az eőtér munkája független az úttól.*

Bizony: Rögzitsük az $\mathsf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ pontot. Ha van potenciál, akkor az éppen

$$U(\mathsf{r}) := U(\mathsf{r}_0) - \int_0^1 \langle \mathsf{f}(\mathsf{r}(t)), \dot{\mathsf{r}}(t)\rangle\,dt\,,$$

ahol $\mathsf{r}(t) := \mathsf{r}_0 + (\mathsf{r} - \mathsf{r}_0)t$ az r_0 és r pontokat összekötő szakasz egyenlete, tehát $\dot{\mathsf{r}} = \mathsf{r} - \mathsf{r}_0$. Azt kell megmutatni hogy $-\nabla U = \mathsf{f} = \varphi\,\sigma + \phi\,\mathsf{j} + \psi\,\mathsf{k}$. A szokásos jelölésekkel

$$\partial_x U = -\int_0^1 \big(\varphi(\mathsf{r}(t)) + \varphi_x'(\mathsf{r}(t))(x - x_0)t + \phi_x'(\mathsf{r}(t))(y - y_0)t + \psi_x'(\mathsf{r}(t))(z - z_0)t\big)\,dt\,.$$

Mivel $\phi_x = \varphi_y$ és $\psi_x = \varphi_z$, parciális integrálással

$$\partial_x U(x,y,z) = -\int_0^1 \big(\varphi(\mathsf{r}(t)) + t\,\partial_t\varphi(\mathsf{r}(t))\,dt = -\varphi(x,y,z)\,.$$

Az $U_y' = -\phi$ és $U'z = -\psi$ egyenletek ugyanígy vezethetők le. □

A második tételnél fontos a tartomány alakja. (12.6) érvényét veszti ha G-ben nem lehet *minden benne haladó görbét egy pontra összehúzni.* A térben ilyen egy végtelen hosszú cső külseje, vagy gyűrüként záródó cső belseje. A dolog lényegét Stokes tételének bizonyítása mutatja a legjobban. A fenti eredmények változatlan formában terjeszthető ki tetszőleges dimenziójú terekre.

Integrál a síkon: Ebben az esetben $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{X}_0$ pedig azokból a tartományokból, és a komplementumaikból áll, melyeket folytonos görbék határolnak, tehát a λ területüket meg tudjuk határozni. A fő elvi probléma itt is a mérték folytonosságának (σ-additivitás) igazolása, ezt a előző szakaszban tárgyaltuk; szorzatmérték konstrukciójáról van szó. Integrál közelítő összegeit a legegyszerűbb a sík négyzethálós felosztásával készíteni, de a körlap körcikszeletekre történő felosztása (poláris transzformáció) is tanulságos.

Felületi integrálok: Felületen a felszín - mérték geometriai konstrukciója úgy történik hogy a felületdarabot apró háromszögekkel rakjuk ki, és ezek összterületének határértékét vesszük amint a legnagyobb háromszög átmérője is nullához tart. A precíz tárgyalás bonyolult, egyszerűség kedvéért az $\mathsf{r}(u,v)$, $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ kétparaméteres alakban megadott felület felszínének meghatározását az

$$S := \iint_G |\mathsf{r}'_u \times \mathsf{r}'_v|\, du\, dv$$

képlettel a sík Lebesgue mértékére vezetjük vissza. Természetesen figyelni kell arra hogy a felület melyik részét hányszor járjuk be. Irányítható felület felszíne vektorként is értelmezhető, ekkor $d\vec{S} := \mathsf{n}\, dS$ az integrátor, ahol n a felületi normális egységvektor. Nevezetes alkalmazás valamely vektormező

$$\Phi := \iint_G \mathsf{f}(\mathsf{r}) \cdot (\mathsf{r}'_u \times \mathsf{r}'_v)\, du\, dv$$

fluxusának számolása.

Hármas és többes integrálok: Az $\mathbb{R}^3$ térben is számos olyan A halmaz van, aminek ismerjük a $\lambda(A)$ térfogatát. A kockákon, téglatesteken és egyéb poliédereken kívül ide tartoznak azok a felületekkel határolt halmazok is, amelyek térfogatát kettős integrálokkal számolhatjuk; ezekből áll az $\mathcal{X}_0$ halmazalgebra. Az $A \in \mathcal{X}_0$ korlátos és zárt halmazon definiált $f(x,y,z)$ folytonos függvény integrálját az

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \approx I_\gamma := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \lambda(A_k) \tag{12.14}$$

közelítés definiálja, ahol $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in A_k \in \mathcal{X}_0$, és az A_k halmazok az A diszjunkt felosztását adják, tehát $\lambda(A) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \cdots + \lambda(A_n)$. Az a fontos hogy a felosztás finomításakor a legnagyobb elem átmérője is nullához tart. Mivel f egyenletesen folytonos, az I_γ összegek egy jól meghatározott számhoz konvergálnak, ez az integrál értéke. Ezután a dominált konvergencia tétel segítségével az integrált végtelen tartományokra és bonyolultabb függvényekre is ki lehet terjeszteni.

Az integrálok kiszámításának első eszköze a Fubini tétel, ami szerint az $a_1 < x < a_2$, $b_1 < x < b_2$, és $c_1 < z < c_2$ egyenlőtlenségekkel meghatározott A téglatesten

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx \tag{12.15}$$

feltéve hogy f helyére az abszolút értékét írva, a jobboldalon kapott érték véges. Az integrálás sorrendje tetszőleges lehet, és végtelen intervallumok is megengedettek. A zárójeleket gyakran elhagyják. Bonyolultabb A tartományok esetén mindig megtehetjük hogy az

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_A(x,y,z)\, f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{12.16}$$

azonosságot alkalmazzuk, ahol 1_A az A halmaz indikátora. Például, az $A := \{(x,y,z) : (x,y) \in G,\ g(x,y) < z < h(x,y)\}$ esetben

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_G \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy\,. \tag{12.17}$$

Hasznos módszer az integrálok helyettesítés után történő számolása is, először a poláris transzformációhoz hasonló $x = r\sin\vartheta\, \cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\, \sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ gömbi koordinátákat tárgyaljuk, ahol $r \ge 0$, $0 \le \vartheta < \pi$ és $-\pi < \varphi \le \pi$ esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk az eredeti és az új változók között. Mivel a $dr\, d\vartheta\, d\varphi$ térfogatelem képe az (x,y,z) változók terében olyan gömbhéj cikk, melynek térfogata $r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\theta\, dr$,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\vartheta\, \cos\varphi\,, r\cos\vartheta\, \sin\varphi\,, r\sin\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr\,.$$

A gömbi koordináták $z = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta\, \cos\varphi$, $y = r\cos\theta\, \sin\varphi$ változata is elterjedt, ilyenkor földgömb mintájára $-\pi/2 < \theta \le \pi/2$ a helyvektornak az (x,y) síkkal bezárt szöge, és $dx\, dy\, dz = r^2 \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$ a mérték transzformációja. Hasonló, de egyszerűbb az $x = r\cos\varphi$,

$y = r\sin\varphi$ és $z = z$ hengerkoordináták esete, itt a síkbeli poláris transzformációt és Fubini télét alkalmazva kapjuk hogy

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi\,, z)\,r\,d\varphi\,dr\,dz\,.$$

Érdemes észrevenni és ellenőrizni hogy a poláris transzformációnál fellépő r, és a gömbi transzformációnál használatos $r^2\cos\vartheta$ szorzó egyaránt a transzformáció Jacobi mátrixának a determinánsa. Ez minden kölcsönösen egyértelmű transzformáció esetében is így van, ezt a többes integráloknál részletezzük.

Hármas integrálok segítségével felületekkel határolt négydimenziós tartományok térfogatát is kiszámolhatjuk. Ezek segítségével aztán négyváltozós függvényeket is tudunk integrálni, ami ötdimenziós testek térfogatának a meghatározását teszi lehetővé, és így tovább. Az integrálás elméletét tetszőleges véges dimenziós térben is ki lehet dolgozni. Ha $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ integrálható, akkor az integrálját $G \subset \mathbb{R}^d$ halmazon $\int_G f(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}$ jelöli. Fubini tétele változatlanul érvényes, tehát a többes integrált ismételt integrálással lehet kiszámolni.

Az $\mathsf{x} = A\mathsf{y}$ lineáris transzformáció, ahol A $d\times d$ méretű mátrix, akkor kölcsönösen egyértelmű ha $\det A \neq 0$. Ilyenkor az x változók terében elkészített $\varepsilon > 0$ oldalú d-dimenziós kockákból álló szabályos rácsnak az y változók terében olyan rács felel meg, melyben egy cella térfogata $\varepsilon^d|\det A|$, tehát $\mathsf{dx} = |\det A|\,\mathsf{dy}$. Ha tehát f integrálható, akkor

$$\int_{AG} f(\mathsf{x})\,\mathsf{dx} = |\det A| \int_G f(A\mathsf{y})\,\mathsf{dy}\,, \tag{12.18}$$

ahol $G \subset \mathbb{R}^d$ nyilt, és $AG := \{A\mathsf{y} : \mathsf{y} \in G\}$. Ez a képlet akkor is érvényes ha $\det A = 0$, mert akkor mindkét oldal 0.

Az általános eset vizsgálatához tegyük fel hogy $\boldsymbol{\phi} : G \mapsto \mathbb{R}^d$ kölcsönösen egyértelmű, és az inverze is folytonosan differenciálható. Minden $x_0 \in G$ pont egy környezetében érvényes a

$$\boldsymbol{\phi}(\mathsf{y}) = \boldsymbol{\phi}(\mathsf{y}_0) + \nabla\boldsymbol{\phi}(\mathsf{y}_0)(\mathsf{y}-\mathsf{y}_0) + o(|\mathsf{y}-\mathsf{y}_0|)\,, \tag{12.19}$$

lineáris közelítés, tehát azt várjuk hogy a $\mathsf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathsf{y})$ esetben $\mathsf{dx} = |\det\nabla\boldsymbol{\phi}(\mathsf{y})|\,\mathsf{dy}$. A precíz bizonyítás, sőt maga az állítás is elég bonyolult. Ha f integrálható a $\boldsymbol{\phi}(G) := \{\boldsymbol{\phi}(\mathsf{y}) : \mathsf{y} \in G\}$ halmazon, akkor

$$\int_{\boldsymbol{\phi}(G)} f(\mathsf{x})\,\mathsf{dx} = \int_G f(\boldsymbol{\phi}(\mathsf{y}))|\det\nabla\boldsymbol{\phi}(\mathsf{y})|\,\mathsf{dy}\,. \tag{12.20}$$

Gauss divergencia tétele: A síkbeli tétel bizonyításának gondolatmenete itt is egész jól működik. Ha $\mathsf{f}(\mathsf{x}) := \varphi(x,y,z)\,\mathsf{i} + \phi(x,y,z)\,\mathsf{j} + \psi(x,y,z)\,\mathsf{k}$ folytonosan differenciálható akkor Fubini és Newton - Leibniz tételeivel

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\int_0^b\int_0^c \big(\varphi'_x(x,y,z) + \phi'_y(x,y,z) + \psi'_z(x,y,z)\big)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^b\int_0^c \varphi(a,y,z)\,dz\,dy - \int_0^b\int_0^c \varphi(0,y,z)\,dz\,dy \\
&+ \int_0^a\int_0^c \phi(x,b,z)\,dz\,dx - \int_0^a\int_0^c \phi(x,0,z)\,dz\,dx \\
&+ \int_0^a\int_0^b \psi(x,y,c)\,dy\,dx - \int_0^a\int_0^b \varphi(0,y,z)\,dy\,dx
\end{aligned}$$

adódik. Az eredmény nemcsak tengelyállású téglákra, hanem elég általános $V \subset \mathbb{R}^3$ tartományokra is átvihető:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathsf{f}(\mathsf{x})\,\mathsf{dx} = \oint_\Sigma \mathsf{f}(\mathsf{y})\cdot\vec{S}(\mathsf{dy}) = \oint_\Sigma \mathsf{f}(\mathsf{y})\cdot\mathsf{n}(\mathsf{y})\,S(\mathsf{dy})\,, \tag{12.21}$$

ahol Σ a V térrészt határoló *irányított felület.* A jobboldalon az f vektormező fluxusa áll; $\vec{S}(\mathsf{dy}) = \mathsf{n}(\mathsf{y})\,S(\mathsf{dy})$ a vektor értékű felszínmérték integrátora, $\mathsf{n}(\mathsf{y})$ a Σ felület y pontjából kifelé mutató normális egységvektor, végül $S(\mathsf{dy})$ a felszin szerinti integrátor.

Ha V tengelyállású téglák egyesítése, akkor szinte nincs is mit bizonyítani, mert az egyes komponensekre felírt integrálok összeadásakor a közös oldallapokon a fluxust kétszer számoljuk, de ellenkező előjellel, tehát csak a határon fekvő lapokhoz tartozó fluxusok maradnak meg. Bonyolultabb a helyzet általános, de persze darabonként sima felülettel határolt felület esetében, mert V feldarabolásakor a határ mentén tengelyállású tetraéderek keletkeznek, és a Σ határfelület ezek ferde állású oldallapjaival van kirakva. Ezek prototípusa az, aminek $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ és $(0,0,c)$ a négy csúcsa. Gauss (12.21) tételét erre se lenne nehéz bizonyítani, de ez borzasztó képletek felírásával járna. Inkább gondolkodjunk egy kicsit.

Jelölje rendre a, b, és c a ferde lap csúcsainak helyvektorait, ekkor a tengelyállású lapok befelé mutató normálvektorai $\mathsf{a}\times\mathsf{b}$, $\mathsf{c}\times\mathsf{a}$ és $\mathsf{b}\times\mathsf{c}$, míg $(\mathsf{a}-\mathsf{b})\times(\mathsf{b}-\mathsf{c})$ a ferde lap kifelé mutató normálisának iránya, és az egyes lapok területei éppen a fenti vektorok hosszának felével egyenlőek. Most vegyük észre hogy $(\mathsf{a}-\mathsf{b})\times(\mathsf{b}-\mathsf{c})=\mathsf{a}\times\mathsf{b}+\mathsf{c}\times\mathsf{a}+\mathsf{b}\times\mathsf{c}$, amit a következőképpen értelmezünk. Ha az f erőtér állandó, vagyis $\mathsf{f}(\mathsf{r})=\mathsf{v}\ \forall\ \mathsf{r}$, akkor a tetraéder tengelyállású lapjain bemenő fluxus ugyanannyi mint a ferde lapon kimenő, tehát Gauss tétele ebben az esetben biztosan érvényes. Ha $\varepsilon>0$ a V feldarabolásakor a határ mentén keletkező tetraéderek átmérőinek nagyságrendje, akkor egy ilyen tetraéderen ε^3 lesz $\operatorname{div}\mathsf{f}$ integráljának nagyságrendje, és $O(\varepsilon^{-2})$ darab van belőlük, tehát az együttes járulékuk is csak $O(\varepsilon)$, ami elhanyagolható. Mivel f folytonosan differenciálható, mindegyik kis tetraéderhez van $\mathsf{v}\in\mathbb{R}^3$ úgy hogy rajta $\mathsf{f}=\mathbf{v}+O(\varepsilon)$, a határát is beleértve, majnem állandó, $O(\varepsilon)$ az ingadozása. Emiatt f bemenű fluxusa egy kis tetraéder tengelyállású oldallapjain csak ε^3 nagyságrenddel tér el a ferde oldallapon kimenő fluxustól, tehát a hibák összege is elhanyagolható; Gauss tételét az $\varepsilon\to 0$ határátmenettel kapjuk. A divergencia tétel a parciális differenciálegyenletek elméletében játszik szerepet.

Green formulái: Mivel $\operatorname{div}(f\nabla g)=\nabla f\cdot\nabla g+f\Delta g$, a $d=3$ esetben Gauss tételével

$$\iiint_V f(\mathsf{x})\Delta g(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}=\oint_\Sigma f(\mathsf{y})\nabla g(\mathsf{y})\cdot\vec{S}(\mathsf{dy})-\iiint_V \nabla f(\mathsf{x})\cdot\nabla g(\mathsf{x})\,\mathsf{dx} \tag{12.22}$$

következik, ahol Σ megint a $V\subset\mathbb{R}^3$ tartomány határa. A képletben f és g szerepét felcserélve, és az első egyenletet a másodikból kivonva kapjuk Green szimmetrikus formuláját:

$$\iiint_V g(\mathsf{x})\Delta f(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}=\iiint_V f(\mathsf{x})\Delta g(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}+\oint_\Sigma g(\mathsf{y})\nabla f(\mathsf{y})\cdot\vec{S}(\mathsf{dy})-\oint_\Sigma f(\mathsf{y})\nabla g(\mathsf{y})\cdot\vec{S}(\mathsf{dy})\,. \tag{12.23}$$

A parciális integrálás hasonló formuláit kapjuk a síkon érvényes Gauss tétel segítségével, ami azt állítja hogy ha Γ a $G\subset\mathbb{R}^2$ korlátos tartomány határa, akkor

$$\iint_G \operatorname{div}(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}=\oint_\Gamma \mathsf{f}(\mathsf{y})\cdot\mathsf{n}(\mathsf{y})\,\mathsf{ds}\,, \tag{12.24}$$

ahol a jobboldalon az f erőtér fluxusa áll, vagyis az integrálás Γ ívhossza szerint történik, és $\mathsf{n}(y)$ a kifelé mutató normálvektor az $\mathsf{y}\in\Gamma$ pontban. Innen

$$\iint_G f(\mathsf{x})\Delta g(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}=\oint_\Gamma f(\mathsf{y})\nabla g(\mathsf{y})\cdot\mathsf{n}(\mathsf{y})\,ds-\iint_G \nabla f(\mathsf{x})\cdot\nabla g(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}\,, \tag{12.25}$$

és Green szimmetrikus

$$\iint_G g(\mathsf{x})\Delta f(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}=\iint_G f(\mathsf{x})\Delta g(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}+\oint_\Gamma g(\mathsf{y})\nabla f(\mathsf{y})\cdot\mathsf{n}(y)\,ds-\oint_\Gamma f(\mathsf{y})\nabla g(\mathsf{y})\cdot\mathsf{n}(y)\,ds \tag{12.26}$$

formulája is azonnal következik.

A Poisson egyenlet: Poisson szerint a róla elnevezett $-\Delta u(\mathsf{x})=f(\mathsf{x})$, $\mathsf{x}\in\mathbb{R}^3$, egyenlet egyik megoldása

$$u(\mathsf{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(\mathsf{y})\,\mathsf{dy}}{|\mathsf{x}-\mathsf{y}|}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(\mathsf{x}-\mathsf{y})\,\mathsf{dy}}{4\pi|\mathsf{y}|}\,, \tag{12.27}$$

feltéve hogy az integrál konvergens. A levezetés Green második tételét használja, feltesszük hogy $f\in C^2(\mathbb{R}^3)$ egy korlátos halmazon kívül eltűnik. Tudjuk hogy a $\Phi_3(\mathsf{x}):=(4\pi|\mathsf{x}|)^{-1}$ Newton potenciál, sőt a $\nabla\Phi$ gradiense is integrálható az $\mathsf{x}=0$ pont környékén, és $\Delta\Phi_3(\mathsf{x})=0$

ha $\mathsf{x} \neq 0$. Jelölje $S^2_\delta(\mathsf{x})$ az x középpontú és $\delta > 0$ sugarú gömb felületét, $G^c_\delta(\mathsf{x})$ pedig a külsejét, ekkor

$$\Delta u(\mathsf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta f(\mathsf{x}-\mathsf{y})\,d\mathsf{y}}{4\pi|\mathsf{y}|} = \lim_{\delta\to 0} \iiint_{G^c_\delta} \frac{\Delta f(\mathsf{y})\,d\mathsf{y}}{4\pi|\mathsf{x}-\mathsf{y}|} = \lim_{\delta\to 0} \oint_{S_\delta} \frac{f(\mathsf{y})(\mathsf{x}-\mathsf{y})\cdot \vec{S}(d\mathsf{y})}{4\pi|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^3} = -f(\mathsf{x})$$

mert a másik peremtag eltűnik, a maradó pedig éppen $-f$ átlaga az S_δ gömbfelületen, ahol $f(\mathsf{y}) = f(\mathsf{x}) + O(\delta)$. Ugyanígy igazolható a síkon érvényes képlet. Mivel $\nabla \log|\mathsf{x}| = \mathsf{x}/|\mathsf{x}|$, a síkbeli szimmetrikus Green tétel következményeként

$$u(t,\mathsf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(1/|\mathsf{x}-\mathsf{y}|) f(\mathsf{y})\,d\mathsf{y} \tag{12.28}$$

a $-\Delta u = f$ Poisson egyenlet megoldása; a síkon $\Phi_2(\mathsf{x}) := -(2\pi)^{-1}\log|\mathsf{x}|$ a Newton potenciál.

Ezzel a feladat teljesértékű megoldása még nem történt meg, adott $G \subset \mathbb{R}^d$ korlátos nyílt tartomány esetén az $u(\mathsf{y}) = g(\mathsf{y})$ ha $\mathsf{y} \in \Gamma := \partial G$ *Dirichlet féle peremfeltételt* is szeretnénk kielégíteni. Tegyük fel hogy $\Delta u = \Delta w = 0$ a G halmazon, és legyen $W(\mathsf{x},\mathsf{y}) := \Phi_d(\mathsf{x}-\mathsf{y}) + w(\mathsf{y})$, $d = 2,3$, ekkor a fenti Poisson formulák levezetésének mintájára, tehát x egy kis környezetének kivágásával, majd a lyuk összehúzásával kapjuk hogy

$$u(\mathsf{x}) = \oint_\Gamma u(\mathsf{y})\nabla_y W(\mathsf{x},\mathsf{y})\cdot \mathsf{n}(\mathsf{y})\,S(d\mathsf{y}) - \oint_\Gamma W(\mathsf{x},\mathsf{y})\nabla u(\mathsf{y})\cdot\mathsf{n}(\mathsf{y})\,S(d\mathsf{y}), \tag{12.29}$$

ahol n a Γ kifelé mutató normális egységvektora, $S(d\mathsf{y})$ a felszín (ívhossz) szerinti integrátor. Green függvény az olyan W neve amelyik a Γ határon eltűnik, általában csak a létezését lehet bizonyítani.

A tükrözési elv: Az $R > 0$ sugarú gömb Green függvényének meghatározásához legyen $\mathsf{x}^* := \mathsf{x}R^2/|\mathsf{x}|^2$, x^* a gömbön kívül lesz ha $|\mathsf{x}| < R$ belső pont. Azt kell észrevenni hogy $W(x,y) := \Phi_3(\mathsf{x}-\mathsf{y}) - R\Phi_3(\mathsf{x}^*-\mathsf{y})/|\mathsf{x}|$ a gömb Green függvénye. Megjegyezzük hogy $|\mathsf{x}||\mathsf{x}^*-\mathsf{y}| = R|\mathsf{x}-\mathsf{y}|$ és $|\mathsf{x}|^2\mathsf{x}\cdot\mathsf{y} = R^2\mathsf{x}^*\cdot\mathsf{y}$ ha $|\mathsf{y}| = R$. Ezek szerint $W(\mathsf{x},\mathsf{y}) = 0$ ha $|\mathsf{y}| = R$, és az is könnyen kiszámolható hogy $\nabla_y W = (R - |\mathsf{x}|^2/R)/|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^2$, továbbá $|\mathsf{x}^*| > R$ miatt $\Delta_y\Phi(\mathsf{x}^*-\mathsf{y}) = 0$ ha $|\mathsf{y}| \le R$, tehát (12.29) következményeként

$$u(\mathsf{x}) = \frac{R^2-|\mathsf{x}|^2}{4\pi R}\oint_{|\mathsf{y}|=R} \frac{g(\mathsf{y})\,S(d\mathsf{y})}{|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^3} \tag{12.30}$$

a Laplace egyenlet Dirichlet feladatának megoldása a három dimenziós gömbön, ami az $x = r\cos\vartheta\,\cos\varphi$, $y = r\cos\vartheta\,\sin\varphi$, $z = r\sin\vartheta$ gömbi koordinátákban

$$u(r,\varphi,\vartheta) = \frac{R}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R^2-r^2)\,g(R\cos\theta\,\cos\phi, R\cos\theta\,\sin\phi, R\sin\theta)\,d\phi\,d\theta}{(R^2+r^2-2rR(\sin\vartheta\,\sin\theta + \cos(\varphi-\phi)\cos\vartheta\,\cos\theta))^{3/2}} \tag{12.31}$$

Ugyanez az okoskodás a síkon az

$$u(\mathsf{x}) = \frac{R^2-|\mathsf{x}|^2}{2\pi}\oint_{|\mathsf{y}|=R}\frac{g(\mathsf{y})\,S(d\mathsf{y})}{|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^2} = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(R\cos\phi, R\sin\phi)\,d\phi}{R^2+r^2-2rR\cos(\varphi-\phi)} \tag{12.32}$$

megoldóképlethez vezet, ahol $\mathsf{x} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, mindkettő Poisson nevét viseli. A tükrözési elv sok más esetben is használható, például, d-dimenziós térben a gömb Dirichlet feladatának megoldása

$$u(\mathsf{x}) = \frac{R^2-|\mathsf{x}|^2}{R\omega_d}\oint_{|\mathsf{y}|=R}\frac{u(\mathsf{y})}{|\mathsf{y}-\mathsf{x}|^d}\,dF(\mathsf{y}), \tag{12.33}$$

ahol az integrálás az R sugarú gömb határán a felszín szerint történik, ω_d az egységgömb felszíne. Féltér esetében

$$u(\mathsf{x}) = \frac{2x_d}{\omega_d}\int\limits_{y_n=0}\frac{u(\mathsf{y})}{|\mathsf{y}-\mathsf{x}|^d}\,dy_1\,dy_2\cdots dy_{d-1}, \tag{12.34}$$

ahol $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $x_d > 0$, $\mathsf{y} = (y_1, y_2, ..., y_d)$, és az integrálás az $y_d = 0$ hipersíkon történik.

12.4. **Négyzetesen integrálható függvények, Fourier sorok.** A ℓ^2 térhez hasonlóan definiálható a valós vagy komplex értékű függvények $L^2(X,\lambda)$ tere, ami az olyan $f : X \mapsto \mathbb{C}$ mérhető függvényekből áll, hogy $|f|^2 \in L^1(X,\lambda)$. Először az

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)\,\overline{g(x)}\,\lambda(dx) \tag{12.35}$$

skaláris szorzatot definiáljuk, amivel két probléma van. Komplex értékű függvény integrálját úgy értelmezzük, hogy a valós rész integráljához hozzáadjuk a képzetes rész integráljának $\imath$-szeresét. Az $\langle f, g\rangle$ integrál létezése és végessége a $2|f\bar{g}| \le |f|^2+|g|^2$ egyenlőtlenség következménye. Ezután azt kell ellenőrizni, hogy $\langle f, g\rangle$ eleget tesz a skaláris szorzat (10.4) axiómáinak, amennyiben a majdnem mindenütt eltűnő függvényeket a 0 elemmel azonosítjuk. A nevezetes

$$\left|\int_X f(x)\,\overline{g(x)}\,d\lambda\right|^2 \le \int_X |f(x)|^2\,d\lambda \int_X |g(x)|^2\,d\lambda \tag{12.36}$$

Cauchy - Schwarz egyenlőtlenség is igaz, és az $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ norma bevezetése után az $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2\|g\|_2$ rövid alakot ölti. Ha $\|f - f_n\|_2 \to 0$ akkor azt mondjuk hogy f_n négyzetátlagban konvergál f-hez. Az így definiált Euklideszi tér teljes, ez a híres Riesz - Fischer tétel állítása.

Fourier sorok: Jelölje $L^2(-\pi,\pi)$ a 2π szerint periodikus, négyzetesen integrálható valós függvények terét, tehát a skaláris szorzat

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx\,.$$

Mivel $f(x \pm 2\pi n) = f(x)$ ha $n \in \mathbb{N}$, ezeket a függvényeket elég egy 2π hosszúságú intervallumon megadni, és a Fourier együtthatókat akármelyik $(a, a + 2\pi)$ intervallumon számolhatjuk. A normált trigonometrikus rendszer elemei $\psi_0 := (2\pi)^{-1/2},$, $\psi_{2n-1} := (\pi)^{-1/2}\cos nx$ és $\psi_{2n} = (\pi)^{-1/2}\sin nx$ ha $n \in \mathbb{N}$. Tudjuk hogy ez ONR, és

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \tag{12.37}$$

az $f \in L^2(-\pi,\pi)$ függvény Fourier sorának n-ik részletösszege, ahol

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,,\ n \in \mathbb{Z}_+\,,\quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Ha a vizsgált függvények periódusa 2π helyett l, akkor a $\cos(2n\pi x/l)$ és $\sin(2n\pi x/l)$ bázisfüggvényekkel dolgozunk, és az együtthatók képletében π helyére $l/2$ kerül.

Euler képletével (12.37) az $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\imath kx}$ alakba megy át, ahol $c_k := (a_k - \imath b_k)/2$ ha $k > 0$, $c_0 = a_0/2$ és $c_k = (a_{-k} + \imath b_{-k}/2)$ ha $k < 0$. Mivel az $e^{\imath nx}$, $n \in \mathbb{Z}$ rendszer ortogonális a komplex $L^2(-\pi,\pi)$ térben,

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\imath kx}\,dx\,.$$

A $z = e^{\imath x}$ helyettesítésével a Fourier sor Laurent sorba megy át.

Differenciálható függvény Fourier együtthatóinak nagyságrendje parciális integrálással számolható. Ha $f \in L^2(-\pi,\pi)$ *kétszer differenciálható* és $f'' \in L^2(-\pi,\pi)$, akkor $a_n, b_n = O(n^{-2})$, tehát *a sor egyenletesen abszolút konvergens.*

A fűrészjel: Igen tanulságos a $\sum(1/n)\sin(nx)$ sor, ami nem abszolút konvergens, de azért elemi úton összegezhető. Euler képlete szerint

$$\begin{aligned} &e^{-\imath nx} + e^{-\imath nx+\imath x} + \cdots + e^{-\imath x} + 1 + e^{\imath x} + \cdots + e^{\imath nx} \\ &= 1 + 2\cos x + 2\cos(2x) + \cdots + 2\cos(nx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned} \tag{12.38}$$

amit $x > 0$-tól π-ig integrálva

$$\pi - x - 2\sin x - \sin(2x) - \cdots - (2/n)\sin(nx) = \frac{-2}{2n+1}\int_x^\pi \frac{\cos'((n+1/2)y)}{\sin(y/2)}\,dy$$

adódik. A parciális integrálást elvégezve látható hogy, $x > 0$ miatt a jobboldali integrál eltűnik, tehát $(1/2)(\pi - x)$ a $\sum(1/n)\sin(nx)$ sor összege.
$**$ **Teljesség:** Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor a Fourier sora egyenletesen magához a függvényhez konvergál. Az ilyen sor az $L^2(-\pi,\pi)$ Hilbert térben is konvergens, ha tehát C^2 függvény minden Fourier együtthatója nulla, akkor a függvény azonosan nulla. Innen a *trigonometrikus rendszer teljessége* is következik, mert $\heartsuit$ minden négyzetesen integrálható függvény tetszőlegesen megközelíthető C^2 függvényekkel. $\square$ Tehát *négyzetesen integrálható függvény Fourier sora négyzetátlagban konvergál magához a függvényhez,* és Parseval egyenlősége is igaz:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,, \tag{12.39}$$

amivel számos négyzetösszeg is meghatározható. Felhasználtuk a Riesz - Fisher tételnek azt a változatát ami szerint az L^2 tér teljes, ezt csak a Lebesgue integrál elméletének kidolgozása után tudjuk bebizonyítani. $**$
$**$ **Riemann lemmája:** Tudjuk hogy folytonosan differenciálható függvény Fourier együtthatói $O(1/n)$ nagyságrendűek, négyzetesen integrálható függvény sorának együtthatói négyzetesen konvergensek.

Tétel 12.7. *Ha f integrálható akkor*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos(\omega x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin(\omega x)\,dx = 0\,.$$

Bizony: Lépcsős függvény esetében az állítás nyilvánvaló, integrálható függvény pedig megközelíthető lépcsős függvények f_n sorozatával, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos(\omega x)\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\cos(\omega x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx\,.$$

Tipikus 2ε okoskodásról van szó: először n legyen olyan nagy hogy a jobboldal második tagja kisebb mint az előre adott $\varepsilon > 0$, majd n értékét rögzítve $\omega \to +\infty$. Az ellenkező egyenlőtlenség és $\sin(\omega x)$ esete ugyanaz. $**$ $\square$

Dirichlet formulája: Még mindig nem tudjuk hogy hova is konvergál Fourier sora, ezért nézzük meg jól az együtthatók behelyettesítésével adódó

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cdot\cos ky + \sin kx\cdot\sin ky)\right)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx - ky)\right)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,D_n(y)\,dy\,, \end{aligned}$$

zárt előállítást, ahol

$$D_n(y) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ky = \frac{\sin(ny + y/2)}{2\sin(y/2)} \tag{12.40}$$

a Dirichlet mag. D_n páros függvény, és az $f = 1$ választással vagy közvetlen számolással az is látható hogy $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\,dy = \pi$, tehát

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta_y f(x)\,D_n(y)\,dy\,,$$

ahol $\Delta_y f(x) := f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)$ az y lépésközű diszkrét Laplace operátor.

Tétel 12.8. *Ha az $y^{-1}\Delta_y f(x)$ függvény rögzített x mellett az y változó szerint integálható, akkor* $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

Bizony: Az előző képletből

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\Delta_y f(x)}{2\sin(y/2)}\sin(ny + y/2)\,dy\,,$$

és a feltétel miatt az integrál alatti tört $y/\sin(y/2)$ korlátossága miatt integrálható, tehát az állítás a Riemann lemma következménye. □

A tétel Dininek köszönhető feltétele biztosan teljesül ha f szakaszonként folytonosan differenciálható és a szakadási helyeken $f(x) = (1/2)(f(x+0) + f(x-0))$.
Sorfejtés az (a, b) intervallumon: Itt a $\cos(n\omega x)$ és a $\sin(n\omega x)$ függvények alkotnak teljes ortogonális rendszert, ahol $\omega := 2\pi/(b-a)$, és az

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$$

sorfejtés együtthatói

$$a_n := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos(n\omega x)\;dx\,,\quad n\in\mathbb{Z}_+\,,$$
$$b_n := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin(n\omega x)\;dx\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Gyakori az $a = -l$, $b = l$ vagy az $a = 0$ és $b = l$ választás.
A szinusz sor: Ha f páros akkor a sorában mindegyik b_n , ha páratlan, akkor mindegyik a_n nulla. Peremérték feladatok megoldásakor hasznos a $(0, l)$ intervallumon adott függvények

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin(2n\pi x/l)\,,\quad b_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\sin(2n\pi x/l)\,dx \tag{12.41}$$

előállítása. A sor feltételes konvergenciájához bőven elég ha f szakaszosan C^1 és $2f(x) = f(x+0)+f(x-0)$ a szakadási helyeken. Valóban, az $f(-x) = -f(x)$ és $f(-l) = f(0) = f(l) = 0$ konvencióval a $[-l, l]$ intervallumon p'aratlan függvényhez jutunk, és Dini kritériuma is érvényes, tehát a 12.8. Tétel működik. Az így definiált kiterjesztés sajnos csak akkor lehet folytonos ha $f(0) = f(l) = 0$, tehát a konvergencia akkor is csak $1/n$ rendű ha f a $(0, l)$ intervallumon igen sima.
Példák: Az $f(x) := x$ függvény a $(-\pi, \pi)$ intervallumon páratlan, tehát szinusz sora van:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}\quad\text{ha}\quad |x| < \pi\,. \tag{12.42}$$

A fűrészjel sorából viszont

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\quad\text{ha}\quad 0 < x < 2\pi \tag{12.43}$$

adódik, és a két sor kombinációjából

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2nx + x)}{2n+1}\quad\text{ha}\quad 0 < x < \pi\,. \tag{12.44}$$

A $-\pi < x < 0$ esetben a sor összege -1 , tehát valójában a 2π szerint periodikus négyszögjel sorát kaptuk meg. Ezek a sorok csak feltételesen konvergensek, pedig Dirichlet formulájából látható hogy a részletösszegek sorozata egyenletesen korlátos.

Az $f(x) := x$ függvény koszinusz sora $|x|$ kifejtését adja:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2nx+x)}{(2n+1)^2} \quad \text{ha } |x| \le \pi\,; \tag{12.45}$$

a $(0,2\pi)$ intervallumon egyenlőszárú derékszögű háromszögjel sorát kaptuk. Ez a sor már abszolút konvergens, tagonkénti differenciálásával visszakapjuk a négyszögjel sorát, amit még egyszer differenciálva a periodikus Dirac delta mindenütt divergens

$$\delta_{\text{per}}(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\cos(2nx+x) \tag{12.46}$$

sorát kapjuk, amit ettől még egész jól lehet használni.

Általános háromszög alakja van az $f(x) := \min\{\alpha x, \beta(\pi - x)\}$, $0 \le x \le \pi$ függvény gráfjának, ahol $\alpha\,,\beta > 0$; $y := \beta\pi/(\alpha+\beta)$ a csúcs helye. Mivel $f(0) = f(\pi) = 0$, ez a jel a $(0,\pi)$ intervallumon is szinusz sorba fejthető:

$$f(x) = \frac{2\alpha+2\beta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ny)}{n^2}\,\sin(nx)\,, \tag{12.47}$$

amiből az eddigi sorok mind visszanyerhetők.

Kétszeri parciális integrálással kapjuk hogy

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{ha } |x| \le \pi\,, \tag{12.48}$$

amiből az $x = \pi$ helyettesítéssel kapjuk hogy a négyzetszámok reciprokainak összege $\pi^2/6$. Peremfeltétele miatt a logisztikus függvény is szinusz sorba fejthető:

$$x(\pi - x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2nx+x)}{(2n+1)^3} \quad \text{ha } 0 \le x \le \pi\,. \tag{12.49}$$

Érdekesek az alábbi, 4π szerint periodikus függvények sorai:

$$\cos(x/2) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(nx)}{4n^2-1} \quad \text{ha } |x| < \pi \tag{12.50}$$

sor, amiből differenciálással a korrekt

$$\sin(x/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin(nx)}{4n^2-1} \quad \text{ha } |x| < \pi \tag{12.51}$$

képletet kapjuk. Mivel az utóbbi sor csak feltételesen konvergens, nem meglepő hogy ezt differenciálva nem kapjuk vissza az (12.50) sort. Az egyenirányított vátóáram sora:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\,, \tag{12.52}$$

pedig a $|\sin x|$ függvénynek töréspontjai vannak.

13. A MODERN ANALÍZIS ELEMEI

A topológia, mértékelmélet és a funkcionálanalízis néhány bevezető fejezetét ismertetjük. Ezek egy része korábban - bizonyítás nélkül - már megjelent. Sok bizonyítás most is csak a lényegre szorítkozik, korábbi definíciókat és eredményeket hivatkozás nélkül használunk.

13.1. **Halmazelmélet.** Amikor halmazokról van szó, nem elég az a követelmény hogy csak egy már ismert halmaz részhalmazairól beszélhetünk. Ezzel ugyan elkerülhetők az olyan paradoxonok hogy az összes halmaz halmaza tartalmazza-e önmagát, és emiatt nem mondhatjuk hogy *végtelen az a halmaz amelyik nem véges,* pedig a véges halmazokat ismerjük. Korrekt az a definíció hogy X *végtelen ha kölcsönösen egyértelmű módon képezhető le egy valódi részhalmazára.* További logikai problémák merülnek fel ha "megszámlálhatónál több" (sorozatba nem rendezhető) halmazzal kell foglalkoznunk. Az analízisben ezek többnyire megkerülhetőek, de nem érdmes ezzel vesződni. Tulajdonképpen a természetes számok Peano axiómájának kiterjesztéséről lesz szó.

Részben és teljesen rendezett halmazok Az X halmaz részben rendezett ha adott benne egy olyan $\prec$ bináris rendezési reláció hogy $x \prec x$ mindig igaz, de ha $x \neq y, z \in X$, akkor $x \prec y$ és $y \prec x$ közül pontosan az egyik teljesül, továbbá $x \prec z$ ha $x \prec y$ és $y \prec y$. $(X, \prec)$ (teljesen) rendezett ha $x \prec y$ és $y \prec x$ közül az egyik biztosan teljesűl. $L \subset X$ lánc ha teljesen rendezett, és $A \subset X$ korlátos ha van olyan $y \in X$ hogy $x \prec y \; \forall x \in A$. $\mathbb{N}$ és $\mathbb{R}$ rendezett halmazok, részben rendezett halmaz tipikus példái valamely X halmaz részhalmazainak $\mathcal{P}(X)$ osztálya, vagy lineáris tér lineárisan független részhalmazai és alterei a $\subset$ relációra vonatkozóan. A valós függvények tere is csak részben rendezett.

Hausdorff maximum elve: *Részben rendezett halmaz minden lánca benne van egy maximális, vagyis nem bővíthető láncban.* Ebből a posztulátumból azonnal következik a kiválasztás axiómája: *Halmazok tetszőleges $X_t \, , t \in T$ rendszeréhez van olyan $\Phi : T \mapsto X := \cup X_t$ kiválasztó függvény hogy $\Phi(t) \in X_t \; \forall t \in T$.* $\heartsuit$ Kiválasztó függvénynek nevezzük az olyan $\phi : \tau \mapsto X$ leképezéseket is, ahol $\tau \subset T$ és $\phi(t) \in X_t$ ha $t \in \tau$. Ezek halmaza részben rendezett a $\phi \prec \psi$ relációra nézve, ami akkor igaz ha ψ a ϕ kiterjesztése. Legyen $\{\phi_\tau : \tau \in \mathcal{T}\}$ az egyik maximális lánc, ahol τ a ϕ_τ értelmezési tartománya, és $\Psi(t) := \phi_\tau(t)$ ha $t \in \tau \in \mathcal{T}$; ez a keresett kiválasztás függvénye. $\square$ A kiválasztás axiómájának az a speciális esete hogy *halmazsorozat Descartes szorzata nem üres,* elegendő a valódi analízis felépítéséhez.

Jólrendezett halmazok: Az X rendezett halmaz jól van rendezve ha minden részhalmazának van első eleme; a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza ilyen. $I \subset X$ az $(X, \prec)$ rendezett halmaz kezdőszakasza ha $x \in X$ és $y \in I$ esetén $x \in I$ ha $x \prec y$, az X kezdőszakaszainak rendszerét $\mathcal{I}(X)$ jelöli. Jólrendezett halmaz I kezdőszakaszának $\ell(I) \in X$ végpontja az I utólsó eleme ha van neki, egyébként $\ell(I)$ az X I után következő elemei közűl az első, feltéve hogy $I \neq X$. *Ha X jólrendezett, akkor a $\subset$ reláció jól rendezi a $\mathcal{I}(X)$ halmazt,* $\heartsuit$ mert ha $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}(X)$ és l az $\ell(I) \, , I \in \mathcal{I}'$ elemek közül az első, akkor l egy $I_1 \in \mathcal{I}'$ intervallum végpontja, és I_1 lesz az $\mathcal{I}'$ első eleme. $\square$

Zermelo tétele: A Hausdorff elv és a kiválasztási axióma következménye hogy *Minden halmaz rendezhető jól.* $\heartsuit$ Vegyünk elő egy $\Phi : \mathcal{P}(X) \mapsto X$ kiválasztó függvényt, vagyis $\Phi(A) \in A$ ha $A \subset X$, majd képzeljük el az X jól rendezhető halmazainak $\mathcal{E}$ rendszerét. Pontosabban, $\mathcal{E}$ elemei olyan (A, θ) párok ahol $x\theta y$ az $A \subset X$ rendezésének relációja, és azt is előírjuk hogy ha $I \subset A$ az A kezdőszakasza, akkor $\Phi(I^c)$ az $A \cap I^c$ első eleme. Azt mondjuk hogy $(A, \theta) \prec (B, \kappa)$ ha $A \subset B$ és $x\kappa y$ ha $x\theta y$, ráadásul A a B kezdő intervalluma. Az $\mathcal{E}$ $\{(A_\gamma, \theta_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ maximális láncának egyesítése: (M, κ) , ahol $M := \cup A_\gamma$ és $x\kappa y = x\theta_\gamma y$ ha $x, y \in A_\gamma$, szintén $\mathcal{E}$ eleme. Ha $M \neq X$ volna, akkor láncunk bővíthető volna a $\Phi(M^c)$ elemmel. $\square$ Zermelo tételéből a kiválasztási axióma következik: $\heartsuit$ az unió jólrendezése után mindegyik halmazhoz választhatjuk az első elemét. $\square$

Transzfinit indukció: *Ha X jól van rendezve, $Y \subset X$ és $\{x \in X : y \neq x \prec y\} \subset Y$ esetén $y \in Y$, akkor $Y = X$.* Ugyanúgy mint a természetes számok mentén futó indukciónál, $\heartsuit$ már Y^c első eleménél is ellentmondást kapunk ha $Y \neq X$. $\square$ Ezzel a módszerrel mutatjuk meg hogy *Zermelo tételéből következik Hausdorff elve,* tehát a halmazelmélet három posztulátuma egyenértékű. $\heartsuit$ L lánc az $(X, \prec)$ részben rendezett halmazban, az L^c halmazt a $<$ reláció rendezi jól; $x \neq y$ ha $x < y$. Maximális láncot kell készíteni: ha egy lánc bővíthető, akor hozzá vesszük az első olyan elemet, amit szabad, így láncok egy bővülő rendszere keletkezik. Minden $x \in L^c$ elemhez hozzárendeljük az L lánc egy $L(x)$ bővítését úgy hogy $L(x) \subset L(y)$ ha $x \prec y$. A kezdet könnyű, legyen $y_1 \in L^c$ az első olyan elem amivel L bővíthető, ekkor $L(x) := L$ ha $x < y_1$, $L(y_1) := L \cup \{y_1\}$. Az $L(y_1)$ láncot az y_1 után következő első alkalmas elemmel bővítjük, és így tovább, az eljárás korlátlanul folytatható. Tegyük fel hogy $L(x)$ már minden $x < y$ elemhez elkészült, legyen $L(y-) := \cup\{L(x) : x < y\}$, ekkor $L(y) := L(y-) \cup \{y\}$ ha az lánc, egyébként $L(y) := L(y-)$. A transzfninit indukció elve szerint az $L(x)$ konstrukció minden $x \in L^c$ elemhez elkészült, tehát az $L(x)\,, x \in L^c$ láncok egyesítése biztosan nem bővíthető. □

13.2. **Általános topológia.** Ez a határérték és folytonosság elméletének absztrakt változata. **Topologikus tér:** Olyan X halmaz melyben adott a nyíltnak minősített részhalmazokból álló $\mathcal{G}$ rendszer úgy hogy $\emptyset, X \in \mathcal{G}$, és véges sok nyilt halmaz metszete, valamint akárhánynak az egyesítése is nyilt halmaz, vagyis a $\mathcal{G}$ eleme. Zártak a nyílt halmazok komplementumai, tehát akárhány zárt halmaz metszete is mindig zárt; a zárt halmazok osztályát $\mathcal{F}$ jelöli. Az X tér $\mathcal{G}$ topológiájának bázisa olyan $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ halmazrendszer amiből egyesítéssel minden nyilt halmaz megkapható, a tér szeparábilis ha van megszámlálható bázisa. Az $S \subset X$ halmaz sűrű ha minden nyilt halmazban van eleme. *Szeparábilis térnek van megszámlálható sűrű halmaza, metrikus tér szeparábilis ha van neki ilyen.* Definíció szerint minden $G \ni x$ nyilt halmaz az $x \in X$ pont környezete, és $x_n \to x$ azt jelenti hogy a sorozatnak minden $G \ni x$ nyilt halmazon kívül csak véges sok eleme lehet. Az $A \subset X$ halmaz határa azokból a pontokból áll amiknek minden környezetében van a halmazhoz tartozó, és hozzá nem tartozó pont is. Zárt halmaz minden határpontját tartalmazza, nyilt egyet sem. metrikus térben igaz hogy *minden határpont határértéke a halmazból vett sorozatnak.* Csak Hausdorff terekkel foglakozunk, ezekben bármely két pontnak van diszjunkt környezete, tehát minden *zárt halmaz az őt tartalmazó nyílt halmazok közös része.* Az $Y \subset X$ halmazok is topologikus térré válnak ha nyíltnak minősítjük az $Y \cap G$, $G \in \mathcal{G}$ halmazokat, így keletkeznek a tér alterei.

A Cauchy sorozat fogalma absztrakt topologikus térben nem definiálható, a kompaktságot Borel tételével határozzuk meg: $(X, \mathcal{G})$ *akkor kompakt ha minden nyilt halmazokkal történő lefedéséből kiválasztható véges lefedés.* Mivel a nyilt halmazokat báziselemek egyesítéseként kapjuk, *kompakt az a tér aminek báziselemekkel történő lefedéséből mindig kiválasztható véges fedő.* Az $X_0 \subset X$ halmazt akkor nevezzük kompaktnak ha mint altér kompakt. Kompakt tér zárt részhalmazai nyilván mind kompaktak, mert a lefedéséhez a komplementumát hozzávéve az egész tér nyilt lefedését kapjuk. Fordítva: *ha az A altér kompakt a nem feltétlenül kompakt* $(X, \mathcal{G})$ *térben, akkor zárt, vagyis* $A^c \in \mathcal{G}$. Azt kell igazolni hogy ha $y \in A^c$ akkor van olyan $G \in \mathcal{G}$ hogy $y \in G \subset A^c$. ♡ Minden $x \in A$ ponthoz van $H_x\,, G_x \in \mathcal{G}$ úgy hogy $x \in H_x$, $y \in G_x$ és $G_x \cap H_x = \emptyset$. A H_x halmazok közül véges sok is lefedi A-t; ezek G_x párjainak a metszete az a nyilt halmaz amit keresünk. □ Bolzano és Weierstrass igazsága bonyolultabb, Cantor metszettétele a következőképpen általánosítható. Az $(X, \mathcal{G})$ tér zárt halmazainak valamely rendszere centrált ha véges sok elemének mindig van közös pontja. *Az* $(X, \mathcal{G})$ *tér akkor és csak akkor kompakt ha benne zárt halmazok centrált rendszerének a közös része sohasem üres.* ♡ Ha a zárt halmazok Θ rendszre centrált, de $\cap\{F : F \in \Theta\} = \emptyset$, akkor a tér nem lehet kompakt mert az $\{F^c : F \in \Theta\}$ nyilt halmazok lefedik, de közülük véges sok erre nem képes. Fordítva, ha a nyilt halmazok Θ rendszere lefedi a teret, de közülük véges sok soha, akkor $\{G^c : G \in \Theta\}$ zárt halmazok olyan centrált rendszere aminek nincs közös pontja.□

A nyilt halmazokból álló $\mathcal{G}_{00}$ osztály a tér albázisa ha az elemeiből alkotott véges metszetek rendszere egy $\mathcal{G}_0$ bázis. Alexander szerint *kompakt az a tér aminek albázisból készített bármely lefedése tartalmaz véges fedőt.* ♡ Ha $\Theta \subset \mathcal{G}_0$ olyan fedő amiben nincs véges, akkor Hausdorff elvének köszönhetően ezek között van egy Θ^* maximális, amihez bármely $G \in \mathcal{G}_0$ báyiselemet hozzávéve már olyan fedőt kapunk, amiben van véges fedő. Viszont $\Sigma := \mathcal{G}_{00} \cap \Theta^*$ nem lehet fedő, mert ha az lenne, akkor ő is, tehát Θ^* is tartalmazna véges fedőt. Eszerint van $x \in X$ és $G \in \Theta^*$ úgy hogy x nincs lefedve Σ elemeivel, de $x \in G$, sőt $x \in U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \subset G$, ahol $U_k \in \mathcal{G}_{00}$, viszont $U_k \notin \Theta^*$. Mivel Θ^* maximális, mindegyik U_k elemhez van olyan $\Theta_k \subset \Theta^*$ véges alrendszere ami U_k-val együtt már fedő, de akkor az $\cup\Theta_k$ osztályhoz a G halmazt hozzávéve véges fedőt kapunk, tehát Θ^* mégiscsak bővíthető. □

Folytonosság: Az $(X, \mathcal{G})$ topologikus térnek az $(Y, \mathcal{H})$ térbe történő $f : X \mapsto Y$ leképezése folytonos ha minden $H \in \mathcal{H}$ nyilt halmaz $G := \{x \in X : f(x \in G)\}$ inverz képe nyilt. Folytonos függv 'eny konvergens sorozatot konvergensbe visz át, de a fordított állítás általában nem igaz. *Kompakt tér folytonos képe is kompakt* ♡ mert a képtér nyilt lefedésének inverz képe az alaptér nyilt lefedése, és az ebből kiválasztható véges fedő halmazainak a képtérben megfelelő fedőhalmazok most már csak véges sokan vannak. □ Ez Weierstrass tételének absztrakt formája. Innen az is következik hogy *kompakt téren folytonos és kölcsönösen egyértelmű függvénynek az inverze is folytonos.* ♡ Valóban, kompakt tér zárt halmazai kompaktak, tehát nyilt halmazának képe nyilt. □ A kompaktság eléggé abszolút fogalom mert ha $(X, \mathcal{G})$ *és* $(X, \mathcal{G}')$ *is kompakt, és* $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, *akkor* $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ ♡ mert az identitás homeomorfizmus, tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a nyilt halmazok között.

Két tér topológiai értelemben azonos, azaz homeomorf, ha létesíthető köztük olyan kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezés, aminek az inverze is folytonos. A számegyenes zárt intervallumai nyilván mind homeomorfak, sőt $\mathbb{R}$ és $(0, 1)$ is az; $\phi(x) := (1 + \operatorname{th} x)/2$ létesít megfeleltetést. Hasznos topologikus terekkel is előfordul hogy semilyen metrikus térrel sem azonosíthatóak.

Összefüggő halmazok: Bolzano szerint *összefüggő halmaz folytonos képe is összefüggő* ♡ mert ha a képtér részhalmaza egyszerre nyilt és zárt is, akkor az inverz képe is ilyen volna. □ Euklideszi tér részhalmazainak összefüggősége másképpen is megfogható. Az X tér, ami egy nagyobb altere is lehet, ívszerűen összefüggő ha bármely két pontja összeköthető folytonos görbével. Ivszerűen összefüggő tér összefüggő, de a fordított állítás általában nem igaz.

A $\phi : [a, b] \mapsto X$ függvény $\Gamma := \{\phi(t) : a \leq t \leq b\}$ képterét görbének szokás nevezni, Γ folytonos ha ϕ az. Ha ϕ folytonos és kölcsönösen egyértelmű akkor Γ és $[0, 1]$ homeomorf. Ha $\phi(a) = \phi(b)$ de $\phi(t) = \phi(s)$ másképp nem lehetséges, akkor Γ a sík egységkörével homeomorf, ezek az önmagukat át nem metsző egyszerű zárt görbék. A felületek síkbeli tartomány folytonos képeként keletkeznek, a legegyszerübb zárt felületek a gömb felszínével homeomorfak.

Topologikus szorzat: Két tér, $(X_1, \mathcal{G}_1)$ és $(X_2, \mathcal{G}_2)$ topologikus szorzata $(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$, ahol a $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ topológia bázisát a $G_1 \times G_2$, $G_i \in \mathcal{G}_i$ halmazok alkotják. *Két kompakt tér szorzata is kompakt* mert ♡ a $G_1 \times X_2$ és $X_1 \times G_2$, $G_i \in \mathcal{G}_i$ halmazok együttesen a topológia albázisát alkotják, de ha egy rendszerük lefedi a szorzatteret, akkor valamelyik típus ezt egyedül is megteszi. □ Véges sok tér szorzata indukcióval (is) konstruálható, ilyenkor a szorzat kompaktságát már nem is kell igazolni. Az is látható hogy a $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, $G_k \in \mathcal{G}_k$ halmazok az $(X_k, \mathcal{G}_k)$ terek szorzattopológiájának bázisát alkotják.

Leginkább a számegyenes részhalmazait szorozgatjuk össze, de számunkra is érdekes az a helyzet amikor a "tényezők" halmaza nem számlálható meg. Azt a konstrukciót tárgyaljuk amikor a topologikus szorzat mindegyik tényezője ugyanaz az $(X, \mathcal{G})$ tér. Tetszőleges T halmazhoz $\Omega = X^T$ jelöli az $\omega : T \mapsto X$ függvények terét, amiben a $\mathcal{G}^T$ szorzat - topológia $\mathcal{G}^T_{00}$ albázisát az $X_t(G_t) := \{\omega \in \Omega : \omega(t) \in G_t\}$ $t \in T, G_t \in \mathcal{G}$ típusú halmazok véges metszetei alkotják, tehát egy báziselem

$$X_\alpha(\{G_t\}) := \cap \{X_t(G_t) : t \in \alpha\} = \{\omega \in \Omega : \omega(t) \in G_t \; \forall \, t \in \alpha\}$$

alakú, ahol $\alpha \subset T$ véges, és $G_t \in \mathcal{G}$ is tetszőleges. Tyihonov tétele szerint: *kompakt terek szorzata is kompakt.* ♡ Ismét Alexander tételét alkalmazzuk, az albázist az $X_t(G_t)$ halmazok alkotják. Biztosan van olyan $t \in T$ hogy a fedő $X_t(G_t)$ típusú halmazai lefedik a teljes Ω teret, de akkor a G_t halmazok lefedik az X_t komponenst, ami kompakt. □

Csak a jelöléseket kell megváltoztatni nem feltétlenül azonos terek szorzatainak tárgyalásához. Tyihonov tétele ilyenkor is igaz, de már a szorzattér definiálásakor is kell a kiválasztási axióma. Az $(X, \mathcal{G})$ és $(X, \mathcal{H})$ topológiák közül $\mathcal{H}$ gyengébb mint $\mathcal{G}$ ha $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Minél több a nyilt halmaz, annál kevesebb a folytonos függvény; a szorzattopológia a leggyengébb olyan topológia aminél az $f(\omega) := \omega(t)$ függvények mind folytonosak.

