# 5. Fourier-elmélet

## 5.1. Komplex trigonometrikus Fourier-sorok

Tekintsük az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-teret, azaz azoknak a komplex értékű $f\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$ függvényeknek a halmazát, amelyek mérhetők és négyzetesen integrálhatók $[0,2\pi]$-n, azaz $\int_0^{2\pi} |f|^2\,dm < \infty$. Mint azt már korábban láttuk, a skaláris szorzat definíciója ezen a téren

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f\cdot\overline{g}\,dm.$$

A továbbiakban ebben a fejezetben a Lebesgue-integrálokat is egyszerűen $\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$-vel jelöljük.

Tekintsük a $[0,2\pi]$ intervallumon definiált $t\mapsto e^{ikt}$ komplex értékű függvények rendszerét:

$$\tilde{S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{e^{ikt}\colon\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\right\} \tag{5.1}$$

Megmutatjuk, hogy $\tilde{S}$ ortogonális rendszer $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$-ben.

**5.1. Állítás.** *Az (5.1) képlettel definiált $\tilde{S}$ függvényrendszer ortogonális rendszer az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-térben.*

**Bizonyítás:** Legyen $k\neq\ell$, és tekintsük következő skaláris szorzatokat:

$$\begin{aligned}\langle e^{ikt},e^{i\ell t}\rangle &= \int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{e^{i\ell t}}dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t}dt\\ &= \frac{1}{i(k-\ell)}\left[e^{i(k-\ell)t}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{i(k-\ell)}\left[e^{i(k-\ell)2\pi}-1\right]=0.\end{aligned}$$

Tehát $\tilde{S}$ egy ortogonális rendszert alkot $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$-ben. □

Számítsuk ki $\tilde{S}$ elemeinek normáit:

$$\|e^{ikt}\|_2=\sqrt{\langle e^{ikt},e^{ikt}\rangle} = \left(\int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{e^{ikt}}\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ikt}\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} dt\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}, \tag{5.2}$$

ha $k\in\mathbb{Z}$. Ezért definiáljuk az

$$S_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\colon\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\right\} \tag{5.3}$$

függvényrendszert. Ez már ortonormált rendszer lesz $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$-ben, sőt belátható, hogy maximális is:

**5.2. Tétel.** *Az (5.3) képlettel definiált $S_{\mathbb{C}}$ halmazrendszer maximális ortonormált rendszer az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-térben.*

Alkalmazható tehát az $S_{\mathbb{C}}$ függvényrendszerre a 4.90. Tétel, azaz például az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ tér elemeit az $S_{\mathbb{C}}$ rendszerre vonatkozó Fourier-sorba fejthetjük, és a Fourier-sor konvergál az $L_2$ normában az adott függvényhez. A 4.90. Tétel jelölését használva:

$$f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}.$$

Ennek megfelelően az $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ *komplex trigonometrikus Fourier-során* az

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{5.4}$$

végtelen sort értjük, ahol a $c_k$ *Fourier-együtthatók* képlete

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt. \tag{5.5}$$

Azt mondjuk, hogy a $t \in [0, 2\pi]$ pontban az $f$ Fourier-sora konvergens, ha az

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

szimmetrikus részletösszegek sorozata konvergens, $n \to \infty$ esetén. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény Fourier-sora *normában* (vagy *négyzetintegrálban*) *konvergál* az $f$ függvényhez, ha

$$\|f - s_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dt \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Világos az eddigiek alapján, hogy a négyzetintegrálban való konvergenciából nem következik a pontonkénti konvergencia.

A definícióból, a skaláris szorzat linearitásából és a konvergens sorok tulajdonságaiból rögtön következik, hogy a Fourier-sor számítása lineáris művelet az alábbi értelemben:

**5.3. Állítás.** *Legyen $f_1, f_2 \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Ekkor*

1. *az $f_1 + f_2$ függvény Fourier-sora az $f_1$ és $f_2$ függvények Fourier-sorainak összege,*
2. *az $\alpha f_1$ függvény Fourier-sora az $f_1$ függvény Fourier-sorának $\alpha$-szorosa.*

Az $S_{\mathbb{C}}$ halmazrendszer maximalitásából és a 4.90. Tételből rögtön következik az alábbi eredmény.

