

MAM112m - 3. gyakorló feladatsor
Komplex függvények

1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét!

(a) $z_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ (b) $z_n = \frac{in + n^2}{n^2 + i}$ (c) $z_n = \operatorname{tg} in$ (d) $z_n = \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n + 1}{n^{3/2}}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!}$

3. Léteznek-e a következő határértékek? Ha igen, számítsa ki a határértékeket!

(a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + 1}$ (c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$ (d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|}$

4. Legyen $z = x + iy$. Differenciálhatók-e a következő függvények az origó egy környezetében?

(a) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$ (b) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$
(c) $f(z) = x^2 - i(y^2 + x)$ (d) $f(z) = |z|^2$
(e) $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + 2)$ (f) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

5. Számítsa ki a $\int_G f(z) dz$ görbe menti integrált, ahol

- (a) $f(z) = \operatorname{Im} z$, G paraméteres előállítása $\gamma(t) = t^2 - it$, $t \in [1, 3]$,
(b) $f(z) = \frac{1}{z}$, G paraméteres előállítása $\gamma(t) = it$, $t \in [1, 2]$,
(c) $f(z) = iz^2$, G paraméteres előállítása $\gamma(t) = \frac{1}{2} \cos t + i\frac{1}{4} \sin t$, $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,
(d) $f(z) = e^{-z}$, G a 0 és $-2 - 3i$ pontokat (ebben a sorrendben) összekötő szakasz,
(e) $f(z) = z^2 + 2z - 5$, G a 0 és $3i$ pontokat összekötő tetszőleges görbe,
(f) $f(z) = \sin(3i + z)$, G az origó középpontú egységkör i -től -1 -ig tartó része (pozitív irányban),
(g) $f(z) = |z|^2$, G a $2i$ pontot az 5 -tel összekötő szakasz,
(h) $f(z) = z - i$, G paraméterezése $\gamma(t) = e^{3t} \cos 5t + i \ln(t + 1)$, $t \in [0, 1]$,
(i) $f(z) = 2z^2 - (2 + i)z$, G a $2 - 3i$, $-5 + 7$, $1 + 5i$ és $3i$ pontokat (ebben a sorrendben) összekötő töröttvonal.
(j) $f(z) = ze^{(1+i)z}$, G az $1 - 3i$ és $2 - i$ pontokat összekötő tetszőleges görbe.

6. Számítsa ki a $\int_G f(z) dz$ zárt görbe menti integrálokat, ahol a görbe pozitív irányítású, és

- (a) $f(z) = e^{\sin z}$, G az origó középpontú egységsugarú kör,
- (b) $f(z) = \sin 3z$, G egyenlete: $|z| = 4$,
- (c) $f(z) = \frac{2z}{z-i}$, G : $|z - i| = 2$,
- (d) $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^3}$, G : $|z - 2i| = 1$,
- (e) $f(z) = z^2 \sin z$, G a $0, 1, 1 + i, i$ csúcspontú négyzet,
- (f) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-i}$, G : $|z - i| = 5$,
- (g) $f(z) = \frac{e^{2z} \sin z^2}{z+i}$, G a $-2 + i, -2 - 2i, 1 - 2i, 1 + i$ pontokat összekötő négyzet,
- (h) $f(z) = \frac{z^4}{z-1}$, G az 1 körüli egységsugarú kör,
- (i) $f(z) = \frac{z^3 - 5z + i}{z - 1 + 2i}$, G az $1 - 2i$ körüli tetszőleges egyszerű zárt görbe,
- (j) $f(z) = \frac{\sin 3z}{z^2}$, G az 1 középpontú 3 sugarú kör,
- (k) $f(z) = \frac{(z+i)^2}{(z-2i)^4}$, G a $2i$ középpontú 1 sugarú kör,
- (l) $f(z) = \frac{4e^{z^2}}{(z-i)^3}$, G egy tetszőleges, i -t a belsejében tartalmazó egyszerű zárt görbe.

7. Adja meg a következő függvények z_0 körüli Laurent-sorát!

- (a) $\frac{2z}{1+z^2}$, $z_0 = i$, (b) $\frac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$, (c) $\frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = i$, (d) e^{1/z^3} , $z_0 = 0$

8. Számítsa ki a következő függvények reziduumát a z_0 pontban!

- (a) $\frac{3z^2 + 1}{z^2 + 1}$, $z_0 = -i$, (b) $\frac{\sin z}{z^2(z^2 + 4)}$, $z_0 = 2i$,
- (c) $\frac{\cos 2z}{(z-i)(z+2)}$, $z_0 = i$, (d) $\frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = -i$.

9. Számítsa ki a $\int_G f(z) dz$ zárt görbe menti integrálokat, ahol a görbe pozitív irányítású, és

- (a) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$, G : $|z - 1| = \frac{1}{2}$,
- (b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 4}$, G az origó középpontú, a tengelyekkel párhuzamos, 5 oldalhosszú négyzet,
- (c) $f(z) = \frac{z^3 + 1}{(z-1)(z+2i)(z+5)}$, G : $|z + 2i| = 3$,
- (d) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$, G : $|z| = 2$.