A $\{0, 1\}$ halmaz egyetlen ésszerű topológiája az, amikor minden részhalmaza egyidejűleg zárt és nyilt. Véges halmaz mindengyik lehetséges topológiája kompakt, az $\Omega := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ szorzattér is az. Ω lényegében azonosítható a $[0, 1]$ intervallummal, de a Cantor halmzzal is.

13.3. **Metrikus terek.** Topologikus terek legfontosabb példái ezek, de nem minden topológia adható meg metrikával. Például, az összes valós függvény $X := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ terében függvénysorozat konvergenciája annak a topológiának felel meg aminek bázisát a

$$K_\delta(f, x_1, x_2, ..., x_n) := \{g \in X : |g(x_k) - f(x_k)| < \delta\,, k = 1, 2, ..., n\}\,, f \in X\,, x_k \in \mathbb{R}\,, \delta > 0$$

halmazok alkotják. Látható hogy ez a szorzattopológia nagyon nem szeparábilis, és igazolható hogy a pontonkénti konvergencia, sem származtatható metrikából.

A távolság relatív fogalom, például $\tilde\rho(x, y) := \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y)$ az eredetivel ekvivalens, korlátos távolság: $\tilde\rho \le \rho$ és $\rho(x, x_n) \to 0$ ha $\tilde\rho(x, x_n) \to 0$, tehát mindkettő szerint ugyanazok a zárt halmazok. Az $x \in X$ pont és az $A \subset X$ halmaz távolsága $\rho(x, A) := \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, míg $\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in A\,, y \in B\}$. Mivel $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \le \rho(x, y)$, ha C és D kompakt akkor van $x \in C$ és $y \in D$ úgy hogy $\rho(x, y) = \rho(A, B)$. Az $A \subset X$ halmaz δ sugarú környezete $K_\delta(A) := \cup\{K_\delta(x) : x \in A\} = \{x \in X : \rho(x, A) < \delta\}$, $F = \cap K_\delta(F)$ ha F zárt halmaz. Az (X, ρ) metrikus tér pontosan akkor szeparábilis ha van benne megszámlálható sűrű halmaz, ilyenkor minden $x \in X$ pont határértéke a sűrű halmazból választott sorozatnak. A teljesség és az egyenletes folytonosság fogalmai metrikus terekhez kapcsolódoik, de van ennél általánosabb definíció is.

Metrikus tér teljes burka: Jelölje $\mathbb{X}$ az (X, ρ) metrikus tér $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ Cauchy sorozatainak halmazát, és legyen $\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) := \lim \rho(x_n, y_n)$ ha $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{X}$. ♡ $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)$, tehát ez a határérték mindig létezik, $\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \rho(\mathsf{y}, \mathsf{y}) \ge 0$ és $\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \le \rho(\mathsf{x}, \mathsf{z}) + \rho(\mathsf{z}, \mathsf{y})$ is teljesül, viszont $\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = 0$ igen gyakori. □ Szerencsére, a háromszög egyenlőtlenségnek köszönhetően, $\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \rho(\mathsf{y}, \mathsf{z}) = 0$ esetén $\rho(\mathsf{x}, \mathsf{z}) = 0$, tehát a nulla távolságu x, y pontok azonosíthatók egymással. Ezzel az $\mathbb{X}$ halmazt páronként diszjunkt osztályokra bontottuk fel, azok a Cauchy sorozatok kerültek egy osztályba, amelyeknek az egyesítése is Cauchy sorozat. Jelölje $\bar X$ az így kapott osztályok (atomok) halmazát, $\bar\rho(\bar x, \bar y) := \rho(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ ha $\bar x, \bar y \in \bar X$ és $\mathsf{x} \in \bar x$, $\mathsf{y} \in \bar y$. Az eredeti X tér pontjait azokkal az atomokkal azonosítjuk amelyek a megfelelő konstans sorozatot tartalmazzák, távolságuk változatlan. Az így konstruált *$(\bar X, \bar\rho)$ tér teljes, és X sűrű benne.* ♡ Legyen $\bar x_n \in \bar X$ Cauchy és $\mathsf{x}_n \in \bar x_n$, végül $\mathsf{x} := (x_{1,1}, x_{2,2}, ..., x_{n,n}, ...)$, ahol $x_{n,n}$ az $\mathsf{x}_n \in \mathbb{X}$ sorozat $n - ik$ eleme. A konstrukció értelmében $\mathsf{x} \in \mathbb{X}$ és $\rho(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) \to 0$, ehhez csak a háromszög egyenlőtlenséget kell néhányszor alkalmazni. □

Igy készül a racionális számok halmazából a számegyenes, és a folytonos (vagy lépcsős) függvények halmazának kibővítésével az integrálható függvényes L^1 tere. Végső soron *minden lineáris normált tér teljessé bővíthető.* Az integrálnál azt nehéz megmutatni hogy a bővítés osztályai függvényekkel reprezentálhatóak.

Kompakt metrikus terek: Az ilyen tér teljesen korlátos, vagyis *akármilyen kicsi sugarú gömbből is elég véges sok a tér lefedéséhez.* Fordítva, *teljesen korlátos tér szeparábilis, és ha emellett teljes is, akkor kompakt.* ♡ Mindengyik $n \in \mathbb{N}$ számhoz van a teret lefedő véges sok, $1/n$ sugarú gömb, Ezek középpontjainak halmaza megszámlálható és nyilván sűrű. Ha most $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $K_1(y_1)$ gömb, ami végtelen sokat tartalmaz belőle, de olyan $K_{1/2}(y_2)$ is van hogy $K_1(y_1) \cap K_{1/2}(y_2)$ is végtelen sok elemet tartalmaz a sorozatból, és így tovább. Olyan $K_{1/n}(y_n)$ sorozathoz jutottunk, hogy van $x_{k(n)} \in K_1 \cap K_{1/2} \cap \cdots \cap K_{1/n}$. Ez a részsorozat Cauchy, tehát konvergens. □ Az előző szakasz konstrukciójával *teljesen korlátos tér sűrű halmazként ágyazható be teljes metrikus térbe.*

Teljes szeparábilis metrikus terek: Igen fontos típus, olykor lengyel (Polish) térnek nevezik őket. Szerkezetük áttekinthető: *Minden (X, ρ) lengyel tér sűrű altérként ágyazható be egy $(\bar X, \bar\rho)$ kompakt térbe.* Részletesebben szólva, $X \subset \bar X$ sűrű, és $(X, \bar\rho)$ topológiája, vagyis a nyilt és zárt halmazok, a konvergens sorozatok ugyanazok mint az eredeti térben, de a Cauchy sorozatok és az egyenletesen folytonos függvények már nem. Jelölje $\Omega := [0, 1]^{\mathbb{N}}$ a végtelen dimenziós egységkockát, ennek elemei az $\omega = (\omega_1\,, \omega_2\,, ..., \omega_k\,, ...)$, $\omega_k \in [0, 1]$ sorozatok, és a

$$D(\omega, \sigma) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}\,|\omega_k - \sigma_k|}{1 + |\omega_k - \sigma_k|}$$

távolság kompakt topológiát definiál. Ez a korábban megismert szorzattopológia amiben konvergencia a koordináták konvergenciáját jelenti. A $\Phi : X \mapsto \Omega$ leképezés úgy készül hogy X-ben megadunk egy $\{y_1, y_2, ..., y_k, ...\}$ sűrű halmazt, majd $\omega = \Phi(x)$ k-ik koordinátája $\omega_k := \rho(x, y_k)/(1 + \rho(x, y_k))$. ♡ Mivel X minden eleme torlódási pontja az $\{y_k\}$ sorozatnak, Φ kölcsönösen egyértelmű, a folytonossága nyilvánvaló. Φ^{-1} folytonosságához azt kell meggondolni hogy ha $\omega^{(n)} \to \omega$ és $x_n := \Phi^{-1}(\omega^{(n)})$, akkor $\rho(x_n, y_k) \to \rho(x, y_k)\ \forall k \in \mathbb{N}$, de $\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, y_k) + \rho(x, y_k) \to 2\rho(x, y_k)\ \forall k \in \mathbb{N}$. Mivel $\liminf \rho(x, y_k) = 0$, $\rho(x_n, x) \to 0$. □ Most már legyen $\bar{\rho}(x, y) := D(\Phi(x), \Phi(y))$ ha $x, y \in X$, $\Omega_X := \Phi(X)$ az X képe, és $\bar{\Omega}_X$ az Ω_X lezárása. ♡ $\bar{\Omega}_X$ az Ω zárt halmaza, tehát kompakt, és ha $\Omega_X \ni \omega^{(n)} \to \omega \in \bar{\Omega}_X$, akkor $x_n := \Phi^{-1}(\omega^{(n)})$ Cauchy az $(X, \bar{\rho})$ térben, tehát a keresett $(\bar{X}, \bar{\rho}$ tér éppen $(X, \bar{\rho})$ teljes burka. □

A folytonos függvények tere: Az $(X, \mathcal{G})$ téren folytonos és korlátos $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvények halmazát $C_b(X)$ jelöli, ami lineáris normált tér, $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ a norma. Metrikus alaptér esetében tudjuk hogy ez a tér teljes, az általános bizonyítás ugyanaz. Még a $C_b(\mathbb{R})$ tér sem szeparábilis, mert ♡ a nagyfrekvenciáju $\sin(\omega x + \alpha)$ függvényekből megszámlálhatónál több választható ki úgy hogy páronként diszjunkt környezeteik vannak. □

A $C_b(X)$ tér korlátos és zárt halmazai csak akkor kompaktak, ha X véges halmaz. Például, az $f_n(x) := \sin nx$ sorozat biztosan nem tartalmaz egyenletesen konvergens részsorozatot. Az $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ sorozat egyenletesen korlátos ha $\sup \|f_n\| < +\infty$, és egyenlő mértékben folytonos ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz midegyik $y \in X$ pontnak van olyan $G_{y,\varepsilon}$ környezete hogy $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\ \forall n$ ha $x \in G_y$. Arzela és Ascoli szerint *Kompakt téren minden egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben folytonos* $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ *sorozatnak van egyenletesen konvergens részsorozata.* ♡ A $G_{y,\varepsilon}$ környezetek együttesen lefedik a teret, tehát véges sok is, mondjuk $G_{y_1,\varepsilon}, G_{y_2,\varepsilon}, ..., G_{y_l,\varepsilon}$ is megteszi. Az egyenletes korlátosság miatt kiválasztható olyan $\{g_n\} \subset \{f_n\}$ részsorozat amely mindegyik y_k pontban konvergens, de ekkor $\forall x \in X$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(y_k)| + |f_m(y_k) - f_n(y_k)| + |f_n(y_k) - f_n(x)| < 2\varepsilon + |f_m(y_k) - f_n(y_k)|$ ha $x \in G_{y_k,\varepsilon}S$. Mivel csak véges sok y_k van, elérhető hogy $|f_m(y_k) - f_n(y_k)| < \varepsilon$ teljesüljön $\forall k$ ha n és m elég nagy. □

Metrikus tér folytonos függvényeiről többet is érdemes tudni. Weierstrass és C. Stone nyomán megmutatjuk hogy ha az (X, ρ) *metrikus tér kompakt, akkor* $C_b(X)$ *szeparábilis.* Legyen $S \subset X$ megszámlálható sűrű halmaz, és jelölje C_0 a $\psi(x) := \rho(x, K_\delta^c(y))$ alakú függvények racionális súlyokkal képezett lineáris kombinációinak halmazát, ahol $y \in S$, és $\delta > 0$ olyan racionális szám hogy $K_\delta(y) \neq X$. Ezután C_0^+ a $g := \max\{f_1, f_2, ..., f_n\}$, $f_k \in C_0$, $n \in \mathbb{N}$ alakú függvényekből, $C_0^\pm$ a $h := \min\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, $g_k \in C_0^+$, $n \in \mathbb{N}$ típusú függvényekből áll. Megmutatjuk hogy $C_0^\pm$ *a* $C_b(X)$ *megszámlálható sűrű halmaza.* ♡ Adott $\phi \in C_b(X)$ és $\varepsilon > 0$ mellett minden $x, y \in X$ párhoz van olyan $f_{x,y} \in C_0$ hogy $|\phi(x) - f_{x,y}(x)| < \varepsilon$ és $|\phi(y) - f_{x,y}(y)| < \varepsilon$. Kompaktság miatt mindegyik $x \in X$ ponthoz található olyan véges $\alpha(x) \subset X$ hogy $X = \cup\{U_{x,y} : y \in \alpha(x)\}$, ahol $U_{x,y} := \{z \in X : \phi(z) < f_{x,y}(z) + \varepsilon\}$. Legyen $g_x := \min\{f_{x,y} : y \in \alpha(x)\}$ és $\beta \in X$ olyan véges halmaz hogy $X = \cup\{V_x : x \in \beta\}$, $V_x := [g_x < \phi + \varepsilon]$, továbbá $h := \min\{g_x : x \in \beta\}$. A konstrukció szerint $h \in C_0^\pm$ és $\|\phi - h\| < 2\varepsilon$. □

Az (X, ρ) metrikus térben az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvények egyenletes folytonosságát is definiáltuk, $C_{bu}(X)$ az egyenletesen folytonos és korlátos függvények tere, *ez a* $C_b(X)$ *zárt altere.* ♡ Ha $f_n \to f$ egyenletesen, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $m \in \mathbb{N}$ úgy hogy $\|f - f_m\| < \varepsilon$, de $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)|$. Ezután a $\delta > 0$ számot úgy választjuk meg hogy $\rho(x, y) < \delta$ esetén $|f_m(x) - f_m(y)| < \varepsilon$ legyen. □

Egyenletesen folytonosak valamely lineáris normált tér lineáris és korlátos funkcionáljai, ebben a vonatkozásban is érdekes a következő két észrevétel. *Ha* $S \subset X$ *sűrű, és* $\phi \in C_{bu}(S)$, *akkor pontosan egy olyan* $f \in C_{bu}(X)$ *van hogy* $f(x) = \phi(x)$ *ha* $x \in X$; *ez a* ϕ kiterjesztése. ♡ Ha $x \in X$ és $S \ni x_n \to x$ akkor $\varphi(x_n)$ Cauchy sorozat, legyen $f(x) := \lim \varphi(x_n)$. A kiterjesztés egyértelmű mert két sorozat egyesítése után is ugyanazt az $f(x)$ értéket kapjuk, $f \in C_{bu}(X)$ a háromszög egyenlőtlenség következménye. □

Az $f_n \in C_{bu}(X)$ sorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ úgy hogy ha $\rho(x, y) < \delta$ akkor $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Ha az egyenlő mértékben egyenletesen folytonos* f_n *sorozat egy* $S \subset X$ *sűrű halmaz minden pontjában konvergens, akkor* *van olyan* $f \in C_{bu}(X)$ *függvény hogy* $f_n(x) \to f(x)\ \forall\, x \in X$. Az S halmazon $f(x) := \lim f_n(x)$, először azt kell megmutatni hogy f egyenletesen folytonos. ♡ Tipikus 3ε okoskodás mert az S halmazon $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$. Válasszuk $n = n(x,y)$ értékét olyan nagynak hogy $|f(x)-f(y)| < |f_n(x)-f_n(y)|+2\varepsilon$ legyen, majd legyen $\delta > 0$ olyan kicsi hogy $|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon\ \forall\, x,y \in X$ ha $\rho(x,y) < \delta$. □ A célfüggvényt ezzel meghatároztuk, de ♡ $|f(x)-f_n(x)| \le |f(x)-f(y)|+|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x)|$, amiből állításunk $S \ni y \to x$ után következik. □ Azt nem mondhatjuk hogy az $f_n \to f$ konvergencia egyenletes.

Mértéktér metrizálása: $\rho(A,B) := \lambda(A \cap B^c) + \lambda(B \cap A^c)$ távolságot definiál az $(X, \mathfrak{X}_0, \lambda)$ mértéktér $\mathfrak{X}_0$ gyűrűjénben, itt hasznos hogy λ a gyűrűn véges; a nullahalmazban különböző halmazokat azonosnak tekintjük. Ha $\mathfrak{X}_0$ nem σ-gyűrű akkor ez az $(\mathfrak{X}_0, \rho)$ metrikus tér nem teljes mert fogyó sorozatainak metszetét nem biztos hogy tartalmazza, de az előző szakasz konstrukciójával teljes térré bővíthető. Az eredmény olyan $(\bar{\mathfrak{X}}_0, \lambda)$ *mértéktér hogy* $\mathfrak{X}_0 \subset \bar{\mathfrak{X}}_0$ *és* $\bar{\mathfrak{X}}_0$ *fogyó sorozatainak metszeteit is tartalmazza.* Ha $\lambda(X) < +\infty$ akkor persze σ-algebrét kapunk. Elsősorban azt kell megmutatni hogy a bővítmények tényleg halmazok, ehhez kell Borel és Cantelli lemmája: *Ha* $\sum \lambda(C_k) < +\infty$ *és* $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} C_k$ *akkor* $\cap B_n$ *nullahalmaz* mert $\sum_{k=n}^{\infty} \lambda(C_k) \to 0$. Legyen $A_n \in \mathfrak{X}_0$ Cauchy sorozat és $C_n := (A_n \cap A_{n+1}^c) \cup (A_{n+1} \cap A_n^c)$. ♡ Feltehetjük hogy az A_n sorozat már úgy ki van ritkítva hogy $\sum \rho(A_n, A_{n+1}) < +\infty$, tehát van olyan $X_0 \subset X$ nullahalmaz hogy ha $x \notin X_0$, akkor véges sok n indextől eltekinve $\mathbf{l}_{C_n}(x) = |\mathbf{l}_{A_n}(x) - \mathbf{l}_{A_{n+1}}(x)| = 0$. Az $A = \lim A_n$ halmazt $A := \{x : \mathbf{l}_{A_n}(x) \to 1\}$ definiálja, $\lambda(A) := \bar{\rho}(A, \emptyset)$. A távolság folytonossága miatt λ additív és folytonos halmazfüggvény, értelmezési tartománya véges mértékű halmazokból áll. □

13.4. **Lineáris terek.** A lineáris topologikus terek legegyszerübb tulajdonságait ismertetjük.

Normák ekvivalenciája: Az $\mathbb{R}^d$ tér topológiáját az $|\cdot|$ Euklideszi távolság definiálja, de sok más lehetőség is van; ezek közül csak azok ésszerűek ahol sorozat konvergenciájából következik a koordináták konvergenciája. *Véges dimenziós térben bármely* $\|\cdot\|$ *norma szerinti konvergencia ekvivalens a koordináták konvergenciájával.* ♡ Elég az $\|x_n\| \to 0$ esettel foglalkozni, legyen $\mathsf{x} = x_1\mathsf{e}_1 + x_2\mathsf{e}_2 + \cdots + x_d\mathsf{e}_d$, ahol e_1 , e_2 , ... e_d a tér bázisa. A háromszög egyenlőtlenség miatt $\|\mathsf{x}\| \le |x_1|\,\|\mathsf{e}_1\| + |x_2|\,\|\mathsf{e}_2\| + \cdots + |x_d|\,\|\mathsf{e}_d\|$, tehát koordinátánként konvergens sorozat bármely norma szerint is konvergens. Azt tudtuk meg hogy $f(\mathsf{x}) := \|\mathsf{x}\|$ folytonos a szokásos $|\cdot|$ norma szerint, tehát Weierstrass miatt felveszi maximumát és minimumát az $|\mathsf{x}| = 1$ egséggömbön, és a minimum nem lehet nulla. Emiatt vannak olyan $0 < c < C < +\infty$ számok hogy $c|\mathsf{x}| \le \|\mathsf{x}\| \le C|\mathsf{x}|\ \forall\ \mathsf{x} \in \mathbb{R}^d$, ami több mint elég. □

Abszolút konvergens sorok: Mivel lineáris normált tér elemeit össze lehet adni, és számmal is szorozhatóak, értelmes dolog az $S = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_k\varphi_k + \cdots$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\varphi_k \in \mathbb{X}$ végtelen összeget mint az $S_n := \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k$ részletösszegek határértékét definiálni, ha az létezik. Ilyenkor azt mondjuk hogy a sor (feltételesen) konvergens. A sor abszolút konvergens ha $|c_0|\|\varphi_0\| + |c_1|\|\varphi_1\| + \cdots + |c_k|\|\varphi_k\| + \cdots < +\infty$. Ilyenkor $\|S_m - S_n\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|\|\varphi_k\|$, tehát abszolút konvergens sor részletösszegei Cauchy sorozatot alkotnak, vagyis *teljes térben minden abszolút konvergens sor konvergens.* A dominált konvergencia tétel is ugyanúgy bizonyítható, mint valós sorok esetén. *Ha* $\varphi_{n,k} \in \mathbb{X}$, $n,k \in \mathbb{N}$ *és* $\lim_{n\to\infty} \varphi_{n,k} = \varphi_k$, $\|\varphi_{n,k}\| \le b_k\ \forall\ k,n \in \mathbb{N}$ *és* $\sum b_k < +\infty$, *akkor az összes* $\Phi^{(n)} := \sum_k \varphi_{n,k}$ *sor abszolút konvergens, és ha az* $\mathbb{X}$ *tér teljes, akkor* $\Phi^{(n)} \to \Phi := \sum \varphi_k$ *amint* $n \to \infty$, *továbbá* $\|\Phi\| \le \sum \infty b_k$. ♡ Az előző észrevétel szerint a Φ_n és Φ sorok konvergálnak, továbbá minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n_ε küszöb hogy $\sum_{k=m}^{\infty} \|\varphi_{n,k}\| \le \sum_{k=m}^{\infty} b_k < \varepsilon$ hacsak $m > n_\varepsilon$; a Φ sor ugyanilyen becslésnek tesz eleget. Másrészt viszont

$$\Phi_N^{(n)} := \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n,k} \to \Phi_N := \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \quad \forall N \in \mathbb{N}\,.$$

amint $n \to \infty$ míg N rögzített. Tehát a Minkowski (háromszög) egyenlőtlenség alapján

$$\|\Phi^{(n)} - \Phi\| \le \|\Phi^{(n)} - \Phi_N^{(n)}\| + \|\Phi_N^{(n)} - \Phi_N\| + \|\Phi_N - \Phi\| \le \|\Phi_N^{(n)} - \Phi_N\| + 2\varepsilon$$

ha $N > n_\varepsilon$. Rögzítsük N értékét, és legyen $n = n_N$ olyan nagy hogy $\|\Phi_N^{(n)} - \Phi_N\| < \varepsilon$, ekkor $\|\Phi^{(n)} - \Phi\| < 3\varepsilon$. Az ilyet nevezik 3-epszilon okoskodásnak. □

A számegyenes és a komplex számsík is lineáris normált tér, a normát az abszolút értékkel azonosítjuk. A binomiális tétel és a dominált konvergencia tétel egyszerű folyománya a komplex számokra is érvényes

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{13.1}$$

nevezetes határérték.

Euklideszi normák: Valamely $\mathbb{X}$ Euklideszi térben számolással kapjuk a skaláris szorzat valós részét:

$$4\,\mathrm{Re}\,\langle\varphi,\psi\rangle = \|\varphi+\psi\|^2 - \|\varphi-\psi\|^2 = 2\|\varphi+\psi\|^2 - 2\|\varphi\|^2 - 2\|\psi\|^2\,. \tag{13.2}$$

Ez valós és komplex térben egyaránt igaz, tehát valós térben $4\,\langle\varphi,\psi\rangle = \|\varphi+\psi\|^2 - \|\varphi-\psi\|^2$ adja a skaláris szorzatot a norma függvényeként. Komplex térben a dolog egy kicsit bonyolultabb, de hasonló. (13.2)-ban ψ helyére $\imath\,\psi$-t írva

$$4\,\mathrm{Im}\,\langle\varphi,\psi\rangle = \|\varphi+\imath\,\psi\|^2 - \|\varphi-\imath\,\psi\|^2 \tag{13.3}$$

a skaláris szorzat képzetes része, tehát komplex térben

$$4\,\langle\varphi,\psi\rangle = \|\varphi+\psi\|^2 - \|\varphi-\psi\|^2 + \imath\,\|\varphi+\imath\,\psi\|^2 - \imath\,\|\varphi-\imath\,\psi\|^2 \tag{13.4}$$

a skaláris szorzat mint a norma függvénye.

Fordítva, ha valamely valós tér normája eleget tesz a $\|\varphi+\psi\|^2 + \|\varphi-\psi\|^2 = 2\|\varphi\|^2 + 2\|\psi\|^2$ paralelogramma azonosságnak, akkor $\langle\varphi,\psi\rangle := (1/4)(\|\varphi+\psi\|^2 - \|\varphi-\psi\|^2)$ skaláris szorzatot definiál, amint az könnyen ellenőrizhető. ♡ Rögzített ψ mellett jelölje $\ell(\varphi)$ a definiáló egyenlet jobboldalát, persze $\ell(\psi) = \|\psi\|^2$. A háromszög egyenlőtlenség miatt $\ell(\varphi) \geq 0$, tehát azt kell megmutatni hogy ℓ a $\varphi \in \mathbb{X}$ lineáris függvénye. $2\ell(\varphi_1+\varphi_2) = 2\ell(\varphi_1) + 2\ell(\varphi_2)$ átrendezésével

$$2\|\varphi_1+\varphi_2+\psi\|^2 + 2\|\psi\|^2 + 2\|\varphi_1\|^2 + 2\|\varphi_2\|^2 = 2\|\varphi_1+\psi\|^2 + 2\|\varphi_2+\psi\| + 2\|\varphi_1+\varphi_2\|^2$$

adódik, amiből a paralelogramma egyenlőséggel

$$\|\varphi_1+\varphi_2+2\psi\|^2 + \|\varphi_1+\varphi_2\|^2 + 2\|\varphi_1\|^2 + 2\|\varphi_2\|^2 = \|\varphi_1+\varphi_2+2\psi\|^2 + \|\varphi_1-\varphi_2\|^2 + 2\|\varphi_1+\varphi_2\|^2\,,$$

$\ell(\alpha\varphi) = \alpha\varphi(\ell)$ bizonyítása hasonlóan történhet, de a már igazolt additív tulajdonságra is vissza lehet vezetni. □

Hasonlóan, ha a paralelogramma azonosság igaz valamely komplex normált térben, akkor abból a (13.4) definícióval komplex Euklideszi tér lesz.

Ortogonális sorok: Az $f_\gamma \in \mathbb{X}$, $\gamma \in \Gamma$ elemek ortonormált rendszert (ONR) alkotnak az $\mathbb{X}$ Euklideszi térben ha $\|f_\gamma\| = 1$ és $f_\gamma \perp f_{\gamma'}$ ha $\gamma \neq \gamma'$. Végtelen dimenziós Euklideszi térben mindig van olyan f_k, $k \in \mathbb{N}$ sorozat amelynek bármely véges része lineárisan független, ilyen sorozat a következő eljárással (Gram - Schmidt) ortogonalizálható. Legyen $f'_1 = f_1$, és tegyük fel hogy $k \leq n$ esetén f'_k az f'_j, $j = 1, 2, ..., k$ elemek olyan lineáris kombinációja hogy $0 \neq f'_k \perp f'_j$ ha $j < k$. Ezután $f'_{n+1} = f_{n+1} - \alpha_1 f'_1 - \alpha_2 f'_2 - \cdots - \alpha_n f'_n$ alakú, ahol $\alpha_k := \langle f_{n+1}, f'_k\rangle\|f'_k\|^{-2}$. A lineáris függetlenségről szóló feltétel miatt az eljárás nem akad meg, tehát $e_k := f'_k/\|f'_k\|$, $k \in \mathbb{N}$ ONR lesz.

Jelölje $\mathbb{X}_n$ az $f_n = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$ alakú elemek halmazát, ahol $c_k \in \mathbb{C}$ tetszőleges; $\mathbb{X}_n$ az $\mathbb{X}$ tér n-dimenziós altere. *Minden $f \in \mathbb{X}$ elemhez pontosan egy olyan $f_n \in \mathbb{X}_n$ van hogy $\|f - f_n\| < \|f - g\|$ ha $f_n \neq g \in \mathbb{X}_n$, és $f_n = \langle f, e_1\rangle\, e_1 + \langle f, e_2\rangle\, e_2 + \cdots + \langle f, e_n\rangle\, e_n$, vagyis $f - f_n \perp g$ hacsak $g \in \mathbb{X}_n$, továbbá az $\|f_n\| \leq \|f\|$ Bessel egyenlőtlenség is teljesül.* ♡ Az utolsó állítás nyilvánvaló, tehát Pitagórasz tétele miatt $\|f-g\|^2 = \|f-f_n\|^2 + \|f_n - g\|^2\ \forall\ g \in \mathbb{X}_n$. □ Azt mondjuk hogy f_n az f vetülete az $\mathbb{X}_n$ altéren.

Végtelen összegek konvergenciájáról is érdemes beszélni, legyen $f_n = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$, ahol $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. *Ha $\mathbb{X}$ teljes és $\sum |c_k|^2 < +\infty$, akkor van olyan $f \in \mathbb{X}$ hogy $\|f - f_n\| \to 0$ amint $n \to +\infty$, vagyis $f = \sum c_ke_k$* és $\|f\|^2 = \sum |c_k|^2$. ♡ Pitagórasz tétele szerint $\|f_m - f_n\| = |c_{n+1}|^2 + \cdots + |c_m|^2$ ha $m > n$, tehát az f_n sorozat Cauchy $\mathbb{X}$-ben, vagyis konvergál valamely $f \in \mathbb{X}$

elemhez, innen kapjuk hogy $c_k = \langle f, e_k \rangle$. $\Box$ Az $\{e_\gamma\, \gamma \in \Gamma\}$ ONR teljes $\mathbb{X}$-ben ha nem bővíthető, vagyis $f \perp e_\gamma\ \forall\, \gamma \in \Gamma$ csak úgy lehetséges ha $f = 0$. Prototípus a trigonometrikus rendszer, amely teljes az $L^2[-\pi, \pi)$ térben. Szeparábilis az az $\mathbb{X}$ tér amelyben van megszámlálható teljes ONR. *Ha* e_n , $n \in \mathbb{N}$ *teljes ONR az* $\mathbb{X}$ *Hilbert térben,* $f \in \mathbb{X}$ *és* $f_n := \langle f, e_1 \rangle\, e_1 + \langle f, e_2 \rangle\, e_2 + \cdots + \langle f, e_n \rangle\, e_n$, *akkor* $\|f_n - f\| \to 0$ *amint* $n \to +\infty$. $\heartsuit$ Az előző két tétel szerint létezik a $g = \lim_n f_n$ határérték, és $g - f \perp e_n\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$, tehát $g = f$. $\Box$ Ha az e_n ONR nem teljes akkor a $g := \sum c_k e_k$, $\sum |c_k|^2 < +\infty$ alakú elemek a tér zárt alterét alkotják, és ha itt $c_k = \langle f, e_k \rangle$, $f \in \mathbb{X}$, akkor $f - g \perp e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A Hilbert tér: Riesz Frigyes három alaptételéről lesz szó. A H valós Hilbert térben $\langle f, g \rangle$ a skaláris szorzat, $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ a norma. A $C \subset H$ halmaz konvex ha az $f, g \in H$ elemekkel együtt az öket összekötő $\{pf + (1-p)g : 0 < p < 1\}$ szakaszt is tartalmazza. *Ha a C konvex halmaz zárt, akkor minden $f \in H$ elemhez egy olyan $g \in C$ van hogy:* $\|g - f\| = \rho(f, C) := \inf\{\|h - f\| : h \in C\}$. Ha $C = H_0$ a H zárt altere, akkor azt mondjuk hogy g az f vetülete az altéren, *ilyenkor $f - g$ az altér minden h elemére merőleges, tehát* $\|f\|^2 = \|h\|^2 + \|h - f\|^2$. $\heartsuit$ Ha g_1 és g_2 is megoldás, továbbá $h := (g_1 + g_2)/2$, akkor $h \in C$ és $\|h - f\| \leq \|g_1 - f\|/2 + \|g_2 - f\|/2 = \rho(f, C)$, tehát $\|h - f\| = \rho(f, C)$, és $(g_1 - f) \parallel (g_2 - f)$ az egyenlőség feltétele, vagyis $g_1 - f = g_2 - f$ mert egyforma hosszúak. Ha most $g_n \in C$ olyan sorozat hogy $\rho(f, C) = \lim \|g_n - f\|$ és $h_{n,m} := (g_n + g_m)/2$, akkor $\|h_{n,m} - f\| \leq \|g_n - f\|/2 + \|g_m - f\|/2$, továbbá

$$4\,\|h_{n,m} - f\|^2 = \|g_n - f\|^2 + \|g_m - f\|^2 + 2\langle g_n - f, g_m - f \rangle\,, \quad \text{és}$$
$$\|g_n - g_m\|^2 = \|g_n - f\|^2 + \|g_m - f\|^2 - 2\langle g_n - f, g_m - f \rangle\,,$$

tehát $\|g_n - g_m\|^2 = 2\,\|g_n - f\|^2 + 2\,\|g_m - f\|^2 - 4\,\|h_{n,m} - f\|^2 < 4(\rho(f, C) + \varepsilon)^2 - 4\rho(f, C) \leq 8\varepsilon\rho(f, C) + 4\varepsilon^2$ ha $\|g_n - f\| < \varepsilon$ és $\|g_m - f\| < \varepsilon$. Eszerint g_n Cauchy sorozat, határértéke az a g amit kerestünk. $\Box$

Ha most $C = H_0$ zárt altér, g az $f \notin H_0$ vetülete, és $h \in H_0$, $\heartsuit$ akkor $g + th \in H_0$ és

$$\|g - f\|^2 \leq \|g + th - f\|^2 = \|g - f\|^2 + 2t\langle h, g - f \rangle + t^2\|h\|^2\,,$$

tehát $2\langle h, f - g \rangle \leq t\|h\|^2$ ha $t > 0$ míg $2\langle h, f - g \rangle \geq t\|h\|^2$ ha $t < 0$, vagyis $\langle h, f - g \rangle = 0$. $\Box$ A $H_0^\perp := \{h \in H : h \perp g\ \forall g \in H_0\}$ halmaz is zárt altér, a H_0 ortogonális kiegészítő altere. Minden $f \in H$ elem felbonthaó az $f = f_0 + f_1$ módon, ahol f_0 és f_1 az f vetületei a H_0 illetve $H_0^\perp$ altéreken. Ezért azt mondjuk hogy $H = H_0 \oplus H_0^\perp$ a H_0 és $H_0^\perp$ terek direkt összege. Ha H_1 és H_2 Hilbert tér, akkor a $H = H_1 \oplus H_2$ Hilbert tér az (f_l, f_2) , $f_i \in H_i$ párokból áll, és $\|(f_1, f_2)\|^2 := \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$.

Második következményként kapjuk a reprezentációs tételt: *Minden $\ell : H \mapsto \mathbb{R}$ lineáris korlátos funkcionál skaláris szorzattal reprezentálható: $\ell(f) = \langle f, \phi \rangle$ alakú, és az előállítás egyértelmű.* $\heartsuit$ A reprezentáló ϕ egyértelműsége nyilvánvaló, létezéséhez a $H_0 := \{f \in H : \ell(f) = 0\}$ alteret kell elképzelni. H_0 zárt, és ha $H_0 = H$ akkor $\phi = 0$. Az ellenkező esetben van $\phi \in H^\perp$ úgy hogy $\|\phi\| = \ell(\phi)$, és az általános $f = g + c\phi$, ahol $g \in H_0$, $c := \langle f, \phi \rangle / \ell(\phi)$ tehát $\ell(f) = \langle f, \phi \rangle$. $\Box$ Valós térben az $\mathsf{A} : H \mapsto H$ lineaáris korlátos operátor adjungáltját az $\langle f, \mathsf{A}g \rangle = \langle \mathsf{A}^* f, g \rangle$ azonosság jellemzi. Annak belátásához hogy minden lineáris korlátos operátornak van adjungáltja csak azt kell észrevenni $\heartsuit$ hogy $\ell(g) := \langle f, \mathsf{A}g \rangle$ lineáris korlátos funkcionál, tehát $\mathsf{A}^* f := \phi$ ha $\ell(g) \equiv \langle \phi, g \rangle$. $\Box$

Az $f_n \in H$ sorozat gyengén konverál az $f \in H$ elemhez ha $\langle f_n, \phi \rangle \to \langle f, \phi \rangle\ \forall\, \phi \in H$. Ez a $\phi = f$ választással is igaz: $\|f\|^2 = \lim \langle f_n, f \rangle$, de $\langle f_n, f \rangle \leq \|f_n\|\,\|f\|$, tehát $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$. Jelölje $\{\psi_n\}$ a szeparábilis tér bázisát, ha $f_n \to f$ gyengén, akkor, definíció szerint, mindegyik $\langle f_n, \psi_m \rangle$ koordináta konvergál, de a megfordítás nem igaz. Például, ha $f_n := n\psi_n$ és $\phi := \sum (1/m)\psi_m$ akkor $\langle f_n, \psi_m \rangle \to 0\ \forall\, m \in \mathbb{N}$, de $\langle f_n, \phi \rangle \equiv 1$. Ha viszont az $\|f_n\|$ *normák sorozata korlátos, akkor a koordináták konvergenciájából következik a gyenge konvergencia.* $\heartsuit$ Legyen $\phi = \sum c_k\, \psi_k$, ekkor $\langle f_n - f, \phi \rangle = \sum c_k \langle f_n - f, \psi_k \rangle$, és a sor midegyik tagja nullához tart. Másrészt $|\langle f_n - f, \psi_k \rangle| \leq$

$\|f_n\| + \|f\|$, tehát

$$\sum_{k=m}^{\infty} |c_k \langle f_n - f, \psi_k \rangle| \leq 2K \sqrt{\Sigma_{k=m}^{\infty} c_k^2}$$

ha $\|f_n\| \leq K$. Fix m mellett $n \to +\infty$, majd $m \to +\infty$ adja a tételt. $\square$

Ezzel majdnem azt is igazoltuk hogy *szeparábilis Hilbert tér korlátos sorozata mindig tartalmaz gyengén konvergens részsorozatot.* $\heartsuit$ A diagonális módszerrel olyan részsorozat választható ki, amely mentén mindegyik koordináta konvergál. Azt kell tehát megmutatni hogy ha $\|f_n\|$ olyan korlátos sorozat hogy a $c_k := \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \psi_k \rangle$ határértékek mind léteznek, akkor $\sum c_k^2 < +\infty$. Mivel

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \langle f_n, \psi_k \rangle^2, \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{m} \langle f_n, \psi_k \rangle^2 \leq \|f_n\|^2,$$

ez nem gond. $\square$ [43] Az f nemlineáris funkcionál gyengén folytonos ha minden gyengén konvergens sorozatot konvergensbe visz át. Látjuk hogy *Hilbert tér korlátos és zárt halmazán gyengén folytonos funkcionál felveszi a szélső értékeit.*

A gyenge derivált a gyenge konvergencia édestestvére. Jelölje $L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ az olyan $\phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ vektormezők Hilbert terét amelyek mindegyik koordinátája négyzetesen integrálható a λ^d d-dimenziós Lebesgue mérték szerint; ebben a térben $\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \rangle := \int \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\lambda^d$ a skaláris szorzat. Azt mondjuk hogy $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gyengén differenciálható, és $\nabla f := \mathsf{g}$ a gyenge gradiense ha van olyan $\mathsf{g} \in L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ hogy $\int f \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\lambda^d = -\int \mathsf{g} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\lambda^d$ hacsak $\boldsymbol{\psi}$ mindegyik parciális deriváltja négyzetesen itegrálható. A gyenge gradiens, nullahalmaztól eltekintve egyértelműen meghatározott vektormező, és ha f differenciálható, akkor persze a valódi gradienssel egyenlő. Lebesgue NL tételéből következik hogy a $d = 1$ esetben gyengén differenciálható függvény abszolút folytonos, tehát majdnem mindenütt differenciálható, de mutatós példák igazolják hogy magasabb dimenziókban mindenütt sűrün fekvő szingularitásai lehetnek. Azért szeretjük mert az $\|f\|_{2,1} := \sqrt{\|f\|_2^2 + \| \, |\nabla f| \, \|_2^2}$ normával definiált H^1 Szoboljev tér teljes, tehát korlátos sorozatból gyengén konvergens részsorozatot lehet kiválasztani. Ez a parabolikus és elliptikus parciális differenciálegyenletek tárgyalásának kulcsa.

Funkcionálok differenciálása: Az $\mathbb{X}$ lineáris téren adott $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ funkcionál $\nabla_\omega f$ iránymenti deriváltjait norma bevezetése nélkül is definiálhatjuk: ha $\omega \in \mathbb{X}$ és $g(t) := f(x + t\,\omega)$ differenciálható a $t = 0$ helyen, akkor $\nabla_\omega f(x) := g'(0)$. Az is világos hogy $\nabla_\omega f(x_0) = 0 \; \forall \omega \in \mathbb{X}$ a *lokális szélsőérték* [44] *szükséges feltétele.*

A teljesértékű differenciálszámítás lényegileg kapcsolódik a lineáris normált tér fogalmához. $\mathbb{X}^*$ jelöli az $\ell : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ lineáris korlátos funkcionálok terét; az $\ell(x) = \langle \ell, x \rangle$ jelölés akkor is hasznos ha $\mathbb{X}$ nem Hilbert tér. Az $x : [a, b] \mapsto \mathbb{X}$ görbe differenciálható a $t \in (a, b)$ pontban ha $(1/s)(x(t+s) - x(t)) \to \dot{x}(t)$ amint $s \to 0$; $\dot{x}(t) \in \mathbb{X}$ a görbe "érintője" a t pontban. Az $f : G \mapsto \mathbb{R}$ függvény akkor differenciálható a $G \subset \mathbb{X}$ halmaz x belső pontjában, amit $f \in D^1(x)$ jelöl, ha található olyan, az x helytől is függő $\nabla f(x) \in \mathbb{X}^*$ lineáris korlátos funkcionál hogy $f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\|h\|)$ amint $h \to 0$. Differenciálható funkcionálnak valamennyi iránymenti deriváltja létezik és $\nabla_\omega f(x) = \langle \nabla f(x), \omega \rangle \; \forall \omega \in \mathbb{X}$, tehát a $\nabla f(x) \in \mathbb{X}^*$ derivált - funkcionál egyértelműen definiált objektum; a $\nabla f \equiv f'$ és $\langle \nabla f, \omega \rangle \equiv f'(x)(\omega)$ jelölések is hasznosak. Ha $\mathbb{X}$ Hilbert tér akkor $\mathbb{X} = \mathbb{X}^*$, tehát ∇f is a tér eleme, a legegyszerübb $f(x) := \langle x, a \rangle$ esetben

[43] Ezt a tételt Tyihonovéból is levezethettük volna, mert a gyenge konvergenciát az a topológi definiálja aminek $\mathcal{G}_{00} := \{\{f \in H : |\langle f, \psi \rangle| < \delta\} : \delta > 0, \phi \in H\}$ az albázisa. Ennek alapján nemcsak szeparábilis térben mondhatjuk hogy *Hilbert tér egységgömbje gyengén kompakt.* A Hasdorff maximum elvéből az is következik hogy *minden Hilbert térnek van ortonormált bázisa,* legfeljebb az nem számlálható meg. Érvényes az elemek $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle f, \psi_\gamma \rangle \, \psi_\gamma$ kifejtése is, ahol $\{\psi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ a bázis, mert az összegnek "csak" megszámlálhatóan sok eleme nem nulla.

[44] A variációszámítás olyan $V(x)$ mennyiségek szélsō értékeit keresi, ahol az x változó is függvény. Ezekre a megengedett függvényekre általában peremfeltétel van kiszabva, az értelmezési tartományuk határán előírjuk az értéküket vagy valamilyen deriváltjukét. Emiatt a megengedett függvények nem alkotnak lineáris teret, de ez nem baj. Az azonosan nulla, azaz homogén peremfeltételt kielégítō δ függvények tere már lineáris, és ha x_0 a feltételezett optimum, akkor az $f(\delta) := V(x_0 + \delta)$ funkcionált kell deriválni a $\delta = 0$ helyen.

$\nabla f(x) \equiv a$. Ha f az $x, x+h \in \mathbb{X}$ pontokat összekötő szakaszon differenciálható, akkor Lagrange egyváltozós tételét a $g(t) := f(x+th)$ függvényre alkalmazva $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(\xi), h\rangle$ adódik, ahol ξ az x és $x+h$ összekötő szakaszának belső pontja.

Nemcsak Hilbert térben mondhatjuk hogy $\nabla f(x_0)$ a $\Sigma := \{x \in \mathbb{X} : f(x) = c\}$ "szintfelület" normálisa az $f(x_0) \in \Sigma$ helyen. Ha ugyanis az $x(t) \in \mathbb{X}, t \in (-a, a)$ differenciálható görbe a felületen halad, és $x(0) = x_0$, akkor $\langle \nabla f(x_0), \dot{x}(0)\rangle = 0$. A $\delta = \dot{x}(0)$ tulajdonságú elemek lineáris teret alkotnak, ez a felület érintőtere az $f(x_0)$ helyen; a felületnek ez a pontja reguláris ha az érintőtér minden olyan $\delta \in \mathbb{X}$ elemet tartalmaz amelynél $\langle \nabla f(x_0), \delta\rangle = 0$. Banach és Riesz tételeiből következik hogy *ha f az $\mathbb{X}$ Hilbert tér x_0 pontjának egy környezetében folytonosan differenciálható, és $\nabla f(x_0) \neq 0$, akkor x_0 a felület reguláris pontja.* ♡ Minden $x \in \mathbb{X}$ elem egyértelműen bontható fel az $x = y + \alpha\,\omega$ módon, ahol $\omega := \nabla f(x_0)/\|\nabla f(x_0)\|$, $\alpha := \langle x, \omega\rangle$, és y a gradiensre merőleges elemekből álló $\mathbb{X}_0$ zárt altér eleme; $x_0 = y_0 + \alpha_0\,\omega$, $\alpha_0 := \langle x_0, \omega\rangle$. A $c = g(y, \alpha) := f(y + \alpha\,\omega)$ egyenletet a fixpont tétel alkalmazásával oldjuk fel y_0 egy környezetében. A bizonyítás a kétváltozós tételéével azonos, bár most a $g'_y(y, \alpha)$ parciális derivált $\mathbb{X}_0$ eleme. Jelölje $\alpha = \phi(y)$ a megoldást, $\phi'(y) \in \mathbb{X}_0$ a deriváltja, ekkor $f(y + \phi(y)\,\omega) = c$ és a kétváltozós esethez hasonlóan $g'_y(y, \phi(y)) + g'_\alpha(y, \phi(y)\phi'(y) = 0$ ha $y \in \mathbb{X}_0$. Adott $\delta \in \mathbb{X}_0$ érintőhöz $x_\delta(t) := y_0 + t\delta + \phi(y_0 + t\delta)\,\omega$ a keresett görbe, mert $\langle \nabla f(x_0), \delta + \langle \phi'(y_0), \delta\rangle\,\omega\rangle = 0$ miatt $\langle \phi'(y_0), \delta\rangle = 0$, tehát $\dot{x}_\delta(0) = \delta$. □ Innen a *feltételes lokális szélsőérték szükséges feltétele* is következik. Tegyük fel hogy $g(x) = g(x_0) = c$ és $\|x - x_0| < \varepsilon$ esetén $h(x) \geq h(x_0)$. ♡ $h(x_0)$ a szintfelület x_0 pontján átmenő felületi görbék mentén is extremális, tehát $\nabla f(x_0)$ merőleges a $g(x) = c$ felület x_0 pontjához tartozó érintőterére. Ha tehát $\nabla g(x_0) \neq 0$ akkor $\nabla h(x_0) \parallel \nabla g(x_0)$. □

Fix $h \in \mathbb{X}$ mellett ugyanígy definiálható az $f'_h(x) := \langle \nabla f(x), h\rangle$, $x \in \mathbb{X}$ funkcionál $\nabla f'_h(x) \in \mathbb{X}^*$ deriváltja az $x \in \mathbb{X}$ változó szerint: $\nabla f'_h(x+l) = \nabla f'_h(x) + \langle \nabla f'_h(x), l\rangle + \varepsilon(x, h, l)\|l\|\ \forall\, l \in \mathbb{X}$, és ha $\nabla f'_h$ is differenciálható, akkor $\varepsilon(x, h, l) \to 0$ amikor x és h rögzített, de $l \to 0$. Megmutatjuk hogy $\nabla f'_h(x)$ *homogén és additív módon függ a $h \in \mathbb{X}$ változótól*, ehhez ♡ legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h, k \in \mathbb{X}$ és $l = te$, ahol $e \in \mathbb{X}$ tetszőleges egységvektor. A definíció alapján $\langle \nabla f'_{\alpha h+\beta k}, e\rangle = \alpha\langle \nabla f'_h, e\rangle + \beta\langle \nabla f'_k, e\rangle + \varepsilon(x, \alpha h, tl) + \varepsilon(x, \beta k, tl) - \varepsilon(x, \alpha h + \beta k, tl)$, amiből a $t \to 0$ határátmenet után $\langle \nabla f'_{\alpha h+\beta k}, e\rangle = \alpha\langle \nabla f'_h, e\rangle + \beta\langle \nabla f'_k, e\rangle$ következik. Mivel e akármelyik egységvektor lehet, igazoltuk hogy $\nabla^2 f(x)h := \nabla f'_h(x)$ egy $\nabla^2 f(x) : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}^*$ lineáris leképezést definiál. □

Ha $\nabla^2 f(x)$ korlátos, vagyis $\|\nabla^2 f(x)\| := \sup\{\|\nabla^2 f(x)h\| : \|h\| \leq 1\} < +\infty$, akkor azt mondjuk hogy f kétszer differenciálható. Lagrange második tételéből, feltéve hogy f az $x \in \mathbb{X}$ egy környezetében kétszer differenciálható, a szokásos módon az $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(\xi)h, h\rangle$ formulát kapjuk, ahol ξ az x és $x+h$ pontokat összekötő szakasz belső pontja. Ez a tétel a konvexitás és a szélsőérték elégséges feltételét is megadja. Hilbert téren a második derivált *lineáris korlátos operátor.*

Minimális ívhosszú görbék: Megmutatjuk hogy *felület két pontja között a legrövidebb görbeív mindig geodetikus.* Az $\mathsf{r} : G \mapsto \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^2$ leképezéssel adott Σ felület görbéi $\mathsf{q}(t) := \mathsf{r}(u(t), v(t))$ alakúak, ahol a $\mathsf{w}(t) := (u(t), v(t))$ síkgörbe a G tartományban halad. A felület két kijelölt pontja $\mathsf{r}(\mathsf{a})$ és $\mathsf{r}(\mathsf{b})$, tegyük fel hogy $\mathsf{q}_0 = \mathsf{r}(\mathsf{w}_0)$, $\mathsf{w}_0 = (u_0, v_0)$ ezeket összekötő minimális ívosszúságú felületi görbe. Paraméternek a q_0 optimális görbe $t = s$ ívhosszát választjuk, feladatunk az

$$L(\mathsf{w}) := \int_0^l |\dot{\mathsf{q}}(s)|\, ds = \int_0^l |\mathsf{r}'_u(\mathsf{w})\dot{u}(s) + \mathsf{r}'_v(\mathsf{w})\dot{v}(s)|\, ds$$

ívhossz minimalizálása, ahol l a q_0 ív hossza, és a megengedett w síkgörbék a $\mathsf{w}(0) = \mathsf{a}$, $\mathsf{w}(l) = \mathsf{b}$ peremfeltételnek tesznek eleget. A $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(l) = 0$ peremfeltételnek eleget tevő, folytonosan differenciálható $\boldsymbol{\omega}(s) = (\gamma(s), \delta(s))$ görbék lineáris teret alkotnak, legyen $g(\alpha) := L(\mathsf{w}_0 + \alpha\boldsymbol{\omega})$. ♡ Mivel $|\dot{\mathsf{q}}_0| = 1$, a funkcionális derivált:

$$L'(\mathsf{w}_0)(\boldsymbol{\omega}) := g'(0) = \int_0^l \langle \dot{\mathsf{q}}_0(s), \partial_\alpha \dot{\mathsf{q}}_0(s)\rangle\, ds = \int_0^l \langle \dot{\mathsf{q}}_0(s), \partial_t \partial_\alpha \mathsf{q}|_{\alpha=0}(s)\rangle\, ds = 0 \quad \forall\, \delta, \gamma\,,$$

ahol $\partial_\alpha \mathsf{q}|_{\alpha=0}(s) := \mathsf{r}_u'(\mathsf{w}_0)\delta + \mathsf{r}_v'(\mathsf{w}_0)\gamma$. Parciális integrálás után, a peremfeltétel miatt

$$\int_0^l \langle \ddot{\mathsf{q}}_0(s), \mathsf{r}_u'(\mathsf{w}_0)\delta(s) + \mathsf{r}_v'(\mathsf{w}_0)\gamma(s)\rangle = 0$$

következik. Mivel δ és γ akármi lehet, $\langle \ddot{\mathsf{q}}_0(s), \mathsf{r}_u'(\mathsf{w}_0(s))\rangle = \langle \ddot{\mathsf{q}}_0(s), \mathsf{r}_u'(\mathsf{w}_0(s))\rangle \equiv 0$. □

A láncgörbe: Azt az $y : [-a,a] \mapsto \mathbb{R}$ függvényt keressük amely minimalizálja a

$$V(y) := \int_{-a}^a y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

helyzeti energiát az $y(-a) = y(a) = 0$ és $L(y) = l$ kényszerfeltételek mellett, ahol $L(y) := \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2}\,dx$ a görbe ívhossza. Az $L(y) = l$ mellékfeltétel miatt ez a feladat nehezebb az előzőnél. Legyen $C_0^k(-a,a)$ az $y(-a) = y(a) = 0$ peremfeltételt kielégítő, k-szor folytonosan differenciálható függvények lineáris tere; $C_{0,l}^k(-a,a) \subset C_0^k(-a,a)$ elemeinek ívhossza éppen l. Tegyük fel hogy az $y_0 \in C_{0,l}^2(-a,a)$ egyensúlyi helyzet tényleg létezik, $\delta \in C_0^1(-a,a)$ esetén az $f(t) := V(y_0 + t\delta)$ és $h(t) := L(y_0 + t\delta)$ függvények differenciálásával kapjuk az

$$L'(y_0)(\delta) := h'(0) = \int_{-a}^a y_0'(x)\delta'(x)(1+y_0'^2(x))^{-1/2}\,dx = -\int_{-a}^a \delta(x)y_0''(x)(1+y_0'^2(x))^{-3/2}\,dx,$$

$$\begin{aligned} V'(y_0)(\delta) := f'(0) &= \int_{-a}^a \delta(x)(1+y_0'^2(x))^{1/2}\,dx + \int_{-a}^a y_0(x)y_0'(x)\delta'(x)(1+y_0'^2)^{-1/2}\,dx \\ &= \int_{-a}^a \delta(x)(1+y_0'^2 - y_0y_0'')(1+y_0'^2)^{-3/2}\,dx \end{aligned}$$

funkcionális (iránymenti) deriváltakat; az utolsó egyenlet mindkét esetben parciális integrálás és azonos átalakítás terméke.

Lagrange elve szerint van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ hogy $V'(y_0)(\delta) = \lambda L'(y_0)(\delta)$ ha $\delta \in C_0^1(-a,a)$, amiből már azonnal következik az

$$(1+y_0'^2 - y_0y_0'')(1+y_0'^2)^{-3/2} = \lambda y_0''(1+y_0'^2)^{-3/2} \tag{13.5}$$

egyenlet, vagyis $(y_0+\lambda)y_0'' = (1+y_0'^2)$. Ez más mint a korábbi $y'' = e^c(1+y'^2)^{1/2}$, de a megoldás ugyanaz a láncgörbe lesz. Az általános megoldást az $y' = p(y)$ helyettesítéssel szokás meghatározni, de ki is lehet találni, egyszerű számolással kapjuk az $y = \alpha\mathrm{ch}(\beta + x/\alpha) - \lambda$ képletet. A dolog szimmetriája miatt $\beta = 0$, az α és λ számokat a kényszerfeltételek határozzák meg. [45]

Ez a levezetés nem teljesen korrekt mert nem neveztük meg azt a Hilbert teret amiben dolgozunk. ♡ Az $L'(y_0)(\delta)$ és $V'(y_0)(\delta) = 0$ funkcionálok kiterjeszthetők a teljes $L^2(-a,a)$ térre, legyen $\mathbb{X}_0$ a $C_0^1(-a,a)$ által generált altér, $\mathbb{X}$ pedig az $\alpha L'(y_0) + \delta$, $\alpha \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{X}_0$ alakú függvények L^2 tere. Mivel $L'(y_0) \neq 0$, y_0 az $L(y) = l$ felület reguláris pontja, tehát Lagrange módszere működik. □

Minimális felszínű forgástest: Az $y(x)$ görbe megforgatásával kapott forgástestnek $[-a,a]$ intervallumhoz rendelt felszíne és térfogata

$$F(y) = 2\pi \int_{-a}^a y(x)(1+y'^2(x))^{1/2}\,dx, \quad V(y) = \pi\int_{-a}^a y^2(x)\,dx,$$

amiből az $y(-a) = y(a)$ peremfeltétel mellett az előző szakasz okoskodásával az

$$\langle F'(y,\delta)\rangle = 2\pi\int_{-a}^a \delta(x)(1+y'^2 - yy'')(1+y'^2)^{-3/2}\,dx, \quad \langle V'(y),\delta\rangle = 2\pi\int_{-a}^a \delta(x)y(x)\,dx$$

képleteket kapjuk. Az $F' = \lambda V'$ feltétel most az $(1+y'^2 - yy'')(1+y'^2)^{-3/2} = \lambda y$ egyenlethez vezet. Ez is hiányos, megint az $y' = p(y)$ helyettesítés vezet el a megoldáshoz. Könnyü ellenőrizni

[45] Logikailag egyszerūbb, de talán kevésbé tanulságos a következō okoskodás. Elég könnyū szükséges feltételt találni a $Q(y) := V(y)/L(y)$ funkcionál minimumának helyére, mert ha az $y_0 \in C_0(-a,a)$, akkor mindegyik $g_\delta(t) := Q(y_0 + t\delta)$ függvénynek a $t = 0$ pontban minimuma van, feltéve hogy $\delta \in C_0(-a,a)$. Ez a számolás is a láncgörbe (13.5) egyenletéhez vezet.

hogy $\lambda = 2$ és $y_0 := (a^2 - x^2)^{1/2}$ a keresett profil, tehát adott térfogatú forgástestek között a gömb felszíne a legkisebb

13.5. **Mértékelmélet.** Az integrálszámítás alapja, nélkülözhetetlen olyan hasznos tudományokhoz mint a Fourier analízis, valószinűségszámítás, parciális differenciál egyenletek, és így tovább.