**5.4. Tétel.** *Legyen $S_{\mathbb{C}}$ az (5.3) képlettel definiált halmazrendszer. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

1. *Ha valamely $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ függvényre*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

*azaz az $f$ függvény Fourier-együtthatói nullák, más szóval az $f$ merőleges az $S_{\mathbb{C}}$ halmazra ($f \perp S_{\mathbb{C}}$), akkor $f(t) = 0$, m.m. $t \in [0, 2\pi]$-re.*

2. *Az $f$ függvény Fourier-sora négyzetesen konvergál az $f$ függvényhez, azaz*

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right|^2 dt \to 0, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

3. *Teljesül a Parseval-azonosság, azaz*

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \left( = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \right).$$

Bizonyítás nélkül tekintsük az alábbi fontos eredményt.

**5.5. Tétel (Riesz–Fisher-tétel).** *Tetszőleges olyan $\gamma_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, konstansokhoz, amelyekre*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$$

*teljesül, létezik olyan $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ függvény, hogy*

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt (= c_k)$$

*azaz $\gamma_0, \gamma_{\pm1}, \gamma_{\pm2}, \ldots$ az $f$ függvény Fourier-együtthatói, és*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}$$

*négyzetintegrálban konvergál $f$-hez.*

A Riesz–Fisher-tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha egy $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ függvényhez hozzárendeljük a Fourier-együtthatóinak $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (két irányban végtelen) sorozatát, akkor egy lineáris izomorfiát kapunk a $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ és a négyzetesen összegezhető két irányban végtelen sorozatok Banach-tere között. Ha ebben a térben egy $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sorozat normáját a

$$\|(c_k)\| = \sqrt{2\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

képlettel értelmezzük, akkor a fenti lineáris izomorfia izometria is lesz a Parseval-formula miatt.

**5.6. Megjegyzés.** Ha $f$ és $g$ két $2\pi$ szerint periodikus függvény, akkor

$$\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt,$$

ezért az $S_\mathbb{C}$ függvényrendszer az $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ Hilbert-téren is maximális ortonormált, továbbá az $S_\mathbb{C}$-re vonatkozó Fourier-sor az $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ Hilbert-téren is (5.4) alakú lesz, ahol a $c_k$ Fourier-együtthatókat a

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt$$

képlettel számoljuk ki.

**5.7. Megjegyzés.** Az előbbi meggondolást általánosíthatjuk. Ha $f$ és $g$ két $2\pi$ szerint periodikus függvény, akkor az $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)$ és $\tilde{g}(t) = g\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)$ összetett függvények $(b - a)$ szerint periodikus függvények lesznek, és

$$\int_a^b \tilde{f}(t)\overline{\tilde{g}(t)}\, dt = \int_a^b f\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)\overline{g\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)}\, dt = \frac{b-a}{2\pi} \int_{\frac{2\pi a}{b-a}}^{\frac{2\pi b}{b-a}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{b-a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

speciálisan,

$$\|\tilde{f}\|^2_{L_2([a,b],\mathbb{C})} = \frac{b-a}{2\pi} \|f\|^2_{L_2([0,2\pi],\mathbb{C})}.$$

Ezért az $S_{\mathbb{C}}$ halmaz elemeit a $\sqrt{\frac{2\pi}{b-a}}$ együtthatóval megszorozva és új változót bevezetve tekintsük az $[a,b]$ intervallomon értelmezett $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t}$ függvényekből álló

$$S_{[a,b]} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t} \colon\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

függvényrendszert. Ez maximális ortonormált rendszer lesz az $L_2([a,b],\mathbb{C})$ Hilbert-téren. Egy $f \in L_2([a,b],\mathbb{C})$ függvény Fourier-során ezért az

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t}$$

végtelen sort értjük, ahol a $c_k$ Fourier-együtthatók képlete

$$c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}t}\, dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Az 5.4. Tétel értelemszerűen kiterjeszthető $L_2([a,b],\mathbb{C})$-re.

## 5.2. Valós trigonometrikus Fourier-sorok

Tekintsük az $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ Hilbert-teret. Legyen

$$S^* \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\}$$

a $[-\pi,\pi]$-n értelmezett függvények halmaza. Megmutatjuk, hogy az $S^*$ halmaz ortogonális rendszer $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$-ben.

**5.8. Állítás.** *Az $S^*$ függvényhalmaz ortogonális rendszer az $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ Hilbert-térben.*

**Bizonyítás:** Az állítás direkt módon is könnyen belátható, de most mi az $S^*$ ortogonalitását az előző szakaszban bevezetett $\tilde{S}$ függvényhalmaz ortogonalitását felhasználva indokoljuk.