A monoton osztály tétele: Algebrai struktúrája miatt akárhány σ-gyűrű közös része is az, tehát az X alaphalmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{C}$ osztályt tartalmazó összes σ-gyűrű metszetét joggal nevezzük a $\mathcal{C}$ által generált σ-gyűrűnek; ez a $\mathcal{C}$ osztályt tartalmazó legszűkebb σ-gyűrű. Halmazrendszer által generált σ-algebra konstrukciója hasonló. Az $\mathcal{M}$ halmazosztály monoton ha tartalmazza növő sorozatainak egyesítését, és a fogyó sorozatok metszeteit is. *Gyűrűt tartalmazó legszűkebb monoton osztály éppen a gyűrű által generált σ-gyűrű.* $\heartsuit$ Legyen $\mathcal{X}_0$ a gyűrű, $\mathcal{X}$ és $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ az általa generált σ-gyűrű illetve monoton osztály, végül $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}\}$. Az utóbbi nyilván monoton osztály, és $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{X}_0$ ha $A \in \mathcal{X}_0$, tehát ilyenkor $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$ mert $\mathcal{M}$ minimális. Azt láttuk be hogy ha $A \in \mathcal{X}_0$ és $B \in \mathcal{M}$ akkor $A \cup B \in \mathcal{M}$, de az ilyen tulajdonságú A halmazok is monoton osztályt alkotnak, tehát $\mathcal{M}$ tartalmazza bármely két halmazának egyesítését is. Hasonlóan, $\mathcal{M}_A^c := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B^c \in \mathcal{M}\}$ is monoton osztály, és $\mathcal{M}_A^c = \mathcal{M}$ ha $A \in \mathcal{X}_0$, tehát $\mathcal{M}$ két halmazának különbségét is tartalmazza, vagyis σ-gyűrű. $\square$

Mérték kiterjesztése: Bár nem volt lényeges, korábban csak olyen mértékekről beszéltünk, amelyek a halmazgyűrűn véges értékűek. σ-gyűrű esetében ez a követelmény már nem tartható, de feltesszük hogy a vizsgált $(X, \mathcal{X}_0, \lambda)$ mértéktér σ-véges, vagyis van olyan $X_n \in \mathcal{X}_0$ véges mértékű sorozat hogy $X = \cup X_n$. Minden $Y \in \mathcal{X}_0$ halmazhoz hozzárendelhető az alaptér $(Y, \mathcal{X}_0^Y, \lambda_Y)$ altere, ami szintén mértéktér, és $\mathcal{X}_0^Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{X}_0\}$, $\lambda_Y(A) := \lambda(A \cap Y)$ definiál; $\mathcal{X}_0^Y$ már mindig algebra. Megmutatjuk hogy *gyűrűn adott mérték egyértelműen terjeszthető ki az $\mathcal{X}_0$ által generált $\mathcal{X}$ σ-gyűrűre,* vagyis pontosan egy olyan $\mu : \mathcal{X} \mapsto [0, +\infty]$ σ-additív halmazfüggvény (mérték) van hogy $\mu(A) = \lambda(A)$ ha $A \in \mathcal{X}_0$; az igy kapott mértékteret $(X, \mathcal{X}, \lambda)$ jelöli. $\heartsuit$ Ha λ_1 és λ_2 mérték $\mathcal{X}$-en, akkor $\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{X} : \lambda_1(A) = \lambda_2(A)\} \supset \mathcal{X}_0$ monoton osztály, tehát $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

A mérték kiterjesztése monoton sorozatok mentén, a folytonosság kihasználásával történik. A $\lambda(A) := \lim \lambda(A_n)$ ha $A = \cup A_n$ és $A_{n-1} \subset A_n \in \mathcal{X}_0$ definícióval *a mérték egyértelműen terjeszthető ki az $\mathcal{X}_0$ gyűrűből vett megszámlálható egyesítések $\mathcal{X}_0^+$ osztályára,* mert ha $\heartsuit$ $\mathcal{X}_0 \ni B \subset A$ akkor $B = \cup(B \cap A_n)$, tehát $\lambda(B) \le \lim \lambda(A_n)$. $\square$ Látható hogy $\lambda(A) = \sup\{\lambda(B) : A \supset B \in \mathcal{X}_0\}$ ha $A \in \mathcal{X}_0^+$, és $\lambda(A) \le \lambda(B)$ ha $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{X}_0^+$. A kiterjesztés után $\lambda = +\infty$ is lehetséges, de a generáló gyűrűn értéke persze nem váltott. Az $\mathcal{X}_0^+$ halmazrendszer sajnos nem gyűrű, de véges sok elemének metszetét, és megszámlálható soknak az egyesítését tartalmazza, ez utóbbi $(\cup_k A_{n,k}) \cap (\cup_k B_{n,k}) = \cup_k (A_{n,k} \cap B_{n,k})$ miatt igaz. Az additivitás $\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ ha $A, B \in \mathcal{X}_0^+$ azonossága is érvényben marad, sőt a diagonális módszerrel az is igazolható hogy *ez a kiterjesztés alulról folytonos, vagyis σ-additív:* ha A az $A_n \in \mathcal{X}_n^+$ növő sorozat egyesítése, akkor $A \in \mathcal{X}_0^+$ és $\lambda(A) = \lim \lambda(A_n)$. $\heartsuit$ Legyen $A = \cup A_n$ és $A_n = \cup_k A_{n,k}$, ahol $A_{n,k} \in \mathcal{X}_0$. Feltehetjük hogy $A_{n,k} \subset A_{n,k+1} \cap A_{n+1,k}$ mert az elejétől kezdve $A_{n+1,k}$ rendre kicserélhető az $A_{n,k} \cap A_{n+1,k}$ halmazra, de ekkor $A = \cup A_{n,n}$, tehát $\lambda(A_n) \le \lambda(A) = \lim \lambda(A_{n,n}) \le \lim \lambda(A_n)$. $\square$ Ezután áttérhetnénk $\mathcal{X}_0^+$ fogyó sorozataira, [46] de ez az iteratív eljárás megszámlálhatóan sok lépésben sem fejeződik be.

A lépésenkénti bővítés helyett a $\lambda^*(A) := \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{X}_0^+\}$ külső mérték lesz a kiterjesztés eszköze, amije minden $A \subset X$ halmaznak van. Nyilván $\lambda^*(A) = \lambda(A)$ ha $A \in \mathcal{X}_0^+$ és $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$ ha $A \subset B$, sőt *a külső mérték szubadditív és alulról folytonos.* $\heartsuit$ Mivel minden $A, B \subset X$ párhoz és $\varepsilon > 0$ számhoz van $C, D \in \mathcal{X}_0^+$ úgy hogy $A \subset C$, $B \subset D$, de $\lambda^*(A) > \lambda(C) - \varepsilon$ és

[46] Jelölje $\mathcal{X}_0^\pm$ a $\mathcal{X}_0^+$ halmazból vett fogyó sorozatok metszeteinek osztályát. A diagonális módszerrel most is igazolható hogy ha $A \in \mathcal{X}_0^+$ az $A_n \in \mathcal{X}_0^+$ fogyó sorozat metszete, akkor $\lambda(A) = \lim \lambda(A_n)$, tehát értelmes a mérték második kiterjesztése az $A \in \mathcal{X}_0^\pm$ halmazokra: $\lambda(A) := \inf\{\lambda(B) : A \subset B \in \mathcal{X}_0^+\}$, ami az elsōhöz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik.

$\lambda^*(B) > \lambda(D) - \varepsilon$, tehát

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \le \lambda(C \cup D) + \lambda(C \cap D) = \lambda(C) + \lambda(D) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B) + 2\varepsilon\,,$$

vagyis $\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \le \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$. Ha pedig A az A_n monoton növő sorozat egyesítése, akkor van olyan $\mathcal{X}_0^+ \ni C_n \supset A_n$ szintén növő sorozat hogy $\lambda^*(A_n) > \lambda(C_n) - \varepsilon$; C_n monotonitása a λ additív és λ^* szubadditív tulajdonságának köszönhető. Először olyan $\mathcal{X}_0^+ \ni D_n \supset A_n$ sorozatot választunk hogy $\lambda(D_n) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$, indukcióval igazolható hogy

$$\lambda(C_n) < \lambda(A_n) + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \quad \text{ha} \quad C_n := \cup_{k=1}^n D_k\,.$$

Mivel $A \subset C := \cup C_n$, $\lambda(C_n) = \lim \lambda(C_n)$ és $\lambda^*(A_n) \le \lambda^*(A) \le \lambda(C)$, $\lambda^*(A) = \lim \lambda^*(A_n)$. □

Az $A \subset X$ halmaz Caratheodory szerint mérhető ha minden $C \in \mathcal{X}_0$ halmazt jól vág ketté, vagyis $\lambda(C) \ge \lambda^*(C \cap A) + \lambda^*(C \cap A^c)$; az ellentétes egyenlőtlenség a szubadditivitás következménye. [47] Az így mérhető halmazok $\mathcal{M}$ halmaza az $\mathcal{X}_0$ gyűrűt biztosan tartalmazza, és mindegyik elemének a komplementuma is benne van. A külső mérték alulról folytonos, innen határátmenettel következik hogy *mérhető halmaz minden $C \in \mathcal{X}_0^+$ halmazt jól vág ketté.* ♡ Ha $C \subset X$ tetszőleges, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\mathcal{X}_0^+ \ni D \supset C$ úgy hogy $A \in \mathcal{M}$ esetén

$$\lambda^*(C) + \varepsilon \ge \lambda(D) = \lambda^*(D \cap A) + \lambda^*(D \cap A^c) \ge \lambda^*(D \cap A) + \lambda^*(D \cap A^c)\,,$$

vagyis *mérhető halmaz minden halmazt jól vág ketté.* □ Ez a tényállás úgy is fogalmazható hogy a külső mérték az $\mathcal{M}$ osztályon additív: $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ ha $A, B \in \mathcal{M}$ és $A \cap B = \emptyset$. Már csak az hiányzik hogy $\mathcal{M}$ *monoton osztály,* de ♡ tudjuk hogy hogy ha az $A_n \in \mathcal{M}$ fogyó sorozatnak A a metszete, akkor

$$\lambda^*(C) = \lambda^*(C \cap A_n) + \lambda^*(C \cap A_n^c) \ge \lambda^*(C \cap A) + \lambda^*(C \cap A^c)$$

mert λ^* monoton és $\lambda^*(C \cap A_n^c) \to \lambda^*(C \cap A)$, tehát $A \in \mathcal{M}$. Monoton növő sorozatnál a komplementumok fogynak, és $\mathcal{M}$ zárt a komplementumok képzésére vonatkozóan, tehát $\mathcal{M}$ monoton osztály, és így tartalmazza a $\mathcal{X}$ σ-gyűrűt. Ámde *gyűrűn adott additív és alulról folytonos, nemnegatív halmazfüggvény mérték*, tehát megvan az $(X, \mathcal{X}, \lambda^*)$ mértéktér.□ Ezzel befejeztük a mérték kiterjesztéséről szóló súlyos tételnek a bizonyítását.

Ezután mértéknek a valamely X halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{X}$ σ-algebán definiált nemnegatív σ-additív és σ-véges halmazfüggvényeket nevezzük, az $(X, \mathcal{X})$ pár mérhető tér, $\mathcal{X}$ elemei a mérhető halmazok , és az $(X, \mathcal{X}, \lambda)$ trió neve: mértéktér. A mértéktér véges ha $\lambda(X) < +\infty$ a $\lambda(X) = 1$ esetben valószinűségi mezőről beszélünk, és gyakran az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jelölést használjuk. A számegyenesen a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borel σ-algebra a legfontosabb, ezt a nyilt halmazok generálják, de az intervallumok generátuma is $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Az ezen adott λ Lebesgue mérték már ismert. Az $\mathbb{R}^d$ tér $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ Borel σ-algebráját is a nyilt halmazok, illetve a ”téglák” generálják, a d-dimenziós Lebesgue mértéket szorzatként konstruálhatjuk meg.

Kolmogorov alaptétele: Az első rész végén folytonos függvények Riemann integráljából kiindulva konstruáltuk meg a számegyenes Lebesgue mértékét. A következő gondolatmenet a valószinűségszámítás Kolmogorov alaptételeét követi, és minden ismert mérték lényegében ennek szellemében készül. Legyen $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ az S véges vagy megszámlálható halmazból alkotható $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n \dots)$ sorozatok halmaza, $\sigma \in \Omega$ esetén $I_n(\sigma)$ az olyan $\omega \in \Omega$ sorozatokból áll amelyeknél $\omega_k = \sigma_k$ ha $k \le n$, $\mathcal{F}_n$ az $I_n(\sigma)$ típusú halmazok egyesítéseiből álló halmazalgebra, végül $\mathcal{A}_0 := \cup \mathcal{F}_n$. Látható hogy $\mathcal{A}_0$ halmazalgebra, amiben mindegyik $I_n(\sigma)$ halmaz diszjunkt $I_{n+1}(\sigma)$ típusú halmazok egyesítése. Először azt a pusztán logikai tényt igazoljuk hogy *ha $A_n \in \mathcal{A}_0$ fogyó sorozat és $\cap A_n = \emptyset$, akkor $A_n = \emptyset$ ha n elég nagy.* ♡ Jelölje $U_{1,n}$ az $\omega \in A_n$ első elemeinek halmazát, éppúgy mint A_n , az $U_{1,n}$ sorozat is fogyó. Ha $\cap U_{1,n} = \emptyset$, akkor van olyan m küszöbszám hogy $U_{1,m} = \emptyset$, vagyis $A_n = \emptyset$ ha $n \ge m$. Az ellenkező esetben kiválasztható egy $\omega_1 \in \cap U_{1,n}$ elem, és definiálható $U_{2,n} \subset S$ mint az olyan $\omega \in A_n$ sorozatok

[47] Ha $X \in \mathcal{X}_0$ és $\lambda(X) < +\infty$ akkor a $\lambda(X) \ge \lambda^*(A) + \lambda^*(A^c)$ feltétel is elegendō, és a tárgyalás még egy kicsit egyszerūbb is. Az elōzō lábjegyzet szellemében az $A \subset X$ halmaz belsō mértékét $\lambda_*(A) := \sup\{\lambda(B) : B \subset A, B \in \mathcal{X}_0^{\pm}\}$ definiálja. Látható hogy $\lambda_*(A) \le \lambda^*(A)$, és belátható hogy egyenlōség van ha A mérhetō.

második elemeinek halmaza, ahol az első éppen ω_1. Ha $\cap U_{2,n}$ sem üres, akkor az első két elem rögzítése után nézhetjük a harmadikat, és így tovább. Ha az eljárás valamikor megakad, akkor csak véges sok A_n nem üres, tehát nincs már mit bizonyítani. Ha nem, akkor ellentmondáshoz jutunk, mert olyan $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...)$ sorozatot sikerülne kiválasztani amelyik mindegyik A_n halmazban benne van. □

Ezt az észrevételt a $B_n := A_n \cap A^c$ halmazokra alkalmazva látjuk hogy ha az A_n sorozat fogy, és $\cap A_n =: A \in \mathcal{A}_0$, akkor $A_n = A$ véges kivétellel. Ha tehát $\lambda : \mathcal{A}_0 \mapsto [0,1]$ additív halmazfüggvény, akkor λ folytonos, σ-additív mérték az $\mathcal{A}_0$ halmazalgebrán. Ilyen λ mértéket igen könnyű megadni, elég olyan $p(s) \geq 0$, $s \in S$ számokat találni amelyeknek 1 az összege. Ezután $\lambda(I_n(\sigma)) := p(\sigma_1)p(\sigma_2)\cdots p(\sigma_n)$ ha $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, ...)$, majd $A \in \mathcal{A}_{0n}$ esetén $\lambda(A) := \sum \lambda(I_n(\sigma))$, ahol az összegezés az $I_n(\sigma) \subset A$ halmazokra vonatkozik, de mindegyiket persze csak egyszer számoljuk. A mérték kiterjesztésére használt előző konstrukció szerint minden ilyen λ egyértelműen terjeszthető ki az $\mathcal{A}_0$ által generált σ algebrára, $\lambda(\Omega) = 1$ és $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ mértéktér.

Lebesgue mértéke ezután úgy készül hogy $S := \{0, 1\}$, és a $p(0) = p(1) =: 1/2$ választással megkonstruáljuk az $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ mértékteret. Megjegyezzük hogy $\lambda(I_n(\sigma)) = 2^{-n}\ \forall\, \sigma \in \Omega$. Ezután a mértéket már csak fel kell vetíteni az $X := [0,1]$ halmazra a $\xi(\omega) := \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n 2^{-n}$ függvénnyel. A $\xi^{-1}(A) = \{x \in [0,1] : x = \xi(\omega), \omega \in \Omega\}$ inverz leképezés *halmazalgebrai izomorfizmus* a $\mathcal{A}$ σ-algebra és a $[0,1] = X$ intervallum részhalmazai között, tehát $\mathcal{X} := \{\xi^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ σ-algebra, és $\lambda(U) := \lambda(A)$ ha $\xi^{-1}(A) = U$ definiálja rajta a λ Lebesgue mértéket. Mivel $\lambda(I_n(\sigma)) = 2^{-n}$, tényleg $\lambda(a, b) = b - a$ ha $0 \leq a < b \leq 1$. A a teljes számegyenesre történő kiterjesztés a mérték eltolás - invarianciáját használja ki. Ez a konstrukció sok más lehetőséget is megenged, például az $S := \{0, 1, 2\}$ és $p(0) = p(2) = 1/2$, $p(1) = 0$ választással a Lebesgue szerint nullmértékű C *Cantor halmazra koncentrált mérték* keletkezik.

Integrál és mérték: A mértékhez hasonlóan az integrálnak is van absztrakt fogalma. Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvények $L(X)$ halmaza vektorháló ha olyan lineáris tér, amely két elemével együtt azok maximumát és minimumát is tartalmazza. Az $I : L(X) \mapsto \mathbb{R}$ lineáris funkcionál pozitív és folytonos ha $f \geq 0$ esetén $I(f) \geq 0$, és $I(f_n) \to 0$ amint az $f_n \geq 0$ sorozat monoton fogyva tart nullához. Ha $\mathcal{X}_0 := \{A \subset X : \mathbf{1}_A \in L(X)\}$ *nem üres, akkor* $\mathcal{X}_0$ *gyűrű, és* $\lambda(A) := I(\mathbf{1}_A)$ *rajta adott mérték.*

Példaként folytonos függvények különféle Riemann integráljait említhetjük, az integrál folytonosságát Dini tétele garantálja. Másik példa az $(X, \mathcal{X}_0, \lambda)$ mértéktér lépcsős függvényeinek $L^1_0(X, \mathcal{X}_0, \lambda)$ tere, ahol λ a $\mathcal{X}_0$ gyűrün adott véges értékű mérték. Az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény lépcsős, ha véges az értékkészlete, és nullától csak véges mértékű halmazon különbözik, vagyis a $C_i := [f = y_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ szinthalmazai az X_0 elemei, és a maradék C_0 halmazon $f = 0$. Ilyenkor $\int f\,d\lambda := y_1\lambda(C_1) + y_2\lambda(C_2) + \cdots + \lambda(C_n)$, és Dini tétele helyett mértékelmélet kell az integrál folytonosságának bizonyításhoz. Tegyük fel hogy $0 \leq f_n \to 0$ lépcsős függvények fogyó sorozata, ekkor $\heartsuit \int f_n\,d\lambda \leq K\,\lambda[f_n \geq \delta] + \delta\,\lambda[f_n > 0] \leq K\,\lambda[f_n \geq \delta] + \delta\,\lambda[f_1 > 0]$, ahol $K < +\infty$ az f_1, és így f_n korlátja. Tudjuk hogy $\lambda[f_1 > 0] < +\infty$, és az $A_n := [f_n \geq \delta]$ fogyó sorozat közös része nullahalmaz, tehát $\lambda(A_n) \to 0\ \forall\,\delta$. □

Az $I : L^1(X) \mapsto \mathbb{R}$ pozitív és folytonos lineáris funkcionál integrál ha valahányszor f az $f_n \in L^1(X)$ monoton sorozat határértéke, és az $I(f_n)$ sorozat korlátos, akkor $f \in L^1(X)$ és $I(f) = \lim I(f_n)$, vagyis *igaz Beppo Levi tétele.* Az ennél általánosabb Fatou lemma egyszerű következmény: *Ha* $g, f_n \in L^1(X)$, $\liminf I(f_n) < +\infty$ *és* $f_n \to f$, *akkor* $f \in L^1(X)$ *és* $I(f) = \lim I(f_n)$ mert $\liminf f_n(x) := \sup_n \inf\{f_m(x) : m > n\}$. □ Ezután a dominált konvergencia tétele is nyilvánvaló: *Ha* $g, f_n \in L^1(X)$, $|f_n| \leq g$ *és* $f_n \to f$, *akkor* $f \in L^1(X)$ *és* $I(f) = \lim I(f_n)$. Ez a séma igen gyakran alkalmazható.

Az integrál és a mérték fogalmának szerves kapcsolatát mutatja a következő észrevétel. Ha $\mathcal{X} := \{A \subset X : \mathbf{1}_A \in L^1(X)\}$ *nem üres, akkor* $\mathcal{X}$ σ*-gyűrű amin* $\lambda(A) := I(\mathbf{1}_A)$ *mérték.* A következő szakasz mondanivalója úgy foglalható össze hogy *az* $L(X)$ *vektorhálón adott* I *pozitív és folytonos lineáris funkcionál kiterjesztéseként konstruált absztrakt integrál a fenti* λ *mérték szerinti integrál:* $I(f) = \int f\,d\lambda$ *ha* $f \in L^1(X)$ *és* $\mathcal{X}$ *nem üres.*

Az integrál kiterjesztése: Riesz Frigyes nyomán megmutatjuk hogy *vektorhálón adott pozitív és folytonos lineásris funkcionál integrállá terjeszthető ki.* Az okoskodás a mérték kiterjesztésének logikáját követi. Jelölje $L^+(X)$ az $L(X)$ vektorháló monoton növő sorozatai határfüggvényeinek halmazát, és legyen $I(f) := \lim I(f_n)$ ha $f_n \in L(X)$ monoton nő és $f_n \to f$; $I(f) = +\infty$ is lehetséges. A definíció egyértelmű, mert ha $f \geq g \in L(X)$ akkor $g(x) = \lim \min\{g(x), f_n(x)\}$, tehát ez az I az eredeti kiterjesztése $L(X)$ ről az $L^+ \supset L(X)$ halmazra. Megjegyezzük hogy $f, g \in L^+$ esetén nemcsak $\max\{f, g\}$, hanem $\min\{f, g\}$ is az L^+ eleme],. L^+ sajnos már nem lineáris tér, csak konvex halmaz, de az I tulajdonságai érvényben maradnak; az se nehéz hogy ha $L^+ \ni f_n \to f$ monoton növő sorozat, akkor $f \in L^+$ és $I(f) = \lim I(f_n)$.

Definiálhatjuk az $A \subset X$ halmazok $\lambda^*(A) := \inf\{I(f) : \mathbf{1}_A \leq f \in L^*\}$ külső mértékét, és a $\lambda^*(A) = 0$ tulajdonságú nullahalmazok ismeretében alkalmazhatnánk Riesz módszerét, lásd 8. Fejezet. Az eljárás működik mert Riesz lemmája absztrakt formában, az $L(X)$ térben is igazolható. Ehelyett P. Daniell trükkjét ismertetjük, ami Caratheodory konstrukcióját utánozza.

A kiterjesztés következő lépese az $I^*(f) := \inf\{I(\phi) : f \leq \phi \in L^+\}$ definíció. $I^*(f) \in (-\infty, +\infty]$ felső intergálja minden $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek van, és $I^*(f) = I(f)$ ha $f \in L^+$. Világos hogy $I^*(f) \leq I^*(g)$ ha $f \leq g$, és $I^*(af + bg) \leq aI^*(f) + bI^*(g)$ ha $a, b \geq 0$ és a jobboldal nem $-\infty + \infty$ típusú. Ráadásul, ha f_n monoton nő és $f_n \to f$ akkor $I^*(f) \leq \lim I^*(f_n)$. Ez a Beppo Levi típusú tétel úgy is fogalmazható hogy ha $f = \sum \varphi_n$ és $\varphi_n \geq 0$, akkor $I^*(f) \leq \sum I^*(\varphi_n)$, ez utóbbit igazoljuk. ♡ Feltehejük hogy a jobboldal véges, ekkor minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ számhoz van olyan $\phi_n \in L^+$ hogy $\varphi_n \leq \phi_n$ de $I(\phi_n) < I^*(\varphi_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Viszont $f \leq \sum \phi_n \in L^+$. □

Az L^- osztály az $L(X)$ vektorháló monoton fogyó f_n sorozatainak f határfüggvényeiből áll, és $I(f) := \lim I(f_n)$ ha $f \in L^-$, ez is a I kiterjesztése. Az $I_*(f) := \sup\{I(\phi) : f \geq \phi \in L^-\} = -I^*(-f)$ fukcionál az I^* felső integrához hasonló, de ellentétes természetű tulajdonságokkal rendelkezik, persze $I_*(f) \leq I^*(f)$. Azt tudjuk hogy $I^*(f) = I_*(f) = I(f)$ ha $f \in L(X)$, azt mondjuk hogy f integrálható, amit $f \in L^1(X)$ jelöl, ha $I_*(f) = I^*(f)$, és ekkor $I(f) := I^*(f)$. Az integrál kiterjesztésének tétele: $L^1(X) \supset L(X)$ *vektorháló, és rajta I integrál.* A bizonyítás kulcsa az az észrevétel hogy I^* az $L^1(X)$ *vektorhálón additív.*

Az L^1 tér: Ebben a szakaszban az integrál mértékelméleti tárgyalását adjuk, de szokásostól kissé eltérően, metrikus tér teljessé bővítésének konstrukcióját követjük. Az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ függvény mérhető ha $U \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ esetén a $\{x \in X : f(x) \in U\} \equiv [f \in U]$ halmazok mind mérhetőek. Ugyanígy definiáljuk $\phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ mérhetőségét, és ha egy többváltozós mérhető függvénybe mérhető függvényeket helyettesítünk, akkor mérhetőt kapunk. Mivel az inverz leképezés halmazelméleti izomorfizmus, az $[f \in U] \in \mathcal{X}$ feltételt elég egy olyan halmazosztályon ellenőrizni ami generálja a Borel σ-algebrát. Ilyenek például a $(-\infty, b]$ intervallumok, tehát mérhető függvények monoton sorozatainak határértéke is mérhető. A $\limsup / \liminf$ konstrukció alapján mondhatjuk hogy *mérhető függvények (mindenütt) konvergens sorozatának határértéke is mérhető.* Azt mondjuk hogy a mérhető függvények f_n sorozata mértékben konvergál az f függvényhez ha $\lambda[|f_n - f| > \delta] \to 0 \ \forall \delta > 0$. *Mértékben konvergens sorozatnak van majnem biztosan konvergáló részsorozata* mert ♡ radikális ritkítással kiválasztható olyan g_n részsorozat hogy $\lambda[|g_n - f| > 2^{-n}] < 2^{-n}$ legyen, de ekkor nullahalmaz kivételével $|g_n(x) - f(x)| > 2^{-n}$ csak véges sokszor fordulhat elő. □

Az előző szakasszal ellentétben, adott $\lambda : \mathcal{X}_0 \mapsto [0, +\infty)$ mértékből kiindulva definiáljuk bizonyos mérhető függvények integrálját. Az $I(f) = \int f \, d\lambda$ integrál a mérhető függvényekből álló $L^1(X, \mathcal{X}, \lambda)$ lineáris téren értelmezett pozitív lineáris funkcionál, ami az $\int \mathbf{1}_A \, d\lambda = \lambda(A)$ $\forall A \in \mathcal{X}$, feltételnek is eleget tesz. Markov egyenlőtlensége szerint $\alpha\lambda[f \geq \alpha] \leq \int f \, d\lambda$ ha $f \geq 0$.

Tulajdonságai az integrált már meghatározzák, persze tisztázni kell hogy melyek az $f \in L^1(X, \mathcal{X}, \lambda)$ integrálható függvények. Kiinduló pontunk mindössze annyi hogy a mérték az $\mathcal{X}_0$ gyűrün adott, tehát a biyonyítás a mérték kiterjesztésének tételét is kiadja. A lépcsős függvények $L^1_0(X, \mathcal{X}_0, \lambda)$ lineáris terén $\|f\|_1 := \int |f| \, d\lambda$ norma, $\|f\|_1 = 0$ akkor és csak akkor ha $f = 0$ majdnem mindenütt. Azt kell megmutatni hogy ennek a metrikus térnek az $L^1(X, \mathcal{X}, \lambda)$ *teljes burka mérhető függvények tereként realizálható.* A dolognak értelme csak akkor lehet ha a lépcsős függvények a bővítés után is függvények maradnak: *ha* $f, f_n \in L_0^1$ *és* $\|f - f_n\|_1 \to 0$ *akkor* $f_n \to f$ *mértékben,* tehát az $f_n \in L_0^1$ Cauchy sorozat f-el azonosítható. ♡ Markov szerint $\lambda[|f - f_n| > \delta] \le (1/\delta)\|f - f_n\|_l$. □

Az integrál kiterjesztésével nincs gond: ha $f_n \in L_0^1$ Cauchy sorozat, akkor az integráljainak sorozata is az, tehát konvergens. Ha két sorozat egyesítése is Cauchy, akkor az integrálok határértéke ugyanaz, tehát a kiterjesztés egyértelmű. Az L^1 tér ideális elemeinek azonosításához azt kell észrevenni hogy ha az $f_n \in L_0^1$ sorozat monoton és majnem mindenütt konvergál az f függvényhez, továbbá az integráljainak sorozata konvergens, akkor f_n Cauchy, tehát mondhatjuk hogy $\int f\,d\lambda := \lim \int f_n\,d\lambda$. Tizedes törtben megadott értékeinek kerekítésével *minden nemnegatív mérhető függvény megközelíthető lépcsős függvények monoton sorozatával.* Konkrétan, legyen $X_n \in \mathfrak{X}$ olyan növő sorozat hogy $\cup X_n = X$ de $\lambda(X_n) < +\infty$, valamint $f_n(x) = 0$ ha $x \neq X_n$, $f_n(x) = k\,10^{-n}$ ha $x \in X_n$ és $k\,10^{-n} \le f(x) < (k+1)10^{-n}$. f nem lehet integrálható ha $\int f_n\,d\lambda \to +\infty$, tehát tudjuk hogy egy nemnegatív mérhető függvény mikor integrálható. Nem jeltartó függvény integrálját a pozitív és negatív részeinek szétválasztászával definiáljuk, $f \in L^1(X, \mathfrak{X}, \lambda)$ akkor és csak akkor igaz ha $|f| \in L^1$.

Ugyanúgy mint a Lebesgue integrál tárgyalásakor, a monoton konvergencia tételének bizonyításakor tudni kell hogy *ha* $0 \le f_n \in L_0^1$ *olyan fogyó sorozat hogy* $f_n \to 0$ *majdnem mindenütt, akkor* $\int f_n\,d\lambda \to 0$.

Ezután már könnyű megmutatni hogy *ha* $0 \le f_n \in L^1$ *monoton nő és* $f_n \to f$ *m.m., akkor* $f \in L^1$ *és* $\int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$. Fatou lemmája és a dominált konvergencia tétele direkt következmény, az utóbbit a következő formában mondjuk ki: *Ha* $g, f_n \in L^1$, $|f_n| \le g$ *és* $f_n \to f$ *mértékben, akkor* $f \in L^1$ *és* $\int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$. A bizonyítás ugyanaz mint a 8. Fejezetben.

Egyenletes integrálhatóság: Legyen $(X, \mathfrak{X}, \lambda)$ véges mértéktér, feltehetjük hogy $\lambda(X) = 1$. Ha az $f_n \in L^1(X, \mathfrak{X}, \lambda)$ sorozat átlagosan konvergens akkor egyenletesen integrálható, vagyis

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_n \int_{[|f_n| \ge \alpha]} |f_n|\,d\lambda = 0\,, \tag{13.6}$$

mert $|f_n| \le |f| + |f_n - f|$, és $\|f_n - f\|_1 \to 0$ esetén alkalmazható a monoton konvergencia tétele. A dominált konvergencia tételéből következik hogy *ha* f_n *egyenletesen integrálható és* $f_n \to f$ *mértékben, akkor* $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Például, ha f_n egyenletesen integrálható, g_n korlátos és $g_n \to 0$ mértékben, akkor $f_n g_n$ is egyenletesen integrálható, tehát $\|f_n g_n\| \to 0$. Megjegyezzük hogy (13.6) az $\lim_{\alpha\to\infty} \sup_n \int \big||f_n| - \alpha\big|_+\,d\lambda = 0$ alakba írható át, mert ez nyilvánvaló következmény, a másik irány pedig az elemi $\int 1_{[|f_n| \ge 2\alpha]} |f_n|\,d\lambda \le 2 \int \big||f_n| - \alpha\big|_+\,d\lambda$ egyenlőtlenség folyománya.

Az L^2 tér: Megmutatjuk hogy *mindegyik* $L^2(X, \mathfrak{X}, \lambda)$ *tér teljes.* ♡ Feltehetjük hogy $\lambda(X) < +\infty$, de ekkor $\|f\|_1^2 \le \lambda(X)\|f\|_2^2$ miatt az L^2 f_n Cauchy sorozata L^1-ben is az. Nem tudjuk hogy $f := L^1 \lim f_n$ négyzetesen integrálható, de $f - f_n = \lim_m f_m - f_n$ mértékben, tehát Fatou lemmájával $\|f - f_n\|_2^2 \le \liminf_m \|f_m - f_n\|_2^2$. □

Előjeles mértékek: σ-additív halmazfüggvény negatív értékeket is felvehet, ilyenkor mindig feltesszük hogy μ véges értékű. A μ előjeles mérték pozitív része: $\mu_+(A) := \sup\{\mu(B) : B \subset A\}$ valódi *véges és nemnegatív mérték, és* $\mu(A) \le \mu_+(A)\ \forall A \in \mathfrak{X}$. ♡ Először is, μ értékkészlete korlátos, mert ha például $\mu(A_n) \ge n$ lehetséges volna, akkor a közös részek esetleges elhagyásával hasonló tulajdonságú növő sorozatot is tudnánk készíteni. Ennek egyesítése végtelen mértékű, ami ellentmond annak hogy feltevésünk szerint $\mu(A)$ mindig véges. Ha most A_n páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, és $A : \cup A_n$, akkor $\mu_+(A) \ge \sum \mu_+(A_n)$ a μ_+ monotonitása miatt. Ha viszont $B \subset A$, akkor $B_n := B \cap A_n \subset A_n$, tehát $\mu_+(A) \le \sum \mu_+(A_n)$ a $\mu(B_n) \le \mu_+(A_n)$ egyenlőtlenség miatt igaz. □

A μ negatív részét $\mu_-(A) = \mu_+(A) - \mu(A)$ definiálja. Ez is véges nemnegatív mérték, tehát írhatjuk hogy $\int f\,d\mu := \int f\,d\mu_+ - \int f\,d\mu_-$, feltéve hogy a különbség nem $+\infty - \infty$ típusú. Korlátos változású függvény szerinti Lebesgue - Stieltjes integrál vezet ilyen képletekhez. Gyakran használják a $\mu(f) := \int f\,d\mu$ rövidítést, ami az itegrál funkcionál voltára utal.

Ennél erősebb H. Hahn felbontási tétele: *Minden* μ *előjeles mértékhez megadható az* X *tér olyan* X^+ *és* X^- *diszjunkt mérhető halmazokra való* $X = X^+ \cup X^-$ *felbontása hogy* $\mu(A) \ge 0$ *ha*

$A \subset X^+$, *míg* $\mu(A) \le 0$ *ha* $A \subset X^-$. ♡ Található olyan A_n sorozat hogy $\mu_+(X) < \mu(A) + 2^{-n}$, tehát $\mu_+(A_n^c) + \mu_-(A_n) < 2^{-n}$; legyen $X_n^+ := \cap_{k>n} A_n$ és $X^+ := \cup X_n^+$. Mivel $\mu_+(X) \le \mu_+(X_n^+) + \delta$ és $\mu_-(X_n^+) \le 2^{-n}$, $\mu_+(X^+) = \mu_+(X)$ és $\mu_-(X^+) = 0$, tehát X^+ és $X^- : (X^+)^c$ a keresett felbontás. □

A Radon - Nikodym tétel: Képzeljük el hogy az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren két σ-véges mérték is adott, λ és μ. μ abszolút folytonos a λ mértékre nézve, amit $\mu \ll \lambda$ jelöl, ha $\lambda(A) = 0$ esetén $\mu(A) = 0$. Az abszolút folytonosság korábbi definíciójához hasonló igazság hogy *ha* $\mu \ll \lambda$ *akkor minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz van* $\delta > 0$ *úgy hogy* $\lambda(A) < \delta$ *esetén* $\mu(A) < \varepsilon$. Az állítás az abszolút folytonos függvényeknél megismert módon következik Radon és Nikodym alábbi tételéből: *Ha* $\mu \ll \lambda$ *akkor van olyan mérhető* $f \ge 0$ *függvény hogy* $\mu(A) = \int_A f\, d\lambda$. Ezt az f függvényt a μ λ-sűrűségének nevezzük, és $f = d\mu/d\lambda$ jelöli. ♡ A σ-végesség miatt feltehetjük hogy $\mu(X) < +\infty$. Jelölje μ_ϕ a $\mu_\phi(A) := \int_A \phi\, d\lambda$ képlettel definiált mértéket, ahol $\phi \ge 0$ tetszőleges mérhető függvény, és legyen $\mathcal{F}$ az olyan ϕ függvények halmaza, melyeknél $\mu_\phi(A) \le \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{X}$. Azt gondoljuk hogy $f(x) = \sup\{\phi(x) : \phi \in \mathcal{F}\}$ a keresett sűrűség, de ezt még értelmezni kell. $\mathcal{F}$ ugyan vektorháló, de azt nem tudjuk hogy van neki m.m. legnagyobb eleme; $\sup_{\mathcal{F}} \phi$ nem biztos hogy mérhető. Viszont található olyan $\phi_n \in \mathcal{F}$ növő sorozat hogy $\lim \mu_{\phi_n}(X) = \sup_{\mathcal{F}} \mu_\pi(X)$, legyen $f := \lim \phi_n$; persze $f \in \mathcal{F}$ és $\mu_f(X) = \sup_{\mathcal{F}} \mu_\phi(X)$. Azt kell megmutatni hogy $\mu_f(X) = \mu(X)$, mert innen a $\mu_f(A^c) > \mu(A^c)$ ellentmondáshoz jutunk ha $\mu_f(A) < \mu(A)$.

Egyenlőre még azt sem tudjuk hogy f nem azonosan nulla, ezért nézzük meg a $\nu_\delta := \mu - \delta\lambda$, $\delta > 0$ előjeles mértéket és az ő $X = X_\delta^+ \cup X_\delta^-$ Hahn felbontását. $\mu(A) \ge \delta\lambda(A)$ ha $A \subset X_\delta^+$, tehát $f \ge \delta$ λ-m.m. az X_δ^+ halmazon, de ez még nem elég. Viszont, az eddigi gondolatmenetet a $\mu - \mu_f =: \mu^c \ll \lambda$ mértékkel is végigvihetjük, jelölje f_c a hozzá rendelt sűrűséget, és vegyük észre hogy $f + f_c \in \mathcal{F}$. Most azt kapjuk hogy $f_c \ge \delta$ λ-m.m. az $X_{c,\delta}^+$ halmazon, ami $\nu_\delta^c := \mu^c - \delta\lambda$ mértékhez rendelt Hahn felbontás pozitív mértékű halmaza. Ha $\mu_f(X) < \mu(X)$ volna, akkor lenne olyan $\delta > 0$ hogy $\mu^c(X_{c,\delta}^+) > 0$, de $\mu^c \ll \lambda$ miatt $\lambda(X_{c,\delta}^+) > 0$ is igaz, tehát $f_c \ne 0$ λ-m.m. A $\mu_f(X) < \mu_{f+f_c}(X)$ ellentmondás a tétel igaz voltát bizonyítja. □

A Hahn felbontás segítségével a Radon-Nikodym tétel előjeles mértékekre is kiterjeszthető. Lebesque NL tételénél hiányzik annak bizonyítása hogy *abszolút folytonos függvény deriváltja integrálható.* ♡ Ha F abszolút folytonos akkor a $\mu(a,b) : F(b) - F(a)$ képlettel definiált Lebesque - Stieltjes mérték abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve, tehát van olyan f integrálható függvény hogy $F(x) = F(a) + \int_a^x f(y)\, dy$, és persze $f = F'$ majdnem biztosan. □

Szinguláris mértékek: A $\mu \ll \lambda$ feltételt a Radon - Nikodym tétel bizonyításának csak a legvégén használtuk ki. Tulajdonképpen azt mutattuk meg hogy ha $\mu^c(A) > 0$ akkor $\lambda(A) = 0$, vagyis μ szinguláris a λ mértékre vonatkozóan. Érvényes a $\mu = \mu^c + \mu_f$ felbontás, és ha $X_0 := \{x : f(x) > 0\}$, míg X^s az ő komplementuma, akkor $\lambda(X^s) = 0$, $\mu_f(A) = \mu(X_0 \cap A)$ és $\mu^c(A) = \mu(X^s \cap A)$. A Cantor halmaz eloszlásfüggvénye olyan mértéket definiál a $[0,1]$ intervalum Borel halmazain, amely szinguláris Lebesgue mértékére vonatkozóan.

Topologikus mértékterek: Legyen λ az (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér Borel halmazainak $\mathcal{B}$ σ-algebráján adott véges mérték; $\mathcal{B}$ a nyilt halmazok által generált σ-algebra. Legyen $F \in \mathcal{F}$, mivel $\psi_F(x) := (1 + \rho(x, F))^{-1} = 1$ ha $x \in F$, $0 < \psi_F(x) < 1$ ha $x \in F^c$ és $\psi \in C_{bu}(X)$, *az egyenletesen folytonos függvények szinthalmazai is generálják a Borel σ-algebrát.* Ugyanúgy mint a Lebesgue mérték esetében,

$$\sup\{\lambda(C) : C \subset A, C \text{ kompakt}\} =: \lambda_*(A) \le \lambda^*(A) := \inf\{\lambda(G) : G \supset A, G \text{ nyilt}\},$$

és $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ ha $A \in \mathcal{B}$. A jobboldali egyenlőtlenség bizonyítśa a mérték kiterjesztésének sémáját követi. ♡ Legyen $\mathcal{B}_0 := \{A \in \mathcal{B} : \lambda(A) = \lambda^*(A) = \lambda(X) - \lambda^*(A^c)\}$, a kiterjesztési tétel értelmében azt kell megmutatni hogy $\mathcal{B}_0$ algebra, mert $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, tehát $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}_0\}$. A nyilt és zárt halmazok egyaránt $\mathcal{B}_0$ elemei, és ha $A \in \mathcal{B}_0$ akkor van olyan fogyó $G_n \in \mathcal{G}$ és növő $F_n \in \mathcal{F}$ sorozat hogy $F_n \subset A \subset G_n$ és $\lim \lambda(F_n) = \lambda(A) = \lim \lambda(G_n)$, tehát $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B)$ miatt $\mathcal{B}_0$ tényleg algebra. □

A baloldali egyenlőtlenség nehezebb, de most már csak az $A \in \mathcal{F}$ esetet kell vizsgálni. Azt kell megtanulni hogy hogyan gyárhatók kompakt, vagyis teljesen korlátos zárt halmazok. ♡ Adott

$F \in \mathcal{F}$ esetén jelölje $\mathcal{C}_F^0$ az $\{x \in \mathbb{X} : \rho(x, \alpha) \le \delta\}$ alakú halmazok osztályát, ahol $\alpha \subset F$ véges; $\delta(A)$ az $A \in \mathcal{C}_F^0$ definíciójában szereplő küszöb, $F_\sigma := \{x \in X : \rho(x, F) < \sigma\}$. Vegyük észre hogy ha $A_n \in \mathcal{C}_F^0$ és $\delta(A_n) \to 0$ akkor $\cap A_n$ az F kompakt részhalmaza. Mivel $\lambda(F_\sigma) \to \lambda(F)$ amint $\sigma \to 0$, az hiányzik hogy $\lambda(F_\sigma) = \sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{C}_F^0, \delta(A) < \sigma\}$. De a tér szeparábilis, tehát az F_σ nyílt halmaz megszámlálhatóan sok olyan $K_\delta(x)$ gömb egyesítése, ahol $\delta \le \sigma$ és $x \in F$ $\square$

A $C_{bu}(X)$ tér funkcionáljai: Riesz második reprezentációs tételének általánosítása a következő eredmény. Tegyük fel hogy az $I : C_{bu}(X) \mapsto \mathbb{R}$ lineáris funkcionál rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $I(f) \ge 0$ ha $f \ge 0$, $|I(f)| \le \|f\|$, végül minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan C kompakt halmaz hogy ha $0 \le f \le 1$ és $f = 0$ a C halmazon, akkor $I(f) \le \varepsilon$. *Ekkor van olyan μ Borel mérték hogy $\mu(X) = 1$ és $I(f) = \int f\,d\mu \;\forall f \in C_{bu}(X)$.* Először azt kell megmutatni hogy $\lim I(f_n) = 0$ *f_n monoton fogyva tart nullához.* $\heartsuit$ Dini szerint az f_n sorozat konvergenciája minden kompakt halmazon egyenletes. Legyen $\varepsilon > 0$ és $g_n(x) := \max\{\varepsilon, f_n(x)\} - \varepsilon$, ekkor $0 \le g_n$ is fogy és $\lim I(g_n) \le \varepsilon$, de $f_n \le g_n + \varepsilon$, tehát $I(f_n) \to 0$. $\square$ Ezután csak hivatkozni kell az integrál absztrakt elméletére.

Eloszlások gyenge konvergenciája: Jelölje $P(X)$ az (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus téren adott valószinüségi mértékek halmazát. A $\mu \in P(X)$ mértékeket a $C_b(X)$ tér lineáris funkcionáljaiként képzeljük el, ezért a $\mu(\varphi) \equiv \int \varphi\,d\mu$ jelölést kedveljük. Azt mondjuk hogy $\mu_n \to \mu$ gyengén ha $\mu_n(\varphi) \to \mu(\varphi)\;\forall \varphi \in C_b(X)$. A definíció átfogalmazása érdekében a kompakt beágyazáskor felbukkant $\bar\rho$ metrikára is hivatkozunk. Azt tudjuk hogy van egy $(\bar X, \bar\rho)$ kompakt tér aminek X sűrű részhalmaza, és az $(X, \bar\rho)$ térben ugyanazok a nyilt halmazok mint az eredetiben. Jelölje $\bar C_{bu}(X)$ az $(X, \bar\rho)$ tér egyenletesen folytonos függvényeinek halmazát. Mivel minden $f \in \bar C_{bu}(X)$ egyenletesen folytonos módon terjeszthető ki az $\bar X$ halmazra, és $C_{bu}(\bar X) = C_b(\bar X)$ szeparábilis, $\bar C_{bu}(X)$ is az, legyen $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bar C_{bu}(X)$ sűrű, és

$$D(\lambda, \mu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}|\lambda(\psi_n) - \mu(\psi_n)|}{1 + |\lambda(\psi_n) - \mu(\psi_n)|}.$$

Igazoljuk hogy *D távolság a $P(X)$ térben, és $D(\mu_n, \mu) \to 0$ pontosan azt jelenti hogy $\mu_n \to \mu$ gyengén.* A háromszög egyenlőtlenség egyszerű, az pedig hogy $\mu(\psi_n) = \lambda(\psi_n)\;\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\mu = \lambda$, az alábbi gondolatmenetből is következik. Igazából azt kell megmutatni hogy *ha $\mu_n(\phi) \to \mu(\phi)\;\forall \phi \in \bar C_{bu}(X)$, akkor $\mu_n \to \mu$ gyengén.* $\heartsuit$ Legyen $F \in \mathcal{F}$ és $\psi_F(x) := (1 + \bar\rho(x, F))^{-1}$. $\psi_F^m \in \bar C_{bu}$ és $\mathbf{1}_F(x) \ge \psi_F^m(x) \to \mathbf{1}_F(x)$ amint $m \to \infty$, tehát minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $m \in \mathbb{N}$ úgy hogy $\mu(F) - \varepsilon \le \mu(\psi_F^m) = \lim_n \mu_n(\psi_F^m)$. Mivel $\mu_n(\psi_F^m) \le \mu_n(F)$, $\mu(F) \le \limsup \mu_n(F)$. A komplementumra áttérve: $\mu(G) \ge \limsup \mu_n(G)$ ha $G \in \mathcal{G}$. $\square$

Az $R \in \mathcal{B}_X$ halmaz Riemann mérhető μ szerint ha a H határa nullahalmaz: $\mu(H) = 0$. $\heartsuit$ Mivel $R \cup H$ zárt, $R \cap H^c$ nyilt, a fenti észrevételek alapján $\mu(R) = \lim \mu_n(R)$. Az egyenletesen folytonos függvényekel szemben, a folytonos függvények szinthalmazai általában nem Riemann mérhetőek, de a ϕ változó $F(x) := \mu[\phi < x]$ eloszlásfüggvénye mindig monoton, és ahol folytonos ott $[\phi < x]$ Riemann mérhető. Tehát az $F_n(x) := \mu_n[\phi < x]$ sorozat, megszámlálható sok $x \in \mathbb{R}$ értéktől eltekintve konvergens, és F a határértéke. Mivel $\mu(\phi) = \int_a^b (1 - F(x))\,dx$, és hasonló képlet adja $\mu_n(\phi)$ értékét, állításunk a dominált konvergencia tételének következménye. $\square$

A $\mu_n \in P(X)$ sorozat feszes ha *minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $C \subset X$ kompakt halmaz hogy $\mu_n(C) \ge 1 - \varepsilon$.* Prohorov tétele szerint *minden feszes sorozat tartalmaz gyengén konvergens részsorozatot.* $\heartsuit$ Tegyük fel hogy a Ψ megszámlálható sűrü halmaz a $C_{bu}(X)$ térben. A diagonális módszerrel a μ_n sorozatból ki tudunk választani olyan μ_n' részsorozatot hogy az összes $I(\psi) := \lim_n \mu_n'(\psi)$, $\psi \in \Psi$ határérték létezik. Mivel $|\mu_n'(\phi) - \mu_n'(\psi)| \le \varepsilon$ ha $\|\phi - \psi\| < \varepsilon$, az $I(\phi) := \lim_n \mu_n'(\phi)$ határérték mindig létezik ha $\phi \in C_{bu}$. I pozitív lineáris funkcionál, $|I(\phi)| \le \|\phi\|$. Azt kell megérteni hogy van olyan $\mu \in P(X)$ hogy $I(\psi) = \mu(\psi)$, amihez Riesz tételének utolsó feltételét kell ellenőrizni. Legyen C az $\varepsilon > 0$ számhoz rendelt kompakt, és $\phi(x) = 0$ ha $x \in C$, ekkor $\mu_n'(\phi) \le \|\phi\|\mu(C^c) \le \varepsilon\|\phi\|$. $\square$ A tétel alkalmazásakor az illetékes függvénytér kompakt halmazait kell ismerni. Például, Donsker invariancia elve az Arzela - Ascoli tételre épül.

A MATEMATIKAI FIZIKA ANALITIKUS MÓDSZEREI

14. KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Cauchy nyomán ismertetjük a függvénytan kontúr integrálokra alapozott felépítését. Ez a módszer elegánsabb és hatékonyabb is mint a hatványsorok Weierstrass által kidolgozott elmélete.

14.1. **Cauchy alaptétele és formulái.** Kizárólag összefüggő nyilt $G \subset \mathbb{C}$ halmazon, vagyis tartományon értelmezett $f : G \mapsto \mathbb{C}$ folytonos függvényekkel foglalkozunk; ∂G a G határát, $\bar{G} = G \cup \partial G$ a G tartomány lezártját jelöli. Ugyanúgy mint a Riemann integrálnál, az $f \in C(G)$ függvény integrálját a z_0 és z pontokat összekötő $\Gamma := \{\zeta(\tau) : 0 \le \tau \le t\} \subset G$ görbe mentén a

$$\int_{\Gamma_{z_0}^{z}} f(\zeta)\, d\zeta \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_k) \tag{14.1}$$

közelítésből számoljuk, ahol $\zeta(0) = z_0$, $\zeta(t) = z$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = t$ és $\zeta_k := \zeta(\tau_k)$. Amikor komplex integrálról beszélünk, akkor is mindig feltesszük hogy a $\zeta(\tau) = \xi(\tau) + \imath\,\eta(\tau)$ görbe folytonos, és szakaszonként folytonosan differenciálható. Legyen $f(z) = u(x,y) + \imath\, v(x,y)$ ha $z = x + \imath\, y$, részletesen kiírva

$$\int_{\Gamma_{z_0}^{z}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^t f(\zeta(\tau))\dot{\zeta}(\tau)\, d\tau = \int_0^t \Big(u\,(\xi(\tau),\eta(\tau))\,\dot{\xi}(\tau) - v\,(\xi(\tau),\eta(\tau))\,\dot{\eta}(\tau) \Big)\, d\tau$$

$$+\,\imath \int_0^t \Big(u\,(\xi(\tau),\eta(\tau))\,\dot{\eta}(\tau) + v\,(\xi(\tau),\eta(\tau))\,\dot{\xi}(\tau) \Big)\, d\tau\,,$$

ami az integrál definíciójának is tekinthető. Ez a konstrukció formailag feltűnően hasonlít vektomező görbementi itegráljáéra, de a vektorok skaláris szorzása és a komplex számok szorzása messze nem ugyanaz, ezért lényeges tartalmi különbségek is vannak. Komplex változós függvény ívhossz szerinti integrálját $\int_\Gamma u(\zeta)\, ds(\zeta)$ jelöli.

Ha f a $F : G \mapsto \mathbb{C}$ függvény deriváltja, akkor $F(\zeta_{k+1}) - F(\zeta_k) = f(\zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_k) + o(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$ alapján, a felosztást minden határon túl finomítva kapjuk az

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\Gamma_{z_0}^{z}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \tag{14.2}$$

komplex Newton - Leibniz szabályt, tehát ilyenkor az integrál csak a görbe végpontjaitól függ, vagyis zárt görbe mentén integrálva mindig nullát kapunk. Zárt görbe mentén számolt integrált $\oint_\Gamma f\, dz$ jelöl, és mindíg *pozitív,* az óramutató járásával ellentétes irányban integrálunk. Ha f mindössze folytonos, akkor nem biztos hogy van primitív függvénye, ez azon múlik hogy teljesül-e a $\oint f\, dz = 0$ feltétel.

A továbbiakban is $K_r(z) := \{w : |w - z| < r\}$ a nyilt körlap és $S_r(z) := \{\zeta : |\zeta - z| = r\}$ az ő határa, vagyis $K_r(z) = \operatorname{Int} S_r(z)$, $S_r(z) = \partial K_r(z)$, és $\bar{K}_r(z) = K_r(z) \cup S_r(z)$. Rendkívül tanulságos a

$$\oint_{S_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi\imath \tag{14.3}$$

integrál, ezt a legkönnyebben a $z = z_0 + re^{\imath\varphi}$ helyettesítéssel számolhatjuk ki, de a valós és képzetes rész bevetésével is ugyanezt kapjuk. Hasonlóan,

$$\oint_{S_r(z_0)} \frac{1}{(z - z_0)^n}\, dz = 0 \tag{14.4}$$

ha $1 \ne n \in \mathbb{Z}$. Ha $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$, és $r > 0$ a konvergenciakör sugaránál kisebb, akkor innen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{S_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

következik, ami Cauchy alaptételének legegyszerűbb változata. A komplex függvénytan felépítésében is szerepet kap a geometria, bizonyítás nélkül ismertetünk néhány szemlélet alapján nyilvánvaló tényt.

Tartománynak nevezzük a komplex sík összefüggő nyílt halmazait, tartomány bármely két pontja összeköthető benne haladó folytonos görbével, sőt töröttvonallal és körlánccal is. Ez utóbbi nyílt körlapok olyan véges sorozata, ahol az egymás után következők közös része nem üres, és az első középpontja az egyik, az utolsóé pedig a másik pont. Egyszerű zárt görbe, másnéven kontúr a $\Gamma \subset \mathbb{C}$ halmaz, ha körvonal folytonos és kölcsönösen egyértelmű képeként állítható elő. Ez pontosabban annyit jelent hogy van olyan $\Phi : \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{C}$ folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezés aminek az inverze is folytonos, és Γ az egységkör határának képe. Mivel integrálni akarunk, azt is feltesszük hogy alkalmas paraméterezés mellett a görbe szakaszonként folytonosan differenciálható, tehát van ivhossza. Nem egyszerű bizonyítani, de igaz hogy a *síkot minden* Γ *kontúr két részre vágja, és ezek közül az egyik korlátos és egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, vagyis a határa éppen* Γ. Ez a komponens a Γ kontúr $\operatorname{Int}\Gamma$ belseje. A körgyűrű tartomány, de nem egyszeresen összefüggő; két kontúr határolja. *Ha a* Γ' *kontúr a* Γ *kontúr belsejében halad, akkor* $\operatorname{Int}\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$. Azt is mondhatjuk hogy *egyszeresen összefüggő tartományban haladó kontúr a tartományhoz tartozó pontra húzható össze.* A definíció értelmében is természetes az $r = r(\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$, vagy $-\pi < \varphi \le \pi$ paraméterezés.

Első feladatunk a primitív függvény létezése feltételeinek tisztázása. A számegyenesen minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Komplexben a helyzet bonyolultabb, nagyon hasonlít erőtér potenciál - elméletéhez, de a tárgyalás során a Stokes tétel bizonyításának technikája is szerepet kap. Ha egy folytonos függvénynek valamely tartományban van primitív függvénye, akkor - Newton és Leibniz tétele szerint - a tartományban fekvő kontúr mentén számolt integrálja mindig nulla. Ennek az állításnak a megfordítása Morera tétele, ami konzervatív erőtér potenciáljának létezésével rokonítható.

Lemma 14.1. *Tegyük fel hogy* $f \in C(G)$ *és* $\oint f\,dz = 0$ *minden* G*-ben haladó kontúr mentén. Ekkor* f*-nek* G*-ben van primitív függvénye.*

Bizony: Valamely $z_0 \in G$ pontból kiindulva definiálható $F(z) := F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, ahol a jelölés is utal arra hogy az integrálás eredménye nem függ a z_0 és z pontokat összekötő úttól. Az integrál definíciója értelmében

$$F(w) = F(z) + \int_z^w f(\zeta)\,d\zeta = f(z)(w-z) + o(w-z)$$

az f folytonossága miatt; ez akkor a leginkább átlátható ha z-től w-ig egyenes mentén integrálunk. Tehát $f(z) = F'(z)\ \forall\ z \in G$. □

Már tárgyaltuk a primitív függvény létezésének legegyszerűbb feltételét, de ismétlés a tudás anyja.

Lemma 14.2. *Ha* f *folytonosan differenciálható a* z_0 *pont egy köralakú környezetében, akkor ott van primitív függvénye.*

Bizony: Irjuk fel a z_0 és z pontokat összekötő $\zeta(\tau) := z_0 + (z - z_0)\tau$, $0 \le \tau \le 1$ egyenes mentén számolt

$$F(z) := F(z_0) + \int_0^1 f\left(\zeta(\tau)\right) \dot\zeta(\tau)\,d\tau$$

integrált, $F(z_0)$ értéke tetszőleges. Mivel $\dot\zeta(\tau) = z - z_0$, és $d\zeta(\tau)/dz = \tau$, az integrál mögött differenciálva, ami itt megendedett,

$$F'(z) = \int_0^1 \big(f'(\zeta(\tau))(z - z_0)\tau + f(\zeta(\tau))\big)\,d\tau$$

adódik. Másrészt $\partial_\tau f(\zeta(\tau)) = f'\left(\zeta(\tau)\right)(z - z_0)$, tehát parciális integrálással $F'(z) = f(z)$. □

Ez az első lépés a komplex függvénytan alaptétele felé. Hosszabb számolással jár az integrál valós és képzetes részének kiírása, ennél a gondolatmenetnél a Cauchy - Riemann egyenleteket kell felhasználni. A környezet alakja azért fontos mert így a középpontból a környezet minden pontja elérhető egyenes mentén, tehát a F primitív függvényt egyértelműen tudtuk definiálni. A primitív függvény konvex vagy csillagszerű tartományon is egyértelműen definiálható, de az (14.3) példa arra utal hogy $f(z) := 1/z$ primitív függvénye, $F(z) = \log z$ nem definiálható reguláris módon az egész komplex síkon, mert ha a negatív valós tengelyt lefelé haladva lépjük át, akkor $2\pi\imath$ ugrása van; $\log 0$ változatlanul nincs definiálva. A fenti lemma csak részleges választ ad a primitív függvény létezésének problémájára, Stokes rotációs tételénél már használtuk a következő bizonyítás trükkjét.

Tétel 14.1. *Ha f differenciálható a G egyszeresen összefüggő tartományban, akkor $\oint_\Gamma f\,dz = 0$ minden $\Gamma \subset G$ kontúr mentén, vagyis G-ben van primitív függvénye.*

Bizony: Most csak azt az esetet tárgyaljuk amikor f folytonosan differenciálható. Nincs gond ha $A \subset G$ olyan apró háromszög ami benne van egy, a G által tartalmazott körben, mert ilyenkor NL közvetlenül alkalmazható. Az általános esetben rakjuk ki Γ belsejét olyan apró A háromszögekkel hogy f-nek mindegyiken van primitív függvénye, tehát $\oint_{\partial A} f\,dz = 0\ \forall A$. Ezeknek az integráloknak az összege nulla, és a szomszédos háromszögek közös oldalaihoz tartozó integrálok kiejtik egymást, mert ellentétes irányban megyünk végig rajtuk. Emiatt a határnál lévő, csak egyszer bejárt élekhez rendelt integrálok összege is nulla lesz, de ez az összeg $\oint_\Gamma f\,dz$ közelítése, tehát a parkettázás finomításával kapjuk az állítást. □

$**$ A tétel alábbi finomítása egyáltalán nem triviális, kulcsa E. Goursat lemmája.

Lemma 14.3. *$\oint_{\partial A} f\,dz = 0$ ha f az A zárt háromszöglap minden pontjában differenciálható.*

Bizony: Osszuk a háromszöget négy egybevágó részre, ezzel az integrál is négyfelé bomlik. A négy közül jelölje A_1 az (egyik) olyan háromszöget aminek határán az integrál abszolút értéke maximális. Ezután ezt az A_1 háromszöget osztjuk négy egyenlő részre, A_2 ezek közül adja a maximumot, és így tovább. Az $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ sorozat valamely $x_0 \in A$ pontra húzódik össze, és minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ hogy $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r_\varepsilon(z - z_0)$, ahol $|r_\varepsilon| < \varepsilon$ ha $|z - z_0| < \delta$. A konstrukció szerint

$$\left|\oint_{\partial A} f\,dz\right| \le 4^n \left|\oint_{\partial A_n} f\,dz\right| \le +4^n \left|\oint_{\partial A_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\,dz\right| + 4^n \oint_{\partial A_n} |r_\varepsilon||z - z_0|\,ds\,,$$

és a jobboldal első integrálja eltűnik mert az integrandus folytonosan differenciálható. Az utolsó integrál számolása ∂A_n ívhossza szerint történik. A_n kerülete éppen $s_n = s2^{-n}$, ahol $s := |\partial A|$, tehát az integrálban $|z - z_0| \le s_n < \delta$ ha n elég nagy, vagyis $|\oint_{\partial A_n} f\,dz| \le s_n^2\varepsilon = s^2 2^{-2n}\varepsilon$. □

Most már a háromszögekből készített parkettázás módoszerrel élesíthető a 14.1. Tétel: *elhagyható a derivált folytonosságának feltétele.* Ennél egy kicsit több is igaz: *Ha $\Gamma' \subset Int\,\Gamma$ és f differenciálható a Γ és Γ' kontúrok közötti sávban, továbbá a sáv lezárásán is folytonos, akkor $\oint_{\Gamma'} f\,dz = \oint_\Gamma f\,dz$.* ♡Ha f a kontúrvonalakon is differenciálható, akkor elég őket egy keskeny ösvénnyel összekötni. Igy olyan Γ'' kontúrt kapunk amin $\oint f\,dz = 0$, és az ösvény vonallá húzható össze. Az általános esetet a Γ és Γ' kontúrokat a közöttük lévő sávból közelítve kapjuk. □ Megjegyezzük hogy *ha f a Γ kontúr minden belső pontjában differenciálható, akkor a Γ' kontúrt egy pontra összehúzva $\oint_\Gamma f\,dz = 0$ következik.*

Goursat ötlete kifejezetten szellemes, de ma már van rutinszerű bizonyítás is. A modern geometriának a kontúr *folytonos deformációját* használó módszere a *homotópia* viszont igen hasznos, számos nehéz feladat megoldására is alkalmas. Tegyük fel hogy a Γ kontúr beágyazható a $\Gamma(r)$, $1 \ge r \ge 0$ kontúrok rendszerébe úgy hogy $\Gamma(1) = \Gamma$, és $\Gamma(r)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\,\Gamma$ pontra húzódik össze amint $r \to 0$. Pontosabban, van olyan $z = z(t,r)$, $0 \le t, r \le 1$ kétszer folytonosan differenciálható görbesereg hogy $z(\cdot, r)$ a $\Gamma(r)$ egyenlete, tehát

$$I(r) := \oint_{\Gamma(r)} f(z)\,dz = \int_0^1 f(z(t,r))z'_t(t,r)\,dt \quad \text{ha } 0 < r \le 1\,,$$

továbbá $z_0 = z(t,0) = \lim_{r\to 0} z(t,r)\ \forall t$. Ha f folytonosan differenciálható, akkor parciális integrálással

$$I'(r) = \int_0^1 f'(z(t,r))z'_t(t,r)z'_r(t,r)\,dt + \int_0^1 f(z(t,r))z''_{t,r}(t,r)\,dt = 0$$

adódik, tehát $\oint_\Gamma f\,dz = 0$. Felhasználtuk hogy $f'(z)z'_t$ integrálható, ami f' folytonosságából következett. Ugyanúgy mint a primitív függvény létezésének bizonyításakor, alkalmas *simítási technikával* ez a feltétel elkerülhető. A $\Gamma(r)$ kontúrsereg létezése nem nyilvánvaló, itt már igazi geometriára van szükség. $**$

Az alaptétel: Azt mondjuk hogy az $f : G \mapsto \mathbb{C}$ függvény reguláris a G tartományban ha G minden pontjában differenciálható. A tényállást $f \in D(G)$ jelöli.

Tétel 14.2. *Tegyük fel hogy f reguláris a Γ kontúr belsejében, és $Int\Gamma$ lezárásán is folytonos. Ekkor $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$, továbbá Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \forall z \in Int\Gamma \tag{14.5}$$

formulája is igaz.

Bizony: $\oint_\Gamma f\,dz = 0$ az előbb már kijött, tehát feltehetjük hogy Γ olyan körvonal aminek z a középpontja. Ekkor Cauchy (14.5) formulája az

$$\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0 = \oint_\Gamma g(\zeta)\,d\zeta$$

alakba írható át, ahol a $g(\zeta)$ integrandus $\zeta = z$ kivételével mindenütt differenciálható, és z környezetében is korlátos marad. Emiatt a kritikus z pontot ügyesen megkerülve és az egérutat összehúzva, határátmenettel kapjuk a fenti egyenletet. □

Érdemes észrevenni hogy ha z a Γ kontúr külsejében található, de Γ az f regularitási tartományában halad, akkor a Cauchy integrál integrandusa Γ belsejében reguláris, tehát az integrál értéke nulla. Nyilvánvaló hogy másik kontúr mentén integrálva ugyanazt az eredményt kapjuk, nevezetesen $f(z)$ értékét, illetve nullát, aszerint hogy z mindkét kontúrnak belső, illetve külső pontja.

Cauchy képlete az integrál mögött differenciálható, ami az

$$\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z} = \frac{w - z}{(\zeta - w)(\zeta - z)}$$

azonosságból jól látszik, tehát az előző tétel feltételei mellett f akárhányszor differenciálható és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\,. \tag{14.6}$$

Persze $f^{(0)}(z) \equiv f(z)$, vagyis az alapvető (14.5) egyenlet (14.6) speciális esete. A reguláris függvények kiváló tulajdonságait látva azt hihetnénk hogy csak kevesen vannak, de nem.

Tétel 14.3. *Ha $f_0 : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ folytonos a Γ kontúr mentén akkor*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

reguláris Γ belsejében és külsejében egyaránt.

Bizony: Csak azt kell meggondolni hogy a kontúr integrál z szerint differenciálható. □

Azt persze nem tudjuk hogy f az f_0 függvény *kiterjesztése*, vagyis $f(z) \to f_0(\zeta)$ ha $\zeta \in \Gamma$ és $z \to \zeta$, az integrál maga nem is értelmezhető ha $z \in \Gamma$. Cauchy formuláinak rengeteg következménye van, az első az Alaptétel következő alakja.

Tétel 14.4. *Ha G egyszeresen összefüggő, akkor $f \in D(G)$ akkor és csak akkor igaz ha $f \in C(G)$ és $\oint f\,dz = 0$ minden G-ben haladó egyszerű zárt görbe mentén. Reguláris függvény akárhányszor differenciálható.*

Bizony: A tétel a 14.1. Lemma és a Cauchy formulák egyszerű következménye. □

Kontúr külsejében a következő tételünk van:

Tétel 14.5. *Ha f reguláris a Γ kontúr $Ext\Gamma$ külsejében, $Ext\Gamma$ lezárásán is folytonos és korlátos, végül $|f(z)| \to 0$ amint $|z| \to +\infty$, akkor*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta \quad ha \quad z \in Ext\Gamma\,.$$

Bizony: Az Alaptételre hivatkozhatunk ha R olyan nagy hogy Γ a $|\zeta| = R$ kör belsejében halad. Ilyenkor a két kontúrt keskeny ösvénnyel összekötve olyan kontúr keletkezik amiben f reguláris. Mivel Γ bejárása negatív irányú, az ösvényt összehúzva azt kapjuk hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

Jelölje I_2 a második integrált. Mivel $|\zeta - z| \geq R - |z| \geq R/2$ ha $|\zeta| = R$ és R elég nagy,

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi R}\oint_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|\,ds(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(Re^{\imath\varphi})|\,d\varphi \to 0$$

amint $R \to 0$ a dominált konvergencia tételével. □

Az Alaptétel tetszőleges állású félsíkon is kimondható, a követekző változat is a Laplace transzformációnál lesz hasznos.

Tétel 14.6. *Tegyük fel hogy f folytonos és korlátos az $Re\,z \geq a$ félsíkon, reguláris a félsík belsejében, továbbá $f(z) \to 0$ amint $Re\,z \to \infty$. Ha $Re\,z > a$ akkor*

$$f(z) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{f(a+\imath y)\,dy}{z - a - \imath y} = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}\,,$$

ahol a második integrál esetleg csak impróprius formában létezik.

Bizony: Jelölje C azt a félsíkban haladó félkörívet aminek a a középpontja és R a sugara. Cauchy szerint

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi\imath}\int_{a-\imath R}^{a+\imath R} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

tehát azt kell megmutatni hogy a félköríven számolt integrál eltűnik amint $R \to \infty$. A C ívet három részre bontjuk, az $a \leq \mathrm{Re}\,z \leq \sqrt{R}$ sávba eső ívek összhossza $O(\sqrt{R})$, a maradékon viszont $f(z) \to 0$ amint $R \to +\infty$. Mivel $|\zeta - z| \geq R - |z-a|$ és f korlátos, az állítás a dominált konvergencia tétel következménye. □

Liouville tétele szerint:

Tétel 14.7. *Ha $f \in D(\mathbb{C})$ korlátos, akkor konstans.*

Bizony: (14.6) miatt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta\,,$$

és a jobboldal nagyságrendje $O(1/r)$ amint $r \to +\infty$, tehát $f'(z) = 0\ \forall\ z \in \mathbb{C}$. □

Innen indirekt bizonyítással adódik az algebra alaptétele: n-edfokú P_n polinomnak pontosan n komplex gyöke van. ♡ Ha egyáltalán nincs gyök, akkor $1/P_n$ korlátos, tehát konstans. Az ellentmondásból elsőre az jön ki hogy minden polinomnak van gyöke, de a $z - z_0$ gyöktényezőt kiemelve az eljárás folytatható. □

∗∗ Hasonlóan igazolható a lineáris algebra fontos tétele: *minden négyzetes mátrixnak van (komplex) sajátértéke.* ♡ Ha az $n \times n$ méretű A mátrixnak nincs sajátértéke akkor $f(z) := \langle \mathsf{a}, (zI - A)^{-1}\mathsf{b}\rangle$ függvény minden $z \in \mathbb{C}$ és $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén definiálva van, és az

$$f(w) - f(z) = \frac{1}{wI - A} - \frac{1}{zI - A} = \frac{z - w}{(wI - A)(zI - A)}$$

azonosságból az is látszik hogy rögzített a és b mellett f mindenütt differenciálható. Másrészt a

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1/z}{I - A/z} = \frac{1/z^{\infty}}{\sum_{k=0}} \left(\frac{A}{z}\right)^k$$

sor az $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ Cauchy egyenlőtlenség miatt $\|A\| < |z|$ esetén abszolút konvergens, és $\|(zI - A)^{-1}\| \leq 2/|z|$ ha $\|A\| \leq |z|/2$, tehát $f(z) \to 0$ amint $|z| \to 0$. Liouville most már azt mondaná hogy mindegyik f konstans, vagzis azonosan nulla, ami nyilván képtelenség. $\square$ Ezután a sajátéték feladat tárgyalása, beleértve a minimálpolinom és a Jordan blokkok konstrukcióját is, az $X_\lambda = \cup X_{\lambda,m}$, $X_{\lambda,m} := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n : (\lambda I - A)^m \mathsf{x} = 0\}$ invariáns alterek vizsgálatára vezethető vissza. $**$

Azonnal megadja a gyökök számát a következő képlet. Ha z_0 az f reguláris függvény n-szeres gyöke, akkor z_0 egy környezetében $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, ahol $g(z_0) \neq 0$, továbbá $f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z)$. Ha tehát f reguláris a Γ kontúr belsejében, és annak lezártján is folytonos, akkor

$$N = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta \tag{14.7}$$

éppen a Γ belsejében található gyökök száma, multiplicitással együtt. Ennek bizonyításához a gyökhelyeket kis körökkel kell körülvenni, amiket keskeny ösvényekkel kötünk össze a Γ kontúrral.

Cauchy képleteiből reguláris függvény hatványsorát is megkaphatjuk.

Tétel 14.8. *Reguláris f függvény a regularitás G tartományában analitikus, és ha $z \in K_R(z_0) \subset G$ akkor az alábbi sor abszolút konvergens:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \textit{ahol} \quad c_n := \frac{1}{2\pi\imath} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,.$$

A c_n együtthatók számolása olyen Γ kontúr mentén történik hogy $z, z_0 \in Int\Gamma \subset G$.

Bizony: A mértani sor képletével

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,,$$

amit $f(\zeta)$-val átszorozva és tagonként integrálva kapjuk az állítást. Először a $\Gamma = S_R(z_0)$ kontúr mentén integrálunk, $|z - z_0| < R$ miatt a sor abszolút konvergens és tagonként integrálható. Ezután már csak arra kell utalni hogy Cauchy integráljai nem függnek a kontúrtól. $\square$

Ez a sorfejtés (14.6) alapján persze azonos a hatványsoroknál megismerttel: ezzel a komplex hatványsorok és a Cauchy integrálok elmélete egymásba fonódott.

Tétel 14.9. *Ha $f \in D(G)$ és $g \in D(G)$ olyan $z_n \in G$ sorozat mentén egyezik amelynek van torlódási pontja G-ben, akkor $f(z) = g(z)\ \forall\ z \in G$.*

Bizony: Legyen $h := f - g$ és $z_0 \in G$ valamelyik torlódási pont. Persze $h \in D(G)$ és $h^{(n)}(z_0) = 0\ \forall\ n$, tehát $h(z) \equiv 0$ a z_0 egy környezetében. Viszont összefüggő G nyílt halmaz bármely két pontja összeköthető olyan *körlánccal* hogy az lánc első körének az egyik, az utolsónak a másik pont a centruma. Mindegyik kör határa is G része, és az egymás után következő körök egymásba metszenek. A konstrukció alapján, körről körre haladva az $f = g$ azonosságot az egész tartományra ki lehet terjeszteni. $\square$

Laurent sor, rezidumszámítás: Az f komplex függvénynek a $z_0 \in \mathbb{C}$ helyen izolált szingularitása van, ha van olyan $G \ni z_0$ tartomány hogy $f \in D(G \backslash z_0)$, ahol $G \backslash z_0$ a G-ből a z_0 pont elhagyásával kapott halmaz. Ilyen függvény keletkezik ha reguláris függvényt elosztunk egy polinommal. Izolált szingularitás környezetében a függvényt Laurent sora állítja elő.

Tétel 14.10. *Tegyük fel hogy $f \in D(G \backslash z_0)$ és $z \in K_R(z_0) \subset G$, akkor az alábbi sor abszolút konvergens:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n \quad \text{ahol } c_n := \frac{1}{2\pi\imath} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \, .$$

Az integrálás olyan $\Gamma \subset G$ kontúr mentén történjen hogy $z_0 \in Int\Gamma \subset G$.

Bizony: Legyen $0 < r < |z - z_0| < R$ és $K_R(z_0) \subset G$. Az $S_R(z_0)$ külső körön a korábban is használt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, ,$$

a belső $S_r(z_0)$ körön az

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n f(\zeta)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

azonosságot használjuk; mindkét sor abszolút konvergens. A külső körön pozitív, a belsőn negatív irányban integrálunk, az áttérés keskeny ösvényen történik; jelölje Γ ezt a zárt utat. Cauchy tételét alkalmazva, majd az ösvényt eltüntetve

$$f(z) = \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \oint_{S_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \oint_{S_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

adódik. Ezután a két kontúrt azonosítva kapjuk Laurent kifejtését. □

Látjuk hogy izolált szingularitás környezetében a függvény

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n \tag{14.8}$$

alakú. Ha a sornak végtelen sok negatív kitevőjű tagja van, akkor azt mondjuk hogy z_0 az f lényeges szingularitásának helye. Ha a legnagyobb negatív kitevő n, akkor z_0 az f n-edrendű pólusa. Izolált z_0 szingularitás helyén az f rezidumát

$$\mathrm{Res}\, f(z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_\Gamma f(z) \, dz \tag{14.9}$$

definiálja. Ennek értelmét a következő tétel adja.

Tétel 14.11. *Ha a Γ egyszerű zárt görbe belsejében az f függvény a $z_1, z_2, ..., z_n$ pontokól eltekintve reguláris, és az $Int\Gamma$ lezárásán is folytonos, akkor*

$$\oint_\Gamma f(z) \, dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} Res\, f(z_k) \, .$$

Bizony: A szingularitásokat kis körökkel körülvéve, a (14.3) és (14.4) képletekből kapjuk az állítást. □

Ez a tétel számtalan komplex és valós integrál kiszámolását teszi lehetővé. Gyakran kell reguláris f, g függvények hányadosának a rezidumát számolni. Ha $g(z_0) = 0$ akkor $g'(z_0) \neq 0$ esetén z_0 egyszeres. A sorfejtésből látható hogy $g(z) = (z - z_0)h(z)$, és $h(z_0) \neq 0$ ha z_0 egyszeres gyök, tehát Cauchy első formulája szerint ilyenkor $\mathrm{Res}\,(f/g)$ értéke a z_0 helyen éppen $f(z_0)/h(z_0)$, ahol $h(z_0) = g'(z_0)$. Ha z_0 a g r-szeres gyöke, vagyis $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(r-1)}(z_0) = 0$, de $g^{(r)}(z_0) \neq 0$, akkor $g(z) = (z - z_0)^r h(z)$, ahol $h(z_0) \neq 0$, tehát a deriváltakra vonatkozó Cauchy formula alapján $\mathrm{Res}\,(f/g)$ a z_0 helyen most $\phi^{(r-1)}(z_0)/(r-1)!$, ahol $\phi(z) := f(z)/h(z)$.

14.2. **Harmonikus függvények, Poisson formulái.** Cauchy képletéből azonnal következik a maximum elv: Ha $f \in C(\Gamma)$ reguláris a Γ egyszerű zárt görbe Int Γ belsejében és $z \in \mathrm{Int}\,\Gamma$, akkor $|f(z)| \leq \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \Gamma\}$. Szinte nincs mit bizonyítani ha Γ körvonal, az általános eset körláncon történő kiterjesztéssel adódik. Hasonló gondolatmenet működik f valós és képzetes részénél, de ha Γ kör, akkor többet is mondhatunk. Legyen $f(z) = u(z) + \imath\, v(z)$, ahol u és v valós értékű.

Tétel 14.12. *Ha $f \in D\,(K_r(z))$ folytonos a $\bar{K}_r(z)$ zárt körlapon, és u az f valós része, akkor*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(re^{\imath\varphi}\right) d\varphi \equiv \frac{1}{2r\pi} \oint_{S_r(z)} u(\zeta)\, ds(\zeta)\,,$$

és a v képzetes rész hasonló egyenletnek tesz eleget.

Bizony: Cauchy képletében a $\zeta = z + re^{\imath\varphi}$ poláris alakra áttérve

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{S_r(z)} \frac{u(\zeta) + \imath\, v(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath} \int_0^{2\pi} \frac{u(re^{\imath\varphi}) + \imath\, v(re^{\imath\varphi})}{r\exp(\imath\varphi)}\, \imath re^{r\imath\varphi}\, d\varphi\,.$$

Egyszerüsítés után a valós és képzetes részek különválasztásával kapjuk a tételt. □

Reguláris függvény valós és képzetes része is harmonikus, vagyis az (x, y) valós változók szerint, ahol $z = x + \imath y$, eleget tesznek a $\Delta\psi = 0$ Laplace egyenletnek. A *harmonikus* jelző a fenti középérték tételnek köszönhető.

Dirichlet feladat körön: Az alábbi Poisson formula nemcsak a kör középpontjában adja meg egy harmonikus függvény értékét; ezzel megoldja a $\Delta u = 0$ Laplace egyenletet.

Tétel 14.13. *Ha $f \in D(K_R) \cap C(\bar{K}_R)$ akkor a kör belsejében*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{\imath\varphi} - z|^2}\, f(Re^{\imath\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{2R\pi} \oint_{S_R} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, f(\zeta)\, ds(\zeta)\,,$$

ahol $ds(\zeta)$ az S_R körvonal ívhossza szerinti integrálást jelent; $ds = R\, d\varphi$.

Bizony: Jelölje $\hat{z}$ a $z \neq 0$ komplex szám tükörképét az S_R körre vonatkozóan, ezt $\hat{z}\bar{z} = R^2$ definiálja. Innen $\hat{z}|z|^2 = zR^2$, tehát z és $\hat{z}$ ugyanazon a sugáron van. Ha például $z \in K_R$ akkor $\hat{z} \notin K_R$, tehát Cauchy szerint

$$f(z) := \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{S_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{S_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{S_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \hat{z}}\, d\zeta$$

mert a második integrál eltűnik. Viszont $\hat{z} = R^2/\bar{z}$ és $R^2 = \zeta\bar{\zeta}$, tehát

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\zeta}{\zeta - \hat{z}} = \frac{z - \hat{z}}{\zeta - \hat{z}}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{|z|^2 - R^2}{\zeta\bar{z} - R^2}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \imath\, \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\varphi\,,$$

mert a körön $d\zeta = \imath\, Re^{\imath\varphi}\, d\varphi = \imath\, \zeta\, d\varphi = (\imath\, R^2/\bar{\zeta})\, d\varphi$. Ezt az azonosságot már csak $f(\zeta)$-val kell átszorozni és integrálni; $ds = R\, d\varphi$. □

Poisson formulájában a valós és képzetes részek szétválnak, ha tehát $f(z) = u(z) + \imath\, v(z)$, $z = re^{\imath\phi}$ míg $\zeta = Re^{\imath\varphi}$, végül $z = x + \imath y$, akkor a cos tétellel a szokványosabb

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, u_R(\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\phi - \varphi)}\, d\varphi \tag{14.10}$$

alakhoz jutunk, ahol $u(r, \phi) = u(z)$ és $u_R(\varphi) = u(\zeta)$ amikor $z = re^{\imath\phi}$, illetve $\zeta = Re^{\imath\varphi}$. A képletben szereplő

$$P_R(z, \zeta) \equiv P_R(r, \phi; \varphi) := \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi\, |\zeta - z|^2} = \frac{(R^2 - r^2)}{2\pi\, (R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\phi - \varphi))} \tag{14.11}$$

függvény a körhöz tartozó Poisson mag. A 14.5. Tétel segítségével Poisson formulája a kör külsejében in érvényesíthető, így kapjuk a külső Dirichlet feladat megoldását.

Csak egyszerűség kedvéért tételeztük fel hogy a keresett u harmonikus függvény előírt u_0 peremértéke reguláris függvény valós része; (14.10) ettől függetlenül oldja meg a körön Dirichlet feladatát, vagyis az u_R peremérték ismeretében meghatározza az u harmonikus függvényt. Poisson képlete minden $u_R \in C(S_R)$ függvényhez hozzárendel egy u harmonikus függvényt, de általában nem látjuk hogy u az u_0 kiterjesztése. Mivel $z \in S_R$ esetén az integrál nem is értelmes, ez a kérdés csak az $u(z) \to u_R(\zeta)$ ha $z \to \zeta$ módon vethető fel; többféle *gyenge* változat lehetséges. Például ha $u_R \in C(S_R)$ akkor az $u(r,\phi) \to u_R(\phi)$ ha $r \to R$ *radiális limesz* létezik és megegyezik a peremértékkel. A képlet értelmezhetőségéhez u_R folytonossága egyáltalán nem szükséges, lehetséges hogy u_R csak valamilyen általánosított értelemben nevezhető függvénynek.
Dirichlet feladat félsíkon: Poisson második formulája félsíkon határozza meg a $\Delta u = 0$ Laplace egyenletnek azt a megoldását, amely a félsík határoló egyenesén adott.

Tétel 14.14. *Tegyük fel hogy f reguláris az $\operatorname{Im} z > 0$ nyílt félsíkon, és a zárt félsíkon is folytonos és korlátos. Ha $z = x + \imath y$ ahol $x \in \mathbb{R}$ míg $y > 0$ akkor*

$$f(x + \imath y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2}\, d\xi\,.$$

Bizony: Jelölje Γ azt a kontúrt, amely a valós tengely mentén $-R$-től $R > 0$-ig halad, majd az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkban a $\zeta = Re^{\imath\varphi}$ félkörív mentén záródik. Ha $y = \operatorname{Im} z > 0$ akkor $\operatorname{Im} \bar{z} < 0$, tehát Cauchy képletével

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi\imath} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}}\, d\zeta\,.$$

Másrészt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} = \frac{2\imath y f(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\,, \quad \text{vagyis} \quad f(z) = \frac{y}{\pi} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\zeta\,.$$

A félkörív hossza $R\pi$ és f rajta is korlátos, továbbá $|\zeta - z| \geq R - |z|$, tehát az integrálnak ez a része eltűnik amint $R \to +\infty$. □

A valós és képzetes részek itt is szétválnak, tehát a $\Delta u = 0$ egyenlet megoldása az $u(x, 0) = u_0(x)$ peremfeltétel mellett az $y > 0$ félsíkon

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_+(x, y; \xi)\, u_0(\xi)\, d\xi\,, \tag{14.12}$$

ahol

$$P_+(z, \zeta) \equiv P_+(x, y; \xi) := \frac{y}{\pi\,((x - \xi)^2 + y^2)} \tag{14.13}$$

a félsík Dirichlet problémájának Poisson magja. Az hogy a peremfeltétel milyen értelemben teljesül, itt is bonyolult. [48]

Poisson képleteinek levezetésekor z-nek az S_R körvonalra, illetve a valós tengelyre vonatkozó $\hat{z}$, illetve $\bar{z}$ tükörképeit használtuk Cauchy formulájának átírására. *Tükrözési elv* az eljárás neve, és sok más esetben is használható.
Konformis leképezések: Reguláris függvény a $z(t) = z_0 + te^{\imath\varphi}$ egyenest abba a γ síkgörbébe viszi át, melynek egyenlete $w(t) = f(z_0 + te^{\imath\varphi}) = f(z_0) + f'(z_0)e^{\imath\varphi} + o(t)$, vagyis γ érintőjének a $w_0 := f(z_0)$ pontban $f'(z_0)e^{\imath\varphi}$ az iránya. Ha tehát $\operatorname{Arg} f'(z_0) = \phi$, akkor a z_0 pontban φ irányszögű egyenes képe a w_0 pontban $\phi + \varphi$ irányszögű érintővel rendelkezik: f minden egyenest ugyanazzal a ϕ szöggel forgat el. Ennek alapján mondjuk hogy reguláris függvény mindazon pontok környezetében szögtartó (alaktartó), ahol a deriváltja nem 0. Definíció szerint a $\Phi : G \leftrightarrow J$ reguláris és kölcsönösen egyértelű függvény konformis leképezést létesít a $G, J \subset \mathbb{C}$ tartományok között. Kompakt halmazon folytonos és kölcsönösen egyértelmű függvény inverze is folytonos, tehát Φ inverze folytonos a J tartományon, de ennél több is igaz:

Tétel 14.15. *Konformis leképezés deriváltja a tartomány belső pontjában nem lehet nulla, tehát az inverze is konformis.*

[48] A félsík Poisson formulája a körre vonatkozóból is levezethető úgy hogy az $\imath R$ középpontú és R sugarú körre írjuk fel, majd elvégezzük az $R \to +\infty$ határátmenetet.

Bizony: Tegyük fel hogy $\Phi'(z_0) = 0$, $z_0 \in G$. Mivel Φ és az inverze is folytonos, van olyan $r > 0$ hogy $\Phi'(z) \neq 0$ a $\bar{K}_r(z_0)$ zárt körlapon, továbbá

$$|\Phi(z) - \Phi(\zeta)| \geq |\Phi(\zeta) - \Phi(z_0)| - |\Phi(z) - \Phi(z_0)| > 0 \quad \text{ha} \quad |\zeta - z_0| = r$$

és $|z - z_0|$ elég kicsi, tehát a

$$N(w) := \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{S_r(z_0)} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta) - w}\, d\zeta$$

függvény $w_0 = \Phi(z_0)$ egy teljes környezetében folytonos, értéke pedig a $\Phi(z) = w$ egyenlet $z \in K_r(z_0)$ megoldásainak száma multiplicitással együtt, lásd (14.7). Ezzel máris ellentmondáshoz jutottunk mert $\Phi'(z_0) = 0$ miatt $N(w_0) \geq 2$. Valóban, a kiválasztott kis környezetben a $\Phi(z) = w$ egyenletnek különböző gyökei egyáltalán nem lehetnek, többszörös gyöknél viszont $\Phi'(z) = 0$. Minthogy $\Phi'(z) \neq 0$ ha $z \in G$, a Ψ inverz függvény is differenciálható: $\Psi'(w) = 1/\Phi'(z)$ ha $w = \Phi(z)$. □

A fentiek szerint konformis leképezés a síkbeli alakzatokat deformálja ugyan, de a lokális szerkezetüket megtartja. Ennél tartalmasabb és hasznosabb a következő észrevétel. Jelölje Ψ a $\Phi : G \leftrightarrow J$ konformis leképezés inverzét, és tegyük fel hogy Φ a G lezárásán is folytonos. Határpont képe nem lehet belső pont, és a $\bar{G}$ kompakt halmaz képe kompakt, tehát Φ és Ψ a $\bar{G}$ és $\bar{J}$ halmazok között is kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít úgy, hogy a határponthoz határpont van rendelve. Az $f : G \mapsto \mathbb{C}$ függvény $g : J \mapsto \mathbb{C}$ képét $g(w) := f(z)$ ha $w = \Phi(z)$ definiálja, vagyis $g(w) = f(\Psi(w))$, illetve $f(z) = g(\Phi(z))$. Mivel $\Phi'(z) \neq 0$ G-n, Ψ reguláris J-n, tehát g is reguláris ha f az volt: $g'(w) = f'(z)\Psi'(w)$. Másrészt az $f(\zeta), \zeta \in \partial G$ és $g(\vartheta), \vartheta \in \partial(J)$ peremértékek között is kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés, ha tehát az egyik halmazon meg tudjuk oldani a Laplace egyenlet Dirichlet problémáját, akkor a másikon is meg tudjuk oldani, mert $f(z) = g(\Phi(z))$, illetve $g(w) = g(\Psi(w))$ valós és képzetes része harmonikus függvény. Pontosabban, ha a feladatot például J-n tudjuk megoldani, akkor a G határán megadott $f(\zeta)$ peremértékeket Ψ-vel átvisszük ∂J-re. Az így kapott $g(\vartheta) := f(\Psi(\vartheta))$, $\vartheta \in \partial J$ peremfeltételhez meghatározzuk a g reguláris függvényt J belsejében, majd azt az $f(z) = g(\Phi(z))$ transzformációval visszavisszük G-re.

A számolás a valós (képzetes) részek szintjén is végrehajtható, mert a $z = x + \imath y$, $w = u + \imath v$ jelölésekkel $\Phi(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$, míg $\Psi(w) = x(u, v) + \imath y(u, v)$ az inverz leképezés. Tehát az egymáshoz rendelt $f(z) = f_1(x, y) + \imath f_2(x, y)$ és $g(w) = g_1(u, v) + \imath g_2(u, v)$ függvények transzformációs szabályai

$$f(z) = f_1(x, y) + \imath f_2(x, y) = g_1(u(x, y), v(x, y)) + \imath g_2(u(x, y), v(x, y)) ,$$

$$g(w) = g_1(u, v) + \imath g_2(u, v) = f_1(x(u, v), y(u, v)) + \imath f_2(x(u, v), y(u, v)) .$$

Ha tehát f_1 az adott peremérték, akkor azt a $g_1(u, v) := f_1(x(u, v), y(u, v))$ képlettel átvisszük ∂J-re, majd J-n meghatározzuk a $\Delta g_1 = 0$ Laplace egyenlet g_1 megoldását az így kapott peremértékhez. Ezután $f_1(x, y) := g_1(u(x, y), v(x, y))$ lesz az eredeti feladat megoldása. Ehhez az f_2 képzetes részt nem kell ismerni, de Φ és Ψ valós és képzetes részeire egyaránt szükség van.

A konformis leképezések alaptétele szerint minden egyszerű zárt görbével határolt tartomány konformis módon képezhető le az egységkörre, méghozzá úgy hogy amikor ζ bejárja a G határát, akkor $\Phi(\zeta)$ a körvonalon fut végig. Ezzel a Dirichlet feladat elvben általános megoldását kaptuk, de a szükséges leképezés meghatározása erősen problémafüggő. Viszont sok a jó recept, a legegyszerűbb leképezéseket a következő szakasz tárgyalja.

Lineáris törtleképezések: A konformis leképezések között a $w = f(z) := (az + b)/(cz + d)$ alakú racionális függvények a legegyszerűbbek, ahol a, b, c, d adott komplex számok. Valamelyik persze lehetne 1, de nem tudjuk hogy melyik nem nulla. A $c = 0$ eset triviális, ezzel nem is foglalkozunk. Ha $c \neq 0$ akkor f $z = -d/c$ kivételével reguláris, $f'(z) = (ad - bc)(cz + d)^{-2}$. Eszerint f konstans ha $ad = bc$, egyébként $z = g(w) := (b - dw)/(cw - a)$ az inverze. Már tudjuk hogy körnek vagy egyenesnek mindig kör vagy egyenes a képe; a $z_0 = -d/c$ ponton áthaladó körök és egyenesek mennek át egyenesbe. Elő lehet írni hogy a körvonal három meghatározó pontja hova kerüljön, de a középpont és két kerületi pont képe is megadható. Valóban, a

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \tag{14.14}$$

egyenlet olyan lineáris törtleképezést definiál, melynél $z_k \to w_k$, $k=1,2,3$. Az egyszerűbb $w=\alpha+\gamma/(z-z_0)$ alakból talán jobban látszik hogy mi is történik. Mivel $z_0 \to \infty$, a z_0 ponton áthaladó körök és egyenesek egyenesbe transzformálódnak, a többi egyenes vagy kör mind körbe megy át. A $z=\alpha+\gamma/(z-z_0)$ egyenlet

$$z_{1,2}=(1/2)(z_0+\alpha \pm \sqrt{(z_0-\alpha)^2+4\gamma}$$

gyökei a leképezés fixpontjai.

Például $w=(1-\imath z)/(z-\imath)$ az egységkört az $\operatorname{Im} w>0$ felső félsíkra viszi át, méghozzá úgy hogy $0\to\imath$, $1\to 1$, $-1\to -1$, $-\imath\to 0$, végül $\imath$ a végtelenben tűnik el. Érdemes megnézni hogy mi történik az egységkörre vonatkozó Dirichlet feladatot megoldó Poisson integrállal, lásd (14.11). Legyen $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$ és $\operatorname{Re}\zeta=\xi$, $\operatorname{Im}\zeta=0$, ekkor

$$w=\frac{1-\imath z}{z-\imath}=\frac{1+y-\imath x}{x+\imath y-\imath}\,,\quad \vartheta=e^{\imath\varphi}=\frac{1-\imath\xi}{\xi-\imath}\,;\quad d\varphi=\frac{d\vartheta}{\imath\vartheta}=-\frac{2\,d\xi}{1+\xi^2}\,.$$

Másrészt

$$|w|^2=\frac{x^2(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2}=1+\frac{y}{(x^2+(y-1)^2)}\,,\quad w-\vartheta=\frac{x-\xi+\imath y}{(\imath-\xi)(x+\imath y-\imath)}\,,$$

tehát

$$|w-\vartheta|^2=\frac{(\xi-x)^2+y^2}{(1+\xi^2)\,(x^2+(y-1)^2)}\,.$$

Összesítve a fentieket

$$P_1(w,\vartheta)\,d\varphi=\frac{1-|w|^2}{2\pi|\vartheta-w|^2}\,d\varphi=\frac{y\,d\xi}{\pi\,((x-\xi)^2+y^2)}=P_+(z,\zeta)\,d\xi\,.$$

A korábban mondottakkal teljes összhangban, az egységkör P_1 Poisson magja átment a felső félsík P_+ magjába.

Lényeges új információhoz juthatunk a következő észrevételek felhasználásával. A $w=z^2$ leképezés a z sík első negyedét a w sík felső félsíkjára, $w=e^z$ a $0<\operatorname{Re} z<\pi/2$ sávot a w sík első negyedére, $w=\log z$ pedig az egységkör felső részét az $\operatorname{Re} w>0$, $0<\operatorname{Im} w<\pi$ sávra viszi át. Az is igazolható, hogy

$$w=\Phi(z):=\int_0^z(\zeta-\zeta^3)^{-2/3}\,d\zeta \tag{14.15}$$

a felső félsíkot szabályos háromszögre transzformálja. A fenti transzformációk és inverzeik segítségével negyedsíkon, sávon, félkörön, sőt egyenlő oldalú háromszögön is meg tudjuk oldani Dirichlet feladatát. Tetszőleges sokszög is megkapható a félsík konform képeként az (14.15) kpletet általánosító Schwarz-Christoffel formulák segítségével.

14.3. **Laplace transzformáció.** Inhomogén differenciálegyenletek és rendszerek megoldására alkalmas, képlete

$$\mathfrak{L}f=F(z):=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt\,,\quad z\in\mathbb{C}\,, \tag{14.16}$$

ahol $f:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}$ minden véges intervallumon, vagyis lokálisan integrálható. Logikus az $f(t)=0$ ha $t<0$ konvenció, de $f(0+0)$ létezése nem szükséges. Ha $|f(t)|\le Ke^{ct}$ akkor $\operatorname{Re} z>c$ esetén az integrál abszolút konvergens, és $|F(z)|\le K(\operatorname{Re} z-c)^{-1}$, tehát *korlátos függvény Laplace transzformáltja az* $\operatorname{Re} z>0$ *félsíkban reguláris, és a képzetes tengelyen is csak elsőrendű pólusai lehetnek.* Például $\mathfrak{L}f=1/z$ ha $t\ge 0$ esetén $f=1$, egyébként $f=0$. Látható hogy ha valamilyen

$w \in \mathbb{C}$ esetén az integrál konvergens, akkor $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, w$ esetén abszolút konvergens az, tehát a konvergencia tartománya $\mathrm{Re}\, z > a$ típusú félsik, ahol F reguláris, és

$$F'(z) = -\int_0^\infty e^{-zt}\, t f(t)\, dt = -\mathfrak{L}(tf)(z)\,, \quad F^{(n)}(z) = (-1)^n \mathfrak{L}(t^n f)(z)\,. \tag{14.17}$$

Ez a félsík üres is lehet: $\mathfrak{L}t^{-1}$ az integrállal sehol sincs definiálva. Ha viszont $e^{at} f(t) \to 0\ \forall\, a > 0$ amint $t \to +\infty$, akkor $\mathfrak{L}f$ analitikus egész függvény. Megjegyezzük hogy ha $F(z) := \mathfrak{L}f$ valahol értlmezhető akkor $F(z) \to 0$ amint $\mathrm{Re}\, z \to +\infty$. A Laplace transzformált gyakran analitikusan folytatható a fenti félsík határán túl is, ahol az (14.16) előállítás már nem érvényes; tipikus az a helyzet amikor F néhány izolált szingularitástól eltekintve az egész komplex síkon reguláris. Ha $f \geq 0$ és F reguláris az $\mathrm{Re}\, z > a$ félsíkon, akkor a momoton konvergencia tétele miatt az $\mathfrak{L}f$ integrál $\mathrm{Re}\, z > a$ esetén abszolút konvergens, az általános eset bonyolultabb.

A triviális ámde hasznos

$$F(z) = G(z - \alpha) \text{ ha } f(t) = e^{\alpha t} g(t) \text{ és } G = \mathfrak{L}g\,. \tag{14.18}$$

képlet azt mondja hogy exponenciális függvénnyel való szorzás a Laplace transzformált eltolását eredményezi. Fordítva, ha $t < 0$ esetén $g(t) = 0$, akkor

$$F(z) = e^{-\tau z} G(z) \text{ ha } f(t) = g(t - \tau) \text{ és } G = \mathfrak{L}g\,. \tag{14.19}$$

Hasonlóan egyszerű az

$$F(z) = \frac{G(z/c)}{c} \text{ ha } f(t) = g(ct) \text{ és } G = \mathfrak{L}g\,, 0 \neq c \in \mathbb{R} \tag{14.20}$$

hasonlósági transzformáció is.

Parciális integrálással kapjuk az

$$\mathfrak{L}f'(z) = z\mathfrak{L}f(z) - f(0)\,, \quad \mathfrak{L}f''(z) = z^2 \mathfrak{L}f(z) - f'(0) - zf(0)\,, \tag{14.21}$$

$$\mathfrak{L}f^{(n)}(z) = z^n \mathfrak{L}f(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \cdots - z f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,, \tag{14.22}$$

$$F(z) = \frac{G(z)}{z} \quad \text{ha } G := \mathfrak{L}g\,, \quad f(t) := \int_0^t g(s)\, ds \tag{14.23}$$

képleteket.

Az $\mathfrak{L}$ transzformáció lineáris operáció, $\mathfrak{L}(cf) = c\mathfrak{L}f$ mindig igaz, de $\mathfrak{L}(f + g) = \mathfrak{L}f + \mathfrak{L}g$ csak ott, ahol $\mathfrak{L}f$ és $\mathfrak{L}g$ egyaránt értelmezve van. A Laplace transzformáció az $f(t) = O(e^{ct})$ növekedési feltételnek eleget tevő függvények terét a $D(\mathrm{Re}\, z > c)$ térbe képezi le, de $\mathfrak{L}$ lehetséges értelmezési tartománya ennél lényegesen nagyobb; mértékeknek is van Laplace transzformáltja. Például az $x \in \mathbb{R}$ ponthoz rendelt *Dirac függvény* (1 súlyú mérték) esetében $\mathfrak{L}\delta_x = e^{-zx}$, az $x = 0$ esetben az azonosan 1 függvényt kapjuk. Jelölések egyszerüsítésére alkalmas a $\theta(t) = 1$ ha $t \geq 0$, egyébként $\theta(t) = 0$ módon definiált Heaviside függvény. Ha $\theta_x(t) := \theta(t - x)$ és $x > 0$ akkor $\mathfrak{L}\theta_x = e^{-xz}/z$, és nem csak a differenciálási szabály miatt mondhatjuk hogy $\delta_x = \theta_x'$, hanem a parciális integrálás képletét idéző

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^\infty \varphi'(t)\theta_x(t)\, dt\,, \quad \varphi \in C^1(\mathbb{R})\,, \varphi' \in L^1(\mathbb{R})$$

azonosság is ezt az elképzelést támasztja alá.

Konvolúció: $h = f * g = g * f$ definíciója

$$h(x) := \int_{-\infty}^\infty f(x - y) g(y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty g(x - y) f(y)\, dy\,, \tag{14.24}$$

ahol $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, feltéve hogy az integál létezik. A konvolúciós integrál biztosan értelmes ha f korlátos míg g integrálható, vagy pedig $f, g \in L^2(\mathbb{R})$; és ekkor $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|_1$, illetve $\|f * g\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Ha $t < 0$ esetén $f(t) = g(t) = 0$, akkor $h = f * g$ képlete

$$h(t) := \int_0^t f(t - s) g(s)\, ds = \int_0^t g(t - s) f(s)\, ds\,. \tag{14.25}$$

Egyszerű számolással kapjuk hogy konvolúció Laplace transzformáltja a Laplace transzformáltak szorzata, vagyis $H(z) = F(z)G(z)$ ha $h := f * g$ és $F := \mathfrak{L}f$, $G := \mathfrak{L}g$, $H := \mathfrak{L}h$. Ez az összefüggés sokkal fontosabb annál hogy csak ujabb függvények Laplace transzformáltjának kiszámolására használjuk.

Nevezetes példák: Közvetlen számolással, vagy a fenti összefüggések alapján határozhatjuk meg az $F = \mathfrak{L}f$ Laplace transzformáltat az alábbi példákban; ha mást nem mondunk akkor $\operatorname{Re} z > 0$. A paraméterek valós számok, de a képletek a paraméter komplex értékeire is kiterjeszthetők.

$$F(z) = e^{-\alpha z}/z \text{ ha } f = \theta_\alpha\,, \alpha \geq 0\,; \quad F(z) = \frac{1}{z-\alpha} \text{ ha } f(t) = e^{\alpha t} \tag{14.26}$$

$$F(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \text{ ha } f(t) = t^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \quad F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \text{ ha } f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,, \tag{14.27}$$

$$F(z) = \Gamma(\alpha)\, z^{-\alpha} \text{ ha } f(t) = t^{\alpha-1}\,,\ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt\,,\ \alpha > 0\,, \tag{14.28}$$

$$F(z) = \frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}} \text{ ha } f(t) = t^n e^{\alpha t}\,,\ n \in \mathbb{N} \text{ és } \operatorname{Re} z > \alpha\,, \tag{14.29}$$

$$F(z) = \sigma\sqrt{2\pi}\exp(\sigma^2 z^2/2) \text{ ha } f(t) = 2\exp(-t^2/2\sigma^2)\,, \sigma > 0\,, \tag{14.30}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2+\omega^2} \text{ ha } f(t) = \cos(\omega t)\,; \quad F(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2} \text{ ha } f(t) = \sin(\omega t)\,, \tag{14.31}$$

$$F(z) = \operatorname{arctg}\frac{1}{z} \text{ ha } f(t) = \frac{\sin t}{t}\,, \quad F(z) = \frac{2}{(z^2+1)^2} \text{ ha } f(t) = \sin t - t\,\cos t\,, \tag{14.32}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2-\omega^2} \text{ ha } f(t) = \operatorname{ch}(\omega t)\,; \quad F(z) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2} \text{ ha } f(t) = \operatorname{sh}(\omega t)\,, \tag{14.33}$$

$$F(z) = \frac{z^2-\omega^2}{(z^2+\omega^2)^2} \text{ ha } f(t) = t\cos(\omega t)\,; \quad F(z) = \frac{2z\omega}{(z^2+\omega^2)^2} \text{ ha } f(t) = t\sin(\omega t)\,, \tag{14.34}$$

$$F(z) = \frac{z^2+\omega^2}{(z^2-\omega^2)^2} \text{ ha } f(t) = t\,\operatorname{ch}(\omega t)\,; \quad F(z) = \frac{2z\omega}{(z^2-\omega^2)^2} \text{ ha } f(t) = t\,\operatorname{sh}(\omega t)\,, \tag{14.35}$$

Racionális törtfüggvények Laplace transzformáltjait parciális törtekre bontás után a fenti képletekkel számolhatjuk. Rezgőkörök tesztelésénél kerül elő

$$F(z) = \frac{\operatorname{th}(zT/4)}{z} \quad \text{és} \quad F(z) = \frac{2\operatorname{sh}(zT/2) - zTe^{-zT/2}}{2z^2T\operatorname{sh}(zT/2)}\,, \tag{14.36}$$

ahol f a $T > 0$ periódusú négyszögjel, illetve fűrészrezgés. Az egyenirányított váltóáram $f(t) = |\sin(\pi t/T)|$, az ő Laplace transzformáltja:

$$F(z) = \frac{\pi T}{T^2 z^2 + \pi^2}\operatorname{cth}(zT/2)\,. \tag{14.37}$$

Inverziós formulák: Ha $\mathfrak{L}f \equiv 0$ az $\operatorname{Re} z > a$ félsíkon akkor differenciálgatással kapjuk hogy ott $\mathfrak{L}(pf) \equiv 0$ ha p polinom, vagyis f majdnem mindenütt nulla, tehát *a Laplace transzformáció kölcsösen egyértelmű:* $\mathfrak{L}f$ ismeretében f mindig rekonstruálható. A Fourier transzformációnál is lesz szó az inverzió problémájéról és a két technika hasonlóságáról, az alábbi gondolatok a komplex függvénytani hátteret domborítják ki. A legegyszerűbb inverziós formula a következő:

Tétel 14.16. *Tegyük fel hogy $F := \mathfrak{L}f$ analitikusan terjeszthető ki a Γ kontúr külsejére, az $\mathrm{Ext}\Gamma \cup \Gamma$ halmazon folytonos és korlátos, továbbá $F(z) \to 0$ amint $|z| \to +\infty$. Ekkor majdnem minden $t > 0$ esetén*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma e^{\zeta t} F(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Bizony: Jelölje f_Γ az integrált, azt kell megmutatni hogy $F(z) = \mathfrak{L}f_\Gamma$ ha Γ az $\operatorname{Re}\zeta < \operatorname{Re} z$ félsíkban fekszik. Fubini tételével

$$\mathfrak{L}f_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_0^\infty e^{-zt}\oint_\Gamma e^{\zeta t}F(\zeta)\,d\zeta\,dt = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta},$$

tehát csak a 14.5. Tételre kell hivatkozni. □

Gyakori az az eset amikor F néhány pólustól eltekintve reguláris, ilyenkor csak $e^{zt}F(z)$ reziduumait kell meghatározni, feltéve hogy $F(z) \to 0$ amint $|z| \to +\infty$. Ez a feltétel persze nem mindig teljesül, de a következő tétel szerint helyettesíthető a kicsit enyhébb $F(z) \to 0$ ha $|\operatorname{Re} z| \to 0$ kritériummal. A fentinél valamivel általánosabb Riemann és Mälvin formulája: ha $F := \mathfrak{L}f$ reguláris az $\operatorname{Re} z \geq a$ félsíkon akkor várható hogy $f(t) = \lim_{R\to+\infty} f_R(t)$, legalábbis majdnem mindenütt, ahol

$$f_R(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{a-\imath R}^{a+\imath R} e^{zt}F(z)\,dz = \frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{\imath yt}F(a+\imath\, y)\,dy\,. \tag{14.38}$$

A pontos állításnak további feltételei vannak, az sem nyilvánvaló hogy az $f_R \to f$ határérték mindig létezik; emiatt az igy kapott eredményt ellenőrizni illik.

Az inverzió problémája az F származásától függetlenül is felvethető. Tegyük fel hogy F reguláris és korlátos az $\operatorname{Re} z \geq a$ félsíkon, és $F(z) \to 0$ amint $\operatorname{Re} z \to +\infty$. A 14.6. Tétel bizonyításának mintájára, az $\operatorname{Re}\zeta = a$ egyenesen és a $|\zeta - a| = R$ körvonal tőle jobbra eső részén integrálva kapjuk hogy $f_R(t) \to 0$ ha $t < 0$. Ennél tartalmasabb a következő eredmény:

Tétel 14.17. *A fenti feltételek mellett, $\operatorname{Re} z > a$ esetén $\mathfrak{L}f_R(z) \to F(z)$ amint $R \to +\infty$.*

Bizony: Fubini tétele szerint

$$\mathfrak{L}f_R(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\int_0^\infty F(a+\imath\, y)e^{-zt+at+\imath ty}\,dt\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{F(a+\imath y)\,dy}{z-a-\imath y}$$

tehát a 14.6. Tétel alkalmazható. □

A Laplace transzformáltak konvergenciájából az alapfüggvényeké csak bizonyos *gyenge értelemben* következik, erről is a Fourier transzformációnál lesz szó. Például, az $F(z) := e^{-z}$ és $a = 0$ esetben feltételeink teljesülnek, de nem könnyű felismerni hogy $f_R(t) = (\pi t - \pi)^{-1}\sin(Rt - R)$ "gyenge" határértéke a $t = 1$ pontban ülő Dirac mérték. Megjegyezzük hogy az $F \equiv 1$ esetben az $F(z) \to 0$ ha $\operatorname{Re} z \to +\infty$ feltétel nem teljesül, Riemann és Mälvin formulája mégis elvezet a Dirac mértékhez.