Legyen $k \in \mathbb{N}$. A

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

Euler-képletek értelmében $\sin kx$ és $\cos kx$ lineáris kombinációja az $e^{ikx}$ és $e^{-ikx}$ függvényeknek. Ez persze fordítva is teljesül, az $e^{ikx}$ és $e^{-ikx}$ függvények is felírhatók $\sin kx$ és $\cos kx$ lineáris kombinációjaként. Ezért a 4.81. Állítás szerint, ha egy függvény ortogonális az $e^{ikx}$ és $e^{-ikx}$ függvényekre, akkor ortogonális a $\sin kx$ és $\cos kx$ függvényekre is. Ezért az 5.6. Megjegyzést alkalmazva kapjuk, $\sin kx$ és $\cos kx$ is ortogonális bármely $e^{i\ell x}$ függvényre, ahol $|\ell| \neq k$. De ekkor a fentiekből következik, hogy $\sin kx$ és $\cos kx$ ortogonális bármely $\sin \ell x$ és $\cos \ell x$ függvényre, valamint a konstans 1 függvényre is. Most már csak azt kell belátni, hogy $\sin kx$ és $\cos kx$ egymásra is ortogonális. Az 5.1. Állítás és (5.2) alapján kapjuk

$$\begin{aligned}
\langle \cos kx, \sin kx \rangle &= \left\langle \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4\bar{i}} \Big( \langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle - \langle e^{ikx}, e^{-ikx} \rangle + \langle e^{-ikx}, e^{ikx} \rangle - \langle e^{-ikx}, e^{-ikx} \rangle \Big) \\
&= \frac{1}{4\bar{i}} \Big( 2\pi - 0 + 0 - 2\pi \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

Számítsuk ki $S^*$ elemeinek normáját. Legyen $k \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|\cos kx\|_2 &= \left(\left\langle \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right\rangle\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle e^{ikx}, e^{ikx}\rangle + \langle e^{ikx}, e^{-ikx}\rangle + \langle e^{-ikx}, e^{ikx}\rangle + \langle e^{-ikx}, e^{-ikx}\rangle\Big)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(2\pi + 0 + 0 + 2\pi\Big)^{1/2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Hasolóan kapjuk, hogy

$$\|\sin kx\|_2 = \left(\left\langle \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}, \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right\rangle\right)^{1/2} = \sqrt{\pi},$$

valamint a konstans 1 függvény normája

$$\|1\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Kaptuk tehát a következő eredményt:

**5.9. Állítás.** *Az*

$$S_{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\} \tag{5.6}$$

*függvényrendszer ortonormált rendszer az $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ Hilbert-térben.*

A 4.90. Tétel szerint az $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ tér elemeit az $S_{\mathbb{R}}$ rendszerre vonatkozó Fourier-sorba fejthetjük, és a Fourier-sor konvergál az $L_2$ normában az adott függvényhez. A 4.90. Tétel jelölését használva:

$$f(x) \sim \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f(x), \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f(x), \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}.$$

Ennek megfelelően az $f \in L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *valós trigonometrikus Fourier-során* az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big) \tag{5.7}$$

végtelen sort értjük, ahol az $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ *Fourier-együtthatók* képlete

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots \tag{5.8}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad k = 1, 2, \ldots, n \ldots . \tag{5.9}$$

A 4.90. Tételből rögtön következik az 5.4. Tétel valós Fourier-sorokra vonatkozó alakja.

**5.10. Tétel.** *Legyen $S_{\mathbb{R}}$ az (5.6) képlettel definiált halmazrendszer. Ekkor*

1. *Ha valamely $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvényre*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \, dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

*és*

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*azaz az $f$ függvény összes Fourier-együtthatója nulla, más szóval az $f$ merőleges az $S_{\mathbb{R}}$ halmazra, akkor $f(x) = 0$, m.m. $x \in [-\pi, \pi]$-re.*

2. *Az $f$ függvény Fourier-sora négyzetintegrálban konvergál az $f$ függvényhez, azaz*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx \to 0, \qquad n \to \infty.$$

3. *Parseval-azonosság:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

A Riesz–Fisher-tétel valós Fourier-sorokra vonatkozó alakja:

**5.11. Tétel (Riesz-Fischer tétel).** *Tetszőlegesen előírt $a_0, a_k, b_k$ $(k \geq 1)$ valós számokhoz, amelyekre*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k^2 + b_k^2 \right) < \infty,$$

*van olyan $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvény, hogy $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, b_1, \ldots, b_k, \ldots$ az $f$ függvénynek az $S_{\mathbb{R}}$ rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói.*

Az 5.7. Megjegyzésnek megfelelően egy tetszőleges $[-L, L]$ halmazon értelmezett valós függvénynek értelmezhetjük a Fourier-sorát.