Többnyire a Riemann - Malvin formula kiértékelése is a rezidumok módszerével történik. Például ha F néhány pólustól eltekintve reguláris, és a pólusai mind az $\operatorname{Re} z = a$ egyenes baloldalán vannak, továbbá $F(z) \to 0$ amint $\operatorname{Re} z \to -\infty$, akkor f folytonossági helyein $f(t) = \sum \operatorname{Res}\big(e^{zt}F(z)\big)$. Ennek bizonyításához az $\operatorname{Re}\zeta = a$ egyenesen és a $|\zeta - a| = R$ kör balfelén kell integrálni.

Magasabbrendű lineáris egyenletek: Minden $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ valós vagy komplex együtthatós polinomhoz hozzárendelhetjük a

$$P_n(\frac{d}{dt})\,x(t) = \frac{d^nx}{dt^n}\,(t) + a_1\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,(t) + \cdots + a_{n-1}\,\frac{dx}{dt}\,(t) + a_n\,x(t) = f(t) \tag{14.39}$$

lineáris n-edrendű inhomogén differenciálegyenletet. Mindkét oldal Laplace transzformáltját képezve $P_n(z)X(z) = F(z) + Q_{n-1}(z)$ adódik, ahol $X := \mathfrak{L}x$, $F := \mathfrak{L}f$, Q_{n-1} pedig olyan $n-1$ fokszámú polinom, amelynek együtthatói az $x_0 := x(0)$, $x_k := x^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, ..., n-1$ kezdeti értékek lineáris kombinációi. Az $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ *harmonikus rezgés* esetében $P_2(z) = z^2 + \omega^2$, $Q_1(z) = x(0)z + \dot{x}(0)$. Q_1/P_2 Laplace transzformáltja a táblázatból is kiolvasható, tehát az $f \equiv 0$ esetben

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \dot{x}(0)\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \tag{14.40}$$

a homogén egyenlet általános megoldása. Kicsit bonyolultabb a $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$ *csillapított rezgés,* ahol $\gamma > 0$, és $P_2(z) = z^2 + 2\gamma z + \omega^2$, $Q_1(z) = x(0)z + \dot{x}(0) + 2\gamma x(0)$. A táblázat itt is működik, de érdemes észrevenni hogy $y(t) := e^{\gamma t}x(t)$ az $\ddot{y} + \tilde{\omega}^2 y = 0$ egyenletnek tesz eleget, ahol $\tilde{\omega} := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, vagyis

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t}\cos(\tilde{\omega}t) + \dot{x}(0)e^{-\gamma t}\frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\tilde{\omega}} \tag{14.41}$$

az általános megoldás; a képlet a $\gamma^2 > \omega^2$ esetben is érvényes.

Az általános homogén ($f \equiv 0$) egyenlet is tárgyalható Laplace transzformációjával, de erre igazából nincs szükség, csak P_n gyökeit kell ismerni. Ha ugyanis $P_n(\lambda) = 0$ akkor $e^{\lambda t}$ megoldás, és ha λ k-szoros gyök, akkor a $t^j e^{\lambda t}$, $j = 0, 1, ..., k-1$ függvények mindegyike is megoldás lesz. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ a $P_n(\lambda) = 0$ egyenlet különböző gyökeit, $r_k \in \mathbb{N}$ a λ_k gyök multiplicitása. Ekkor a homogén egyenlet általános megoldása

$$\varphi(t; c_1, c_2, ..., c_n) = \sum_{k=1}^{m} (c_{k,1} + c_{k,2}\, t + \cdots + c_{k,r_k}\, t^{r_k - 1})\, e^{\lambda_k t}, \tag{14.42}$$

és a c együtthatókat a $\varphi^{(j)}(0, c_1, c_2, ..., c_n) = x_j$, $j = 0, 1, ..., n-1$ egyenletekből határozhatjuk meg. Az inhomogén egyenlet keresett megoldását ezután úgy kapjuk meg, hogy a homogén egyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet csupa nulla kezdeti értékkel rendelkező *partikuláris* megoldását, tehát $P_n(z)X(z) = F(z)$ a megoldandó egyenlet.

Rezolvens az $R_n(z) := 1/P_n(z)$ függvény neve, ez $P_n(z)$ gyökeit kivéve mindenhol reguláris, és csak a gyök multiplicitásának megfelelő pólusai lehetnek. Azt az $x(t)$ függvényt keressük, amelynek $X(z) = R_n(z)F(z)$ a Laplace transzformáltja. Ha szerencsénk van, akkor ezt táblázatból össze tudjuk állítani, de ez a megközelítés esetleges; minden f *bemenő jelhez* külön eljárásra van szükség. Ha viszont olyan r_n függvényt találunk, melynek éppen az R_n a Laplace transzformáltja, akkor a konvolúciós szabály alapján

$$x(t) = \int_0^t r_n(t-s) f(s)\, ds \tag{14.43}$$

a keresett partikuláris megoldás.

Az $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ harmonikus rezgés esetében $r_2(t) = \sin(\omega t)/\omega$, amiből a már ismert

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin(\omega t - \omega s) f(s)\, ds \tag{14.44}$$

konvolúciós formulát kapjuk az $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ kezdeti értékekkel rendelkező megoldás meghatározásához. Az $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$ csillapított rezgésnél $R_2(z) = \left((z+\gamma)^2 + \omega^2 - \gamma^2\right)^{-1}$, tehát

$$r_2(t) = \frac{\exp(-\gamma t)}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin\left(t\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right) \tag{14.45}$$

a konvolúciós megoldóképlet magja. Fizikai szempontból is lényeges a különbség az $\omega^2 > \gamma^2$ és az $\omega^2 < \gamma^2$ esetek között. Csak valós értékű függvények Laplace transzformáltjaival foglalkoztunk, de az így kapott képletek komplex egyenletekre is kiterjeszthetők; az idő persze valós marad.

Fekete doboz: Hírközlési és más rendszerek működését gyakran nem differenciálegyenlet, hanem általános típusú, $x = k * f$ konvolúciós formula írja le, ahol $f(t)$ a bemeneti, $x(t)$ a kimenti jel, $t \geq 0$. A k átviteli mechanizmus nem ismert, de a ténylegesen megfigyelhető f és x segítségével azonosítható. Jelölje rendre X, K és F a Laplace transzformáltakat, ekkor $K = F/X$, tehát az inverziós formulával k is meghatározható. Konkrét feladat megoldása felkészültséget igényel, mert a numerikusan számolt K csak közelít egy Laplace transzformáltat.

Stabilitás: Azt mondjuk hogy a (14.39) egyenlettel adott rendszer stabil ha az azonosan 0 kezdeti helyzetből induló megoldás (kimenő jel) korlátos bemeneti jel esetén mindig korlátos marad. Ha van olyan korlátos bemenő jel hogy a kimenő jel nem korlátos, akkor a rendszer instabil.

Tétel 14.18. *A* (14.39) *rendszer akkor és csak akkor stabil ha* P_n *minden gyökének negatív a valós része.*

Bizony: Ha $P_n(\lambda) = 0$ és $\operatorname{Re}\lambda > 0$ akkor $f \equiv 1$ bemenő jel esetén $F(\lambda) \neq 0$, tehát λ az $X(z) = R_n(z)F(z)$ pólusa. Viszont korátos függvény Laplace transzformáltja $\operatorname{Re} z > 0$ esetén reguláris vagyis az $x(t)$ kimenő jel ilyenkor nem lehet korlátos.

Ha $\operatorname{Re}\lambda = 0$ akkor $f(t) = \cos(\omega t)$ legyen a bemenő jel, ahol $\omega^2 = |\operatorname{Im}\lambda|$. Az $x(t)$ kimenő jel $X(z)$ Laplace transzformáltja racionális törtfüggvény, aminek minden szingularitása pólus. Mivel λ az $F(z)$ pólusa, az $X(z)$-nek legalább másodrendű pólusa lesz, ami korlátos függvény Laplace transzformáltjával nem fordulhat elő; a rendszer ilyenkor sem stabil. Valóban, a $z = y + \lambda$, $y > 0$ helyen

$$|X(y+\lambda)| = \left|\int_0^\infty e^{-ty-\lambda}\, x(t)\, dt\right| \leq \frac{K}{y}$$

ha $|x(t)| \leq K \;\forall\, t \geq 0$, de elsőnél magasabbrendű pólus szingularitása ennél erősebb.

Ha most $P_n(z)$ minden gyökének negatív a valós része, akkor a Riemann - Mälvin inverziós formula szerint a rezolvens

$$r_n(t) = \frac{e^{at}}{2\pi\imath}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath y} R_n(a+\imath y)\, dy$$

képletében, lásd (14.38), $a < 0$ is megengedett. Az $n = 1$ eset triviális, ha pedig $n > 1$ akkor $R_n(z) = O(|z|^{-2})$ integrálható, tehát $r_n(t) = O(e^{at})$. Eszerint ha $|f(t)| \leq K$ akkor

$$|x(t)| \leq \left|\int_0^t r_n(t-s) f(s)\, ds\right| \leq C\int_0^t e^{at-as}|f(s)|\, ds \leq CK\frac{e^{at}-1}{a},$$

ami $a < 0$ miatt korlátos, tehát korlátos bemeneti jelhez korlátos kimenet tartozik, vagyis a rendszer stabil. □

A harmonikus rezgés példájában $\pm\,\imath\omega_0$ az r_2 pólusai, tehát a megoldás korlátosságának megszűnéséhez vezető *rezonancia* léphet fel. A bizonyításból azt is látjuk hogy ezt az $f(t) := \sin(\omega_0 t)$ bemenő jel elő is idézi. A jelenség a (14.44) képletből is megérthető. A csillapított rezgés rezolvensének $\lambda_\pm := -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ a pólusai, tehát $\gamma > 0$ miatt ez a rendszer stabil.

$*$ Az $\dot{x} = Ax + f(t)$ lineáris rendszert Laplace transzformációja a $(zI - A)X(z) = x(0) + F(z)$ egyenletekbe viszi át, és az $R(z) = (zI - A)^{-1}$ rezolvens éppen e^{At} Laplace transzformáltja, tehát a jól ismert megoldóképleteket kapjuk. A stabilitás kérdését később tisztázzuk. $*$

14.4. **Fourier transzformáció.** Az $f \in L^1(\mathbb{R})$ komplex értékű függvény Fourier transzformáltja $\mathcal{F}f \equiv \hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f = \hat{f}(\omega) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\omega x} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x)\, f(x)\, dx - \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega x)\, f(x)\, dx.\end{aligned} \tag{14.46}$$

Feltűnő a Laplace és a Fourier transzformáció hasonlósága, de lényeges különbségek is vannak. A Laplace transzformált változója és értéke is komplex szám, Fourier transzformáltja viszont többváltozós függvényeknek is van, a definició hasonló. Mivel $|e^{\imath\omega x}| = 1$, $\hat{f}(\omega)$ az $\omega \in \mathbb{R}$ frekvencia folytonos és korlátos függvénye; a folytonosság a dominált konvergencia tétel következménye. Pontos korlát is adható:

$$\|\hat{f}\| := \sup\{|\hat{f}(\omega)| : \omega \in \mathbb{R}\} \leq \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx. \tag{14.47}$$

$\sqrt{2\pi}\hat{f}(0) = \int f\, dx$ mindig igaz, és ha $f \geq 0$ akkor $|\hat{f}(\omega)| \leq \hat{f}(0) \;\forall\, \omega \in \mathbb{R}$. (14.46) értelemszerűen definiálja komplex értékű $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ függvények Fourier transzformáltját is. Valós értékű páros függvény Fourier transzformáltja valós, páratlan függvényé tisztán képzetes.

A valószinűségszámításban $\sqrt{2\pi}\hat{f}$ az f *sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye.* Az $f(x) := \theta(|x| - a)/2a$, $a > 0$ *egyenletes sűrűség* Fourier transzformáltja $\hat{f}(\omega) = \sin(a\omega)/(a\omega\sqrt{2\pi})$, az

$f(x) := (a/\pi)(a^2+x^2)^{-1}$, $a > 0$ Cauchy sűrüség esetében $\hat{f}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-a|\omega|}$, míg a $p_1(x) := (1/\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2)$ Gauss sűrüségnek önmaga a Fourier transzformáltja, tehát helyettesítéssel kapjuk hogy $\hat{p}_\sigma(\omega) = (1/\sqrt{2\pi})\exp(-\sigma^2x^2/2)$ ha $p_\sigma(x) := (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)$ a $\sigma > 0$ *szórású normális sűrüség.*

Hasonlóan a Laplace transzformációhoz, a deriválás szabályai: $\partial_\omega \hat{f} = \hat{g}$ ha $g(x) = -\imath x f(x)$ és $\mathcal{F}f' = \imath\omega\hat{f}(\omega)$, feltéve hogy az integrálok léteznek, és a parciális integrálás elvégezhető. Általánosan,

$$\partial_\omega^n \hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) \ \text{ ha } g(x) := (-\imath x)^n f(x) \quad \text{és} \quad \mathcal{F}f^{(n)} = (\imath\omega)^n \hat{f}(\omega)\,. \tag{14.48}$$

A konvolúciós formula is lényegében változatlan: Ha $h = f * g$, akkor $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$. Valóban, Fubini tétele szerint

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,\exp(\imath\omega(x-y)+\imath\omega y)\,dy\,dx = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)\,.$$

$**$ Riemann lemmája szerint $\hat{f}(\omega) \to 0$ amint $|\omega| \to +\infty$, amit lépcsős függvényekre bizonyítani igazán könnyű, tetszőleges f integrálható függvényhez viszont van olyan f_n lépcsős függvényekből álló sorozat, hogy $\|f - f_n\|_1 \to 0$, tehát

$$|\hat{f}(\omega)| \le |\hat{f}(\omega) - \hat{f}_n(\omega)| + |\hat{f}_n(\omega)| \le (2\pi)^{-1/2}\left(\|f-f_n\|_1 + |\hat{f}_n(\omega)|\right)\,,$$

vagyis egyszerű 2ε becslésről van szó. Adott $\varepsilon > 0$ számhoz először n értékét választjuk meg úgy, hogy $\|f - f_n\| < \varepsilon$ teljesüljön, majd rögzített n mellett elvégezzük az $|\omega| \to 0$ határátmenetet.

A Fourier transzformáció tehát olyan lineáris operátor, amely az integrálható függvények $L^1(\mathbb{R})$ terét a folytonos, és a végtelenben eltűnő komplex értékű függvények $C_0(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ terébe képezi le. $**$

A következő észrevételnek számos következménye van. Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ korátos, $\sigma > 0$ és

$$f_\sigma(x) := (p_\sigma * f)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(x-y)^2/2\sigma^2\right)\, f(y)\,dy\,.$$

Lemma 14.4. *Ha f folytonos az x pontban, akkor $f(x) = \lim_{\sigma\to 0} f_\sigma(x)$. Ha f egyenletesen folytonos, akkor f_σ egyenletesen konvergál f-hez, és a $\hat{f}_\sigma \to \hat{f}$ konvergencia egyenletességéhez f integrálhatósága is elegendő.*

Bizony: Egyszerű számolással kapjuk hogy

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sigma y)\exp(-y^2/2)\,dy\,,$$

amiből a dominált konvergencia tétellel $f_\sigma(x) \to f(x)$ ha $f \in C(x)$, de elemi bizonítás is van. Az integrálás tartományát az $|y| < \delta/\sigma$ és $|y| \ge \delta/\sigma$ részekre bontva az egyenletes konvergenciáról szóló állítás is következik. Végül a konvolúció transzformációs képletéből $\hat{f}_\sigma(\omega) = \exp(-\sigma^2\omega^2/2)\hat{f}(\omega)$, tehát $\|\hat{f}_\sigma - \hat{f}\| \to 0$ ha f integrálható és $\sigma \to 0$. $\square$

$**$ Az f korlátossága pótolható az $|f(x)| \le e^{-K|x|}$, $K > 0$ feltétellel. Ennél érdekesebb hogy f_σ az L^1 és L^2 terekben is konvergál f-hez. Ennek igazolásához először azt kell észrevenni hogy $\|f_\sigma\|_1 \le \|f\|_1$ mivel $(2\pi)^{-1/2}\,e^{-y^2/2}$ integrálja 1 , és így a Schwarz egyenlőtlenség miatt $\|f_\sigma\|_2 \le \|f\|_2$ is teljesül. Másrészt

$$\|f_\sigma - f\|_i \le \|f_\sigma - g_\sigma\|_i + \|g_\sigma - g\|_i + \|g - f\|_i \le \|g_\sigma - g\|_i + 2\|f-g\|_i\,,$$

ahol $i = 1$ vagy $i = 2$, tehát olyan g függvényeket kell keresnünk, amelyekkel f tetszőlegesen megközelíthető, és $\|g_\sigma - g\|_i \to 0$ amint $\sigma \to 0$ is teljesül. Nem túl nehéz megmutatni hogy ilyenek a $P_n(x)\exp(-x^2/2)$ alakú függvények, ahol P_n tetszőleges n fokszámú polinom. Ez a gondolatmenet bármely X Banach térben is müködik. A következő eredményt kapjuk, ami *Banach-Steinhaus tétel* néven ismert. Ha $\mathsf{A}\,,\mathsf{A}_n : \mathsf{X} \mapsto \mathsf{X}$ olyan lineáris operátorok hogy $\|\mathsf{A}\varphi\| \le K\|\varphi\|$ és $\|\mathsf{A}_n\varphi\| \le K\|\varphi\|$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ és $\varphi \in \mathsf{X}$, továbbá a $\varphi \in \mathsf{X}$ elemhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\varphi_\varepsilon \in \mathsf{X}$ hogy $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$ és $\mathsf{A}_n\varphi_\varepsilon \to \mathsf{A}\varphi_\varepsilon$ amint $n \to +\infty$, akkor $\mathsf{A}_n\varphi \to \mathsf{A}\varphi$ is igaz.

Változatlan bizonyítással kapjuk a 14.4. Lemma következő általánosítását. Ha $\int h\,dx = 1$, $h_\sigma(x) := h(x/\sigma)/\sigma$, akkor $(h_\sigma * f)(x) \to f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, feltéve hogy $f \in C(\mathbb{R})$ korlátos. $**$

A Fourier transzformáció inverze: A komplex $L^2(\mathbb{R})$ tér skaláris szorzata

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx\,,$$

tehát $\hat{f}(\omega)$ értéke éppen $f(x)$ és $(2\pi)^{1/2}e^{\imath\omega x}$ skaláris szorzata. Az $\mathcal{F}$ operátor $\mathcal{F}^*$ adjungáltját az $\langle f, \mathcal{F}g\rangle = \langle \mathcal{F}^* f, g\rangle$ azonosság definiálja, továbbá $\mathcal{F}g$ komplex konjugáltja

$$\overline{\mathcal{F}g(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x}\overline{g(x)}\,dx\,,$$

tehát

$$\langle f, \mathcal{F}g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} f(x)\overline{g(\omega)}\,d\omega\,dx\,.$$

Az integrálás sorrendjének felcserélésével kapjuk hogy

$$\mathcal{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega} f(\omega)\,d\omega\,. \tag{14.49}$$

Érdemes észrevenni hogy éppen ez a képlet adja a Fourier transzformáció inverzét is.

Tétel 14.19. *Ha f és $\hat{f}$ egyaránt integrálható, és f folytonos, akkor*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega} \hat{f}(\omega)\,d\omega\,,$$

vagyis ebben az esetben $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

Bizony: $\hat{f}$ definícióját $\mathcal{F}^*$ képletébe beírva olyan kettős integrált kapunk, amely nem abszolút konvergens. Az integrál regularizálása után az integrálás sorrendje felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega x}\,d\omega &= \lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(\imath\omega y - \imath\omega x - \sigma^2\omega^2/2)\,d\omega\,dy \\ &= \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp\left(-(y-x)^2/2\sigma^2\right)\,dy\end{aligned}$$

a Gauss függvény Fourier transzformáltjának beírása után. Az állítás most már a 14.4. Lemma alapján következik. □

A Laplace transzformáció (14.38) inverziós formulája a fenti tétel speciális esete. Valóban,

$$F(a+\imath\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\imath\omega t}e^{-at} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\omega t} g(t)\,dt$$

éppen a $g(t) := \sqrt{2\pi}e^{-at}f(t)$ ha $t \geq 0$, $g(t) = 0$ ha $t < 0$ függvény formális Fourier transzformáltja, ha tehát a 14.19. Tétel feltételei teljesülnek, akkor

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega t}F(a+\imath\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{\zeta t}F(\zeta)\,d\zeta\,,$$

ami nem más mint Riemann és Mälvin korábban már felírt formulája. A feltételeket és az állítást később még pontosítjuk.

A 14.19. Tétel állítását az előtte mondottakkal, lásd (14.49), összevetve kapjuk Plancherel tételét:

Tétel 14.20. *Ha f, g folytonos és négyzetesen is integrálható függvények, továbbá $\hat{f}$ és $\hat{g}$ is négyzetesen integrálható, akkor $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$.*

A Fourier transzformációról elmondottak érdemi változtatás nélkül terjeszthetők ki többváltozós függvényekre is. Ha $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ akkor

$$\mathcal{F}f = \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) := (2\pi)^{-d/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath \langle \boldsymbol{\omega}, \mathsf{x} \rangle} f(\mathsf{x})\, \mathsf{dx}\,, \tag{14.50}$$

ahol $\langle \boldsymbol{\omega}, \mathsf{x} \rangle$ az $\boldsymbol{\omega} : (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_d)$ és $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ valós sorozatok skaláris szorzata. Ezután valamennyi levezetés szinte szó szerint megismételhető.
$**$ **Négyzetesen integrálható függvények:** A fenti tétel segítségével a Fourier transzformáció értelmezése a teljes $L^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ térre kiterjeszthető. Ha ugyanis $\|f - f_n\|_2 \to 0$, ahol f_n integrálható, akkor $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$, tehát $\hat{f}_n$ Cauchy sorozat az $L^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ térben, ami Riesz és Fisher tétele szerint teljes. Létezik tehát a $\phi := \lim_n \hat{f}_n$ határérték, és az is látható hogy ϕ független az f_n közelítés megválasztásától. Definíció szerint $\mathcal{F}f := \phi$ akkor is ha ha $f \in L^2$ nem integrálható. Az $f_n(x) := f(x)$ ha $|x| < n$, $f_n(x) = 0$ ha $|x| \geq 0$ választással, $\|f_n - f\|_2 \to 0$ miatt az

$$\mathcal{F}f = \hat{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-\imath\omega x} f(x)\, dx \tag{14.51}$$

konstrukció adódik, a határérték L^2 normája szerint értendő. Ugyanerre az eredményre vezet a Lemmában használt $f \approx f_\sigma \to f$ közelítés is. Az inverziós formula is kiterjeszthető az egész $L^2(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C})$ térre, tehát Fourier transzformációja az $L^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ térnek önmagára történő kölcsönösen egyértelmű, unitér leképezése.

A $\psi_R(\omega) := (1/\omega)\sin(R\omega)$ függvény csak feltételesen (és négyzetesen) integrálható, de tudjuk hogy ψ_R éppen az $f_R := \sqrt{\pi/2}\,\theta(R - |x|)$ függvény Fourier transzformáltja. Az inverziós formula érvényessége is ellenőrizhető, és az $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, d\omega = \sqrt{2\pi} f(0)$ azonosságból a nevezetes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega}\, d\omega = \pi \quad \text{ha } a > 0$$

integrál is következik. Jelölje most K_R a ψ_R/π függvénnyel képezett konvolúció operátorát:

$$\mathsf{K}_R f(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Rx - Ry)}{x - y} f(y)\, dy\,.$$

Mivel $\mathcal{F}\mathsf{K}_R f = \theta(|\omega| - R)\hat{f}(\omega)$, a dominált konvergencia tétele szerint $\mathcal{F}\mathsf{K}_R f \to \hat{f}$ a Fourier transzformáltak L^2 terében, tehát Plancherel miatt $\|\mathsf{K}_R f - f\|_2 \to 0$ amint $R \to +\infty\, \forall\ f \in L^2(\mathbb{R})$. Eszerint $(1/\pi x)\sin(Rx)$ is Dirac amint $R \to \infty$; ugyanígy igazolható a 14.4. Lemma L^2 változata is. A Riemann - Mälvin formula korrekt és elég hatékony alakja:

Tétel 14.21. *Ha az $F = \mathcal{L}f$ integrál az $\mathrm{Re}\, z \geq a$ félsíkon abszolút konvergens, és a $t > 0$ hely egy környezetében $\phi(s) := (f(t) - f(s))/(t - s)$ integrálható, akkor $f_R(t) \to f(t)$ amint $R \to +\infty$. Ha a ϕ integrálhatóságának feltétele helyett azt tudjuk hogy f a $t > 0$ egy környezetében négyzetesen integrálható, akkor f_R a környezetben négyzetesen konvergál.*

Bizony: Fubini tételével

$$f_R(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{\imath yt} \int_0^{\infty} e^{-as - \imath ys} f(s)\, ds\, dy = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(Rt - Rs)}{t - s} e^{-as} f(s)\, ds\,,$$

tehát

$$e^{-at}\,(f_R(t) - f(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(Rt - Rs) \frac{e^{-as} f(s) - e^{-at} f(t)}{t - s}\, ds\,,$$

amiből az első állítás $\phi_a(s) = (e^{-as} f(s) - e^{-at} f(t))/(s - t)$ integrálhatósága miatt Riemann lemmájával adódik. Szintén Riemanntól tudjuk hogy ha $t > \delta > 0$ akkor

$$\lim_{R\to\infty} \frac{e^{at}}{\pi} \int_{|s-t|>\delta} \frac{\sin(Rt - Rs)}{t - s} e^{-as} f(s)\, ds = 0\,,$$

tehát a második feltétel mellett kimondott átlagos konvergencia az $(1/\pi x)\sin(Rx)$ függvény L^2-ben érvényes Dirac tulajdonságának köszönhető. $\square$

A tételben használhattuk volna az

$$f_\delta(t) := \frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath sy-\delta y^2/2}F(a+\imath y)\,dy = \frac{e^{at}}{\sqrt{2\pi\delta}}\int_0^\infty \exp(-as-(t-s)^2/2\delta)\,f(s)\,ds$$

közelítést is, ebben az esetben a 14.4. Lemma adja az $f_\delta(t)\to f(t)$ ha $\delta\to 0$ állítást. $**$

$**$ **A Schwartz tér:** Jelölje $S(\mathbb{R})$ az olyan C^∞ (akárhányszor differenciálható) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ függvények terét hogy f és minden deriváltja is bármely polinommal szorozva is korlátos marad. Ezt úgy is mondhatjuk hogy minden $n,m\in\mathbb{Z}$ párhoz van olyan $C_{n,m}$ konstans hogy $|f^{(n)}(x)|\le C_{n,m}(1+x^2)^{-m}\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Mivel m-szeres parciális integrálással

$$\omega^m\hat f^{(n)}(\omega) = \frac{(-\imath)^n\omega^m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,f(x)\,dx = \frac{\imath^{n+m}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+m}\,f^{(m)}(x)\,dx$$

következik, $\hat f\in S(\mathbb{R})$ ha $f\in S(\mathbb{R})$. Mindezt az inverz transzformációról is elmondhatjuk, tehát a Fourier transzformáció az $S(\mathbb{R})$ Schwartz térnek önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezése: $\mathcal{F}: S(\mathbb{R})\leftrightarrow S(\mathbb{R})$. Könnyű ellenőrizni hogy ha $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ korlátos, és egy intervallumon kívül eltűnik, akkor $p_\sigma * f$ a Schwarz tér eleme; $p_\sigma(x) := \exp(-x^2/2\sigma^2)/(\sigma\sqrt{2\pi})$, $\sigma>0$. $**$

$**$ **Mérték Fourier transzformációja:** Ha μ véges mérték, akkor a Fourier transzformáltja

$$\hat\mu(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\omega x}\,\mu(dx)\,, \tag{14.52}$$

ami korlátos és egyenletesen folytonos függvény. Például, az $x\in\mathbb{R}$ ponthoz egységnyi tömeget rendelő δ_x Dirac mérték Fourier transzformáltja $(2\pi)^{-1/2}e^{-\imath\omega x}$, a $\pm x$ pontokhoz 1/2 - 1/2 súlyt rendelő mértéké pedig $(2\pi)^{-1/2}\cos(\omega x)$. Az $f(x) := e^{\imath\varphi x}$ függvény Fourier transzformáltját közvetlenül nem tudjuk definiálni, de az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\imath\varphi x-\imath\omega x-\sigma^2x^2/2)\,dx = \frac{1}{\sigma}\exp(-(\omega-\varphi)^2/2\sigma^2)$$

azonosság és a 14.4. Lemma azt sejtetik hogy $e^{\imath\varphi x}$ Fourier transzformáltja bizony $\sqrt{2\pi}\,\delta_\varphi$, tehát $\cos(\varphi x)$ Fourier transzformáltja $\sqrt{\pi/2}\,(\delta_\varphi+\delta_{-\varphi})$ lesz. Ez a szemléletmód a Fourier sorfejtést Fourier transzformáció speciális eseteként tünteti fel, ugyanis

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\imath nx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x}\,\hat\mu(d\omega)\,,$$

hogyha $\hat\mu$ az a komplex értékű diszkrét mérték, amely az $\omega=n\in\mathbb{Z}$ frekvenciákhoz a $c_n\in\mathbb{C}$ súlyt rendeli. Mivel mértéket a vele készített intergállal aonosítunk, a μ és ν mérték $\lambda=\mu*\nu$ konvolúcióját

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\,\lambda(dz) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+y)\,\mu(dx)\,\nu(dy)$$

definiálja, a $\hat\mu(\omega)=\sqrt{2\pi}\hat\mu(\omega)\hat\nu(\omega)$ formula most is érvényes. $**$

$**$ **Eloszlások konvergenciája:** Valószinüségi mértékek μ_n sorozata *gyengén konvergál* a μ valószinüségi mértékekhez ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mu(dx)\quad \forall\,\varphi\in C_b(\mathbb{R})\,. \tag{14.53}$$

Mivel a $\varphi_\omega(x) := e^{-\imath\omega x}$, $\omega\in\mathbb{R}$ függvények mind folytonosak és korlátosak, a gyenge konvergenciából a mértékek Fourier transzformáltjának pontonkénti konvergenciája azonnal következik. A tétel megfordítása érdekes: *Ha* $\hat\mu_n(\omega)\to\hat\mu(\omega)\ \forall\,\omega\in\mathbb{R}$, *akkor* μ_n *gyengén konvergál* μ*-höz.* A bizonyítás kulcsa a $\langle\varphi,f\rangle = \langle\hat\varphi,\hat f\rangle$ azonossághoz hasonlóan igazolható

$$\int_\infty^\infty \varphi(x)\,\mu_n(dx) = \int_\infty^\infty \hat\varphi(\omega)\hat\mu_n(\omega)\,d\omega$$

formula, ahol a jobboldalról nem tudjuk hogy mikor értelmes. Nincs gond ha φ az $S(\mathbb{R})$ Schwarz tér eleme, mert ilyenkor $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$ míg $|\hat{\mu}| \leq 1$, tehát a határátmenet is elvégezhető.

A következő lépés a μ_n sorozat feszességének megállapítása, ami azt jelenti hogy

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n[I_r] = 1\,, \quad \text{ahol} \quad I_r := [-r, r]\,.$$

Ehhez elég $\mu_n(\varphi) \to \mu(\varphi)$ alkalmazása azokkal a $\theta_r \in C_b(\mathbb{R})$ függvényekkel hogy $\theta_r = 1$ az I_r intervallumon, $\theta_r = 0$ I_{r+1}-en kívül, és a közbülső két szakaszon lineáris. Valóban, $\mu_n[I_{r+1}] \geq \mu_n(\theta_r) \to \mu(\theta_r)$ amint $n \to +\infty$, és $\mu[\theta_r] \to 1$ amint $r \to +\infty$.

Ezután a φ függvény $\varphi_{r,\sigma} := p_\sigma * \varphi_r$, $\varphi_r := \theta_r\varphi$ közelítését vizsgáljuk, ahol p_σ a korábban definiált normális sűrűség. Mivel $\varphi_{r,\sigma} \in S(\mathbb{R})$, rögzített $r, \sigma > 0$ esetén $\mu_n(\varphi_{r,\sigma}) \to \mu(\varphi_{r,\sigma})$; a Fourier transzformáltakkal többet nem kell foglalkozni. Viszont minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $r > 0$ úgy hogy $\mu_n[I_r^c] < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ezt az r értéket rögzítve, a σ számot olyan kicsinek kell választani hogy $|\varphi(x) - \varphi_{r,\sigma}(x)| < \varepsilon$ legyen ha $|x| \leq r$. Ez azért lehetséges mert $\varphi(x) = \theta_r(x)\varphi(x)$ az I_r intervallumon, és $\theta_r\varphi$ egyenletesen folytonos. Ezeket a becsléseket összevetve az állítás φ korlátossága miatt következik:

$$|\mu_n(\varphi) - \mu(\varphi)| \leq 2\varepsilon K + |\mu_n(\varphi) - \mu_n(\varphi_{r,\sigma})| + |\mu(\varphi) - \mu(\varphi_{r,\sigma})| + |\mu_n(\varphi_{r,\sigma}) - \mu(\varphi_{r,\sigma})|$$

ahol K a φ korlátja. Ez az észrevétel a valószinűségszámítás *határeloszláslásról* szóló tételeinek bizonyításakor hasznos. $**$

A hővezetés egyenlete: A $\partial_t u = (\sigma^2/2)\partial_x^2 u + f(t,x)$ egyenlet $u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ megoldását az $u(0,x) = u_0(x)$ kezdőfeltétel mellett szokás megadni. Jelölje $\hat{u}(t,\omega)$ és $\hat{f}(t,\omega)$ u és f Fourier transzformáltját az x változó szerint, ekkor $\partial_t \hat{u} = -(\sigma^2\omega^2/2)\,\hat{u} + \hat{f}$, tehát

$$\hat{u}(t,\omega) = \hat{u}(0,\omega)\exp(-\sigma^2\omega^2 t/2) + \int_0^t \exp\left(\sigma^2\omega^2(s-t)/2\right)\hat{f}(s,\omega)\,ds\,.$$

Mivel $\exp(-\sigma^2\omega^2/2)/\sqrt{2\pi}$ éppen a 14.4. Lemma előtt bevezetett p_σ Gauss sűrűség Fourier transzformáltja, a konvolúciós formulával kapjuk az

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-y)^2/2\sigma^2 t)\, u_0(y)\,dy \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-(x-y)^2/2\sigma^2(t-s))}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\, f(s,y)\,dy\,ds \end{aligned} \tag{14.54}$$

megoldást. A képlet értelmét a $t = 0$ helyen a 14.4. Lemma mutatja.

$**$ A $\partial_t u(t,\mathsf{x}) = (\sigma^2/2)\Delta u(t,\mathsf{x})$ d-dimenzós hővezetési egyenlet Fourier transzformációval a $\partial_t\hat{u} + (\sigma^2/2)|\boldsymbol{\omega}|^2\hat{u} = 0$ alakba megy át, tehát $\hat{u}(t,\boldsymbol{\omega}) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\omega})\exp(-\sigma^2|\boldsymbol{\omega}|^2 t/2)$ ha $u(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$. Mivel a $p_{\sigma,d} := (2\pi)^{-d/2}\exp(-|\mathsf{x}|^2/2)$ d-változós standard normális sűrűségnek megint önmaga a Fourier transzformáltja,

$$u(t,\mathsf{x}) = (2\pi\sigma^2 t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^2/2\sigma^2 t) u_0(\mathsf{y})\,\mathsf{dy} \tag{14.55}$$

a homogén egyenlet u_0 kezdeti értékhez tartozó megoldása; az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását kettős konvolúcióval kapjuk. $**$

A hullámegyenlet: A $\partial_t^2 u = c^2\partial_x^2 u + f(t,x)$ egyenlet megoldásához az $u(0,x) = u_0(x)$ és $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ kezdeti értékeket kell ismerni. u és f Fourier transzformáltjára most a $\partial_t^2\hat{u} + c^2\omega^2\hat{u} = \hat{f}$ egyenletet kapjuk, tehát

$$\hat{u}(t,\omega) = \hat{u}_0(\omega)\cos(c\omega t) + \hat{v}_0(\omega)\,\frac{\sin(c\omega t)}{c\omega} + \frac{1}{c\omega}\int_0^t \sin(c\omega t - c\omega s)\,\hat{f}(s,\omega)\,d\omega\,.$$

Ha nem is nyilvánvaló módon, de innen következik D'Alambert nevezetes képlete:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct)+u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy$$
$$+\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-ct+cs}^{x+ct-cs} f(s,y)\,dy\,ds\,. \tag{14.56}$$

Ennek megértéséhez először azt kell észrevenni hogy $(1/c\omega)\sin(c\omega t)$ a $(\sqrt{2\pi}/2c)\theta(ct-|x|)$ függvény x szerint képezett Fourier transzformáltja, ahol θ a Heaviside függvény, $\theta(y)=1$ ha $y>0$, egyébként $\theta(y)=0$. Másrészt, az x ponra koncentrált δ_x Dirac mérték Fourier képe éppen $(2\pi)^{-1/2}e^{\imath\omega x}=0$, tehát $\cos(c\omega t)$ a $(\sqrt{2\pi}/2)(\delta_{ct}+\delta_{-ct})$ Fourier transzformáltja. Látjuk hogy a Fourier transzformáció fogalmát érdemes *általánosított függvényekre* (disztribúciók) is kiterjeszteni.

** A $\partial_t^2 u(t,\mathsf{x}) = c^2\Delta u(t,\mathsf{x})$ d-dimenziós hullámegyenlet Fourier transzformáltja $\partial_t^2\hat{u}+c^2|\boldsymbol{\omega}|^2\hat{u}$, ahol $\boldsymbol{\omega}$ a frekvenciákból alkotott vektor, tehát

$$\hat{u}(t,\boldsymbol{\omega}) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\omega})\cos(c|\boldsymbol{\omega}|t) + \hat{v}_0(\boldsymbol{\omega})\,\frac{\sin(c|\boldsymbol{\omega}|t)}{c|\boldsymbol{\omega}|}\,.$$

Mivel $\cos(c|\boldsymbol{\omega}|t)$ éppen $\sin(c|\boldsymbol{\omega}|t)/c|\boldsymbol{\omega}|$ idő szerinti deriváltja, azt kell kitalálni hogy az utóbbi minek a Fourier transzformáltja. Huygens elve szerint az $r=ct$ sugarú gömb felszínének mértékét kell transzformálni, ami a $d=3$ tér gömbi koordinátáival

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\oint_{S_r^2(0)} e^{-\imath\langle\boldsymbol{\omega},\mathsf{x}\rangle}\,S(d\mathsf{x}) = \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\vartheta)e^{-\imath r|\boldsymbol{\omega}|\sin\vartheta}\,d\vartheta = \frac{2r\sin(r|\boldsymbol{\omega}|)}{\sqrt{2\pi}|\boldsymbol{\omega}|}\,,$$

ahol $S_r^2(\mathsf{x})$ az x középpontú és $r>0$ sugarú gömb felülete, dS a felszín szerinti integrátor. Kirchoff képlete innen közvetlenül következik:

$$u(t,\mathsf{x}) = \partial_t \oint_{S_{ct}(\mathsf{x})}\frac{u_0(\mathsf{y})\,S(d\mathsf{y})}{4\pi c^2 t} + \oint_{S_{ct}(\mathsf{x})}\frac{v_0(\mathsf{y})\,S(d\mathsf{y})}{4\pi c^2 t}\,, \tag{14.57}$$

és az inhomogén egyenlet (kényszerrezgés) megoldását is fel lehetne írni.

A síkon az S^1 egyégkör ívmértékének Fourier transzformáltja

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{S^1} e^{-\imath\langle\boldsymbol{\omega},\mathsf{x}\rangle}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\imath|\boldsymbol{\omega}|\cos\varphi}\,d\varphi = J_0(|\boldsymbol{\omega}|)\,,$$

ahol J_0 egy *Bessel függvény,* lásd a peremérték feladatoknál,

$$J_0(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\imath\omega\sin\varphi}\,d\varphi = \int_{-1}^{1}\frac{\exp(\imath\omega x)\,dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Ennek valami köze azért van a $\sin(|\boldsymbol{\omega}|)/|\boldsymbol{\omega}|$ függvényhez mert

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin(a|\boldsymbol{\omega}|)}{|\boldsymbol{\omega}|}e^{\imath\langle\boldsymbol{\omega},\mathsf{x}\rangle}\,d\mathsf{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\sin(ar)e^{\imath r|\mathsf{x}|\cos\varphi}\,d\varphi\,dr = \int_0^\infty \sin(ar)J_0(r|\mathsf{x}|)\,dr\,,$$

de J_0 páros függvény, tehát nem Fourier, hanem Laplace transzformáltat kaptunk. Ámde $\alpha>0$ és $|x|<a$ esetén

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+\imath a)r}J_0(r|\mathsf{x}|)\,dr = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{\alpha+\imath a-\imath|x|\cos\varphi} \to \frac{-\imath}{\sqrt{a^2-|x|^2}}$$

amint $\alpha\to 0$, és analitikus kiterjesztéssel az $|x|>a$ esetet is megkapjuk, vagyis

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin(a|\boldsymbol{\omega}|)}{2\pi|\boldsymbol{\omega}|}e^{\imath\langle\boldsymbol{\omega},\mathsf{x}\rangle}\,d\boldsymbol{\omega} = \frac{\theta(a-|\mathsf{x}|)}{\sqrt{a^2-|x|^2}}\,,$$

tehát az inverziós formula szerint

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{K_a(0)}\frac{e^{-\imath\langle\boldsymbol{\omega},\mathsf{x}\rangle}\,d\mathsf{x}}{\sqrt{a^2-|\mathsf{x}|^2}} = \frac{\sin(a|\boldsymbol{\omega}|)}{|\boldsymbol{\omega}|}\,,$$

ahol $K_r(\mathsf{x})$ az x középpontú és r sugarú körlap. Poisson igazolta hogy tényleg az innen következő

$$u(t,\mathsf{x}) = \partial_t \iint_{K_{ct}(\mathsf{x})} \frac{u_0(\mathsf{y})\,\mathsf{dy}}{2\pi c\sqrt{c^2t - |\mathsf{x}-\mathsf{y}|^2}} + \iint_{K_{ct}(\mathsf{x})} \frac{u_0(\mathsf{y})\,\mathsf{dy}}{2\pi c\sqrt{c^2t - |\mathsf{x}-\mathsf{y}|^2}} \tag{14.58}$$

képlet adja a megoldást. Látható hogy a síkon Huygens elve csak egyenlőtlenség formájában érvényes. [49]

A Poisson egyenlet: A $-\Delta u(\mathsf{x}) = f(\mathsf{x})$ egyenlet a Fourier térben $|\boldsymbol{\omega}|^2\hat{u}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{f}(\boldsymbol{\omega})$, és a $d = 3$ esetben a

$$\begin{aligned}\Phi_3(\mathsf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\imath\langle\boldsymbol{\omega},\mathsf{x}\rangle}\,\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \sin(\vartheta) e^{\imath|\mathsf{x}|r\cos\vartheta}\,d\vartheta\,dr \\ &= \frac{2}{|\mathsf{x}|\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin(r|\mathsf{x}|)}{r}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{|\mathsf{x}|\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Newton potenciált kapjuk. A konvolúciós formulával innen Poisson képlete,

$$u(\mathsf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathsf{y})\,\mathsf{dy}}{|\mathsf{y}-\mathsf{x}|} \tag{14.59}$$

következik. A levezetés elég nagyvonalú volt mert $|\boldsymbol{\omega}|^{-2}$ nem integrálható; a képlet helyessége Gauss és Green tételeivel ellenőrizhető, lásd (12.27). A síkon érvényes (12.28), azaz

$$u(t,\mathsf{x}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \log(1/|\mathsf{x}-\mathsf{y}|) f(\mathsf{y})\,\mathsf{dy} \tag{14.60}$$

képlethez Fourier transzformációval nem is olyan könnyű eljutni. ∗∗

15. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ÉS RENDSZEREK

A differenciál és integrálszámítás elsődleges célja ezek megoldása, Newton minden bizonnyal ezért kezdeményezte az analízis alapjainak kidolgozását. Az

$$\dot{x}_k(t) = f_k\big(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_d(t)\big)\,, \quad k = 1, 2, ..., d \tag{15.1}$$

elsőrendű rendszer általános megoldása a megoldások olyan $x_k(t) = \phi_k(t, c_1, c_2, ..., c_d)$ halmaza hogy, az értelmezési tartományon belül, minden $x_k(t_0) = x_{k,0}$, $k = 1, 2, ..., d$ kezdeti feltétel kielégíthető, vagyis meg tudjuk választani a c_k számokat úgy hogy $x_{k,0} = \phi_k(t_0, c_1, c_2, ..., c_d)$ teljesüljön. Természetes feltételek garantálják az általános megoldás létezését, és azt is, hogy a kezdőfeltétel a megoldást egyértelműen meghatározza. Nem véletlen hogy d ismeretlent tartalmazó elsőrendű rendszer általános megoldása éppen d paramétert tartalmaz. Az

$$\ddot{x}_k(t) = f_k(t, x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, ..., x_d, \dot{x}_d)\,,\ k = 1, 2, ..., d \tag{15.2}$$

másodrendű rendszer az $y_k := \dot{x}_k$ új ismeretlenek bevezetésével $2d$ egyenletből álló elsőrendű rendszerré alakul át, tehát az ő általános megoldása $2d$ szabad paramétert tartalmaz. Hasolóan járhatunk el magasabbrendű deriváltakat is tartalmazó egyenleteknél.

15.1. **Lineáris egyenletek.** Olykor általános megoldóképletük van, és sok nemlineáris probléma redukálható lineárisra.

Inhomogén lineáris egyenlet: Az $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t)$ egyenlet $x(0) = 0$ kezdőértékű megoldását keressük. Az $f \equiv 0$ esetben homogén lineáris egyenletről beszélünk. Legyen $\alpha(t) := \int_0^t a(s)\,ds$, ekkor $\partial_t(x(t)e^{-\alpha(t)}) = f(t)e^{-\alpha(t)}$, tehát a Newton - Leibniz formulával $x(t)e^{-\alpha(t)} = x(0) + \int_0^t f(s)e^{-\alpha(s)}\,ds$, így az általános megoldás

$$x(t) = x(0)\,e^{\alpha(t)} + \int_0^t \exp(\alpha(t) - \alpha(s))\,f(s)\,ds\,. \tag{15.3}$$

A levezetésből az is látható hogy más megoldás nincs.

[49] Ez a formula Kirchoff képletéből is levezethető: a térbeli hullámegyenletnek azokat a megoldásait kell meghatározni amelyek csak két koordinátától függnek.

Az inhomogén egyenlet megoldása az $x = c(t)\varphi_(t)$ alakban is megtalálható, ahol φ a homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Behelyettesítés után c meghatározására a $\dot{c}\varphi(t) = f(t)$ integrálható egyenletet kapjuk, a kezdeti értéket $c(0)\varphi(0) = x(0)$ adja. A $\varphi := e^{\alpha(t)}$ esetben persze megint a (15.3) képlethez jutunk; ez az *állandók variálásának* legegyszerűbb változata.
Komplex egyenlet: A $\dot{z} = cz + f(t)$ egyenlet, ahol $z(t) = x(t) + \imath y(t)$, $c = \alpha + \imath\beta$ és $f(t) = g(t) + \imath h(t)$, ugyanúgy oldható meg mint a valós esetben, általános megoldása

$$z(t) = z(0)e^{ct} + \int_0^t \exp(ct - cs)f(s)\,ds\,;$$

az integrál számolásakor Euler képlete használható. Mivel

$$\dot{x} + \imath\dot{y} = (\alpha + \imath\beta)(x + \imath y) + g(t) + \imath h(t) = \alpha x - \beta y + g + \imath(\alpha y + \beta x + h)\,,$$

egyúttal az $\dot{x} = \alpha x - \beta y + g$ és $\dot{y} = \beta x + \alpha y + h$ egyenletekből álló rendszert is megoldottuk. A homogén rendszer általános megoldása

$$x(t) = \mathrm{Re}\ e^{ct}z(0) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)x(0) - e^{\alpha t}\sin(\beta t)y(0)\,,$$
$$y(t) = \mathrm{Im}e^{ct}z(0) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)x(0) + e^{\alpha t}\cos(\beta t)y(0)\,.$$

Másodrendű egyenletek: A komplex egyenletből az $\alpha = 0$, $\beta = \omega$ és $f = 0$ esetben a harmonikus rezgés $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ egyenletét kapjuk az y változó kiküszöbölésével. Ez az észrevétel a *harmonikus kényszerrezgés* $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ egyeletének

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \dot{x}(0)\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin(\omega t - \omega s)f(s)\,ds \tag{15.4}$$

megoldóképletéhez is elvezet, ami persze közvetlenül ellenőrizhető, de valahogy ki kell találni. Valóban, az $\dot{x} = -\omega x$ és $\dot{y} = \omega x - (1/\omega)f(t)$ rendszer a $z := x + \imath y$ jelöléssel, a $\dot{z} = \imath\omega z - (\imath/\omega)f$ alakot ölti, amiből (15.4) Euler képletével adódik.

A csillapított kénszerrezgés $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$ egyenletét, ahol $\gamma, \omega > 0$, az $e^{\gamma t}$ tényezővel való átszorzás után tudjuk integrálni. Mivel $\partial_t^2(e^{\gamma t}x) = e^{\gamma t}\ddot{x} + 2\gamma e^{\gamma t}\dot{x} + \gamma^2 e^{\gamma t}x$, az $y := e^{\gamma t}x(t)$ függvény $\ddot{y} + \tilde{\omega}^2 y = e^{\gamma t}f(t)$ megoldása, ahol $\tilde{\omega} := \sqrt{\omega^2 - \gamma}$ képzetes szám is lehet, de az így levezetett

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t}\cos(\tilde{\omega}t) + \dot{x}(0)\,e^{-\gamma t}\,\frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\tilde{\omega}} + \frac{1}{\tilde{\omega}}\int_0^t e^{\gamma s - \gamma t}\sin(\tilde{\omega}t - \tilde{\omega}s)f(s)\,ds \tag{15.5}$$

megoldóképlet ilyenkor is érvényes.

Az általános $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x = f(t)$ egyenlet homogén részének *alapmegoldásai* a $\psi_\pm := e^{\lambda_\pm t}$ függvények, ahol λ_+ és λ_- a $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 0$ *karakterisztikus egyenlet* gyökei, $\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - al}$. A *belső rezonancia* $\gamma^2 = \alpha$ esetében csak egy, $\psi := e^{-\gamma t}$ megoldást kaptunk, ehhez $\phi := te^{-\gamma t}$ csatlakoztatható, mindenképpen van tehát két lényegesen különböző megoldásunk, ψ_1 és ψ_2. Ezek imeretében az inhomogén egyenlet megoldása $x(t) = c_1(t)\psi_1(t) + c_2(t)\psi_2(t)$ alakú lesz, amit állandók variálásá címen később részletezünk. Magasabbrendű egyenletek általános elméletét a Laplace transzformációnál is tárgyaltuk.
Másodrendű egyenlet változó együtthatókkal: Még az $\ddot{x}+2\gamma(t)\dot{x}+\alpha(t)x = \psi(t)$ másodrendű lineáris egyenlet megoldására sincs általános módszer, de ha tudjuk hogy $\varphi_1(t)$ megoldja a homogén ($\psi \equiv 0$) egyenletet, akkor a $c(t)$ függvény ügyes választásával megtalálhatjuk a homogén egyenlet másik, $\varphi_2(t) = c(t)\varphi_1(t)$ megoldását is. Konkrétan, a $\varphi_1(t)\ddot{c} + 2\left(\dot{\varphi}_1(t) + \gamma(t)\right)\dot{c} = 0$ egyenletet kell megoldani, ami elvi gondot nem okozhat.

Ha ismerjük a homogén egyenlet két *lényegesen különböző* φ_1 és φ_2 megoldását, akkor az *állandók variálásának elve szerint*, az inhomogén egyenlet megoldását az $x = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ alakban keressük. Behelyettesítéssel a két ismeretlenre csak egy egyenletet kapunk, tehát feltehetjük hogy $\dot{c}_1\varphi_1 + \dot{c}_2\varphi_2 = 0$, vagyis $\dot{x} = c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2$, továbbá $\ddot{x} = \dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{c}_2\dot{\varphi}_2 + c_1\ddot{\varphi}_1 + c_2\ddot{\varphi}_2$. Az inhomogén egyenletből átrendezés után

$$c_1(t)(\ddot{\varphi}_1 + 2\gamma\dot{\varphi}_1 + \alpha\varphi_1) + c_2(t)(\ddot{\varphi}_2 + 2\gamma\dot{\varphi}_2 + \alpha x_2) + \dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{c}_2\dot{\varphi}_2 = \psi(t)$$

következik, tehát a már felhasznált $\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0$ egyenlet mellett $\dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = \psi(t)$ is rendelkezésünkre áll; a kezdeti feltételt $c_1(0)\varphi_1(0)+c_2(0)\varphi_2(0) = x(0)$, és $c_1(0)\dot{\varphi}_1(0)+c_2(0)\dot{\varphi}_2(0) = \dot{x}(0)$.

Ha az így kapott lineáris egyenletrendszer $W := \varphi_1\dot{\varphi}2 - \dot{\varphi}_1\varphi_2$ Vronski determinánsa sohasem nulla, akkor $\dot{c}_1$ és $\dot{c}_2$ meghatározható, és ezek integrálásával kapjuk a keresett $x = c_1x_1 + c_2x_2$ megoldást. Mivel φ_1 és φ_2 a homogén egyenlet megoldásai, $\dot{W} = -2\gamma(t)W(t)$, tehát $W(t) = W(0)\exp(-2\int_0^t \gamma(s)\,ds)$. Ha tehát $W(0) \neq 0$, akkor $W(t)$ később sem tünik el. Ilyenkor mondhatjuk hogy φ_1 és φ_2 lényegesen különböző. Megjegyezzük hogy $W = \varphi_1^2(d/dt)(\varphi_2/\varphi_1)$ ha $\varphi_1 \neq 0$, vagyis $\dot{W} = 0$ annyit jelent hogy φ_2 a φ_1 konstansszorosa.

Az állandó együtthatós csillapított rezgés mintájára átszorozhatjuk egyenletünket az $\exp(\Gamma(t))$ függvénnyel, ahol $\Gamma(0) = 0$ és $\Gamma'(t) = \gamma(t)$. Ez a manipuláció az $y(t) := x(t)\exp(\Gamma(t))$ helyettesítéshez vezet; y az $\ddot{y} + (a(t) - \gamma^2(t) - \dot{\gamma}(t))\,y = 0$ egyenletet elégíti ki, amit esetleg meg tudunk oldani.

15.2. **Nemlineáris első és másodrendű egyenletek.** Ezek között is akad explicit formában megoldható feladat, de fizikából eredő problámák általában nem ilyenek.

Szétválasztható egyenletek: Az $\dot{x}(t) = f(t)g(x)$ egyenletet (ha lehet) g-vel osztva és t_0-tól t-ig integrálva

$$F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)\,ds}{g(x(s))} = G(x(t)) - G(x(t_0)) \tag{15.6}$$

adódik, ahol F a f, G pedig az $1/g$ primitív függvénye. Eszerint, ha az $x(t_0) = x_0$ kezdőfeltételhez van megoldás, akkor azt a $G(x(t)) = G(x_0) + F(t) - F(t_0)$ implicit függvénykapcsolat határozza meg.

Igen sok feladat vezethető vissza erre az esetre, de vigyázni kell. A megoldás azonnal megszakad amint a $\varphi(t) := G(x_0) + F(t) - F(t_0)$ függvény kilép a G inverzének értelmezési tartományából. Például, az $\dot{x} = g(x)$ autonóm egyenletnek nem lehet végtelen intervallumon adott megoldása ha G korlátos. Az is előfordul, hogy a kezdeti érték a megoldást nem határozza meg. Például, $x(t) \equiv 0$ és $x(t) = t^2$ egyaránt kielégíti az $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ egyenletet, és az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt.

Érdekes az $\dot{x} = g(x) := x - x^3$ egyenlet, mert három stacionárius, vagyis időtől független megoldása van, $x_0(t) \equiv 0$, $x_1(t) \equiv 1$ és $x_2(t) \equiv -1$. Parciális törtekre bontással kapjuk hogy $1/g$ primitív függvénye

$$G(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{|1 - x^2|}, \tag{15.7}$$

tehát a $(0, x_0)$ ponton áthaladó megoldás kielégíti a $G(x(t)) = G(x_0) + t$ egyenletet, amiből egész jól látszik hogy $t \to \infty$ esetén mi történik. Zárjuk ki az $x_0 = 0, \pm 1$ stacionárius pontokat. Ekkor $G(x_0)$ véges, tehát $t \to +\infty$ esetén $G(x(t)) \to +\infty$ kell, hogy teljesüljön, vagyis $x^2(t) \to 1$. Mivel a megoldás az $x = 0$ egyenesen nem tud átjutni, $x(t) \to 1$ ha $x(0) > 0$, míg $x(t) \to -1$ ha $x(0) < 0$.

Egzakt egyenletek: A $g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy = 0$ alakra hozható egyenletek könnyedén megoldhatóak ha ismerünk olyan $f(x, y)$ függvényt, hogy $g(x, y) = f'_x(x, y)$ és $h(x, y) = f'_y(x, y)$. Ilyenkor $df = 0$, vagyis a megoldásnak tekinthető $(x(t), y(t))$ síkgörbe mentén $f(x(t), y(t))$ értéke állandó. Az implicit függvényről szóló tétel szerint az $f(x, y) = c$ egyenlet minden olyan (x_0, y_0) pont egy környezetében megoldható, ahol $f(x_0, y_0) = c$ és például $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Igy kapjuk az $y(x) = \varphi(t, c)$ általános megoldást.

Young tétele szerint $g'_y(x, y) = h'_x(x, y)$ ha van olyan f függvény hogy $g = f'_x$ és $h = f'_y$, és ez az f az

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} g(u, y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} h(x, v)\,dv \tag{15.8}$$

integrálással rekonstruálható. Valóban, a képletből $f'_y = h(x,y)$ azonnal látszik, míg

$$f'_x = g(x,x_0) + \int_{y_0}^{y} h'_x(x,v)\,dv = g(x,x_0) + \int_{y_0}^{y} g'_y(x,v)\,dv = g(x,y) \tag{15.9}$$

a Newton - Leibniz formulával következik.

Gyakori hogy a $g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$ egyenlet nem egzakt mert $g'_y \neq h'_x$, de könnyű olyan $c(x,y)$ integráló tényezőt találni, hogy $\tilde{g} := cg$ és $\tilde{h} := ch$ már eleget tesz a Young tétel által kiszabott $\tilde{g}'_y = \tilde{h}'_x$ feltételnek, tehát c-vel átszorozva az egyenlet egzakttá tehető. Tulajdonképpen ez történt a lineáris, és a szétválasztható egyenletek megoldásakor.

Az egzakt egyenletek megoldásának módszere a következőképpen is elmondható. Tegyük fel hogy az $\dot{x} = \phi(t,x)$ rendszernek ismerjük egy $f(t,x)$ integrálját (megmaradási elv), vagyis $\partial_t f(t,x(t)) = 0$ az egyenlet $x(t)$ megoldásai mentén. Ekkor f a megoldások mentén állandó, tehát $f(t,x(t)) = f(t_0,x(t_0))$. Ha ez az implicit függvénykapcsolat feloldható, akkor az ismeretlenek száma eggyel csökken. Igy használjuk ki a mechanika klasszikus megmaradási elveit (energia, impulzus, impulzusmomentum).

Homogén egyenletek: Az $y' = f(y/x)$ egyenlet az $u := y/x$ helyettesítéssel, $y' = u + xu'$ miatt az $xu' = f(u)u$ szétválasztható egyenletbe megy át, amit $(f(u)-u)^{-1}$ primitív függvényének meghatározásával oldhatunk meg. A kezdeti feltételt $t_0 > 0$ időpontban célszerű megadni. A változók ügyes helyettesítésével sok egyenlet redukálható ismert típusra. Ilyenkor fontos felismerni hogy mi minek a deriváltja; a helyettesítés sikeres volta csak több lépés után látható. Például, az $xy' = f(x) + y$ esetben is (y/x) deriváltját kell felismerni; az $u = (y/x)$ új változó $x^2u' = f(x)$ megoldása.

Bernoulli egyenlet: Az $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ egyenlet az $u = y^{1-\alpha}(x)$ helyettesítéssel az $u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$ lineáris egyenletre redukálódik, amit meg tudunk oldani.

Riccati egyenlet: A standard $y' + p(x)y + q(x) = y^2$ alak a kicsit általánosabb $z' + a(x)y = b(x) + c(x)z^2$ egyenletből az $y = c(x)z(x)$, az $u'' = p(x)u'(x) + q(x)u(x)$ egyenletből pedig az $y = -u'(x)/u(x)$ helyettesítéssel következik. Tudjuk hogy a másodrendű egyenlet egyik megoldásából az állandók variálásával a másikat is meg lehet kapni, ha tehát $y_0 = \varphi(x)$ a Riccati egyenlet partikuláris megoldása, akkor $y = \varphi(x) + w(x)$ megadja az általános megoldást mert a w-re kapott $w' + p(x)w = 2\varphi(x)w + w^2$ Bernoulli egyenletet már meg tudjuk oldani.

Euler típusú egyenletek: Az $a_0\,y(x) + a_1\,xy'(x) + a_2\,x^2y''(x) + \cdots + a_nx^ny^{(n)}(x) = 0$, $x \geq 0$ állandó együtthatós egyenletnek $y = x^\lambda$ alakú megoldásai vannak, ahol a λ kitevők az $a_0 + a_1\lambda + 2a_2\lambda(\lambda-1) + \cdots + a_n\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n) = 0$ egyenlet gyökei. Többszörös gyökök esetében a rezonáló megoldások $x^\lambda\log(x)$, $x^\lambda\log^2(x)$, ... alakúak. Az $x = e^t$ helyettesétés is használható, mert ha $u(t) := y(e^t)$ akkor $xy'(x) = e^ty'(e^t) = \dot{u}(t)$, $x^2y''(x) = e^{2t}y''(e^t) = \ddot{u}(t) - \dot{u}$, $x^3y'''(x) = \partial_t^3 u(t) - 3\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t)$, és így tovább, tehát lineáris egyenletet kapunk. Mivel $x^\lambda = e^{\lambda\log x}$ és $\log x = t$, mindkét módszer ugyanazt az eredményt adja. Az első végrehajtása egyszerűbb, a második változó együtthatókkal is müködhet, bár a lineáris egyenletek között is kevés a megoldható.

Anharmonikus rezgések: Az ingáról szóló $\ddot{x} + \sin x = 0$ feladat az $\ddot{x} + U'(x) = 0$ egyenlet speciális esete. Ezt a $H(t) = \dot{x}(t)^2/2 + U(x(t))$ mechanikai energia megmaradásának elvét alkalmazva, elsőrendű egyenletté redukálhatjuk. Valóban, ha $x(t)$ megoldás, akkor

$$\frac{dH(t)}{dt} = \dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x} = -\dot{x}U'(x) + U'(x)\dot{x} = 0\,, \tag{15.10}$$

tehát az $\dot{x}(t) = \pm\big(2H(0) - 2U(x(t))\big)^{1/2}$ autonóm egyenleteteket kapjuk, ahol persze $H(0) \geq U(x(t))$. Sajnos, a megoldást adó

$$G(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2H(0) - 2U(x)}} \tag{15.11}$$

primitív függvény szinte soha sem fejezhető ki elemi függvények segítségével. Például, a matematikai inga esetében $U(x) = -\cos x$, tehát $\cos x = 2 - 2\sin^2(x/2)$ révén feladatunk a nevezetes

$$F(\varphi, \gamma) := \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \alpha}} \quad \gamma^2 < 1 \tag{15.12}$$

elliptikus integrálra redukálódik, aminek az értékeit, a trigonometrikus függvényekhez hasonlóan, táblázatban tárolják.

$**$ **Nagy amlplitudók:** Konkrét kérdésekre azért néha a megoldás egyszerű képlete nélkül is válaszolni lehet. Például, tegyük fel hogy U konvex és $x = 0$ a szigorú minimumának helye. Az egyenlet nemlineáris rezgést ír le, legyen $x(0) = a > 0$ a kezdeti amplitúdó, míg a kezdeti sebesség $\dot{x}(0) = 0$. Jelölje $T(a)$ azt az időpontot amikor $x(t)$ először lesz nulla; ha U páros akkor T éppen a rezgésidő negyede. (6.14) alapján

$$T(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2U(a) - 2U(x)}} < +\infty. \tag{15.13}$$

Mivel $U(a) - U(x) \geq U'(x)(a - x) \geq U'(a/2)(a - x)$ ha $a/2 < x < a$ míg $U(a) - U(x) \geq U(a) - U(a/2) \geq (a/2)U'(a/2)$ ha $0 < x < a/2$,

$$T(a) \leq \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{2U(a) - 2U(x)}} + \int_{a/2}^a \frac{dx}{\sqrt{2U(a) - 2U(x)}} \leq \frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt{U'(a/2)}}\,.$$

Ha tehát $a \ll U'(a/2)$ akkor $T(a) \to 0$ amint $a \to +\infty$. Ez a helyzet például ha $U(x) = |x|^{\alpha}$ és $\alpha > 2$. Erősen nemlineáris rezgéseknél a frekvencia lényegesen függ az amplitudótól. $**$

$**$ **Az inga kis lengései:** Az $\ddot{x} + \sin x = 0$ egyenletből az inga lengésideje

$$T(a) = 4\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos a}}\,,$$

ahol a a legnagyobb kitérés. Értékét az (4.19) elliptikus integrál táblázatából kereshetnénk ki, de kis kitéréseknél magunk is boldogulhatunk a T_l hatványsorba fejtésével. Az $x = ta$ helyettesítés után

$$T(a) = 4\int_0^1 \frac{a\,dt}{\sqrt{2\cos(at) - 2\cos a}} = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)f(t, a)}}$$

ahol

$$f(t, a) := \frac{2\cos(at) - 2\cos a}{(1 - t^2)a^2} = 1 - \frac{a^2}{12}(1 + t^2) + \frac{a^4}{360}(1 + t^2 + t^4) + \cdots$$

pozitív, $f(t, 0) = 1$, $f'_a(t, 0) = 0$, végül $f''_a(t, 0) = -(1 + t^2)/6$. Az integrál mögött differenciálva kapjuk hogy $T'_l(0) = 0$ és

$$T''(0) = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2 - (1 - t^2)}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt = \frac{\pi}{4}\,,$$

tehát $T(a) = 2\pi(1 + a^2/16 + o(a^2))$ ha a kicsi.

Kis rezgések, perturbációszámítás sorfejtéssel: Newton a $\sin x \approx x - x^3/6$ közelítés alapján számolta a kis lengések periódusát, ez a módszer is a fenti eredményt adja. A módosított egyenlethez tartozó $U(x) := x^2 - x^4/4$ *duplafenekű potenciál* alulról nem korlátos, ezért nagy kezdeti energiájú megoldás a potenciálvölgyből kiszabadulva felrobban. A precíz tárgyaláshoz a megoldásnak az amplitudó (kezdeti feltétel) szerinti sorfejtését, és hiba becslését is meg kellene csinálni. Azt később igazoljuk hogy a megoldás a kezdeti érték differenciálható függvénye.

Az $\ddot{x} + \sin x = 0$ egyenlet $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ megoldását $x = a\varphi_1(t) + a^2\varphi_2(t) + a^3\varphi_3(t) + O(a^4)$ alakban keressük, a közelítés hibája lényegesen függ az időtől. Mivel

$$\dot{x} = a\dot{\varphi}_1(t) + a^2\dot{\varphi}_2(t) + a^3\dot{\varphi}_3(t) + O(a^4)\,, \quad \ddot{x} = a\ddot{\varphi}_1(t) + a^2\ddot{\varphi}_2(t) + a^3\ddot{\varphi}_3(t) + O(a^4)$$

és $\sin x = a\varphi_1 + a^2\varphi_2 + a^3(\varphi_3 - \varphi_1^3/6) + O(a^4)$, $\ddot\varphi_1 + \varphi_1 = 0$, $\ddot\varphi_2 = \varphi_2$ és $\ddot\varphi_3 + \varphi_3 = \varphi_1^3/6$. A kezdeti értékek: $\varphi_1(0) = 1$ míg $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = \dot\varphi_3(0) = 0$, tehát $\varphi_1 = \cos t$, $\varphi_2 \equiv 0$ és így $\ddot\varphi_3 + \varphi_3 = (1/6)\cos^3 t$; amiből

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{6}\int_0^t \sin(t-s)\cos^3(s)\,ds = \alpha\cos t - \alpha\cos 3t + \beta t\sin t\,,$$

ahol $\alpha = 1/192$, $\beta = 1/16$, vagyis

$$x(t) = a\cos t + a^3(\alpha\cos t - \alpha\cos 3t + \beta t\sin t) + O(a^4)$$

a közelítő megoldás, ami kis amlitudók mellett is csak korlátozott ideig érvényes. A $T(a)$ lengésidő negyede az első gyökhely közelében lesz, a már ismert $T(a) = 2\pi(1 + a^2/16 + O(a^4))$ képlet behelyettesítéssel ellenőrizhető. $**$

Mozgás centrális erőtérben: Kepler feladata az $\ddot x + \partial_x U(r) = 0$ és $\ddot y + \partial_y U(r) = 0$ egyenletekhez vezet, ahol $r := (x^2+y^2)^{1/2}$, és $U(r) = -c/r$, $c > 0$. Célszerű az $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ poláris koordináták bevezetése, ekkor $\dot x = \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi$, $\dot y = \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi$, vagyis a rendszer energiája

$$H(t) := \tfrac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + U(r) = \tfrac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + U(r)\,. \tag{15.14}$$

Könnyű ellenőrizni hogy az energia a mozgás során nem változik, sőt az impulzus $M(t) := r^2\dot\varphi$ momentuma szintén állandó. Valóban,

$$\frac{dH(t)}{dt} = \dot x\ddot x + \dot y\ddot y + U'(r)\dot r = 0 \tag{15.15}$$

mert $\dot r = (\dot x + \dot y)/r$. Másrészt a $\sin\varphi = x/r$ egyenlet differenciálásával, $\cos\varphi = y/r$ miatt $r^2\dot\varphi = x\dot y - \dot x y$ adódik, tehát a mozgásegyenletek alapján $dM/dt = x\ddot y - \ddot x y = 0$. Ezek szerint $H(t) = H(0)$ és $M(t) = M(0)$, vagyis $\dot\varphi = M(0)/r^2$, végül

$$H(t) = \frac{\dot r^2}{2} + \frac{M(0)^2}{2r^2} + U(r) = H(0)\,. \tag{15.16}$$

Innen az

$$\dot r = \sqrt{2H(0) - 2U(r) - M(0)^2/r^2} \tag{15.17}$$

autonóm egyenletet kapjuk, ami elvileg megoldható, de az $U(r) = -c/r$ gravitációs potenciál esetében is elemi függvényekkel nem kifejezhető, szintén elliptikus, de az előzőnél bonyolultabb integrált kell meghatározni.

$**$ **Spontán bifurkáció:** Rendkívül érdekes az $U(y) := -y^4/4 + (a+b)y^3/3 - aby^2/2$, vagyis $U'(y) := y(y-a)(b-y) = -y^3 + (a+b)y^2 - aby$ példa, ahol $0 < a < b/2$, és $y(-l) = y(l) = 0$ a peremérték feladat. Nem kis meglepetésünkre van egy olyan $l_0 > 0$ érték hogy $l < l_0$ esetén csak a triviális, $y \equiv 0$ megoldás létezik, de az $l = l_0$ szintnél megjelenik egy nemtriviális megoldás is, amely a $[-l_0, l_0]$ intervallum belsejében pozitív és páros függvény. Ezután olyan $l_1 > l_0$ szint következik, hogy $l_0 < l \le l_1$ esetén pontosan két pozitív és páros megoldás van. Az is látható hogy az adott esetben negatív megoldás egyéltalén nincs. A nemtriviális megoldások így bekövetkező megjelenését és osztódását spontán bifurkációnak nevezzük.

A jelenség megértéséhez oldjuk meg az $\ddot x(t) + U'(x) = 0$ egyenletet az $x(0) = 0$ és $\dot x(0) = v > 0$ kezdeti feltétellel; $x_v(t)$ a megoldás. Ha van ilyen, akkor jelölje $\tau(v) > 0$ az első olyan $t > 0$ időpontot amikor $\dot x(t) = 0$ lesz, és legyen $\xi(v) := x_v(\tau(v))$. A $H := \dot x^2/2 + U(x)$ energia a megoldás mentén állandó, $v^2 = 2U(\xi(v))$, továbbá $\tau(v) = T(\xi(v))$, ahol

$$T(\xi) := \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{2U(\xi) - 2U(x)}}\,. \tag{15.18}$$

Mivel $U''(0) < 0$, $U''(a) > 0$, $U''(b) < 0$, és $a < b/2$ miatt $U(0) < U(b)$, $v^2 < 2U(b)$ a $\tau(v)$ időpont létezésének feltétele. Tehát $\tau(v)$ a $[-\lambda, \lambda]$ intervallumon van definiálva, ahol $\lambda := \sqrt{2U(b)}$, és $U(a) < 0$ miatt $a < \xi(v) \le b$. Mivel az $[a, b]$ intervallumon U szigorúan monoton, $T(\xi)$ azon az $[\alpha, b)$ intervallumon értelmezett, melyet $U(\alpha) = 0$ és $a < \alpha < b$ jellemez. Látható hogy $T(\alpha) = T(b) = +\infty$. A peremérték feladat pozitív és páros megoldásait azok az x_v görbék adják, amelyeknél $\tau(v) = l$. Valóban, a pozitív megoldás felveszi a maximumát, és a párossága miatt ez éppen az $x = 0$ helyen történik meg, tehát $y'(0) = \dot{x}(l) = 0$.

Teljesen elemi de trükkös számolással igazolható hogy a $\tau(v)$ függvénynek pontosan egy stacionárius pontja van, az abszolút minimum v_0 helye, tehát $l_0 = \tau(v_0)$, $l_1 = T(\alpha)$, és a bifurkáció tényleg úgy játszódik le, ahogy elmondtuk. Valamivel konkrétabban, az bizonyítható hogy $T'(\xi) = 0$ esetén $T''(\xi) > 0$. A T integrál felső határ szerinti differenciálása kockázatos, a deriváltakat célszerű az $x = \xi \sin\varphi$ helyettesítéssel kapott

$$T(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\xi \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2U(\xi) - 2U(\xi\sin\varphi)}} \tag{15.19}$$

alakból számolni. Legyen $G(\xi) = U(\xi) - U(\xi\sin\varphi)$ és $V(x) := 2U(x) - xU'(x)$, ekkor

$$T'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^{\pi/2} G^{-3/2}(2G - \xi G') \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \frac{V(\xi) - V(x)}{(2U(\xi) - 2U(x))^{3/2}} \, dx\,,$$

$$T''(\xi) = \frac{1}{\sqrt{32}} \int_0^{\pi/2} G^{-5/2}\big(3\xi(G')^2 - 4GG' - 2\xi GG''\big) \cos\varphi \, d\varphi\,.$$

Mivel $V(x) = x^4/2 - (a+b)x^3/3$ a $(0, a/2+b/2)$ intervallumon fogy, $T'(\xi) < 0$ ha $\xi < a/2+b/2$. Ha tehát $T'(\xi) = 0$ akkor $\xi \geq a/2 + b/2$ és $T''(\xi) = T''(\xi) + (3/\xi)T'(\xi)$, vagyis

$$\begin{aligned} T''(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{32}} \int_0^{\pi/2} G^{-5/2}\big((3/\xi)(2G - \xi G')^2 + 2GG' - 2\xi GG''\big) \cos\varphi \, d\varphi \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^{\pi/2} G^{-3/2}(G' - \xi G'') \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\xi^2} \int_0^{\xi} \frac{\xi V'(\xi) - xV'(x)}{(2U(\xi) - 2U(x))^{3/2}} \, dx\,; \end{aligned}$$

az utolsó lépésnél az $xV'(x) = xU'(x) - x^2U''(x)$ azonosságot használtuk ki. Minthogy $xV'(x) = 2x^4 - (a+b)x^3$ a $(0, a/2+b/2)$ intervallumon negatív, és $x > a/2 + b/2$ esetén monoton nő, az integrandus a kritikus $\xi > a/2+b/2$ tartományban pozitív, vagyis itt $T''(\xi) > 0$. Ezzel igazoltuk hogy a $T(\xi)$, és így a $\tau(v)$ függvénynek is csak egy stacionárius pontja van. $**$

15.3. **Lineáris rendszerek.** Tetszőleges $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ $n \times n$ méretű négyzetes mátrix függvény, és $\mathsf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$ vektor függvény esetén kereshetjük az $\dot{\mathsf{x}} = A(t)\mathsf{x} + \mathsf{f}(t)$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszernek azt az $\mathsf{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ megoldását, ami az $\mathsf{x}(t_0) = \mathsf{x}_0$ kezdőfeltételnek eleget tevő $\mathsf{x} = \mathsf{x}(t)$, $t \geq 0$ vektor értékű függvény. Az $\mathsf{f} \equiv 0$ esetben homogén, az $A(t) \equiv A$ esetben állandó együtthatós rendszerről beszélünk. A homogén rendszer megoldásai n-dimenziós lineáris teret alkotnak, és az inhomogén egyenlet megoldásai úgy állíthatók elő, hogy a homogén rendszer *általános megoldásához* hozzáadjuk az inhomogén rendszer egy *partikuláris* megoldását.
Mátrix exponenciális függvénye: A legegyszerűbb $\dot{x} = ax$ egyenlet megoldásának mintájára bevezetjük a $\Phi(t) := e^{At}$ mátrix függvényt az exponenciális függvény hatványsorának segítségével. Ehhez csak azt kell megérteni hogy a komplex számokhoz hasonlóan, a négyzetes mátrixok olyan (valós vagy komplex) lineáris teret alkotnak aminek az elemeit össze is lehet szorozni, tehát az A polinomjai minden további nélkül definiálhatók. Ráadásul $\|A\| := \max\{|A\mathsf{x}| : |\mathsf{x}| \leq 1\}$ *norma* ezen a téren, ami az $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ Cauchy egyenlőtlenségnek eleget tesz, tehát mátrixok hatványsorai a komplex hatványsorok mintájára definiálhatók, és az alapvető tételek bizonyításai is változatlanok. Konkrétan, az

$$e^{At} \equiv \exp(At) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \tag{15.20}$$

sor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, és $e^{At+As} = e^{At}e^{As}$, vagyis $e^{At}e^{-At} = I$, továbbá $\partial_t e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$.

Tegyük fel hogy $\mathsf{x} = \mathsf{x}(t)$ az $\dot{x} = A\mathsf{x}$ állandó együtthatós rendszer megoldása, ekkor

$$\partial_t(e^{-At}\mathsf{x}(t)) = e^{-At}\dot{\mathsf{x}}(t) - Ae^{-At}\mathsf{x}(t) = 0\,,$$

tehát $\mathsf{x}(t) = e^{At}\mathsf{x}_0$, és behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról hogy ez tényleg megoldás. A levezetés azt is mutatja hogy másik megoldás nincs. Az is látható hogy $\mathsf{x}(t) = e^{At}\mathsf{x}_0$ esetén $\mathsf{x}_0 = e^{-At}\mathsf{x}(t)$, tehát $\mathsf{x}(t) = 0$ csak akkor lehetséges ha $\mathsf{x}_0 = 0$. Eszerint a lineárisan független megoldások száma pontosan annyi mint A mérete.

Például, az $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ másodrendű egyenlet az $y := \dot{x}$ változó bevezetésével az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\omega^2 x$ rendszerré írható át, melynek A mátrixa az $A^2 + \omega^2 I = 0$ egyenlet gyöke, ahol I az identitás. Kihasználva az $\imath^2 + 1 = 0$ analógiát, az Euler képlet levezetéséhez hasonlóan kapjuk hogy $e^{At} = \cos(\omega t)I + (1/\omega)\sin(\omega t)A$, tehát

$$x(t) = \cos(\omega t)x(0) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,\dot{x}(0) = a\cos(\omega t + \alpha) \tag{15.21}$$

a harmonikus rezgés egyenletének általános megoldása. Az általános esetben azt a lehetőleg minimális fokszámú p polinomot, a minimálpolinomot kell megkeresni, aminek A gyöke, vagyis $p(A) = 0$. Ezután az $e^{zt} = p(z)q(z)+r(z)$ maradékos osztást kell elvégezni, mert $e^{At} = r(At)$ adja az általános megoldást. A maradékos osztás a mátrix méretétől független számolás eredménye, tehát ez a módszer numerikus eljárásként is előnyös.

$**$ **Liouville képlete:** Az exponenciális függvény eredeti definíciója is alkalmazható mátrixokra és operátorokra. Ha A négyzetes mátrix akkor

$$\exp A = \lim_{n\to\infty} (I + A/n)^n . \tag{15.22}$$

$\heartsuit$ A bizonyítás gyakorlatilag ugyanaz mint valós vagy komplex számok esetében, a binomiális tétel után dominált konvergenciára kell hivatkozni. $\Box$ Innen adódik hogy $\det e^A = \exp(\operatorname{Tr} A)$.
$\heartsuit$ Először azt kell észrevenni hogy $\det(I + \varepsilon A + o(\varepsilon)B) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + o(\varepsilon)$ amint $\varepsilon \to 0$, mert csak a teljesen a főátlóból származó szorzatoknak nem $o(\varepsilon)$ az együtthatója, és az is csak akkor ha egy kivételével midegyik tényező 1. Ezután már csak a determinánsok szorzási tételét kell alkalmazni:

$$\det\exp A = \lim_{n\to\infty}\left(\det\left(I + \frac{A}{n}\right)\right)^n = \exp(\operatorname{Tr} A) \tag{15.23}$$

a fentiek alapján. $\Box$

Eszerint $\det e^{At}$ nem lehet nulla, sőt Liouville nyomán mondhatjuk hogy az $\mathbb{R}^n$ fázistérben az egyenlet által keltett $\mathsf{x}(t) = e^{At}\mathsf{x}_0$ áramlás a kezdetben egységnyi fázistérfogatot t idő alatt $\exp(t\operatorname{Tr} A)$ térfogatba viszi át. $**$

Inhomogén rendszer: Hasonlóan kezelhető az $\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x} + \mathsf{f}(t)$ állandó együtthatós inhomogén rendszer is. Ugyanúgy mint egyetlen egyenletnél,

$$\mathsf{x}(t) = e^{At}\,\mathsf{x}(0) + \int_0^t e^{At-As}\,\mathsf{f}(s)\,ds \tag{15.24}$$

az általános megoldás. Szóban is megfogalmazható az a szabály hogy inhomogén lineáris rendszer általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege. A homogén egyenlet általános megoldása annyi lineárisan független megoldásnak a lineáris kombinációja, ahány változó van. Időfüggő $A = A(t)$ mátrix esetén az (15.3) – (15.24) mintájára felírható képlet csak akkor helyes, és akkor könnyen igazolható is, ha $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ mindig teljesül.

Másodrendű rendszerek: A $\ddot{\mathsf{x}} + \Omega^2\mathsf{x} = 0$ rendszer az $\mathsf{y} := \dot{\mathsf{x}}$ változók bevezetésével $2n$ mértű elsőrendű rendszerre redukálódik, de a harmonikus oszcillátornál megismert megoldóképlet közvetlenül is átmenthető. Hatványsorukkal definiálhatjuk a $\cos(\Omega t)$ és $\sin(\Omega t)$ mátrixokat. A differenciálás szabályai változatlanok: $\partial_t\cos(\Omega t) = -\Omega\sin(\Omega t)$ és $\partial_t\sin(\Omega t) = \cos(\Omega t)\Omega$, tehát

$$\mathsf{x}(t) = \cos(\Omega t)\mathsf{x}(0) + \Omega^{-1}\sin(\Omega t)\,\dot{\mathsf{x}}(0) \tag{15.25}$$

az általános megoldás, ami arra az esetre is kiterjeszthető amikor Ω nem invertálható. Az $\ddot{\mathsf{x}} + \Omega^2\mathsf{x} = \mathsf{f}(t)$ inhomogén rendszer megoldóképlete is ugyanúgy néz ki mint az egyváltozós esetben,

$$\mathsf{x}(t) = \Omega^{-1}\int_0^t \sin(\Omega t - \Omega s)\mathsf{f}(s)\,ds \tag{15.26}$$

az $\mathsf{x}(0) = \dot{\mathsf{x}}(0) = 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő partikuláris megoldás. A $\ddot{\mathsf{x}} + 2\Gamma\dot{\mathsf{x}} + \Omega^2\mathsf{x} = \mathsf{f}(t)$ csillapított rendszer csak akkor tárgyalható ugyanúgy mint az egyváltozós egyenlet ha a Γ és Ω mátrixokat fel lehet cserélni: $\Gamma\Omega = \Omega\Gamma$.

Megoldás sajátvektorokkal: Az $\mathsf{x}(t) = e^{At}\mathsf{x}_0$ megoldás számolása akkor a legegyszerübb ha meg tudjuk oldani az $A\mathsf{u} = \lambda\mathsf{u}$ sajátérték feladatot, és

$$\mathsf{x}_0 = c_1\mathsf{u}_1 + c_2\mathsf{u}_2 + \cdots + c_n\mathsf{u}_n\,, \tag{15.27}$$

ahol u_k a λ_k sajátértékhez tartozó (jobboldali) sajátvektor. Ekkor

$$\mathsf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathsf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathsf{u}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_d t}\mathsf{u}_n \tag{15.28}$$

a homogén egyenlet megoldása lesz, ami teljes összhangban van az $\mathsf{x}(t) = e^{At}\mathsf{x}_0$ képlettel. Analóg módon adható meg másodrendű rendszer megoldása is. Ha A valós, szimmetrikus vagy normális, $n \times n$ méretű mátrix, akkor az n darab valós sajátértékhez ugyanannyi sajátvektor tartozik. Ha A nem szimmetrikus, akkor a sajátértékek és a sajátvektorok koordinátái általában komplex számok lesznek, de ha a mátrix elemei és a kezdeti értékek is valós számok, akkor az így kapott megoldás végső soron mindíg valós értékű, a képzetes része nulla. Fizikailag érdekes problémáknál sem ritka hogy a a lineárisan független sajátvektorok kevesebben vannak mint az egyenletek. Ilyenkor rezonanciáról beszélünk, és az általános megoldás meghatározása bonyolultabb.

Többszörös sajátértékek: Nézzük először azt az esetet amikor $A = \lambda I + E$ n méretű Jordan blokk, vagyis $\lambda \in \mathbb{C}$, I az egységmátrix, $E = (e_{k,j})$ pedig olyan hogy az $e_{k,k+1} = 1$ kivételével mindegyik elem nulla. Mivel E hatványozásakor az egyesek a jobb felső sarok felé tolódnak el, $E^n = 0$ és

$$e^{At} = e^{\lambda t}e^{Et} = e^{\lambda t}\left(I + tE + \frac{t^2}{2}E^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E^{n-1}\right), \tag{15.29}$$

amit a koordinátánként kiírt $\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_3$,..., $\dot{x}_{n-1} = \lambda x_{n-1} + x_n$, $\dot{x}_n = \lambda x_n$ egyenletek rekurzívmegoldásával is megkaphattunk volna.

Ennek alapján, a Jordan blokkok elméletének tudatában, a következő algoritmus vezet el az általános feladat megoldásához. Ha $A\mathsf{u} = \lambda\mathsf{u}$ és λ többszörös sajátérték, akkor kereshetjük azokat a $\mathsf{v}_0 := \mathsf{u}$, $\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, ..., \mathsf{s}_r$ fővektorokat, amelyeket az $(A - \lambda I)\mathsf{v}_1 = \mathsf{u}$, $(A - \lambda I)\mathsf{v}_2 = \mathsf{v}_1$, ..., $(A - \lambda I)\mathsf{v}_r = \mathsf{v}_{r-1}$ egyenletek definiálnak. Világos hogy $\boldsymbol{\varphi}_0(t, \mathsf{u}) := e^{\lambda t}\,\mathsf{u}$ és $\boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathsf{u}) := e^{\lambda t}\,(t\mathsf{u} + \mathsf{v}_1)$ is megoldás. Legyen

$$\boldsymbol{\varphi}_r(t, \mathsf{u}) := e^{\lambda t}\left(\frac{t^r}{r!}\mathsf{u} + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\mathsf{v}_1 + \cdots + t\mathsf{v}_{r-1} + \mathsf{v}_r\right),\ r = 0, 1, 2\dots. \tag{15.30}$$

Mivel $\partial_t\boldsymbol{\varphi}_r(t, \mathsf{u}) = \lambda\boldsymbol{\varphi}_r(t, \mathsf{u}) + \boldsymbol{\varphi}_{r-1}(t, \mathsf{u})$, mindaddig újabb megoldásokat kapunk, ameddig ez az eljárás folytatható. A lineáris algebrából tudjuk hogy a maximális r éppen eggyel kisebb mint az u sajátvektorhoz tartozó Jordan blokk mérete, tehát ezt az eljárást mindegyik sajátvektorral elvégezve n darab lineárisan független megoldáshoz jutunk. Ezek lineáris kombinációiként a homogén egyenlet minden megoldása előállítható, és az inhomogén egyenletet is meg tudjuk oldani.

Kvázipolinomok: Konkrét számolásra valamivel alkalmasabb a módszer következő változata. Jelölje m_k a λ_k sajátérték multiplicitását, és legyen $\mathsf{q}(t)$ az $e^{\lambda_k t}$, $te^{\lambda_k t}$,... , $t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}/(m_k - 1)!$ kvázipolinomokból alkotott n méretű vektor. A fentiek szerint a homogén egyenlet megoldásai $\mathsf{x} = C\mathsf{q}(t)$ alakúak, ahol C $n \times n$ konstans mátrix. A $C\dot{\mathsf{q}} = AC\mathsf{q}$ és $C\mathsf{q}(0) = \mathsf{x}(0)$ egyenleteket kell megoldani, ami azért lehetséges mert mindkét oldal kvázipolinomok lineáris kombinációja, és az együtthatóik egyenként egyenlők kell hogy legyenek. Mivel

$$\frac{d}{dt}\frac{t^j e^{\lambda_k t}}{j!} = \frac{\lambda_k t^j e^{\lambda_k t}}{j!} + \frac{t^{j-1}e^{\lambda_k t}}{(j-1)!}\,,$$

a számolás nem bonyolult, csak hosszadalmas.

15.4. **Változó együtthatós rendszer, az állandók variálása.** Először az $\dot{\mathsf{x}} = A(t)\mathsf{x}$ *időfüggő homogén lineáris rendszerrel* foglalkozunk, feltesszük hogy az $A(t)$, $t \geq 0$, $n \times n$ méretű mátrix elemei a t idő folytonos és korlátos függvényei. A következő szakaszban kifejtendő elmélet szerint minden $t_0 \geq 0$ időponthoz és $\mathsf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz, az $\mathsf{x}(t_0) = \mathsf{x}_0$ kezdeti feltétel mellett pontosan egy $\mathsf{x} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható megoldás van. Eszerint a *megoldások n-dimenziós lineáris teret alkotnak*, tehát az általános megoldás $\mathsf{x}(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ alakú, ahol $\boldsymbol{\varphi}_k$ az $\mathbb{R}^n$ fázistér e_k bázisvektorához és a $t_0 = s \geq 0$ időponthoz mint kezdeti értékhez tartozó megoldás: $\boldsymbol{\varphi}_k(s) = \mathsf{e}_k$ és $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_k = A(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)$, $t \geq 0$ és $k = 1, 2, ..., n$, vagyis c_k az $\mathsf{x}(s)$ k-ik koordinátája. Az $s \geq 0$ kezdeti időpont tetszőleges, és mindez úgy is elmondható hogy minden $t, s \geq 0$ időponthoz van olyan $\Phi(t|s)$ mátrix hogy $\mathsf{x}(t) = \Phi(t|s)\mathsf{x}(s)$ ha x megoldás; $\Phi(t|s)$ éppen a fenti $\boldsymbol{\varphi}_k$ oszlopvektorokból áll. *Determinizmus van:* $\Phi(t|s) = \Phi(t|\tau)\Phi(\tau|s)$ $\forall\ s, \tau, t \geq 0$, tehát $\Phi(s|s) = I$ és $\Phi(t|s)\Phi(s|t) = I$. Eszerint Φ invertálható, és a *$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ alapmegoldások minden adott $t \geq 0$ esetén lineárisan függtlenek, vagyis bázist alkotnak.* A Φ mátrix determinánsa is meghatározható.

$**$ **A Vronski determináns:** Megmutatjuk hogy a $W(t) := \det\Phi(t|0)$ *determináns eleget tesz a $\dot{W} = W(t)\ \mathrm{Tr}\, A(t)$ egyenletnek,* vagyis *Liouville tétele most a*

$$W(t) = W(0)\exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}\, A(s)\, ds\right) . \tag{15.31}$$

formában érvényes. $\heartsuit$ Azt kell kihasználni hogy a determináns mindegyik oszlopvektorának lineáris függvénye, tehát $\dot{W} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$, ahol $W_k(t) = \det\, \Phi'_k$ és $\Phi'_k(t)$ az a mátrix amiben $\boldsymbol{\varphi}_k$ helyén $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_k = A(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ áll. Mivel $A(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}_1 + c_2\boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\varphi}_n$, $W_k(t) = c_k(t)W(t)$. Másrészt $\Phi(t|0) = \Phi(t|s)\Phi(s|0)$ miatt $W(t) = \det\Phi(t|s)W(s)$ miatt a $\partial_t\det\Phi(t|s)$ deriváltat a $t = s$ helyen kell meghatározni, ami éppen $\mathrm{Tr}\, A(t)$ mert $\Phi(s|s) = I$. $\square$ $**$

A fentiek alapján az $\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x} + \mathsf{f}(t)$ inhomogén rendszer már rutinszerűen oldható meg az az *állandók variálásával* ha ismerjük a homogén rendszer $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, ..., \boldsymbol{\varphi}_n$ alapmegoldásait, ahol n az egyenletek száma. A megoldást $\mathsf{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + c_2(t)\boldsymbol{\varphi}_2(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ alakban keressük. Mivel $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_k = A\boldsymbol{\varphi}_k$, a

$$\dot{c}_1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \dot{c}_2(t)\boldsymbol{\varphi}_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t) = \mathsf{f}(t) \tag{15.32}$$

és a $c_1(0)\boldsymbol{\varphi}_1(0)+c_2(0)\boldsymbol{\varphi}_2(0)+\cdots+c_n(0)\boldsymbol{\varphi}_n(0) = \mathsf{x}(0)$ egyenleteket kell megoldani. A másodikból a $c_k(0)$ számokat kapjuk, ezután a

$$\mathsf{f}(t) = b_1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + b_2(t)\boldsymbol{\varphi}_2(t) + \cdots + b_n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

kifejtésből a $\dot{c}_k = b_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, közvetlenül integrálható egyenleteket kapjuk. A $c_k(0)$ számok és a $b_k(t)$ függvények meghatározásŕa szolgáló lineáris rendszerek megoldhatáságát az alapmegoldások lineáris függetlensége garantálja.

Magasabbrendű egyenletek: Az $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{x}+a_nx = \psi(t)$ n-edrendű lineáris egyenlet megoldását a Laplace transzformációnál részben már tárgyaltuk. Azt még érdemes megjegyezni hogy az $x_0 := x$, $x_1 := \dot{x}$, $x_k := x^{(k)}$ jelöléssel az $\dot{x}_0 = x_1$, $\dot{x_1} = x_2$, $\dot{x}_k = x_{k+1}$ ha $k < n-1$ és $\dot{x}_{n-1} = -a_1x_{n-1} - \cdots - a_{n-1}x_1 - a_nx_0 = \psi(t)$ rendszert kapjuk, tehát eddigi tudásunk használható. A homogén egyenlet megoldásai n-dimenziós lineáris teret alkotnak, és az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának, és az inhomogén egyenlet egy tetszőleges (partikuláris) megoldásának összege. Az állandók variálásának módszere a következő eljárásra redukálódik. Ha $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,... ,$\varphi_n(t)$ a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai, akkor a kapcsolódó rendszer alapmegoldásai a $\boldsymbol{\varphi}_k := (\varphi_k, \dot{\varphi}_k, ..., \varphi_k^{(n-1)})$ vektorok, az inhomogén tag pedig $\mathsf{f}(t) := (0, 0, ..., 0, \psi(t))$. Az inhomogén egyenlet megoldását a $\phi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n(t)$ alakban keressük, amiben n ismeretlen szerepel, de az eredeti egyenletből csak egy összefüggést kapunk. Viszont (15.32) alapján írhatjuk hogy

$$\dot{c}_1(t)\varphi_1^{(k)}(t) + \dot{c}_2(t)\varphi_2^{(k)}(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\varphi_n^{(k)}(t) = 0 \quad \text{ha } k < n-1\,, \tag{15.33}$$

$$\dot{c}_1(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dot{c}_2(t)\varphi_2^{(n-1)}(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\varphi_n^{(n-1)}(t) = \psi(t)\,, \tag{15.34}$$

ahol $\{\varphi_k\}$ lineáris függetlensége miatt

$$\psi(t) = b_1(t)\varphi_1(t) + b_2(t)\varphi_2(t) + \cdots + b_n(t)\varphi_n(t)\,.$$

Ugyanúgy mint (15.32) esetében, a $\dot{c}_k$ változók kifejezhetőek. A $c_k(0)$ kezdeti értékeket a

$$c_1(0)\varphi_1^{(k)}(0) + c_2(0)\varphi_2^{(k)}(0) + \cdots + c_n(0)\varphi_n^{(k)}(0) = x^{(k)}(0) \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

lineáris rendszer megoldásával kapjuk, ami szintén mindig lehetséges.

15.5. **Általános elmélet.** Az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(t, \mathsf{x})$ rendszer megoldhatóságát vizsgáljuk, ahol $\mathsf{x} = \mathsf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$, és $\mathsf{f} : D \mapsto \mathbb{R}^d$ a $D \subset \mathbb{R}^{1+d}$ nyilt halmazon folytonos leképezés. Azt mondjuk hogy f az $U \subset D$ halmazon Lipschitz feltételnek tesz eleget, ha van olyan $L = L_U$ szám hogy

$$|\mathsf{f}(t, \mathsf{x}) - \mathsf{f}(t, \mathsf{y})| \le L|\mathsf{x} - \mathsf{y}| \quad \forall\,(t, \mathsf{x}), (t, \mathsf{y}) \in U. \tag{15.35}$$

A megoldás létezését és egyértelműségét tisztázza a következő általános eredmény.

Tétel 15.1. *Ha* f *a* $(t_0, \mathsf{x}_0) \in D$ *egy környezetében korlátos és Lipschitz folytonos, akkor ebben a környezetben az egyenletnek pontosan egy olyan* $\mathsf{x} = \mathsf{x}(t)$ *megoldása van, amely eleget tesz az* $\mathsf{x}(t_0) = \mathsf{x}_0$ *kezdeti feltételnek.*

Bizony: A bizonyítás a Banach féle fixpont tétel módszerével, iterációval történik. Ha az $\mathsf{x}(t)$ görbe megoldás, akkor

$$\mathsf{x}(t) = \mathsf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{f}(s, \mathsf{x}(s))\,ds \tag{15.36}$$

abban a tartományban, ahol értelmezve van. Ha $(t, \mathsf{x}(t)) \in D$ a $K_\delta(t_0)$ környezetben, akkor itt definiálható az $\tilde{\mathsf{x}} = \Phi(\mathsf{x})$ leképezés az

$$\tilde{x}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \mathsf{x}(s))\,ds \tag{15.37}$$

képlettel. Fontos meggondolni hogy Φ folytonos függvényhez folytonos függvényt rendel hozzá, és a folytonos függvények tere teljes. A $\delta > 0$ számot úgy választjuk meg, hogy a Lipschitz feltétel a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ intervallumon teljesüljön. Ekkor

$$|\tilde{\mathsf{x}}(t) - \tilde{\mathsf{y}}(t)| \le L \int_{t_0}^{t} |\mathsf{x}(s) - \mathsf{y}(s)|\,ds\,, \tag{15.38}$$

ahol $\tilde{\mathsf{x}} = \Phi(\mathsf{x})$, $\tilde{\mathsf{y}} = \Phi(\mathsf{y})$, és $t > t_0$; hasonló becslés érvényes $t < t_0$ esetén is, tehát $\|\Phi(\mathsf{x}) - \Phi(\mathsf{y})\| \le 2L\delta\|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|$ a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ intervallumon. Ha tehát $q := 2L\delta < 1$, akkor ϕ kontrakció, tehát az $\mathsf{x}_{n+1} = \Phi(\mathsf{x}_n)$ szukcesszív approximáció konvergens, és határértéke a keresett, egyértelműen meghatározott megoldás. □

Ha $\mathsf{f} : \mathbb{R}^{1+d} \mapsto \mathbb{R}^d$ minden $t \in \mathbb{R}$ és $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^d$ esetén, ugyanazzal az L konstanssal elégíti ki a Lipschitz feltételt, továbbá a lineáris növekedés $|\mathsf{f}(t, x)| \le a + b|\mathsf{x}|$ feltétele is mindenütt teljesül, akkor az eljárást $\delta < 1/2L$ nagyságú lépésekkel ismételgetve mindenütt definiált globális megoldást kapunk.

A Grönwall lemma: A jobboldal lineáris növekedéséről szóló feltétel nem szükséges globális megoldások létezéséhez, és ugyanezt mondhatjuk a Lipschitz feltételről a megoldások egyértelműségével kapcsolatban. Például, az $\dot{x} = x^3$ egyenlet minden megoldása felrobban, míg az $\dot{x} = -x^3$ egyenlet valamennyi megoldása a teljes $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezve van, sőt $t \to +\infty$ esetén 0-hoz konvergál. Azt mondjuk hogy a második egyenlet jobboldalának jó az elő jele, vagyis teljesül az $\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}(t, \mathsf{x})\rangle \le a + b|\mathsf{x}|^2\ \forall\, t \ge 0, \mathsf{x} \in \mathbb{R}^d$ feltétel, ahol $a \ge 0$ és $b \in \mathbb{R}$ adott számok. Legyen ugyanis $u(t) := 1 + |\mathsf{x}(t)|^2$, ahol $\mathsf{x}(t)$ valamely $[0, T)$ intervallumon definiált megoldás, ekkor

$$\dot{u}(t) = 2\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}(t, \mathsf{x})\rangle \le 2a + 2b|\mathsf{x}(t)|^2 = 2a - 2b + 2bu(t)\,, \tag{15.39}$$

amit e^{-2bt}-vel szorozva $\partial_t(e^{-2bt}u(t)) \le (2a - 2b)e^{-2bt}$ adódik, vagyis integrálás után

$$|\mathsf{x}(t)|^2 \le |\mathsf{x}(0)|^2 e^{2bt} + \frac{a}{b}(e^{2bt} - 1) \tag{15.40}$$

a teljes $[0,T)$ intervallumon. Eszerint nem képzelhető el olyan véges intervallum, aminek a végén a megoldás felrobban. Megjegyezzük hogy a lineáris növekedés feltétele mellett $\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}(t,\mathsf{x})\rangle \leq a|\mathsf{x}| + b|\mathsf{x}|^2 \leq a + (b+a)|\mathsf{x}|^2$ mivel $y \leq 1 + y^2\ \forall y \in \mathbb{R}$, tehát ez a feltétel is működik.

A fenti számolás során tulajdonképpen azt használtuk ki hogy az $\dot{u} \leq a + bu$ differenciál egyenlő tlenség ugyanúgy oldható meg mintha egyenlet lenne. A következő egyenlőtlenség, a Grönwall lemma ezt a trükköt intregrál egyenlő tlenségekre is kiterjeszti, de ekkor a b szorzó már szükségképpen pozitív.

Tétel 15.2. *Ha az $u(t) \geq 0$, $t \geq 0$ fügvény eleget tesz az*

$$u(t) \leq a + b\int_0^t u(s)\,ds \tag{15.41}$$

egyenlőtlenségnek, ahol $a, b \geq 0$, akkor $u(t) \leq ae^{bt}$.

Bizony: Legyen $v(t) := \int_0^t u(s)\,ds$, ekkor $\dot{v} \leq a + bv$, tehát $\partial_t(e^{-bt}v(t)) \leq ae^{-bt}$, vagyis $v(0) = 0$ miatt $e^{-bt}v(t) \leq (a/b)(1 - e^{bt})$, tehát $bv(t) \leq ae^{bt} - a$. Ezt az eredeti egyenlőtlenségbe visszahelyettesítve kapjuk a bizonyítandó állítást. □

Grönwall lemmája két megoldás összehasonlítására a következő eredményt adja. Ha x és y az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(t,\mathsf{x})$ egyenlet két megoldása, akkor a Lipschitz feltétel érvényességi tartományában

$$|\mathsf{x}(t) - \mathsf{y}(t)| \leq |\mathsf{x}(0) - \mathsf{y}(0)| + L\int_0^t |\mathsf{x}(s) - \mathsf{y}(s)|\,ds\,,$$

vagyis $|\mathsf{x}(t) - \mathsf{y}(t)| \leq |\mathsf{x}(0) - \mathsf{y}(0)|\exp(tL)$, ami nemcsak a *megoldás egyértelműségét, hanem a kezdeti értéktől való Lipschitz folytonos függést* is igazolja. Ez a tulajdonság a Lipschitz feltételnél gyengébb $\langle \mathsf{x} - \mathsf{y}, \mathsf{f}(t,\mathsf{x}) - \mathsf{f}(t,\mathsf{y})\rangle \leq q\,(\mathsf{x} - \mathsf{y})^2$ egyenlőtlenségből is következik, mert ha $Q(t) := |\mathsf{x}(t) - \mathsf{y}(t)|^2$ akkor $\dot{Q}(t) \leq 2qQ(t)$, tehát $Q(t) \leq Q(0)e^{2qt}$. Érdekes hogy a $d = 1$ esetben az egyértelműséget garantáló gyengített feltétel mindössze annyit követel meg, hogy $x > y$ esetén $f(t,x) - f(t,y) \leq q\,(x - y)$.

A variációs rendszer: Jelölje $\mathsf{x}'(t)$ az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(t,\mathsf{x})$ rendszer megoldásának a kezdeti érték valamelyik koordinátája szerinti deriváltját, ha az létezik. Formális számolással kapjuk az $\dot{\mathsf{x}}' = \nabla\mathsf{f}(t,\mathsf{x})\,\mathsf{x}'$ *első variációs rendszert*; $x_j'(0) = \delta_{k,j}$ ha $\mathsf{x}'(t) = \partial\mathsf{x}(t)/\partial x_k(0))$. A megoldás létezésével nincs gond, elég ha a $\nabla\mathsf{f}(t,\mathsf{x}(t))$ mátrix az $\mathsf{x}(t)$ megoldás mentén korlátos. Annak bizonyításához hogy $\mathsf{x}'(t)$ tényleg az $\mathsf{x}(t)$ deriváltja, az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(t,\mathsf{x})$ és $\dot{\mathsf{x}}' = \nabla\mathsf{f}(t,\mathsf{x})\,\mathsf{x}'$ egyenleteket mint egységes rendszert kell megoldani a már ismert szukcesszív approximációval. Tehát, természetes feltételek mellett a megoldás a kezdeti értéknek nemcsak folytonos hanem differenciálható függvénye.

Stabilitás: Az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(t,\mathsf{x})$ egyenlet $\mathsf{x}_0(t)$ *globális* megoldása stabil ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan δ hogy $|\mathsf{x}(0) - \mathsf{x}_0(0)| < \delta$ esetén $|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)| < \varepsilon\ \forall\, t > 0$. Ha $|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)| \to 0$ amint $t \to +\infty$ is teljesül, akkor $\mathsf{x}_0(t)$ aszimptotikusan stabil megoldás. Az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ autonóm esetben többnyire a stacionárius pontok (egyensúlyi helyzetek, szinguláris pontok) stabilitását vizsgáljuk, ezek az $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = 0$ egyenlet gyökei. Ha $\mathsf{f}(\mathsf{x}_0) = 0$ akkor $\mathsf{x}_0(t) = \mathsf{x}_0$ megoldás, és így az x_0 egyensúlyi helyzet akkor stabil ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan δ hogy $|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0| < \varepsilon$ mindig igaz ha $|\mathsf{x}(0) - \mathsf{x}_0| < 0$; $\lim_{t\to+\infty}\mathsf{x}(t) = \mathsf{x}_0$ esetén x_0 aszimptotikusan stabil. Az állandó együtthatós $\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x}$ rendszernek $\mathsf{x}_0 = 0$ mindig stacionárius pontja, és a megoldások szerkezetéből (kvázipolinomok) kiolvasható hogy a 0 pontosan akkor stabil, ha az A mátrix egyik sajátértékének sem pozitív a valós része. Az aszimptotikus stabilitás feltétele az hogy mindegyik sajátértéknek negatív a valós része. Magasabbrendű egyenletek esete analóg, ott a *karakterisztikus egyenlet* gyökeinek valós része a stabilitás kritériuma. Ha a bemenő jel korlátos, és mindegyik sajátérték (gyök) valós része negatív akkor az inhomogén rendszer (egyenlet) mindegyik megoldása korátos, de persze nem feltétlenül tart nullához; ez akkor sem igaz ha a sajátértékek valós részei mind negatívak.

Egyetlen másodrendű nemlineáris egyenlet, vagy két egyenletből álló rendszer *fázisdiagramja* sokszor tiszta képet ad az egyensúlyi helyzetek stabilitásáról. Periodikus megoldások esetében érdemes a pálya stabilitásáról is beszélni. Jelölje $\rho(\mathsf{x}, A)$ az x pontnak az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaztól való távolságát. A az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ egyenlet attraktora ha van olyan $\delta > 0$ szám hogy $\rho(\mathsf{x}(0), A) < \delta$ esetén $\lim \rho(\mathsf{x}(t), A) = 0$ amint $t \to +\infty$. Az egész teret nem érdemes így nevezni, aszimptotikusan stabil stacionárius pont persze attraktor. Érdekesebb a következő példa. Az $\dot{x} = x - y - xy^2 - x^3$ és $\dot{y} = x + y - x^2y - y^3$ rendszer $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\varphi := \operatorname{arctg}(y/x)$ poláris változóinak egyenlete $\dot{r} = r - r^3$ és $\dot{\varphi} = 1$, ahol $r = 0$ instabil, $r = 1$ pedig aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet, tehát az $r = 1$ körvonal a rendszer attraktora.

Ljapunov tétele: Az $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ autonóm rendszer $\mathsf{f}(x_0) = 0$ stacionáris pontja stabilitásának vizsgálata az $\mathsf{f}(x) = \nabla\mathsf{f}(\mathsf{x}_0)(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0) + \psi(x)$, $\psi(x) := \mathsf{f}(\mathsf{x}) - \nabla\mathsf{f}(x_0)(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0)$ lineáris közelítés segítségével a $\dot{\mathsf{y}} = A\mathsf{y}$ homogén lineáris rendszer stabilitásának kérdésére redukálódik, ahol $A := \nabla\mathsf{f}(\mathsf{x}_0)$ és $\mathsf{y} := \mathsf{x} - \mathsf{x}_0$. A dolog azon múlik hogy a lineáris rész dominálja-e a ψ maradékot. Először a homogén lineáris rendszer már ismert problémáját lineáris algebra nélkül, a Laplace transzformáció segítségével tárgyaljuk.

Tétel 15.3. *Ha az A $n \times n$ méretű mátrix mindegyik sajátértékének negatív a valós része, akkor vannak olyan $K < 0$ és $c > 0$ konstansok hogy az $\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x}$ rendszer megoldásai eleget tesznek az $|\mathsf{x}(t)| \le K|\mathsf{x}(0)|e^{-ct}$, $t > 0$ becslésnek.*

Bizony: Tetszőleges de fix $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorokkal legyen $f(t) := \langle \mathsf{a}, e^{At}\mathsf{b}\rangle$, és jelölje $F(z)$ az ő Laplace transzformáltját. A sorfejtés segítségével ellenőrizhető hogy

$$F(z) = \langle \mathsf{a}, (zI - A)^{-1}\mathsf{b}\rangle = \int_0^\infty e^{-zt}\langle \mathsf{a}, e^{At}\rangle\, dt = \int_0^\infty e^{zt} f(t)\, dt\,,$$

legalábbis akkor ha $\|A\| < \operatorname{Re} z$. A baloldal persze mindig értelmes ha z nem sajátérték, ezektől a pólusoktól eltekintve $F(z)$ reguláris. Az $\|A\| < \operatorname{Re} z$ esetén érvényes

$$\frac{1}{zI - A} = \frac{1/z}{I - A/z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{A}{z}\right)^k$$

kifejtásből $\|(zI - A)^{-1}\| \le 2/|z|$ ha $\|A\| \le |z|/2$, tehát $F(z) \to 0$ amint $|z| \to \infty$. Eszerint alkalmazható a 14.16. Tétel, ha $t > 0$ akkor

$$\langle \mathsf{a}, e^{At}\mathsf{b}\rangle = f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma e^{\zeta t}F(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma e^{\zeta t}\langle \mathsf{a}, (\zeta I - A)^{-1}\mathsf{b}\rangle\, d\zeta\,,$$

feltéve hogy az összes sajátérték Γ belsejében van. Feltehetük hogy Γ az $\operatorname{Re}\zeta < 0$ félsík belsejében halad, tehát van olyan $c > 0$ szám hogy $\operatorname{Re}\zeta < -c$ ha $\zeta \in \Gamma$. Mivel $\langle \mathsf{a}, (\zeta I - A)^{-1}\mathsf{b}\rangle$ a kontúr mentén folytonos, a

$$Q(\mathsf{a}, \mathsf{b}) := \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma e^{\zeta t + ct}\langle \mathsf{a}, (\zeta I - A)^{-1}\mathsf{b}\rangle\, d\zeta$$

bilineáris alak korlátos: $|Q(\mathsf{a}, \mathsf{b})| \le K|\mathsf{a}||\mathsf{b}|$, ahol $K < +\infty$ nem függ az időtől. Azt igazoltuk hogy $\|e^{At}\| \le Ke^{-ct}$. □

Ljapunov tételének sok bizonyítása van, mi az előző eredményt használjuk.

Tétel 15.4. *Tegyük fel hogy az A mátrix sajátértékeinek valós része negatív, ψ folytonosan differenciálható és $|\psi(t, \mathsf{x})| \le \alpha(\mathsf{x})|\mathsf{x}|$ $\forall t \ge 0$, ahol $\alpha(\mathsf{x}) \to 0$ amint $\mathsf{x} \to 0$. Ekkor az $\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x} + \psi(t, \mathsf{x})$ rendszer $x_0 = 0$ stacionárius pontja aszimptotikusan stabil.*

Bizony: Minden olyan $(0, \tau)$ intervallumon ahol a megoldás definiálva van,

$$\mathsf{x}(t) = e^{At}\mathsf{x}(0) + \int_0^t e^{At - As} f(s, \mathsf{x}(s))\, ds\,,$$

ha tehát K és c az előző tétel által garantált konstansok, valamint $|\mathsf{x}(0)|$ és τ olyan kicsi hogy $\alpha(|\mathsf{x}(s)|) \le \gamma$ ha $s < \tau$ akkor

$$|\mathsf{x}(t)| \le K|\mathsf{x}(0)|e^{-ct} + \gamma K \int_0^t e^{cs - ct}|\mathsf{x}(s)|\, ds\,.$$

Grönwall lemmája alkalmazható az $u(t) = e^{ct}|\mathsf{x}(t)|$ függvénnyel: $|\mathsf{x}(t)| \le K|\mathsf{x}(0)|e^{\gamma Kt-ct}$ ha $t < \tau$. Ha most $\delta > 0$ olyan kicsi hogy $\alpha(\mathsf{x}) \le c/2K$ legyen ha $|\mathsf{x}| \le \delta$, és $|\mathsf{x}(0)| < \delta/K$ akkor Grönwall becslése korlátlanul érvényes. □

A Ljapunov függvény: Nemlineáris egyenletek megoldásainak korlátosságának és stabilitásának eldöntésére alkalmas. Az $U, V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ függvények Ljapunov párost alkotnak az $\dot{\mathsf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathsf{x})$ n egyenletből álló rendszer számára ha $\langle \nabla U(\mathsf{x}), \mathsf{f}(t,\mathsf{x})\rangle \le -V(\mathsf{x})$, vagyis megoldás mentén U értéke nem növekszik mert $dU(\mathsf{x}(t))/dt = \langle \nabla U(\mathsf{x}(t)), \mathsf{f}(t,\mathsf{x}(t))\rangle \le 0$ ha $\mathsf{x}(t)$ megoldás, vagyis

$$U(\mathsf{x}(t)) + \int_0^t V(\mathsf{x}(s))\,ds \le U(\mathsf{x}(0)). \tag{15.42}$$

Ha $dV(\mathsf{x}(t))/dt \le 0$ is igaz akkor innen $U(\mathsf{x}(t)) + tV(\mathsf{x}(t)) \le U(\mathsf{x}(0))$, tehát $V(\mathsf{x}(t)) \to 0$ amint $t \to +\infty$. Ha azt is tudjuk hogy $V(\mathsf{x}) \ge g(U(\mathsf{x}))$ és $u = 0$ a $\dot{u} = g(u)$ aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete, akkor az $U(\mathsf{x}(t)) \to 0$ ha $t \to +\infty$ következtetéshez is eljuthatunk. Exponenciális becslést kapunk az $U(\mathsf{x}) \le \beta V(\mathsf{x})$ esetben, feltéve hogy $\beta > 0$.

A $\dot{x} = -\nabla U(\mathsf{x})$ *negatív gradiens rendszernek* U és $V = |\nabla U|^2$, valamint $|\mathsf{x}-\mathsf{x}_0|^2$ és U kitűnő Ljapunov párosai hacsak U szigorúan konvex; a második esetben x_0 az U minimumának helye. Mechanikai rendszerek teljes energiája a megoldások korlátosságának, esetleg stabilitásának vizsgálatára alkalmas. Tudjuk hogy a csillapított harmonikus rezgés stabil, a nemlineáris $\ddot{x} + 2\gamma t x + U'(x) = 0$, $\gamma > 0$, $U'(0) = 0$ feladat a következőképpen tárgyalható. Legyen $H(t) := y^2(t)/2 + U(x(t))$ ha $x(t)$ megoldás és $y := \dot{x}$, vagyis $\dot{y} + 2\gamma y + U'(x) = 0$. Ekkor $dH/dt = -2\gamma y^2$, de $dy^2/dt = -2yU'(x) - 4\gamma y^2$ nem feltétlenül negatív, tehát az energia mindaddig csökken amíg a sebesség nem lesz nulla, de azt nem tudjuk hogy $y(t) \to 0$. Vegyük észre hogy $d(xy)/dt = y^2 - 2\gamma xy - xU'(x)$, és tegyük fel hogy U konvex, sőt $U''(\xi) \ge c > 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}$. Ezután legyen $\alpha > 0$ és $G(t) := H(t) + \alpha x(t)y(t)$, ekkor $xU'(x) \ge U(x) \ge cx^2/2$, továbbá

$$\dot{G}(t) = -2\gamma y^2 + \alpha y^2 - 2\alpha\gamma xy - \alpha x U'(x) \le -(2\gamma - \alpha)y^2 - 2\alpha\gamma xy - \alpha U(x) \le -2\beta G(t),$$

feltéve hogy $\alpha + \beta < 2\gamma$ és $2\alpha^2(\gamma - \beta)^2 \le c(2\gamma - \alpha - \beta)(\alpha - 2\beta)$; az $\alpha^2 < c$ feltétel $G \ge (1/2)(y^2 + \alpha^2 x^2) \ge 0$ miatt kell. Mindig van olyan $\beta > 0$ szám hogy a feltételek teljesülnek, tehát $G(t) \le G(0)e^{-2\beta t}$, azaz $|x(t)| + |y(t)| = O(e^{-\beta t})$. *Konvex potenciálnál a csillapított rezgés exponenciálisan stabil.*

Fázisáramlás és Liouville tétele: A megoldások létezését és egyértelműségét egyaránt garantáló feltételek mellett az n egyenletből álló $\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ autonóm rendszer megoldásai az $\mathbb{R}^n$ térben *fázisáramlásként* ábrázolhatók; időfüggő rendszernél ez a kép az idővel együtt változik. Jelölje $\boldsymbol{\phi}(t,\mathsf{x})$ az autonóm rendszer $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$ pontból induló megoldását, vagyis $\boldsymbol{\phi}(0,\mathsf{x}) = \mathsf{x}$ és $\boldsymbol{\phi}(t+\tau,\mathsf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\tau,\boldsymbol{\phi}(t,\mathsf{x}))$ ha $\tau \ge 0$. A fázisáramlás mentén a tér halmazai deformálódnak, $0 < t \ll 1$ idő alatt az x pont környezetében a térfogat változásának lokális szorzója az $\mathsf{x} \to \boldsymbol{\phi}(t,\mathsf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ leképezés $W(t,\mathsf{x})$ Jacobi determinánsa. Mivel $\boldsymbol{\phi}(t,\mathsf{x}) = \mathsf{x} + t\,\mathsf{f}(\mathsf{x}) + o(t)$, a vitatott Jacobi mátrix éppen $J(t,\mathsf{x}) = I + t\,\nabla\mathsf{f}(\mathsf{x}) + o(t)$, tehát a Liouville formula levezetésekor már bevált gondolatmenet szerint $W(t,\mathsf{x}) = 1 + t\,\mathrm{div}\,\mathsf{f}(\mathsf{x}) + o(t)$. Igazoltuk Liouville tételét: $\dot{W}(0,\mathsf{x}) = \mathrm{div}\,\mathsf{f}(\mathsf{x})$, vagyis *a fázistérfogat változásának sebessége az* x *helyen éppen* $\mathrm{div}\,\mathsf{f}(\mathsf{x})$. Például, a $\dot{q_k} = \partial H/\partial p_k$, $\partial p_k = -\partial H/\partial q_k$ Hamilton dinamika megőrzi a fázistérfogatot, mert ebben az esetben $\mathrm{div} \equiv 0$.

Liouville tétele úgy is fogalmazható, hogy ha $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ egy korlátos halmazon kívül eltűnik, akkor a $t = 0$ időpontban

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\boldsymbol{\phi}(t,\mathsf{x})\right)\,\mathsf{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\varphi(\mathsf{x}) \cdot \mathsf{f}(\mathsf{x})\,\mathsf{dx} = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathsf{x})\,\mathrm{div}\,\mathsf{f}(\mathsf{x})\,\mathsf{dx}.$$

Megjegyezzük hogy autonóm rendszernél a $t = 0$ választás nem jelent megszorítást. Az előjel senkit ne tévesszen meg! Most nem azt néztük hogy a fázisáramlás egy tartományt hova sodor, hanem azt hogy miből keletkezett.

15.6. **Peremérték feladatok, Fourier módszere.** Az $y''(x) + U'(y) = 0$ másodrendű egyenlet általános megoldása két paramétert tartalmaz, tehát bármely $[a,b]$ intervallumon felvethető az

$y(a) = \alpha$ és $y(b) = \beta$ peremérték probléma, pontosabban Dirichlet feladat, ami $b \to a$ esetén a szokásos kezdeti érték feladatba (Cauchy feladat) megy át. Az $\alpha = \beta = 0$ esetben homogén Dirichlet feladatról beszélünk. A peremen a függvény deriváltjait is előírhatjuk; Neumann feladata az $y'(a) = \alpha'$ és $y'(b) = \beta'$ feltételnek eleget tevő megoldások meghatározása, a Neumann feladat is akkor homogén ha $\alpha' = \beta' = 0$. Mindkét esetben a homogén feladat megoldásai liniáris teret alkotnak, ami általában nem igaz.

A homogén peremfeladatokat az azonosan nulla függvény mindig megoldja; de nemtriviális megoldás általában nincs. Az $U'(x) = \omega^2 x$ esetben ismerjük az egyenlet $y = r\cos(\omega x + \varphi)$ általános megoldását. A Dirichlet esetben a $\cos(\omega a + \varphi) = \cos(\omega b + \varphi) = 0$ követelmény miatt $b - a = n\pi/\omega$, $n \in \mathbb{N}$ a megoldhatóság feltétele, vagyis $\omega = n\pi/(b-a)$. A $(0, 2\pi)$ intervallumon, konstans szorzótól eltekintve a megoldás $\sin(nx/2)$, amiből lineáris transzformációval kapjuk az általános feladat $\psi_n(x) := \sin(n\pi(x-a)/(b-a))$, $n \in \mathbb{N}$ megoldását.

A homogén Neumann feladat esete hasonló, itt is $b - a = n\pi/\omega$, $n \in \mathbb{N}$ a nemtriviális megoldás létezésének feltétele, és az $\phi_n(x) := \cos(n\pi(x-a)/(b-a))$ a megoldás.

Inhomogén peremfeladatokról később lesz szó; itt is igaz hogy a homogén és az inhomogén feladat megoldásainak összege kielégíti az inhomogén peremfeltételt. A homogén problémákat azért is kedveljük mert ilyenkor a megoldásként szóba jöhető függvények lineáris teret alkotnak, tehát a probléma az $L = \partial_x^2$ operátor $L\psi = \lambda\psi$ *sajátérték feladatára redukálódik,* amit ebben a lineáris térben kell megfogalmazni és megoldani. Mindkét feladatnál ez a lineáris tér a $C^2[a,b]$ térnek a homogén peremfeltételt kielégítő függvényekből álló altere. A vizsgált két esetben a sajátértékek megszámlálható halmazt alkotnak, $\lambda_n = -\omega_n^2$, ahol $\omega_n := n\pi/(b-a)$, $n \in \mathbb{N}$.

Sturm - Liouville egyenlet: Az $[a,b]$ intervallumon az $y(a) = y(b) = 0$ homogén Dirichlet peremfeltétel mellett az $y'' + f(x) = 0$ egyenlet megoldása a $-\psi'' = \lambda\psi$ sajátérték feladatra vezet. A sajátértékek sorozata $\lambda_n := n^2\omega^2$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $\omega = \pi/(b-a)$, a sajátfüggvények $\psi_n(x) := \sin(n\omega x - n\omega a)$, tehát a megoldást az inhomogén lineáris egyenletrendszer példáján okulva, először az $y_0(x) = \sum c_n\psi_n(x)$ alakban keressük; a 0 index a peremfeltétel homogén voltára utal. Mivel $\psi_n''(a) = \psi_n''(b) = 0$, sikerre igazán csak akkor számíthatunk ha $f(a) = f(b) = 0$. Ilyenkor az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n(x)\,, \quad b_n := \frac{1}{2b-2a}\int_a^b f(t)\sin(n\omega t - n\omega a)\,dt$$

kifejtés alapján

$$-y_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\psi_n(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n(x)\,,$$

azaz $c_n := b_n/\lambda_n$ adja a megoldást:

$$y_0(x) = (b-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega x - n\omega a)}{2n^2\pi^2}\int_a^b f(t)\sin(n\omega t - n\omega a)\,dt\,.$$

Érdemes észrevenni hogy y_0 fenti szinusz sora az általános háromszögjel (12.47) kifejtését felhasználva összegezhető, az eredmény

$$y_0(x) = \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-t)\,f(t)\,dt + \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (t-a)\,f(t)\,dt\,. \tag{15.43}$$

Közvetlenül ellenőrizhető hogy $y_0(a) = y_0(b) = 0$, $y_0''(x) + f(x) = 0$, és ez akkor is igaz ha az $f(a) = f(b) = 0$ feltétel nem teljesül. [50] Ezután az $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ inhomogén peremfeladat

[50] Az (15.43) formula a *lövöldözés módszerével* is levezethetō. Az $y'' + f = 0$ egyenlet $y(a) = 0$ kezdeti értékhez tartozó megoldása $y_v(x) = v(x-a) - \int_a^x (x-t)f(t)\,dt$, ahol a v kezdeti sebesség meghatározható úgy hogy $y_v(b) = 0$ legyen: $v = (b-a)^{-1}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt$, amit a megoldóképletbe visszahelyettesítve kapjuk a homogén peremfeladat megoldását. Másik módszer, a *tükrözés elve* bonyolultabb esetekben is mūködik, lásd késōbb.

megoldása a homogén probléma általános megoldásának és az inhomogén feladat

$$\psi_{\alpha,\beta}(x) := \frac{\alpha(b-x)+\beta(x-a)}{b-a} \tag{15.44}$$

partikuláris megoldásának összege: $y(x) = y_0(x) + \psi_{\alpha,\beta}(x)$.

A megoldás egyértelműsége a legáltalánosabb esetben is nyilvánvaló, mert ha y és $\bar{y}$ ugyanannak a feladatnak két megoldása, akkor $u := y - \bar{y}$ az $u'' = 0$ egyenletnek tesz eleget miközben $u(a) = u(b) = 0$, tehát $u \equiv 0$. A valódi Sturm - Liouville feladat az itt tárgyaltnál általánosabb, a $(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ egyenletnek az $y(a) = \alpha$ és $y(b) = \beta$ peremfeltétel melletti megoldását kívánja, ahol $p, q > 0$.

A hővezetés egyenlete: A $\partial_t u = (\sigma^2/2)\,\partial_x^2 u + f(t,x)$ egyenlet megoldását az $[a,b]$ intervallumon adott $u(t,a) = \alpha$ és $u(t,b) = \beta$ peremfeltétel mellett a *változók szétválasztásának módszerével* vezetjük vissza az előző feladatra. Itt az $u(0,x) = u_0(x)$ *kezdeti feltételt* is teljesíteni kell; persze $u_0(a) = \alpha$ és $u_0(b) = \beta$. Először a *homogén egyenlet,* $(f \equiv 0)$ $u(t,a) = u(t,b) = 0$ *homogén Dirichlet feladatának* megoldását keressük, méghozzá $u(t,x) = c(t)\psi(x)$ alakban. A $\dot{c}(t)\psi(x) = (\sigma^2/2)c(t)\psi''(x)$ egyenletből $\dot{c}(t)/c(t) = si^2\psi''(x)/2\psi(x)$. Mivel a baloldal csak a t , a jobboldal meg csak az x változó fggvénye, mindkettő kénytelen megegyezni egy konstanssal, amit $-\lambda$ jelöl. Az egyenlet két független részre bomlott fel: a változók elkülönültek. Eszerint $\psi'' + \sigma^2\lambda\psi/2 = 0$, tehát a peremfeltétel miatt az $\mathsf{L} := -\sigma^2\partial_{\mathsf{x}}/2$ operátor *sajátértékeinek* lehetséges értékei a $\lambda_n := \sigma^2 n^2\omega^2/2$ számok, ahol $\omega := n\pi/(b-a)$ és $n \in \mathbb{N}$; a *sajátfüggvények* sorozata pedig: $\psi_n(x) := \sin(n\omega x)$. Az időfüggő c együtthatókra $\dot{c_n} = -\lambda_n c$ adódik, tehát $c_n(t) = c_n(0)\exp(-\lambda_n t)$.

A homogén egyenlet $(f \equiv 0)$ homogén Dirichlet feladatának, $(\alpha = \beta = 0)$ megoldását az

$$u_0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\psi_n(x)$$

képlettel tudjuk megadni, ahol az eddig ismeretlen $c_n(0)$ kezdeti értékeket az

$$u_0(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\psi_n(x) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)$$

egyenletből kapjuk. Mivel most $u_0(a) = u_0(b) = 0$, u_0 tényleg kifejthető a $\{\psi_n\}$ ortogonális rendszer szerint, tehát $c_n(0) = a_n$.

Ha az $f(t,x)$ *forrás* is kifejthető a $\{\psi_n\}$ rendszer szerint, vagyis

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t,f)\psi_n(x)\,,$$

akkor az inhomogén egyenlet homogén peremfeltétel melleti megoldását az *állandók variálásának elve* szerint az $u_f(t,x) = \sum c_n(t)\psi_n(x)$ alakban véljük megtalálni. Az egyenletből

$$\frac{\partial u_f(t,x)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u_f(t,x)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\dot{c}_n(t) + \frac{\sigma^2}{2}\lambda_n c_n(t)\big)\,\psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t,f)\psi_n(x)\,,$$

ahol $\lambda_n = n^2\omega^2$ és $\omega = \pi/(b-a)$, tehát a $\dot{c}_n + (\sigma^2\lambda_n/2)c_n = b_n(t,f)$, $c_n(0) = a_n$ egyenleteket kell megoldani:

$$c_n(t) = a_n \exp(-\sigma^2\lambda_n t/2) + \int_0^{\infty} \exp(\sigma^2\lambda_n(s-t)/2)b_n(s,f)\,ds\,.$$

Látható hogy a homogén Dirichlet feladatnál a megoldás a homogén egyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő megoldásának és az inhomogén egyenlet nulla kezdeti értékhez tartozó partikuláris megoldásának összege. Mivel az (15.44) képlettel adott $\psi_{\alpha,\beta}(x)$ függvény a homogén egyenletet és az inhomogén peremfeltételt egyaránt kielégíti, ha $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, akkor ezt is hozzá kel adni a fentebb meghatározott függvényhez.

Bonyolultabb a helyzet olyankor, amikor az f *forrás* nem fejthető ki a $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sajátfüggvények szerint. Ha az f *forrás* nem függ az időtől, akkor (15.43) a homogén Dirichlet feladat partikuláris megoldását adja, ezt kell a homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadni. Még egyszerűbb az $f(t,x) = f(t)$ eset, ilyenkor f primitív függvénye a keresett partikuláris megoldás. Az általános feladatnál próbálkozhatunk a forrás olyan $f = f_0 + f_1$ felbontásával hogy $f_0(t,a) = f_0(t,b) = 0$, de ezt úgy kell csinálni hogy a $\partial_t u = (\sigma^2/2)\partial_x^2 u + \ell_f(t,x)$ egyenletet is meg tudjuk oldani.

A megoldás egyértelműsége az energia egyenlőtlenség következménye. Ha u és $\bar{u}$ két megoldás, és $w := u - \bar{u}$, akkor $\partial_t w = (\sigma^2/2)\partial_x^2 w$ és $w(t,a) = w(t,b) = 0$, tehát $W(t) := \int_a^b w^2\,dx$ differenciálásával és a peremfeltétel kihasználásával

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sigma^2 \int_a^b w(t,x)\,\partial_x^2 w(t,x)\,dx = -\sigma^2 \int_a^b \left(\partial_x w(t,x)\right)^2\,dx$$

adódik. Viszont $W(t) \geq 0$ míg $W(0) = 0$, tehát $\partial_x w(t,x) \equiv 0$. Mivel $w(t,a) = w(t,b) = 0$, ez csak úgy lehetséges ha $w \equiv 0$.

A hullámegyenlet: A $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u + f(t,x)$ egyenlet megoldását az $u(t,a) = \alpha$, $u(t,b) = \beta$ peremfeltétel mellett vizsgáljuk. Másodrendű egyenletről van szó, tehát az $u(0,x) = u_0(x)$ és $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ kezdeti értékeket is meg kell adni; természetesen $u_0(a) = \alpha$, $u_0(b) = \beta$ és $v_0(a) = v_0(b) = 0$. A mechanika elvei szerint az u konfiguráció *energiája* a t időpontban

$$H(t,u) := \frac{1}{2} \int_a^b \left((u_t'(t,x))^2 + c^2 (u_x'(t,x))^2\right)\,dx\,.$$

Ha u és $\bar{u}$ a feladat két megoldása, és $w := u - \bar{u}$, akkor $H(0,w) = 0$, $w(t,a) = w(t,b) = 0$ és

$$\partial_t H(t,w) = c^2 \int_a^b \left(w_t'(t,x) w_{xx}''(t,x) + w_x'(t,x) w_{tx}''(t,x)\right)\,dx\,.$$

A peremfeltétel miatt $w_t'(t,a) = w_t'(t,b) = 0$, tehát parciális integrálással $\partial_t H(t,w) = 0$, vagyis $H(t,w) = 0$ adódik. Innen $w_x'(t,x) \equiv 0$ következik, azaz $w \equiv 0$.

A változók itt is szétválnak, és ismét a $-\partial_x^2 = \lambda\psi$ sajátérték feladathoz jutunk, tehát a megoldást az $u(t,x) = \psi_0(x) + \sum_{n=1}^\infty c_n(t)\psi_n(x)$ alakban keressük; ψ_n ugyanaz mint az előző szakaszban. Ha az f kényszererő a peremen eltűnik, akkor az egyenletből most

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^\infty \left(\ddot{c}_n(t) + c^2\lambda_n c_n(t)\right)\psi_n(x) = f(t,x) = \sum_{n=1}^\infty b_n(t,f)\psi_n(x)$$

következik, ahol $\lambda_n = n^2\omega^2$, $\omega = \pi/(b-a)$, tehát a $\ddot{c}_n + c^2\lambda_n c_n = b_n(t,f)$ egyenleteket kell a $c_n(0) = a_n$ és $\dot{c}(0) = a_n'$ kezdeti értékek mellett megoldani, ahol a_n és a_n' az u_0 kezdeti amplitúdó, illetve a v_0 kezdeti sebesség szinusz sorának az együtthatói. A homogén esetben $c_n(t) = a_n\,\cos(c\omega n t) + a_n'\,(c\omega n)^{-1}\,\sin(c\omega n t)$, de az inhomogén esetben is van megoldóképlet. Az inhomogén peremfeltételt itt is lineáris függvénnyel lehet kielégíteni. Hasonlóan tárgyalható a csillapított $\partial_t^2 u + 2\gamma\partial_t u + \omega_0^2 u = f(t,x)$ *távíró egyenlet.*

Laplace és Poisson egyenletei a síkon: Tetszőleges $G \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő és szakaszomként C^1 határú tartományban kereshetjük a $\Delta u + f(x,y) = 0$ Poisson egyenlet megoldását, például az $u(x,y) = g(x,y)$ ha $(x,y) \in \partial G$ Dirichlet féle peremfeltétel mellett. Jelölje $C_0^2(G)$ a 0 peremértékkel rendelkező C^2 függvények lineáris terét, ezen definiálható az $\|\cdot\|_{+2}$ norma,

$$\|\varphi\|_{+2}^2 := \int_G \left(\varphi^2 + (\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_{xx}'')^2 + (\varphi_{yy}'')^2\right)\,dx\,dy\,;$$

$H_0^2(G)$ a $\|\cdot\|_{+2}$ normához rendelt Hilbert tér.

Tudományos módszerekkel igazolható hogy ha G korlátos, akkor a $-\Delta\psi = \lambda\psi$, $g \equiv 0$ sajátérték feladatnak megszámlálhatóan sok megoldása van, ezeket (λ_n, ψ_n), $n \in \mathbb{N}$ jelöli. Mindegyik λ_n sajátérték pozitív, és a ψ_n sajátfüggvények teljes ortonormált rendszert alkotnak a $H_0^2(G)$ Hilbert térben. Komoly technikai kérdés a függvények és soraik viselkedése a ∂G perem közelében. Ezt itt nem vizsgáljuk, hanem feltesszük hogy mindegyik sor egyenletesen konvergens a $\bar{G}$ halmazon is.

Ha tehát $f \in H_0^2(G)$ és érvényes az $f = \sum b_n \psi_n$ sorfejtés, ahol $b_n := \int_G f(x,y)\psi_n(x,y)\,dx\,dy$, akkor $u_f = \sum (b_k/\lambda_k)\psi_k$ a Poisson egyenlet homogén Dirichlet feladatának megoldása. Bonyolultabb az az eset amikor f nem tűnik el a peremen, ezzel komolyabban itt nem is foglalkozunk.

A második alapfeladat a homogén $\Delta u = 0$ Laplace egyenlet inhomogén Dirichlet feladatának megoldása, vagyis olyan u_g *harmonikus függvény* meghatározása hogy $u_g(x,y) = g(x,y)$ ha $(x,y) \in \partial(G)$. A harmonikus függvényeket reguláris komplex függvények valós vagy képzetes részeiként ismertük meg; körön és félsíkon Poisson formulái adják a peremérték feladat megoldását. Ha már u_g is megvan, akkor $u = u_f + u_g$ a Poisson egyenlet Dirichlet feladatának megoldása.

Összefoglalásként megállapíthatjuk hogy két alapfeladat van: a Laplace operátor sajátérték problémája homogén peremfeltétel mellett, és a $\Delta u = 0$ Laplace egyenlet inhomogén Dirichlet problémája; feltettük hogy az f *forrás* a peremen eltűnik. [51] A változók szétválasztásának (állandók variálása) módszerével az időfüggő egyenletek tárgyalása ezekre vezethető vissza.

Téglalap alakú tartomány: A $G = [0,a] \times [0,b]$ téglalapon a sajátérték feladat megoldása a változók szétválasztásával adódik: a $\psi(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$ faktorizáció a

$$\varphi''(x)\phi(y) + \varphi(x)\phi''(y) + \lambda\varphi(x)\phi(y) = 0$$

egyenlethez vezet, amiből $\varphi'' + \nu\varphi = \phi'' + (\lambda - \nu)\phi = 0$ következik, λ és ν egyenlőre ismeretlen konstansok. A $\varphi(x) = \varphi(a) = 0$ és $\phi(0) = \phi(b) = 0$ peremfeltételből $\nu = n^2\pi^2/a^2$ és $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/a)$, míg $\lambda - \nu = m^2\pi^2/b^2$ és $\phi_m(y) = \sin(m\pi y/b)$, ahol $n, m \in \mathbb{N}$, tehát a $\psi_{n,m}(x,y) := \sin(n\pi x/a)\sin(m\pi y/b)$ sajátfüggvény a $\lambda_{n,m} := n^2\pi^2/a^2 + m^2\pi^2/b^2$ sajátértékhez tartozik, $n, m \in \mathbb{N}$. Igazolható hogy $\psi_{n,m}$ teljes $H_0^2(G)$-ben. Ezután a Poisson egyenlet homogén Dirichlet feladatának megoldása az előző szakaszban mondottak szerint történik.

A Laplace egyenlet Dirichlet feladatának megoldását az $a = b$ esetben tárgyaljuk, először tegyük fel hogy $u(x,0) = u(x,a) = 0$. Az $u(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$ felbontásból $\varphi''\phi + \varphi\phi'' = 0$, vagyis $\phi'' + \lambda\phi = \varphi'' - \lambda\varphi = 0$ és $\phi(0) = \phi(a) = 0$. Ennek alapján a megoldást

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \exp(n\pi x/a) + b_n \exp(-n\pi x/a)\right) \sin(n\pi y/a)$$

alakban keressük. Ha a sor konvergens akkor $\Delta u = 0$, a peremértékek $u(x,0) = u(x,a) = 0$, továbbá

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)\sin(n\pi y/a), \quad u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi}\right)\sin(n\pi y/a),$$

tehát az $a_n + b_n = c_n$ és $a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = \tilde{c}_n$ egyenleteket kapjuk a_n és b_n meghatározására, ahol c_n és $\tilde{c}_n$ az $u(0,y)$ és $u(a,y)$ szinusz sorainak együtthatói. Ezután x és y szerepét felcserélve az $u(x,0)$ és $u(x,a)$ peremértékeket ugyanígy tudjuk megvalósítani, a két megoldás összege már majdnem teljesen általános. A négyzet csúcsaiban még mindig nulla a megoldás, ezen a triviálisan harmonikus $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$ függvény hozzáadásával segíthetünk. Pontosabban, először ezzel a négy paraméterrel beállítjuk u értékét a négyzet sarkaiban, majd a fenti eljárással a négyzet oldalait intézzük el.

Köralakú tartomány: Elegánsan oldható meg az egységkör Dirichlet problémája. Nyilván az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ poláris koordinátákat használjuk, ekkor Laplace egyenlete a

$$\Delta u(r,\varphi) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{15.45}$$

[51] Az általános esetben kereshetjük f olyan $f = f_0 + f_1$ felbontását hogy f_0 a peremen nulla, és tudunk olyan u_1 függvényt hogy $\Delta u_1 + \tilde{f} = 0$, tehát $u_{f_0} + \tilde{u}$ megoldja Poisson egyenletét. Ha $\tilde{u}$ a peremen nem tūnik el, akkor ezt a Laplace egyenlet Dirichlet feladatának megoldásakor, a g peremérték $\tilde{g} := g - \tilde{u}$ módosításával lehet korrigálni.

alakot ölti; az $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ peremérték adott, 2π szerint periodikus függvény. Az egyenlet változói szétválaszthatók, $u = \phi(r)\psi(\varphi)$ választással $\psi'' + \lambda\psi = 0$ és az $r^2\phi'' + r\phi' = \lambda\phi$ Euler egyenlet adódik, tehát $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, továbbá $\psi_n(\varphi) = a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)$, $\phi_n(r) = \tilde{a}_n r^n + \tilde{b}_n r^{-n}$. Mivel a kör belsejében r^{-n} nem korlátos, az általános megoldás

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right) ;$$

az együtthatókat az $u(1,\theta) = g(\theta)$ peremfeltétel határozza meg:

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, \cos(n\theta)\, d\theta\,, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, \sin(n\theta)\, d\theta\,.$$

Ugyanúgy mint a Dirichlet mag számolásakor,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, \cos(n\theta - n\varphi)\Big)\, d\theta\,,$$

amiből, például a mértani sor és Euler képletével

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(e^{\imath nx} + e^{-\imath nx}\right) = \frac{1}{1 - re^{\imath x}} + \frac{1}{1 - re^{-\imath x}} - 1 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}\,,$$

ami akkor is igaz ha $r \in \mathbb{C}$ és $|r| < 1$, tehát a nevezetes

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2)\, g(\theta)\, d\theta}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} \tag{15.46}$$

Poisson formulát kaptuk; ez a $\Delta u = 0$ Laplace egyenlet általános megoldása az egységkör belsejében, az $u(1,\theta) = g(\theta)$ peremfeltétel mellett. Mivel $u(Rx, Ry)$ harmonikus a R sugarú körben ha u az volt az egységkörben,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, g(\theta)\, d\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} \tag{15.47}$$

a feladat megoldása az $u(R,\theta) = g(\theta)$ feltétellel. Ez volt (15.46) harmadik levezetése.

A kör külsejében a $\phi_n(r) = r^{-n}$ választással kapjuk a megoldást, ami

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left(a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)\right)$$

alakú lesz; $u(R,\theta) = g(\theta)$ a peremfeltétel. A két formula kombinálásával körgyűrű belsejében is meg tudjuk oldani Dirichlet feladatát. Ha $0 < R_1 < R_2$ a két sugár akkor az $u(R_1,\theta) = g_1(\theta)$, $u(R_2,\theta) = g_2(\theta)$ peremfeltétellel

$$u(r,\varphi) = a_0 + \tilde{a}_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left(\tilde{a}_n \cos(n\varphi) - \tilde{b}_n \sin(n\varphi)\right)$$

a megoldás, az együtthatókat az

$$a_0 + \tilde{a}_0 \log R_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_i(\theta)\, d\theta\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$a_n R_i^n + \tilde{a}_n R_i^{-n} := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, \cos(n\theta)\, d\theta\,, \quad b_n R_i^n - \tilde{b}_n R_i^{-n} := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, \sin(n\theta)\, d\theta$$

egyenletek határozzák meg. A változók szétválasztásának módszere hierarchikus, következő lépésként tárgyalhatnánk henger, sőt cső alakú tartomány problémáját, de ez sok ujdonságot már nem hozna. A $-\Delta u = f$ Poisson egyenlet egy partikuláris megoldását (12.32) adja, a peremfeltétel kielégítéséhez ezt kell a Dirichlet feladat fenti megoldásával kombinálni.

A Bessel egyenlet: Az egységkör $-\Delta u = \lambda u$, $u(\mathsf{x}) = 0$ ha $|\mathsf{x}| = 1$ sajátérték feladatának megoldását is kereshetjük $u = \phi(r)\psi(\varphi)$ alakban, ahol $\phi(1) = 0$ és $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ a peremfeltétel. (15.45) alapján $r^2\phi''(r)\psi(\varphi) + r\phi'(r)\psi(\varphi) + \phi(r)\psi''(\varphi) = -\lambda r^2\phi(r)\psi(\varphi)$ következik, ami szétválasztható,

$$\frac{r^2\phi''(r)) + r\phi'(r)}{\phi(r)} + \lambda r^2 = \mu = -\frac{\psi''(\varphi)}{\psi(\varphi)}\,.$$

Mivel ψ 2π szerint periódikus, $\mu = n^2$ négyzetszám és $\psi_n(\varphi) = a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)$. Ezután ϕ meghatározására az $r^2\phi''(r) + r\phi'(r) + (\lambda r^2 - n^2)\phi(r) = 0$ egyenletet kellene megoldani, ami az $x = r\sqrt{\lambda}$, vagyis $\phi(r) = J_n(r\sqrt{\lambda})$ helyettesítéssel a nevezetes

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = x\left(xJ'(x)\right)' + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \tag{15.48}$$

Bessel egyenletbe megy át, amit persze nem tudunk integrálni. Korlátos megoldásai a $J_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *elsőfajú Bessel függvények,* amiket a $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ ha $n \in \mathbb{N}$ és $J_n'(0) = 0$ kezdeti feltételek határoznak meg; értékeiket táblázatokban tárolják. Ezek szerint

$$X_{n,k}(r,\varphi) := J_n(r\sqrt{\lambda_{n,k}})(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))$$

a sajátfüggvények, és a $\lambda_{n,k} \geq 0$ sajátértékek $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ gyökei. A Bessel függvényeknek számos más alkalmazása is van, és önmagukért is érdekesek. A (15.48) egyenlet persze akkor is vizsgálható ha az n paraméter nem egész, sőt képzetes szám is lehet.

$**$ **Bessel függvények:** A J_n függvényeket Laurent sorfejtéssel is kereshetnénk, de minket az analitikus $J_n(x) = \sum_m c_{n,m}\,x^m$ érdekel. Az együtthatókra a $c_{n,m}(n^2 - m^2) = c_{n,m-2}$ ha $m > 1$ rekurziót kapjuk, $J_n'(0) = c_{n,1}$ mindig nulla, tehát a $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ ha $n \in \mathbb{N}$ választással

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,x^{n+2m}}{m!\,(n+m)!\,2^{n+2m}}\,. \tag{15.49}$$

Ez a hatványsor mindenütt konvergens, és az x tetszőleges komplex, az n tetszőleges valós, de $-n \notin \mathbb{N}$ értékeinél is értelmezhető: ha $n \notin \mathbb{N}$ akkor $k!$ helyére $\Gamma(k+1)$ lép.

A (15.48) egyenletből kiindulva mutatjuk meg hogy a J_ν, $\nu^2 \in \mathbb{R}$ *Bessel függvények pozitív gyökei végtelenhez tartó sorozatot alkotnak.* $\heartsuit$ Tegyük fel hogy van $a > |\nu|$ úgy hogy $J_\nu(x) > 0$ ha $x \geq a$, ekkor $(xJ'(x))' < 0$, tehát $xJ'(x) < aJ'(a)$, vagyis $J(x) < J(a) + aJ'(a)\log(x/a)$ ha $x > a$. A $J'(a) < 0$ esetben máris ellentmondáshoz jutottunk, a $\liminf_{a\to\infty} J'(a) \geq 0$ eset ugyanígy zárható ki. Mivel J_ν analitikus, gyökeinek véges torlódási pontja nem lehet. $\square$

A nemnegatív egész indexű Bessel függvények szokásos definíciója

$$J_n(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath x\sin(\varphi) - \imath n\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi\imath^n}\int_{\pi}^{\pi} e^{\imath x\cos\varphi}\cos(n\varphi)\,d\varphi\,, \tag{15.50}$$

amiből a $-\varphi \to \varphi$ csere után annyi azért látszik hogy mindegyik J_n valós értékű, $J_n'(0) = 0$ és $J_0(0) = 1$ míg $J_n(0) = 0$ ha $n \in \mathbb{N}$. A képlet akárhányszor differenciálható, a deriváltak mind korlátosak, és az $x = 0$ helyen számolt deriváltak megfelelnek az (15.49) sorfejtés együtthatóinak, tehát (15.49) és (15.50) ugyanazokat a függvényeket definiálják. [52] Nem pusztán konvenció hogy $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

J_0 ismeretében a többi rekurzióval számolható: $J_1(x) = -J_0'(x)$, és ha $n \neq 0$ akkor parciális integrálással

$$nJ_n(x) + \frac{x}{2\pi\imath^{n-1}}\int_{\pi}^{\pi} e^{\imath x\cos\varphi}\sin(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi = 0$$

adódik. Innen az addiciós tétellel

$$nJ_n(x) = xJ_n'(x) + xJ_{n+1}(x) = xJ_{n-1}(x) - xJ_n'(x) = \tfrac{1}{2}\left(xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x)\right) \tag{15.51}$$

következik, végül elemi manipulációval

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad \text{és} \quad 4J_n''(x) = J_{n-2}(x) + J_{n+2}(x) - 2J_n(x)\,. \tag{15.52}$$

[52] J_0 már a síkbeli hullámegyenlet tárgyalásakor is előkerült mint a kövonal ívmértékének Fourier transzformáltja. Másrészt, az egy dimenziós folytonos idejű bolyongás *átmeneti valószínűsége* éppen $p_n(t) = \imath^n e^{-t} J_n(\imath t)$.

Mivel $2J_0''(x) = -2J_1'(x) = J_2(x) - J_0(x)$, a fenti relációk mindegyik $n \in \mathbb{Z}$ esetén is érvényesek, vagyis $J_n(t)$ térben homogén, diszkrét hullámegyenlet megoldása, amit meg is lehet oldani. Legyen $\hat{J}(t,\omega) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(t)\cos(n\omega)$, ekkor $\hat{J}(0,\omega) \equiv 1$, $\hat{J}_t'(0,\omega) \equiv 0$ és $\partial_t^2 \hat{J}(t,\omega) + \sin^2(\omega)\hat{J}(t,\omega) = 0$, tehát $\hat{J}(t,\omega) = \cos(\sin(\omega)t)$.

A rekurziós relációk segítségével közvetlenül, indukció nélkül igazolható hogy Bessel függvényei tényleg eleget tesznek az egyenletnek; a $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ ha $n \neq 0$, míg $J_n'(0) = 0$ $\forall n$ kezdeti értékek határozzák meg őket. $\int_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\,dx = 1$ is igaz, az integrálok kiszámításához Laplace transzformációra van szükség.

$$\mathfrak{L}J_n = F_n(z) := \int_0^\infty e^{-zx} J_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi\imath^n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\varphi)\,d\varphi}{z - \imath\cos\varphi} \tag{15.53}$$

biztosan igaz ha $\mathrm{Re}z > 0$. A (15.46) előtti azonosságból a $w = (1+r^2)/2r$ helyettesítés után

$$\frac{\cos(n\varphi)}{w-\cos\varphi} = \frac{2r\cos(n\varphi)}{1-r^2}\big(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^m\cos(m\varphi)\big)$$

keletkezik, ahol $r = w - \sqrt{w^2-1}$. Mivel $1 - r^2 = 2r\sqrt{w^2-1}$, tagonkénti integrálással kapjuk hogy

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi\imath^{n+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n\varphi)\,d\varphi}{z/\imath - \cos\varphi} = \frac{\big(\sqrt{z^2+1}-z\big)^n}{\sqrt{z^2+1}}, \tag{15.54}$$

aminek $\mathrm{Re}z > 0$ és $|\sqrt{z^2+1} - z| < 1$ a korrekt feltétele. A $0 < z \to 0$ határátmenettel kapjuk hogy $\int_0^\infty J_n(x)\,dx = 1\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. $**$

$**$ **Legendre polinomok és a gömbfüggvények:** Gömb Dirichlet feladatát a divergencia tételnél a tükrözési elv segítségével már tárgyaltuk. Poisson képletét persze a változók szétválasztásával is le lehetne vezetni, és így gömbhéj Dirichlet feladata is megoldható, de érdekesebb a $\Delta u = -\lambda u$ sajátérték feladat. Az r, φ, ϑ gömbi koordinátákban Laplace operátora

$$\Delta u(r,\varphi,\vartheta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \tag{15.55}$$

alakú, és $\Delta u = -\lambda u$ először az $u(r,\varphi,\vartheta) = \phi(r)\psi(\varphi,\vartheta)$ módon szeparálódik, $\phi(1) = 0$ és $\psi(\varphi + 2\pi, \vartheta) = \psi(\varphi,\vartheta)$ adják a peremfeltételt. Az eredményül kapott

$$r^2\phi'' + 2r\phi' + (\lambda r^2 - \mu)\phi = 0 \quad \text{és} \quad \psi_{\varphi\varphi}'' + \sin^2\vartheta\,\psi_{\vartheta\vartheta}'' + \sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi_\vartheta' + \mu\sin^2\vartheta\,\psi = 0, \tag{15.56}$$

egyenletek közül az első Bessel típusú, az $x = r\sqrt{\lambda}$ és $\phi(r) = J(r\sqrt{\lambda})/\sqrt{r}$ helyettesítéssel megy át a standard $x^2 J''(x) + x\,J'(x) + (x^2 - \mu - 1/4)\,J(x) = 0$ alakba. A $\phi(1) = 0$ peremfeltétel akkor teljesül ha $\sqrt{\lambda}$ a J_ν, $\nu = \mu + 1/4$ Bessel függvény gyöke, de μ megengedett értékeit még nem ismerjük. A második egyenlet a $\psi(\varphi,\vartheta) = \theta(\varphi)P(\cos\vartheta)$ választással tovább szeparálható: $\theta''(\varphi)P(\cos\vartheta) + \theta(\varphi)\sin^4\vartheta\,P''(\cos\vartheta) - 2\theta(\varphi)\sin^2\vartheta\cos\vartheta\,P'(\cos\vartheta) + \mu\theta(\varphi)\sin^2\vartheta\,P(\cos\vartheta) = 0$, és $\theta(\varphi + 2\pi) = \theta(\varphi)$ miatt $\theta'' + n^2\theta = 0$, tehát $\theta_n(\varphi) = a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ a θ függvények általános alakja, míg az $x = \cos\vartheta$ változóval P az

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + (\mu - n^2/(1-x^2))P(x) = 0 \tag{15.57}$$

Legendre egyenlet megoldása.

Az (15.57) egyenletet először az $n = 0$ esetben vizsgáljuk. Korlátos megoldásai hatványsorba fejthetőek, és az együtthatók a $(k+1)(k+2)\,c_{k+2} = (k^2 + k - \mu)\,c_k$ rekurziónak tesznek eleget. Látható hogy P csak akkor lehet korlátos a teljes $[-1,1]$ intervallumon ha $c_k \to 0$ amint $k \to +\infty$, de ez csak úgy lehetséges ha van olyan $m \geq 0$ egész szám hogy $\mu = m(m+1)$ és $c_k = 0$ ha $k > m$ vagy $k + m$ páratlan; ezzel a λ sajátértékeket is meghatároztuk. A $\mu = m^2 + m$, $m = 0, 1, 2, ...$ értékhez tartozó P_m megoldás konstans szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott m-edfokú polinom, aminek minden második együtthatója nulla. $P_0(x) = c_0$, $P_1 = c_1 x$, és a (15.57) egyenletből az is levezethető hogy

$$\int_{-1}^{1} x^k P_m(x))\,dx = 0 \quad \text{ha} \quad k < m, \quad \text{vagyis} \quad \int_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)\,dx = 0 \quad \text{ha} \quad k \neq m,$$

tehát P_m *ortogonális rendszer az* $L^2[-1,1]$ *Hilbert térben.* $\heartsuit$ A (15.57) egyenletből $(1-x^2)P''-2xP'=\big((1-x^2)P'\big)'$ miatt parciális integrálással, $\mu=m(m+1)$ esetén

$$\mu\int_{-1}^{1}x^kP_m(x)=k\int_{-1}^{1}(x^{k-1}-x^{k+1})P_m'(x)\,dx=\int_{-1}^{1}((k^2+k)\,x^k-(k^2-k)\,x^{k-2})P_m(x)\,dx$$

következik, ami induktív bizonyítást tesz lehetővé; feltehetjük hogy $m>1$. A $k=0$ eset mindig triviális, de ha $k=1$ akkor $\mu>k(k+1)$ miatt kapjuk a tételt. $\square$ Ezután P_m meghatározó c_m együtthatóját úgy illik megválasztani hogy a $[-1,1]$ intervallumon 1 legyen a négyzetintegrálja, tehát P_m éppen az $1,x,x^2,...$ hatványok ortonormálásával kapott Legendre polinomok sorozata lesz: $P_0(x)=1/\sqrt{2}$, $P_1(x)=x\sqrt{3/2}$, és így tovább, a többi azonosítása sem nehéz. Azt kell észrevenni hogy a $Q_m^{(m)}:=d^m(x^2-1)^m/dx^m$ polinomok is ortogonálisak, tehát P_m és $Q_m^{(m)}$ csak konstans szorzóban különbözik. $\heartsuit$ Mivel a ±1 számok a $Q_m(x):=(x^2-1)^m$ polinom m-szeres gyökei, $Q_m^{(k)}(\pm1)=0$ ha $k<m$, amiből parciális integrálással kapjuk hogy $Q_m^{(m)}$ az $1,x,x^2,...,x^m$ hatványok mindegyikére merőleges. $\square$ A normáló tényezőt is sorozatos parciális integrálással határozhatjuk meg:

$$P_m(x)=\frac{\sqrt{2m+1}}{m!\,2^{m+1/2}}\,\frac{d^m}{dx^m}\,(x^2-1)^m\,,\quad m=0,1,2,... \tag{15.58}$$

a Rodriguez képlet.

Nem könnyű rájönni hogy az általános $n\in\mathbb{N}$ esetben a (15.57) Legendre egyenlet megoldásai a $P_{n,m}(x):=(1-x^2)^{n/2}P_m^{(n)}(x)$ függvények, ahol $m\ge n$ egész, $P^{(n)}=d^nP/dx^n$, $P_{0,m}=P_m$. $\heartsuit$ Az első támpont az $(1-x^2)R''(x)-(2n+2)R'(x)+(m^2+m-n^2-n)R(x)=0$ egyenlet, amit a $P_m^{(n)}$, $n\le m$ deriváltak elégítenek ki; ez az állítás indukcióval egyszerüen következik. Ezután azt kell kitalálni hogy $\mu=m(m+1)$ esetén (15.57) megoldását a $P=(1-x^2)^{n/2}\,R$ alakban érdemes keresni. Valóban, $P'=(1-x^2)^{n/2}\,R'-nx(1-x^2)^{n/2-1}\,R$, továbbá $(1-x^2)^{-n/2}\big((1-x^2)\,P'\big)'=(1-x^2)\,R''-(2n+2)x\,R'+(n^2/(1-x^2)-n-n^2)\,R$, tehát R ugyanannak az egyenletnek tesz eleget mint a $P_m^{(n)}$ függvények. $\square$

Ezzel megkaptuk (15.56) második egyenletének alapmegoldásait, a

$$\psi_{n,m}(\varphi,\theta):=(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))P_{n,m}(\cos\theta)\,,\quad n,m\in\mathbb{Z}_+\,,n\le m$$

gömbfüggvényeket, amelyek a gömb felszínmértéke szerint alkotnak teljes ortogonális rendszert. Összefoglalásként elmondhatjuk hogy gömbön a Laplace operátor sajátfüggvényei

$$Y_{n,m,k}(r,\varphi,\vartheta)=r^{-1/2}\,J_\nu(r\sqrt{\lambda_{m,k}})\,\psi_{n,m}(\varphi,\vartheta)$$

alakúak, ahol $\nu=m^2+m+1/4$, és a $\lambda_{m,k}\ge0$ sajátértékeket $J_\nu(\sqrt{\lambda})=0$ határozza meg. A J_ν Bessel függvények gyökei végtelenhez tartó sorozatba rendezhetők, tehát a sajátértékek kettő, a sajátfüggvények három nemnegatív egész számmal paraméterezhetőek. Mivel $n\le m$, mindegyik sajátérték véges multiplicitású.

16. AZ ELMÉLETI MECHANIKA ALAPJAI

A Lagrange és Hamilton mechanika elveit tárgyaljuk, technikai részletek mellőzésével. A "Pénzügyi matematika" jegyzet utolsó fejezete további ismereteket tartalmaz, de az se teljes.

16.1. **Variációszámítás.** Valamely (véges szabadsági fokú) mechanikai rendszer, például véges sok tömegpontból vagy merev testből álló rendszer térbeli elhelyezkedését a $(q_1,q_2,...,q_n)=\mathsf{q}\in\mathbb{R}^n$ *általánosított koordinátákkal* jellemezhetjük, $\dot{\mathsf{q}}=(\dot q_1,\dot q_2,...,\dot q_n)$, ahol $\dot{q_k}:=dq_k/dt$. Ezek nem feltétlenül az $\mathbb{E}_3$ fizikai tér pontjainak koordinátái, gyakori a poláris vagy gömbi koordináták használata. A rendszer mozgását az $L(\mathsf{q},\dot{\mathsf{q}})$ Lagrange függvény határozza meg, *variációs elv* segítségével. Általában $L=K-V$, ahol $K=K(\mathsf{q},\dot{\mathsf{q}})$ a kinetikus, $V=V(\mathsf{q})$ a potenciális energia; K a $\dot{\mathsf{q}}$ pozitív definit kvadratikus, tehát konvex függvénye. A legkisebb hatás elve szerint a q_0 és q_1 pontokat összekötő $\mathsf{q}_0^t := \{\mathsf{q}(s) : 0 \le s \le 1\,, \mathsf{q}(0) = \mathsf{q}_0\,, \mathsf{q}(t) = \mathsf{q}_1\}$ differenciálható pályák közül az valósul meg, amely mentén az

$$S(\mathsf{q}_0^t) = \int_0^t L\big(\mathsf{q}(s), \dot{\mathsf{q}}(s)\big)\, ds$$

hatásfunkcionál minimális.

Az Euler - Lagrange egyenletek: Tegyük fel hogy q_0^t az extremális trajektória, ekkor a többi $\mathsf{q}_0^t + \boldsymbol{\delta}$ alakú, ahol $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, és $\delta_k(0) = \delta_k(t) = 0 \;\forall\; k$. A $\boldsymbol{\delta}$ trajektóriák lineáris teret alkotnak, tehát az iránymenti derivált használható:

$$\nabla_{\boldsymbol{\delta}} S(\mathsf{q}_0^t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} S(\mathsf{q}_0^t + \alpha \boldsymbol{\delta})\Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\delta}\,.$$

A felcserélve a differenciálás és az integrálás sorrendjét, a láncszabály alapján

$$0 = \nabla_{\boldsymbol{\delta}} S(\mathsf{q}_0^t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \Big(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta_k(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{\delta}_k(s)\Big)\, ds\,,$$

amiből parciális integrálással, a $q_k(0) = q_k(t) = 0$ peremfeltételt is figyelembe véve

$$\sum_{k=1}^n \int_0^t \Big(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big)\, \delta_k(s)\, ds = 0$$

következik, ami minden $\boldsymbol{\delta}$ esetén csak úgy teljesülhet, ha mindegyik δ_k szorzója eltűnik, vagyis

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{16.1}$$

Ezek Euler és Lagrange egyenletei, amelyek például a $K = (1/2)\sum_{k=1}^n m_k \dot{q}_k^2$ esetben Newton klasszikus $m_k \ddot{q}_k = -\partial V(\mathsf{q})/\partial q_k$ egyenleteire redukálódnak. A továbblépéshez előkészületre van szükség.

Konvex dualitás: Valós Euklideszi téren minden $f : \mathbb{E}_n \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez hozzárendelhetjük az ő f^* konvex konjugáltját:

$$f^*(z) := \sup\{\langle z, x\rangle\} - f(x) : x \in \mathbb{E}_n\} \quad z \in \mathbb{E}_n\,. \tag{16.2}$$

f^* gráfját a z helyen alulról burkolják a $g(z,x) := \langle z, x\rangle - f(x)$ hipersíkok, tehát f^* mindig konvex, de a $+\infty$ értéket felveheti. Könnyű megmutatni hogy pozitív definit kvadratikus függvény konvex konjugáltja is az. Igen hasznos a $\langle z, x\rangle \le f(x) + f^*(z) \;\forall\; x, z \in \mathbb{E}_n$ egyelőtlenség.

Tétel 16.1. *Legyen f olyan konvex függvény hogy $\|x\| = o(f(x))$ amint $\|x\| \to +\infty$. Ekkor minden $z \in \mathbb{E}_n$ vektorhoz van olyan $x \in \mathbb{E}_n$ hogy $f^*(z) = \langle z, x\rangle - f(x)$. Ha f mindenütt differenciálható, akkor a $\nabla f(x) = z$ egyenlet minden $z \in \mathbb{E}_n$ esetén megoldható, és*

$$f^*(z) = \langle \nabla f(x), x\rangle - f(x) \quad \textit{hacsak} \quad z = \nabla f(x)\,. \tag{16.3}$$

Ha még azt is tudjuk hogy f szigorúan konvex, akkor $\nabla f : \mathbb{E}_n \mapsto \mathbb{E}_n$ kölcsönösen egyértelmű, és képtere az egész tér; $\nabla f(\mathbb{E}_n) = \mathbb{E}_n$.

Bizony: Az $A_{a,b} := \{x \in \mathbb{E}_n : f(x) \le a + b\|x\|\}$ halmazok, ahol $b \ge 0$, a növekedési feltétel miatt mind üresek vagy korlátosak, tehát a $B_{z,c} := \{x \in \mathbb{E}_n : g(z,x) \ge c\}$ halmaz is korlátos. Mivel f folytonos, $B_{z,c}$ zárt, tehát $g(z,x)$ – mint az x függvénye – felveszi rajta a maximumát, és ott $z = \nabla f(x)$. Ha f szigorúan konvex, de $\nabla f(x_1) = \nabla f(x_2) = z$, akkor $x_1 \ne x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2) + \langle z, x_1 - x_2\rangle$ és $f(x_1) > f(x_2) + \langle z, x_1 - x_2\rangle$ egyszerre teljesülne, ami lehetetlen. $\square$

A (16.3) összefüggést gyakran Legendre transzformációnak nevezik.

Tétel 16.2. *Ha $f : \mathbb{E}_n \mapsto \mathbb{R}$ konvex és $\|x\| = o(f(x))$ amint $\|x\| \to +\infty$, akkor $f^* : \mathbb{E}_n \mapsto \mathbb{R}$ is konvex, $\|z\| = o(f^*(z))$ ha $\|z\| \to +\infty$, és f^* konvex konjugáltja éppen $f = f^{**}$, vagyis*

$$f(x) = \sup\{\langle x, z\rangle - f^*(z) : z \in \mathbb{E}_n\}\,.$$

Ha f és f^* egyaránt szigorúan konvex és differenciálható függvény, akkor $z = \nabla f(x)$ esetén $\nabla f^*(z) = x$ és $\langle z, x\rangle = f(x) + f^*(z)$.

Bizony: Az előző tétel alapján $f^*(z)$ mindenütt véges, és $f^*(z) \geq \langle z, x\rangle - f(x)\ \forall\ x, z \in \mathbb{E}_n$. Legyen $x := \beta z/\|z\|$, ekkor $f^*(z) \geq \beta\|z\| - C_\beta$, ahol $C_\beta := \sup\{f(x) : \|x\| \leq \beta\}$, tehát

$$\liminf_{\|z\|\to\infty} \frac{f^*(z)}{\|z\|} \geq \beta - \lim_{\|z\|\to\infty} \frac{C_\beta}{\|z\|} = \beta\,,$$

vagyis $\|z\| = o(f(z))$ amint $\|z\| \to +\infty$.

Legyen x olyan hogy $f^*(z) = g(z, x) = \langle z, x\rangle - f(x)$, ekkor

$$f^*(y) \geq \langle x, y\rangle - f(x) = \langle x, y\rangle + f^*(z) - \langle z, x\rangle = f^*(z) + \langle x, y - z\rangle\,,$$

tehát f^* tényleg konvex, és szigorúan konvex ha f szigorúan konvex differenciálható függvény.

Mivel $f(x) \geq \langle z, x\rangle - f^*(z)\ \forall\ z \in \mathbb{E}_n$,

$$f(x) \geq \sup\{\langle x, z - f^*(z) : z \in \mathbb{E}_n\} = f^{**}(z)\,.$$

Másrészt $f^{**}(x) \geq \langle x, z\rangle - f^*(z)\ \forall\ z \in \mathbb{E}_n$, továbbá van olyan $y \in \mathbb{E}_n$ hogy $f^*(z) = g(z, y) = \langle z, y\rangle - f(y)$, tehát f konvexitása miatt van olyan $z^* \in \mathbb{E}_n$ hogy

$$f^{**}(x) \geq \langle x - y, z\rangle + f(y) \geq f(x) + \langle z^*, y - x\rangle\,,$$

amiből a $z = z^*$ választással $f^{**}(x) \geq f(x)$ is következik. A többi állítás az előző tétel egyszerű folyománya. □

Ha ∇f is differenciálható, akkor a $z = \nabla f(x)$ egyenlet megoldásaként definiált $\Phi(z) = x$ ha $z = \nabla f(x)$ vektormező is az, továbbá $f^*(z) = \langle z, \Phi(z) - f(\Phi(z))$, tehát $\nabla f^* = \Phi + \nabla\Phi\, z - \nabla\Phi\,\nabla f = \Phi$ mivel $z = \nabla f(x)$.

Hamilton egyenletei: Feltehetjük hogy rögzített q mellett az $L(\mathsf{q}, \dot{\mathsf{q}})$ Lagrange függvény $\dot{\mathsf{q}}$ szigorúan konvex, kétszer differenciálható függvénye, és a $|\dot{\mathsf{q}}| = o(L)$ feltételnek is eleget tesz. A Lagrange függvény $\dot{\mathsf{q}}$ szerint képezett konvex konjugáltja a

$$H(\mathsf{q}, \mathsf{p}) := \sup_{\dot{\mathsf{q}}}\{\langle \mathsf{p}, \dot{\mathsf{q}}\rangle - L(\mathsf{q}, \dot{\mathsf{q}}) : \dot{\mathsf{q}} \in \mathbb{R}^n\} \tag{16.4}$$

Hamilton függvény, ahol $\mathsf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ az *általánosított impulzus*. Például, ha

$$L = K - V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{q}_k^2 - V(q_1, q_2, ..., q_n)\,,$$

akkor

$$H = K + V = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^2}{2m_k} + V(q_1, q_2, ..., q_n)$$

a teljes mechanikai energia.

Az előző szakaszból az általános esetben is tudjuk hogy

$$L(\mathsf{q}, \dot{\mathsf{q}}) = \sup_{\mathsf{p}}\{\langle \dot{\mathsf{q}}, \mathsf{p}\rangle - H(\mathsf{q}, \mathsf{p}) : \mathsf{p} \in \mathbb{R}^n\}\,, \tag{16.5}$$

tehát

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{és} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \forall\ k = 1, 2, ..., n\,, \tag{16.6}$$

továbbá ilyenkor $\langle \mathsf{p}, \dot{\mathsf{q}}\rangle = L(\mathsf{q}, \dot{\mathsf{q}}) + H(\mathsf{q}, \mathsf{p})$. Ezek az összefüggések adják meg a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a $(\mathsf{q}, \dot{\mathsf{q}})$ és (q, p) változók között, itt is fontos hogy L a $\dot{q}$ konvex függvénye. A (16.1) Euler - Lagrange egyenletek szerint $\dot{p}_k = \partial L/\partial q_k$, tehát

$$dH = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\, dq_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(p_k\, d\dot{q}_k + \dot{q}_k\, dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\, dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k\right) = 0$$

mert $\dot{q}_k\, dp_k = \dot{p}_k\, dq_k$. Ennek az egyenletnek két alapvető következménye is van. A dH differenciál két formája azonos, tehát $\partial H/\partial q_k = -\partial L/\partial q_k$, amiből

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{és} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \forall\, k = 1, 2, ...n. \tag{16.7}$$

Ezek a mechanika Hamilton egyenletei, amelyek ekvivalensek az Euler - Lagrange egyenletekkel; a $\big(\mathsf{q}(t), \mathsf{p}(t)\big)$ mozgást a $\mathsf{q}(0)$ és $\mathsf{p}(0)$ kezdeti értékek ismeretében határozzák meg. Azt is látjuk hogy a H Hamilton függvény, ami a rendszer energiájával azonosítható, a mozgásegyenletek mentén állandó; ez az *energia megmaradásának elve.*

16.2. **A Hamilton - Jacobi egyenlet:** A hatásfunkcionál extrémumát a mozgásegyenletek mentén számoljuk. Adott $\mathsf{q}(0)$ kezdeti érték mellett $S(\mathsf{q}_0^t) = S(t, \mathsf{q})$, ahol $\mathsf{q} = \mathsf{q}(t)$ a pálya végpontja, tehát

$$dS = L\, dt = \sum_{k=1}^{n} (p_k \dot{q}_k\, dt) - H\, dt = \sum_{k=1}^{n} (p_k\, dq_k) - H\, dt\,,$$

ahonnan $\partial S/\partial t = -H$ és $\partial S/\partial q_k = p_k$, vagyis teljesül a

$$\frac{\partial S(t, \mathsf{q})}{\partial t} + H\big(\mathsf{q}, \nabla S(t, \mathsf{q})\big) = 0 \tag{16.8}$$

Hamilton - Jacobi egyenlet. Ha ezt meg tudnánk oldani, akkor $p_k = \partial S/dq_k$ a mozgásegyenletek megoldását is megadná, de az élet nehéz. Azt már megszokhattuk hogy fizikailag érdekes egyenletek megoldását többnyire nem lehet kezelhető formában megadni; itt más a gond. A Hamilton - Jacobi egyenletet abból a feltevésből kiindulva vezettük le, hogy az S hatásfunkcionál differenciálható, de ez messze van az igazságtól. A hatásfunkcionált peremérték feladat megoldásaként definiáltuk, vagyis $\mathsf{q}(0) = \mathsf{q}_0, \mathsf{q}(t) = \mathsf{q}_1$ az előírás, és ez nem olyan kellemes mint a $\mathsf{q}(0) = \mathsf{q}_0\,, \dot{\mathsf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$ kezdeti érték feladat.

A legegyszerűbb példa $H = (1/2)|\mathsf{p}|^2$ esete, vagyis $\partial_t S + (1/2)|\nabla S|^2 = 0$, amit a

$$\partial_t S_\sigma + \tfrac{1}{2}\, |\nabla S_\sigma|^2 = \tfrac{\sigma}{2} \Delta S_\sigma\,, \quad 0 < \sigma \to 0$$

viszkózus közelítés segítségével oldunk meg. Az $S_\sigma = -\sigma \log U$ *Hopf - Cole transzformáció* után $\partial_t S_\sigma = -\sigma \partial_t U/U$, $\nabla S_\sigma = -\sigma \nabla U/U$ és $\Delta S_\sigma = -\sigma \Delta U/U + \sigma |\nabla U|^2/U^2$, amiből $\partial_t U = (\sigma/2)\Delta U$, tehát

$$S_\sigma(t, \mathsf{q}) = -\sigma \log \int \frac{\exp\big(-S_0(\mathsf{y})/\sigma - |\mathsf{y} - \mathsf{q}|^2/2\sigma t\big)}{\sqrt{2\pi\sigma t}}\, d\mathsf{y}\,.$$

Laplace nagy kitevőkről szóló tételével kapjuk Hopf

$$S(t, \mathsf{q}) = \lim_{\sigma \to 0} S_\sigma(t, \mathsf{q}) = \inf_{\mathsf{y}} \{S_0(\mathsf{y}) + |\mathsf{y} - \mathsf{q}|^2/2t\}$$

megoldóképletét, a nevezetes *infimum-konvoluciós* formulát. Az eredmény az S_0 kezdeti érték megválasztásától függően differenciálható, vagy nem. Az alábbi példák tanusága szerint a megoldást a kezdeti (vagy végső) érték nem határozza meg, de igazolható hogy mindig Hopfé a fizikailag elfogadható megoldás.

A dinamikus programmozás Bellman elve: A legkisebb hatás problémájának tárgyalásakor, ugyanúgy mint a véges dimenziós esetben, az első iránymenti deriváltak számolásával csak az extrémum szükséges feltételét kaptuk meg. Mivel az L Lagrange függvény a sebességekben konvex, a feladat alábbi megfogalmazása az elégséges feltételhez is elvezet. A hatásfunkcionált

$$S(t, \mathsf{q}) := \sup_{\mathsf{x}(\cdot)} \left\{ \Phi(\mathsf{x}(T)) - \int_t^T L(\mathsf{x}(s), \dot{\mathsf{x}}(s))\, ds\ : \mathsf{x}(t) = \mathsf{q} \right\} \tag{16.9}$$

definiálja, ahol $0 \le t \le T$, $\Phi(\mathsf{q}) = S(T, \mathsf{q})$ adott korlátos függvény. Nem tudjuk hogy S értékei végesek, és az se biztos hogy van optimális $\mathsf{x} \in C^1([t, T] \to \mathbb{R}^n)$ folyamat, vagyis olyan amelyiknél

$\mathsf{x}(t) = \mathsf{q}$ és

$$S(t,\mathsf{q}) = \Phi(\mathsf{x}(T)) - \int_t^T L(\mathsf{x}(s),\dot{\mathsf{x}}(s))\,ds\,.$$

A hatásfunkcionál diferenciálhatósága sem nyilvánvaló, sőt általában nem is igaz. Hasonló eredményekhez vezet az

$$S(t,\mathsf{q}) := \inf_{\mathsf{x}(\cdot)} \left\{ \Phi(\mathsf{x}(\tau)) + \int_\tau^t L(\mathsf{x}(s),\dot{\mathsf{x}}(s))\,ds\ : \mathsf{x}(t) = \mathsf{q} \right\}$$

konstrukció is, de a végponténál természetesebb dolog a trajektóriák q kezdőpontját rögzíteni.

Először a dinamikus programmozás alapelvét tárgyaljuk. Az integrált a $0 \le t < \tau < T$ séma szerint két részre bontva látjuk hogy *optimális folyamat minden szakasza is optimális,* vagyis

$$S(t,\mathsf{q}) = \sup_{\mathsf{x}(\cdot)} \left\{ S(\tau,\mathsf{x}(\tau)) - \int_t^\tau L(\mathsf{x}(s),\dot{\mathsf{x}}(s))\,ds\ : \mathsf{x}(t) = \mathsf{q} \right\}. \tag{16.10}$$

A preciz bizonyítás sem nehéz, nem kell feltételezni hogy van optimális x folyamat. Ennek segítségével mutatjuk meg hogy *S a 16.8 Hamilton - Jacobi egyenlet megoldása,* legalábbis akkor amikor folytonosan differenciálható. ♡ A $\dot{\mathsf{q}} := \dot{\mathsf{x}}(t)$ jelöléssel, bármely x pálya mentén

$$S(t,\mathsf{q}) \ge S(t,\mathsf{q}) + S'_t(t,\mathsf{q})(\tau - t) + \langle \nabla S(t,\mathsf{q}),\dot{\mathsf{q}}\rangle(\tau - t) - L(\mathsf{q},\dot{\mathsf{q}})(\tau - t) + o(\tau - t)\,,$$

vagyis a $\tau \to t$ határátmenet után $0 \ge S'_t(t,\mathsf{q}) + \langle \nabla S(t,\mathsf{q}),\dot{\mathsf{q}}\rangle - L(\mathsf{q},\dot{\mathsf{q}})$ következik. Ebben az egyenlőtlenségben $\dot{\mathsf{q}} = \mathsf{x}(t)$ tetszőleges, tehát alkalmazható a Hamilton függvény definíciója. A $\dot{\mathsf{q}} = \nabla_{\mathsf{p}} H(\mathsf{q},\nabla S(t,\mathsf{q}))$ választással érhetjük el hogy $\nabla S = \nabla_{\dot{\mathsf{q}}} L$ teljesüljön, vagyis $\langle \nabla S,\dot{\mathsf{q}}\rangle - L(\mathsf{q},\dot{\mathsf{q}}) = H(\mathsf{q},\nabla S)$ legyen, ahol $\nabla_{\mathsf{p}} H$ a $\partial H/\partial p_k$ parciális deriváltakból álló vektor, $\nabla_{\dot{\mathsf{q}}} L$ jelentése hasonló. Igy kapjuk a (16.8) Hamilton - Jacobi egyenlet egyik felét: $S'_t(t,\mathsf{q}) + H(\mathsf{q},\nabla S) \le 0$. Az is látható hogy ha van optimális folyamat, amit most fel kell tételeznünk, akkor itt egyenlőség áll. □ A HJ egyenletnek ez a levezetése se tökéletes, meggyőzőbb a következő, fordított irányú okoskodás.

Tegyük fel hogy adott a HJ egyenletnek egy $W(t,\mathsf{q})$ klasszikus megoldása, vagyis $W(T,\mathsf{q}) \equiv \Phi(\mathsf{q})$, W folytonosan differenciálható és $W'_t + H(\mathsf{q},\nabla W) = 0$; azt szeretnénk látni hogy $S \equiv W$. ♡ Tetszőleges $\mathsf{x} \in C^1$, $x(t) = \mathsf{q}$ folyamat mentén

$$\begin{aligned} \frac{W(s,\mathsf{x}(s))}{ds} &= W'_t(s,\mathsf{x}(s)) + \langle \nabla W(s,\mathsf{x}(s)),\dot{\mathsf{x}}(s)\rangle = -H(\mathsf{x}(s),\nabla W(s,\mathsf{x}(s))) \\ &+ \langle \nabla W(s,\mathsf{x}(s)),\dot{\mathsf{x}}(s)\rangle \le L(\mathsf{x}(s),\dot{\mathsf{x}}(s))\,, \end{aligned} \tag{16.11}$$

tehát s szerint integrálva

$$\Phi(\mathsf{x}(T)) - \int_t^T L(\mathsf{x}(s),\dot{\mathsf{x}}(s))\,ds \le W(t,\mathsf{q})\,.$$

Mivel $\mathsf{x}(\cdot)$ tetszőleges, ezzel azt mutattuk meg hogy $S(t,\mathsf{q}) \le W(t,\mathsf{q})$. A 16.11 egyenlőtlenségben $\dot{\mathsf{x}}(s) = \nabla_{\mathsf{p}} H(\mathsf{x}(s),\nabla W(s,\mathsf{x}(s)))$ az egyenlőség feltétele, ami teljesíthető. □ A Lagrange és Hamilton függvények konvex dualitása miatt $\nabla W = \nabla_{\dot{\mathsf{q}}} L$ éppen az általánosított impulzus, továbbá $\nabla_{\mathsf{q}} L = -\nabla \mathsf{q} H$, tehát az optimális trajektóriát a mozgásegyenletek határozzák meg, ezt az Euler - Lagrange, illetve Hamilton féle formalizmusban egyaránt elmondhatjuk.

16.3. **A Burgers egyenlet.** A nevezetes Hamilton - Jacobi egyenletnek általában nincs mindenütt differenciálható megoldása. A legegyszerűbb esetben $H = v^2/2$, ahol $v \in \mathbb{R}$ az $x \in \mathbb{R}$ helyen található, egységnyi tömeggel rendelkező részecske sebessége, tehát $S = S(t,x)$. Hamilton és Jacobi $\partial_t S + (1/2)(\partial_x S)^2 = 0$ egyenlete az $u(t,x) := \partial_x S(t,x)$ helyettesítéssel a $\partial_t u + (1/2)\partial_x u^2 = 0$ Burgers egyenletbe megy át. Tegyük fel hogy u a Burgers egyenlet klasszikus (differenciálható) megoldása az $u(0,x) = u_0(x)$ kezdeti értékkel. Ekkor az $\dot{x} = u(t,x)$ *karakterisztikus egyenlet* megoldható, és

$$\frac{du(t,x(t))}{dt} = \partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x(t))\dot{x}(t) = \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0\,,$$

tehát a karakterisztikus egyenlet megoldásai, a karakterisztikák mentén u állandó. Emiatt a karakterisztikák olyan egyenesek, amelyek meredekségét az u kezdeti értéke meghatározza, tehát $u(t,x) = u_0(y)$ ha $x = y + u_0(y)\,t$. Ellentmondáshoz jutunk olyankor, amikor a karakterisztikák metszik egymást; nem tudjuk hogy az u_0 melyik értékét kell elfogadni. A magyarázat az hogy a Burgers egyenlet klasszikus megoldásai ritkán élnek sokáig. Csak akkor van globális, vagyis $t = 0$-tól $t = +\infty$-ig létező megoldás, ha az $u_0(x) = u(0,x)$ kezdeti érték differenciálható, és monoton nő.

A Burgers egyenlet olyan egyszerű, hogy sok megoldása kézzel is megszerkeszthető. Neumann János és munkatársai is ezen gyakorolták a *nemlineáris hiperbolikus rendszerek* numerikus megoldását az első számítógépek segítségével, és őket is érték meglepetések. A MAPLE vagy a Matematica ilyen számolásokra nem alkalmas, komolyabb programcsomag, például a MATLAB ajánlott.

Az $u(t,x) \equiv c$ triviális megoldás mellett a (τ,ξ) középpontú hasonlósági transzformációval szemben invariáns $u^*_{\tau,\xi}(t,x) = (x-\xi)/(t-\tau)$ lineáris függvény önhasonló megoldás, ami a $t = \tau$ pontban szinguláris. A következő példákban ezeket kombináljuk.

1. Példa: $u(0,x) = 0$ ha $x \le 0$, $u(0,x) = 1$ ha $x > 0$, és $t > 0$ esetén

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0\,, \\ x/t & \text{ha } 0 < x \le t\,, \\ 1 & \text{ha } x > t\,. \end{cases}$$

A kezdeti szakadás kisimul, két ponttól eltekintve u differenciálható, és kielégíti a Burgers egyenletet. Egyszerű ritkulási hullámot látunk. A Hamilton - Jacobi egyenlet megoldását u integrálásával kapjuk: $S(0,x) = 0$ ha $x < 1$, $S(0,x) = 1$ ha $x \ge 1$, továbbá

$$S(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0\,, \\ x^2/2t & \text{ha } 0 < x \le t\,, \\ x - t/2 & \text{ha } x > t\,. \end{cases}$$

Ha $t > 0$ akkor S már mindenütt differenciálható, és $\partial_t S + (1/2)(\partial_x S)^2 = 0$.

2. Példa: Legyen $u(0,x) = 1$ ha $x < 0$, $u(0,x) = 0$ ha $x \ge 0$, továbbá

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x < t < 1, \\ (x-1)/(t-1) & \text{ha } t \le x < 1, \\ 0 & \text{ha } t < 1 \le x\,. \end{cases}$$

A $t = 1$ időpontban a megoldás megszakad, lökéshullám alakul ki. Ez a jelenség a természetben is előfordul, ezért a megoldás fogalmát kell újragondolni. Azt mondjuk hogy $u = u(t,x)$ a $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ *megmaradási elv* gyenge megoldása az u_0 kezdeti értékkel, ha u és $f(u)$ minden korlátos halmazon integrálható, továbbá

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(\phi_t'(t,x)\,u(t,x) + \phi_x'(t,x)\,f(u(t,x))\big)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(0,x)u_0(x)\,dx = 0 \qquad (16.12)$$

minden kompakt tartójú és folytonosan differenciálható $\varphi : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}$ *tesztfüggvénnyel* teljesül; φ kompakt tartóju ha vannnak olyan $T > 0$ és $L > 0$ számok hogy $\varphi(t,x) = 0$ ha $t > T$ vagy $|x| > L$. Ez az egyenlet úgy keletkezett, hogy az eredetit megszoroztuk a tesztfüggvénnyel, és parciálisan integráltuk. Az így kapott egyenlet akkor is értelmes ha u nem differnciálható, hanem csak korlátos, és korlátos halmazokon integrálható. Könnyű ellenőrizni hogy az alábbi példákban a Burgers egyenlet gyenge megoldásai szerepelnek.

3. Példa: $u(0,x) = 1$ ha $x \le 1/2$, $u(0,x) = 0$ if $x > 1/2$, és ha $t > 0$ akkor

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 2x \le t+1\,, \\ 0 & \text{ha } 2x > t+1\,. \end{cases}$$

A 2. Példa megoldása $t = 1$ után ezzel a lökéshullámmal folytatódik; a Hamilton - Jacobi egyelet innen adódó megoldásának a differenciálhatósága szűnik meg a $t = 1$ időpontban. Konkrétabban, $S(0, x) = x$ ha $x \leq 0$, $S(0, x) = 0$ ha $x > 0$, továbbá

$$S(t,x) = \begin{cases} x - t/2 & \text{ha } x < t < 1, \\ (x^2 - 2x + t)/(2t - 2) & \text{ha } t \leq x < 1, \\ 1/2 & \text{ha } t < 1 \leq x, \\ x - t/2 & \text{ha } t \geq 1 \text{ és } 2x \leq t + 1, \\ 1/2 & \text{ha } t \geq 1 \text{ és } 2x > t + 1. \end{cases}$$

Az $x = t$, $x = 1$ ha $t \leq 1$, és $2x = t+1$ ha $t > 1$ törésvonalaktól eltekintve $\partial_t S + (1/2)(\partial_x S)^2 = 0$.

4. Példa: $u(0, x) = 0$ ha $x \leq 0$, $u(0, x) = 1$ ha $x > 0$, és ha $t > 0$ akkor

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq t/2 \\ 1 & \text{ha } x > t/2\,. \end{cases}$$

A kezdeti érték ugyanaz mint az 1. Példában, tehát a gyenge megoldást nem határozza meg. Ez a szinguláris megoldás fizikailag nem értelmezhető. Ugyanezt kell mondani a Hamilton - Jacobi egyenlet $S(0, x) = 0$ ha $x < 0$, $S(0, x) = 1$ ha $x \geq 1$, továbbá

$$S(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq t/2 \\ x - t/2 & \text{ha } x > t/2 \end{cases}$$

megoldásáról; az 1. Példában látható az igazi.

5. Példa: $a > 0$ adott konstans,

$$u(t,x) = \begin{cases} a & \text{ha } 0 < x < at/2\,, \\ -a & \text{ha } -at/2 < x < 0\,, \\ 0 & \text{ha } |x| > at/2\,. \end{cases}$$

Ez a gyenge megoldás az azonosan zérus kezdőértékből alakul ki, a természetben nem fordul elő.

6. Példa: $0 < \tau \leq 1$ adott, és $0 \leq t \leq \tau$ esetén

$$u_\tau(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq t - \tau/2\,, \\ (x - \tau/2)/(t - \tau) & \text{ha } t - \tau/2 \leq x \leq \tau/2\,, \\ 0 & \text{ha } x > \tau/2\,, \end{cases}$$

míg ha $t \geq \tau$ akkor

$$u_\tau(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x < t/2\,, \\ 0 & \text{ha } x \geq t/2\,. \end{cases}$$

Azt látjuk hogy különféle kezdőértékű megoldások egy idő után azonos, fizikailag értelmezhető módon folytatódnak, *információvesztés* lép fel. Közönséges differencálegyenletekkel ilyesmi nem fordulhat elő.

7. Példa: Legyen $u(0, x) = 1$ ha $0 \leq x < 1$, egyébként $u(0, x) = 0$, míg $t > 0$ esetén

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x \geq \beta(t)\,, \\ x/t & \text{ha } 0 \leq x < \alpha(t)\,, \\ \alpha(t)/t & \text{ha } \alpha(t) \leq x < \beta(t)\,, \end{cases} \tag{16.13}$$

ahol $\alpha(t) = t$ és $\beta(t) = 1 + t/2$ ha $t < 2$; $\alpha(t) = \beta(t) = \sqrt{2t}$ ha $t \geq 2$. Ez a példa hullámcsomag szóródását írja le.

Rankine és Hugoniot szakadási feltétele: Azt hogy egy szakaszonként C^1 függvény tényleg gyenge megoldás, vagy nem az, a következő kritérium segítségével könnyen ellenőrizhető. Tegyük fel hogy $u(t, x)$ a (τ, ξ) pont egy környezetében, a $dx = s(t)dt$ egyenlettel adott Γ görbe kivételével klasszikus megoldása a $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ egyenletnek; $s(\tau) = \xi$ és $\dot{s}(\tau) \neq 0$. Legyen ψ a környezeten kívül eltűnő tesztfüggvény; (16.12) parciális integrálásával

$$\int_\Gamma \psi(t,x)\Big(\big(u(t+0,x) - u(t-0,x)\big)\,dx + \big(f(u(t,x+0)) - f(u(t,x-0))\big)\,dt\Big) = 0$$

adódik. Mivel ϕ tetszőleges és $u(\tau+0,\xi) = u(\tau,\xi-0)$, $u(\tau-0,\xi) = u(\tau,\xi+0)$, innen a

$$s(\tau) = \frac{f(u(\tau,\xi+0)) - f(u(\tau,\xi-0)}{u(\tau,\xi+0) - u(\tau,\xi-0)} \tag{16.14}$$

feltételt kapjuk.

Ezek a példák jól illusztrálják a Burgers típusú egyenletek különleges viselkedését, ami azért izgalmas, mert a folyadékok és gázok áramlását ilyen egyenletekből álló rendszerek, az Euler illetve Navier - Stokes egyenletek írják le.

A Lax féle entrópia feltétel: A $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ egyenletnél a *fizikailag értelmezhető megoldás* fogalmát Lax Péter definiálta. A $h, J : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvények Lax entrópia/fluxus párt alkotnak ha klasszikus megoldás mentén $\partial_t h(u) + \partial_x J(u) = 0$, aminek $J'(u) = f'(u)h'(u)$ a feltétele. Az u gyenge megoldás akkor tesz eleget Lax feltételének, ha a

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(\phi_t'(t,x)\,h(u) + \phi_x'(t,x)\,J(u)\big)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(0,x)\,h(u(0,x))\,dx \leq 0 \tag{16.15}$$

egyenlőtlenség nemnegatív ψ és konkáv h esetén mindig teljesül. A fenti pédák közül 4. és 5. nem ilyen, a többi igen. Olga Oleinik igazolta hogy csak egy olyan gyenge megoldás van amely az $u(0,x) = u_0(x)$ kezdeti feltételt, és az (16.15) entrópia feltételt is kielégíti. A termodinamikai entrópia az állapothatározók konkáv függvénye; ezért mondjuk azt hogy a fizikailag elfogadható megoldás entrópiája nő. Ez az irreverzibilitás jólismert jelenségének egy lehetséges magyarázata. A 7. Példa megoldását időben visszafelé lejátszva olyan gyenge megoldást kapunk, amely a (16.15) feltételnek nem tesz eleget.

17. VÁLOGATOTT PROBLÉMÁK ÉS MEGJEGYZÉSEK

17.1. **Lineáris algebra és analízis.** Legyen $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ lineáris normált tér, ekkor az $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ transzformáció (operátor) lineáris, ha $\mathsf{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathsf{A}(x) + \beta\mathsf{A}(y)$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) és $x, y \in \mathbb{X}$ esetén; ilyenkor az $\mathsf{A}(x) \equiv \mathsf{A}x$ jelölést használjuk. Az A lineáris operátor korlátos, ha van olyan $K < +\infty$ szám hogy $\|\mathsf{A}x\| \leq K\|x\|\ \forall x \in \mathbb{X}$; a legkisebb korlát, vagyis $\|\mathsf{A}\| := \sup\{\|\mathsf{A}x\| : \|x\| = 1\}$ az A normája. A definícióból azonnal adódik az operátorokra vonatkozó $\|\mathsf{A} + \mathsf{B}\| \leq \|\mathsf{A}\| + \|\mathsf{B}\|$ Minkowski egyenlőtlenség. Eszerint a lineáris operátorok lineáris normált teret alkotnak, ezt $L(\mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y})$ jelöli; $L(\mathbb{X} \to \mathbb{X}) \equiv L(\mathbb{X})$. Ha $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X} \to \mathbb{Y})$ és $\mathsf{B} \in L(\mathbb{Y} \to \mathbb{Z})$ akkor definiálható a $\mathsf{BA} = \mathsf{C} \in L(\mathbb{X} \to \mathbb{Z})$ szorzat, és az eleget tesz az $\|\mathsf{AB}\| \leq \|\mathsf{A}\|\,\|\mathsf{B}\|$ Cauchy egyenlőtlenségnek. Emiatt mondjuk azt hogy $L(\mathbb{X})$ *normált algebra.*

Az $A \in L(\mathbb{X})$ operátor sajátérték feladata az $\mathsf{A}\psi = \lambda\psi$, $\psi \neq 0$ egyenlet megoldását jelenti, ahol $\lambda \in \mathbb{C}$ (vagy $\lambda \in \mathbb{R}$) az A sajátértéke, $\psi \in \mathbb{X}$ pedig az A sajátvektora. Ezt a kérdést majdnem mindig komplex térben tesszük fel, függvényterekben a *sajátfüggvény* kifejezés a megszokott. Valós térben sok olyan operátor van, aminek egyáltalán nincs sajátértéke, ilyenek például a sík valódi forgatásai. Komplex térben sincs minden korlátos operátornak sajátértéke ha az nem véges dimenziójú. Az $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X})$ operátor invariáns altere az $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}$ lineáris altér ha $\varphi \in \mathbb{X}_0$ esetén $\mathsf{A}\varphi \in \mathbb{X}_0$ is mindig igaz. Mivel invariáns halmaz lezárása is az, feltehetjük hogy $\mathbb{X}_0$ zárt altér. Minden λ sajátértékhez és $r \in \mathbb{N}$ számhoz hozzárendeljük a $(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})^r\phi = 0$ egyenlet megoldásainak $\mathbb{X}_{\lambda,r}(\mathsf{A})$ halmazát, ami invariáns altér. A definíció értelmében $\mathbb{X}_{\lambda,r}(\mathsf{A}) \subset \mathbb{X}_{\lambda,r+1}(\mathsf{A})$; végtelen dimenziós térben ennek a láncnak végtelen sok különböző eleme is lehet. $\mathbb{X}_{\lambda,1}(\mathsf{A})$ éppen a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza. Az összes $\mathbb{X}_{\lambda,r}(\mathsf{A})$, $r \in \mathbb{N}$ halmazok egyesítésének $\mathbb{X}_\lambda(\mathsf{A})$ lezárása szintén invariáns altér, dimenziója a λ sajátérték multiplicitása. Ha $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in L(\mathbb{X})$ felcserélhető, vagyis $\mathsf{AB}\varphi = \mathsf{BA}\varphi\ \forall\varphi \in \mathbb{X}$, és λ az A sajátértéke, akkor az $\mathbb{X}_{\lambda,r}(\mathsf{A})$, $r \in \mathbb{N}$ alterek mind invariánsak B-re vonatkozóan is. Ennél többet általában nem mondhatunk, de ha $\mathbb{X}_{\lambda,1}(\mathsf{A})$ dimenziója véges, akkor persze tudjuk hogy B-nek is van benne sajátvektora.

Az $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X})$ operátor $\sigma(\mathsf{A})$ spekrtuma azokból a λ komplex számokból áll, amelyeknél a $\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A}$ operátor kölcsönösen egyértelmű, és képtere a teljes $\mathbb{X}$ tér. Igazolható hogy a spektrum sohasem üres, mindig zárt halmaz, és ha $\lambda \notin \sigma(\mathsf{A})$ akkor az $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A}) := (\lambda\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}$ rezolvens korlátos. A sajátértékek mind a spektrum pontjai, véges dimenziós térben $\sigma(\mathsf{A})$ éppen a sajátértékek halmaza. A rezolvens számolásával a hatványsoroknál és a komplex függvénytan szakaszban is foglalkozunk.

A $\Phi : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ leképezés differenciálható az $x \in \mathbb{X}$ helyen, amit $\Phi \in D^1(x)$ jelöl, ha van olyan $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ lineáris korlátos operátor hogy $\Phi(x+h) = \Phi(x) + \mathsf{A}h + o(h)$ $\forall h \in \mathbb{X}$ amint $\|h\| \to 0$. Ez az A operátor is egyértelműen meghatározott, de az x-től persze függ; szokás szerint $\nabla\Phi(x)$ jelöli, és a $d\Phi = \nabla\Phi(x)\,dx$ formalizmust használjuk. Ebből az absztrakt definícióból a láncszabály összes változata azonnal következik: ha $\Phi : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ és $\Psi : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{Z}$ differenciálható az $x \in \mathbb{X}$ illetve $y = \Phi(x)$ helyen, akkor a belőlük összetett $\Theta(x) := \Phi(\Psi(x))$ leképezés is differenciálható x-ben, és $\nabla\Theta(x) = (\nabla\Phi(y))\,\nabla\Phi(x)$. A $\Phi(x) := \mathsf{A}\,x$ lineáris leképezés gradiense, ahol $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ lineáris korlátos operátor, persze éppen $\mathsf{A} = \nabla\Phi$.

Operátor normája: Euklideszi tér lineáris és korlátos operátorainak $L(\mathbb{X})$ algebrája, amit von Neumann algebrának is nevezhetünk, számos érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Például a norma értéke

$$\|\mathsf{A}\| := \sup\{\mathrm{Re}\,\langle\varphi,\psi\rangle : \|\varphi\| \le 1\,, \|\psi\| \le 1\}\,. \tag{17.1}$$

Minden $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X})$ operátor definiálja a $Q_A(\varphi,\psi) := \langle\varphi, \mathsf{A}\psi\rangle$ bilineáris alakot, ami komplex térben a polarizációs azonosságok mintájára kifejezhető a $Q_A(\varphi) := Q_A(\varphi,\varphi)$ *kvadratikus forma* segítségével:

$$4Q_A(\varphi,\psi) = Q_A(\varphi+\psi) - Q_A(\varphi-\psi) + \imath\, Q_A(\varphi+\imath\,\psi) - \imath\, Q_A(\varphi-\imath\,\psi)\,. \tag{17.2}$$

Riesz tétele alapján a $Q_A = \langle\varphi, \mathsf{A}\psi\rangle$ bilineáris forma viszont magát az A operátort is meghatározza. Ez utóbbi valós térben is így van, de ott csak a $\langle\varphi,\mathsf{A}\psi\rangle + \langle\psi,\mathsf{A}\varphi\rangle$ *szimmetrizált bilineáris alakot* tudjuk a kvadratikus alak ismeretében reprodukálni.

Adjungált operátor: Az $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X})$ lineáris és korlátos operátor adjungáltja az az $\mathsf{A}^* \in L(\mathbb{X})$ operátor, amely eleget tesz az $\langle\mathsf{A}^*\varphi,\psi\rangle = \langle\varphi,\mathsf{A}\psi\rangle$ $\forall\,\varphi,\psi \in \mathbb{X}$ azonosságnak. A definíció egyértelmű, és Riesz reprezentációs tétele miatt Hilbert térben minden korlátos operátornak van adjungáltja. Látható hogy $(\mathsf{AB})^* = \mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$ és $(\mathsf{A}^*)^* = \mathsf{A}$. Mivel Cauchy szerint $\|\mathsf{AA}^*\| \le \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{A}^*\|$, továbbá $\langle\varphi,\mathsf{A}^*\mathsf{A}\varphi\rangle = \langle\mathsf{A}\varphi,\mathsf{A}\varphi\rangle \le \|\mathsf{A}\|^2\|\varphi\|^2$, állíthatjuk hogy $\|\mathsf{A}^*\| = \|\mathsf{A}\|$ és $\|\mathsf{AA}^*\| = \|\mathsf{A}\|^2$.

Az $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X})$ operátor önadjungált ha $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$, valós térben a szimmetrikus jelzőt használjuk. Két önadjungált operátor szorzata pontosan akkor az, ha felcserélhetőek. Önadjungált operátor $Q_A(\varphi) = \langle\varphi,\mathsf{A}\varphi\rangle$ kvadratikus alakja mindig valós értékű, és viszont. Az első állítás triviális, a második: Ha a Q_A kvadratikus alak valós, akkor a generáló operátor önadjungált. Ennek belátásához elég (17.2) mindkét oldalának konvex konjugáltját képezni, majd φ és ψ szerepét felcserélve az így kapott azonosságokat kombinálni.

Önadjungált operátor normája: $\|A\| = \sup\{|\langle\varphi,\mathsf{A}\varphi\rangle| : \|\varphi\| \le 1\}$. Az egyik irány, $|Q_A(\varphi)| \le \|\mathsf{A}\|\|\varphi\|^2$ a Cauchy egyenlőtlenség következménye. Másrészt, tetszőleges $\alpha > 0$ mellett

$$4\alpha\,\|\mathsf{A}\varphi\|^2 = \langle\alpha\varphi+\mathsf{A}\varphi, \alpha\mathsf{A}\varphi+\mathsf{A}^2\varphi\rangle - \langle\alpha\varphi-\mathsf{A}\varphi, \alpha\mathsf{A}\varphi-\mathsf{A}^2\varphi\rangle$$

mert $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$. Legyen tehát K olyan konstans hogy $|Q_A(\varphi)| \le K\|\varphi\|^2$ $\forall\,\varphi \in \mathbb{X}$, ekkor a paralelogramma azonossággal $4\alpha\,\|\mathsf{A}\varphi\|^2 \le 2\alpha K\|\varphi\|^2 + 2K\|\mathsf{A}\|^2$, amiből az $\alpha = \|\mathsf{A}\varphi\|/\|\varphi\|$ választással $\|\mathsf{A}\varphi\| \le K\|\varphi\|$ következik, és éppen ezt kellett bizonyítani. Mivel $\langle\varphi,\mathsf{A}\varphi\rangle$ valós, definiálhatjuk a $\{\langle\varphi,\mathsf{A}\varphi\rangle : \|\varphi\| \le 1\}$ halmaz m alsó, és M felső határát is, $\|\mathsf{A}\| = \max\{|m|,|M|\}$. Az nyilvánvaló hogy A mindegyik sajátértéke, ha van neki, a $[m,M]$ intervallumba esik. Az is igaz hogy $\sigma(\mathsf{A}) \subset [m,M]$, de ez nem ilyen egyszerű.

Unitér, normális és pozitív operátorok: Az $\mathsf{U} \in L(\mathbb{X})$ operátor unitér ha megtartja a skaláris szorzatot: $\langle\mathsf{U}\varphi,\mathsf{U}\psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle$ $\forall\,\varphi,\psi \in \mathbb{X}$, vagyis távolság és szögtartó, egybevágósági transzformáció. Minden unitér operátor kölcsönösen egyértelmű, az inverze éppen az adjungáltja, a normája mindig 1. Az A operátor normális ha felcserélhető az adjungáltjával, vagyis $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{AA}^*$, tehát minden önadjungált vagy unitér operátor normális. Normális operátor normája ugyanúgy számolható mint az önadjungált esetben, a bizonyítás most a

$$4\alpha \|\mathsf{A}\varphi\|^2 = \langle \alpha\varphi + \mathsf{A}\varphi, \alpha\mathsf{A}\varphi + \mathsf{A}^2\varphi \rangle - \langle \alpha\varphi - \mathsf{A}\varphi, \alpha\mathsf{A}\varphi - \mathsf{A}^2\varphi \rangle$$

azonosságra épül.

Az A operátor pozitív, amit $\mathsf{A} \geq 0$ jelöl, ha $\langle \varphi, \mathsf{A}\varphi \rangle \geq 0$ mindig igaz. Az $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ és $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$ szorzat egyaránt pozitív, de csak akkor egyenlők, ha A normális. Komplex térben minden pozitív operátor önadjungált, mert a $\langle \varphi, \mathsf{A}\varphi \rangle$ kvadratikus alak valós értékű. Valós térben csak szimmetrikus operátort szokás pozitívnak minősíteni. Pozitív operátornál a $Q_A(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \mathsf{A}\psi \rangle$ nemnegatív bilineáris alak a skaláris szorzás valamennyi (10.4) tulajdonságával rendelkezik, kivéve azt hogy $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0$ ha $\varphi \neq 0$; ezt az új skaláris szorzatot gyakran használjuk A és függvényeinek vizsgálatánál.

Normális operátor sajátérték feladata: Ha $\mathsf{A}\psi = \lambda\psi$ és $\mathsf{A}^*\phi = \mu\phi$ akkor $\lambda \langle \psi, \phi \rangle = \langle \mathsf{A}\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \mathsf{A}^*\phi \rangle = \bar{\mu} \langle \psi, \phi \rangle$, amiből $\lambda \neq \bar{\mu}$ esetén $\phi \perp \psi$ következik. Mostantól feltesszük hogy $\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$, ekkor a sajátvektorok $\mathbb{X}_{\lambda,1}(\mathsf{A})$ tere A^* invariáns altere, és ezen az altéren $\mathsf{A}\psi = \lambda\psi$, tehát $\mathsf{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$, vagyis $\mathbb{X}_{\lambda,1}(\mathsf{A}) = \mathbb{X}_{\bar{\lambda},1}(A^*)$. Ha most $(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})^2\phi = 0$ akkor $\lambda\phi - \mathsf{A}\phi$ sajátvektor, tehát $(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}^*)(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}^*)\phi = 0$, amiből $\|\lambda\phi - \mathsf{A}\phi\|^2 = 0$, vagyis $\mathbb{X}_{\lambda,2}(\mathsf{A}) = \mathbb{X}_{\lambda,1}(\mathsf{A})$. Innen indukcióval következik hogy $\mathbb{X}_{\lambda,r}(\mathsf{A}) = \mathbb{X}_{\lambda,1}(\mathsf{A})\ \forall\, r \in \mathbb{N}$. Tehát normális operátor $\mathbb{X}_\lambda(\mathsf{A})$ invariáns altererei csupa sajátvektorból állnak, és a különböző sajátértékhez tartozó alterek páronként merőlegesek egymásra. Végtelen dimenziós térben normális (önadjungált) operátornak sem mindig van sajátvektora, lásd az alábbi példákat.

Kvadratikus alak differenciálása: Minden $\mathsf{A} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ lineáris korlátos operátorhoz hozzárendeltük a $Q_A(x) := \langle x, \mathsf{A}\,x \rangle$ funkcionált; feltehető hogy A önadjungált, mert a szimmetrikus komponens ugyanazt a kvadratikus alakot adja. Könnyen igazolható hogy $\nabla Q(x) = 2\mathsf{A}\,x$ és $\nabla^2 Q(x) = 2\mathsf{A}$. $\forall\ x \in \mathbb{X}$. A $\Phi(x) := \langle x, \mathsf{A}x \rangle / \langle x, x \rangle$ funkcionál gradiense

$$\Psi(x) = \frac{2\langle x, x \rangle \mathsf{A}x - 2\langle x, \mathsf{A}x \rangle\, x}{\langle x, x \rangle^2}, \tag{17.3}$$

ha tehát az $x = \psi \neq 0$ helyen Φ-nek szélső értéke van, akkor $\Psi(\psi) = 0$, vagyis $\mathsf{A}\psi = \Phi(\psi)\psi$: ψ a $\Psi(\psi)$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ezek alapján javasolhatjuk az $x_{n+1} = x_n + \gamma_n \Phi(x_n)$ tipusú gradiens eljárást az A önadjungált operátor sajátértékeiunek és sajátvektorainak keresésére; lényeges az x_1 kezdőérték és a γ_n lépesköz szerencsés megválasztása. Végtelen dimenziós térben persze nem biztos hogy Φ felveszi a szélső értékeit, nem árt az óvatosság.

A ℓ^2 tér: Az $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{C}^n$ példákon okulva az S megszámlálható halmazzal indexelt $\mathbf{z} = (z_k : k \in S)$ komplex sorozatok $\ell^2(S)$ terét a skaláris szorzat $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle := \sum_{k \in S} z_k \bar{w}_k$ képlete értelmezi, maga a tér azokból a sorozatokból áll, amelyek normája véges, vagyis $\sum_{k \in S} |z_k|^2 < +\infty$. Mindegyik ℓ^2 tér teljes, amit a Cantor féle *diagonális eljárással* bizonyíthatunk. Eszerint minden $\mathbf{z}_n$ Cauchy sorozatnak van olyan $\mathbf{z}'_n$ részsorozata hogy a koordináták $z'_{n,k}$ sorozatai mind konvergensek, legyen $z_k := \lim z'_{n,k}$ amint $n \to \infty$. Ezután már könnyű megmutatni hogy a z_k kordinátákkal rendelkező $\mathbf{z}$ sorozat a ℓ^2 tér eleme, és $\mathbf{z}_n \to \mathbf{z}$. Hasonlóan igazolható hogy ha $a_k \geq 0$ négyzetesen konverges sorozat, akkor a $H_{\mathbf{a}} := \{\mathbf{z} \in \ell^2(S) : |z_k| \leq a_k\ \forall\, k \in S\}$ *Hilbert tégla* kompakt a $\ell^2(S)$ térben.

A $\ell^2(\mathbb{Z})$ és a $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ tereken egyaránt definiálható az eltolás T operátora a $T\mathbf{z} = \mathbf{w}$ ha $w_k := z_{k+1}$ konvencióval. A $\ell^2(\mathbb{Z})$ téren T unitér, de egyetlen sajátértéke sincs. Az eltolás a $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ téren is korátos, $\|T\| = 1$, de itt T nem kölcsönösen egyértelmű. Ha $|\lambda| < 1$ akkor a $\mathbf{z}_\lambda := (\lambda^k : k \in \mathbb{Z}_+)$ sorozatok mind sajátvektorok: $T\mathbf{z}_\lambda = \lambda\mathbf{z}_\lambda$, tehát $\sigma(T) = \{|\lambda| \leq 1\}$. T adjungáltját a $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ térben $T^*\mathbf{z} := (0, z_1, z_2, ...)$ definiálja, ennek sincs sajátvektora,

Érdekes a $\Delta_1 : \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto \ell^2(\mathbb{Z})$ diszkrét Laplace operátor is, amit $\Delta_1\mathbf{z} = \mathbf{w}$ ha $w_k := z_{k+1} + z_{k-1} - 2z_k$ definiál. Ez is korlátos, és

$$\langle \mathbf{z}, \Delta_1\mathbf{z} \rangle = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} |z_{k+1} - z_k|^2$$

miatt negatív önadjungált. A $z_{k+1}+z_{k-1}-2z_k=\lambda z_k$ sajátérték egyenlet formális megoldása $z_k = c_1\gamma_1^k + c_2\gamma_2^k$, ahol γ_1 és γ_2 a $\gamma^2-(2+\lambda)\gamma+1=0$ egyenlet gyökei. Ez a sorozat csak a $z_k\equiv 0$ esetben tartozik a térhez, tehát a Δ_1 operátornak sincs sajátvektora, $\sigma(\Delta_1)$ éppen a $z\le 0$ félegyenes.

Végtelen dimenzós Euklideszi tér a négyzetesen integrálható függvények $L^2(\Omega,\lambda)$ tere is, ahol λ tetszőleges *mérték* az Ω halmazon. A skaláris szorzatot az

$$\langle f,g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\lambda(dx)$$

integrál definiálja, erről rövidesen szó lesz.

17.2. **Mátrixok analitikus függvényei.** Egyáltalán nem ritka hogy egy lineáris normált tér elemeit nemcsak számokkal, hanem egymással is lehet szorozni úgy, hogy a szorzat is a tér eleme marad. Feltesszük hogy ez a szorzás asszociatív, numerikus szorzó a szorzatból kiemelhető, $A(cB)=cAB$, végül az elemek szorzása az összeadásra vonatkozóan disztributív. Ha még az $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$, szintén Cauchy nevét viselő egyenlőtlenség is minden $A,B\in\mathbb{X}$ esetén teljesül, akkor normált algebráról beszélünk. Minden normált algebra egyben lineáris normált tér, és így metrikus tér is, tehát az ott kimodott definíciók és tételek változatlanul érvényesek. Ha ez az algebra, mint metrikus tér teljes, akkor Banach algebrának nevezzük.

A valós és a komplex számok mellett a négyzetes mátrixok is ilyen struktúrát alkotnak. A térvektorok vektoriális szorzása nem asszociatív, tehát nem esik ebbe a kategóriába. Valós vagy komplex számoknál a Cauchy egyenlőtlenség egyszerűen $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$. Az $A:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^d$ lineáris transzformáció normáját $\|A\|\equiv\|A\|_2 := \sup\{|A\mathsf{x}| : |\mathsf{x}|\le 1\}$ definiálja. Világos hogy $|AB\mathsf{x}|\le\|A\|_2|B\mathsf{x}|\le\|A\|_2\|B\|_2|\mathsf{x}|$, tehát a Cauchy egyenlőtlenség automatikusan teljesül. Másik lehetőség az explicit formában adott $\|A\|_{22}$ kettős norma,

$$\Big(\|A\|_{22}\Big)^2 := \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^2\,, \tag{17.4}$$

ahol a_{kj} az A mátrix általános eleme. Ebben az esetben a mátrixok szorzatára vonatkozó Cauchy egyenlőtlenség a hagyományos Cauchy közvetlen folyománya. Azt se nehéz megmutatni hogy $\|A\|_2\le\|A\|_{22}$

Bármely A négyzetes mátrix is gond nélkül helyettesíthető be egy $f(z)$ hatánysorba, mostantól kezdve $z_0=0$ az f definíciójában. Az így kapott mátrixot – ha van értelme – $f(A)$ jelöli; lényegében erről szól a következő tétel.

Tétel 17.1. *Ha az $f(z)$ hatványsor konvergenciakörének R sugara pozitív, és A egy teljes normált algebra eleme, akkor $\|A\|<R$ esetén az $f(A)$ hatványsor abszolút konvergens, $f(A)\in\mathbb{X}$, továbbá $Af(A)=f(A)A$.*

Bizony: Az $\mathbb{X}$ normált algebrában érvényes Cauchy egyenlőtlenség miatt $\|A\|<r<R$ esetén

$$\sum_{n=0}^\infty\|c_nA^n\|\le\sum_{n=0}^\infty|c_n|\|A\|^n\le\sum_{n=0}^\infty|c_n|r^n<+\infty, \tag{17.5}$$

tehát a sor a konvergenciakör belsejében abszolút konvergens, és így a tér teljessége miatt részletösszegei az $\mathbb{X}$ egy jól meghatározott $f(A)$ eleméhez konvergálnak. □

Az $f(A)$ mátrix meghatározása persze nem könnyű, de ha meg tudjuk oldani az $A\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$ sajátérték feladatot, és

$$\mathsf{x}_0 = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2+\cdots+x_d\mathbf{u}_d\,,$$

ahol $\mathbf{u}_k$ a λ_k sajátértékhez tartozó (jobboldali) sajátvektor, akkor $A^n\mathbf{u}_k=\lambda^n\mathbf{u}_k$ miatt

$$f(A)\,\mathsf{x} = \sum_{k=1}^d f(A)\,x_k\,\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^d x_k\,f(\lambda_k)\,\mathbf{u}_k\,, \tag{17.6}$$

feltéve hogy mindegyik sajátérték az f konvergencia körének belsejében van. Ha A szimmetrikus, akkor a sajátvektorai bázist alkotnak, tehát a fenti képlet általános érvényű. Ha a sajátvektorok rendszere nem teljes, vagy nem tudjuk őket kiszámolni, akkor még mindig kereshetünk olyan p polinomot hogy $p(A) = 0$, tehát az $f(z) = q(z)p(z) + r(z)$ maradékos osztás elvégzése után $f(A) = r(A)$ adódik, ahol r fokszáma legfeljebb a tér dimenziója.

Tegyük fel hogy az $f(z)$ függvény hatványsora $|z| < R$ esetén abszolút konvergens, $t \in \mathbb{R}$ és $|t|\|A\| < R$, ekkorkkor $f(At)$ sora is abszolút konvergens, sőt tagonként differenciálható t szerint. Ennek belátásához csak a

$$(t+h)^n A^n - t^n A^n = hA^n(t^{n-1} + ht^{n-2} + \cdots + h^{n-1})$$

azonosságot, és a dominált konvergencia tételt kell felhasználni. Igy kapjuk a mátrix függvényekre is érvényes

$$\partial_t e^{At} = Ae^{At}\,, \quad \partial_t \sin(At) = A\cos(At)\,, \quad \partial_t \cos(At) = -A\sin At \tag{17.7}$$

képleteket, amelyek lineáris differenciálegyenlet rendszerek megoldásához kellenek. Eszerint a $\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x}$ egyenlet megoldása $\mathsf{x}(t) = e^{At}\,\mathsf{x}(0)$.

Pozitív operátor négyzetgyöke: A $\sqrt{1-z} = 1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$ hatványsor együtthatói pozitívak és összegük 2, tehát a sor $|z| \leq 1$ esetén abszolút konvergens. Ha tehát $\mathsf{A} \in L(\mathbb{X})$ és $\|\mathsf{A}\| \leq 1$ akkor a

$$\sqrt{\mathsf{I}-\mathsf{A}} = \mathsf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathsf{A}^n$$

sor abszulút konvergens, feltéve hogy az algebra teljes. Legyen most $\mathbb{X}$ Hilbert tér, $\mathsf{A} \geq 0$ korlátos, és $\gamma > 0$. mindig igaz hogy $\gamma\mathsf{A} = \mathsf{I} - (\mathsf{I} - \gamma\mathsf{A})$, és ha $\gamma\|\mathsf{A}\| \leq 1$ akkor $\langle\varphi, \varphi - \gamma\mathsf{A}\varphi \leq \|\varphi\|^2$ miatt $\|\mathsf{I} - \gamma\mathsf{A}\| \leq 1$, tehát $\sqrt{\mathsf{A}}$ az

$$\sqrt{\mathsf{A}} := \gamma^{-1/2}\left(\mathsf{I} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathsf{I} - \gamma\mathsf{A})^n\right) \tag{17.8}$$

abszolút konvergens sor összege. Könnyen ellenőrizhető hogy $\mathsf{B} = \sqrt{\mathsf{A}}$ pozitív, önadjungált, $AB = BA$, és persze $\mathsf{B}^2 = \mathsf{A}$. Bár a konstrubció függ γ-tól, az edmény nem: Ha C is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal akkor $\mathsf{CA} = \mathsf{C}^3 = \mathsf{AC}$ és $\mathsf{BC} = \mathsf{CB}$ mert C felcserélhető A-val, tehát

$$(\mathsf{B}-\mathsf{C})\mathsf{B}(\mathsf{B}-\mathsf{C}) + (\mathsf{B}-\mathsf{C})\mathsf{C}(\mathsf{B}-\mathsf{C}) = (\mathsf{B}^2 - \mathsf{C}^2)(\mathsf{B}-\mathsf{C}) = 0\,.$$

A baloldal mindkét tagja pozitív, tehát az összegük csak úgy lehet 0 ha mindkettő 0, de akkor a különbségük, $(\mathsf{B}-\mathsf{C})^3 = 0$, tehát $\|(\mathsf{B}-\mathsf{C})^4\| = \|\mathsf{B}-\mathsf{C}\|^4 = 0$.

Ezután definiálhatjuk az $|A| := \sqrt{\mathsf{A}^*\mathsf{A}}$ operátort, és a komplex számokra emlékeztető $\mathsf{A} = |A|e^{\imath\Phi}$ poláris felbontást is, ahol Φ önadjungált, tehát $e^{\imath\Phi}$ unitér. Ennél hasznosabb az az észrevétel hogy $\langle\varphi, \mathsf{A}\varphi\rangle = \|\sqrt{\mathsf{A}}\varphi\|^2$ ha $\mathsf{A} \geq 0$.

Rezolvens: Ha $\|\mathsf{A}\| < \operatorname{Re}\lambda$ akkor érvényes a

$$(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{\mathsf{A}t}\,dt \tag{17.9}$$

Laplace transzformációs formula, aminek sok következménye van a spektrum leírásával kapcsolatban.

Abszolút konvergens komplex hatványsorok szorzata is abszolút konvergens hatványsor. Ha tehát az f és a g hatványsorok $|z| < R$ estén abszolút konvergensek, $h(z) := f(z)g(z)$ és $\|A\| < R$, akkor $h(A) = f(A)g(A)$. Ugyanakkor hiába tudjuk az e^{At} és e^{Bt} mátrixokat értelmezni, $e^{At}e^{Bt} = e^{At+Bt}$ már csak akkor igaz, ha $AB = BA$. Ha ugyanis $AB \neq BA$, akkor az $(A+B)^n$ hatvány binomiális kifejtése már nem igaz, például $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. $*$

$**$ A $\partial_t u = Au$ egyenlet $u(t) = e^{At}u(0)$ megoldóképlete végtelen dimenziós terekben is használható lehet, és az sem igazán fontos hogy $\|A\| < +\infty$ legyen. Például, ha φ analitikus egész függvény, akkor

$$e^{t\partial_x}\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\partial_x^n\varphi(x) = \varphi(x+t) \tag{17.10}$$

a Taylor formula miatt, tehát a $\partial_t u(t,x) = \partial_x u(t,x)$ egyenlet $u(0,x) = \varphi(x)$ kezdeti értékhez tartozó megoldása $u(t,x) = \varphi(x+t)$. Figyelemre méltó hogy $e^{t\partial_x}\varphi$ értelmezéséhez a φ függvénynek egyszer sem kell differenciálhatónak lennie. Hasonlóan,

$$e^{t\partial_x^2}\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\partial_x^{2n}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-y)^2/4t)\varphi(y)\,dy \tag{17.11}$$

a $\partial_t u = \partial_x^2 u$ hővezetési egyenlet $u(0,x) = \varphi(x)$ kezdeti értékhez tartozó megoldása, amit differnciálással közvetlenül ellenőrizhetünk. Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{4t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-y)^2/4t)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2/4t)\varphi(y+x)\,dy\,, \tag{17.12}$$

továbbá analitikus egész φ esetén

$$\varphi(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\partial_x^n\varphi(x)\,, \tag{17.13}$$

az $e^{t\partial_x^2}$ fenti sorfejtése az

$$\frac{1}{\sqrt{2t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^{2n}\exp(-y^2/4t)\,dy = \frac{t^n 2n!}{n!} \tag{17.14}$$

azonosság következménye; a páratlan hatványokat tartalmazó integrálok értéke 0. A megoldóképlet akkor is érvényes, ha φ nem differenciálható, $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ bőségesen elegendő. $**$