**5.12. Megjegyzés.** Tekintsük a $[-L, L]$ intervallumon értelmezett

$$S_{\mathbb{R},L} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\cos \frac{2\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{2\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \ldots, \frac{\cos \frac{k\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{k\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \ldots \right\}$$

függvényrendszert. Ez maximális ortonormált rendszer lesz az $L_2([-L, L], \mathbb{R})$ Hilbert-térben. Egy $f \in L_2([-L, L], \mathbb{R})$ függvény Fourier-során az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \tag{5.10}$$

végtelen sort értjük, ahol az $a_k, b_k$ Fourier-együtthatók képlete

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} \, dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy valós függvényekre a komplex trigonometrikus Fourier-sor egybeesik a valós trigonometrikus Fourier-sorral.

**5.13. Állítás.** *Legyen $f \in L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Ekkor $f$-nek az $S_\mathbb{C}$ és az $S_\mathbb{R}$ rendszerekre vonatkozó Fourier-sora megegyezik.*

**Bizonyítás:**

Legyen $f \in L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ valós függvény, és legyenek a $c_k, a_k$ és $b_k$ konstansok az (5.5), (5.8) és (5.9) képletekkel definiálva. Ekkor az $f$ komplex Fourier-sora

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \right).$$

Másrészt az Euler-azonosság alapján

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku}\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du$$

és

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{iku}\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du = \overline{c_k},$$

így

$$c_{-k} e^{-ikx} = \overline{c_k}\,\overline{e^{ikx}} = \overline{c_k e^{ikx}}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Ezt felhasználva

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{ikx}} \right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left( c_k e^{ikx} \right).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\left(c_k e^{ikx}\right) &= 2\,\mathrm{Re}\left[\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du \right) (\cos kx + i \sin kx)\right] \\
&= \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du \right) \cos kx + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du \right) \sin kx \\
&= a_k \cos kx + b_k \sin kx,
\end{aligned}$$

továbbá

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Ezért

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

□

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény Fourier-sora *tiszta szinuszos sor*, ha csak szinuszos tagokat tartalmaz, azaz $a_k = 0$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$-re. Ha pedig $f$ Fourier-sora csak koszinuszos tagokat tartalmaz, azaz $b_k = 0$ minden $k = 1, 2, \ldots$-re, akkor azt mondjuk, hogy a Fourier-sor *tiszta koszinuszos sor.*

**5.14. Állítás.** *Legyen $f \in L_2([-L,L],\mathbb{R})$.*

1. *Ha $f$ páratlan függvény, akkor a Fourier-sora tiszta szinuszos sor.*
2. *Ha $f$ páros függvény, akkor a Fourier-sora tiszta koszinuszos sor.*

**Bizonyítás:** 1. Tegyük fel, hogy $f$ páratlan. Ekkor az $f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ függvény is páratlan, ezért

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

2. Ha $f$ páros, akkor az $f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}$ függvény lesz páratlan, ezért

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

□

**5.15. Példa.** Tekintsük a $2\pi$ szerint periodikus $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x) = x, \qquad \text{ha} \quad -\pi \le x < \pi.$$

Fejtsük $f$-et Fourier-sorba!

Vegyük észre, hogy $f$ páratlan függvény, így csak a szinuszos tagok együtthatóit kell kiszámolni:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx.$$

Parciális integrálással kapjuk

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx &= \left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx \\
&= \left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\pi\frac{\cos k\pi}{k} + (-\pi)\frac{\cos(-k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2}\sin k\pi - \frac{1}{k^2}\sin(-k\pi) \\
&= -\frac{2\pi}{k}\cos k\pi.
\end{aligned}$$

Tehát

$$b_k = -\frac{2}{k}\cos k\pi = -\frac{2}{k}(-1)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots ,$$

és így

$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right).$$

□

**5.16. Példa.** Tekintsük most a $2L$ szerint periodikus $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x) = x, \qquad \text{ha} \quad -L \le x < L.$$

Az előző példához hasonló módon végigszámítható, hogy

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = -\frac{2L}{k\pi}(-1)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots ,$$

így

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{L}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{L}}{3} - \frac{\sin\frac{4\pi x}{L}}{4} + \cdots\right).$$

Ezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, hogy definiáljuk a

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor $g$ $2\pi$ szerint periodikus és $g(t) = \frac{L}{\pi}t$, ha $t \in [-\pi, \pi)$, így az előző példából is megkapható a sorfejtés. □

**5.17. Példa.** Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan $2\alpha$ szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) = \sin x, \qquad -\alpha < x < \alpha,$$

ahol $\alpha$ olyan valós szám, amelyre $\alpha > 0$ és $\alpha \neq k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ . Mivel $f$ páratlan függvény, a Fourier-sora csak szinuszos tagokat tartalmaz, amelyek együtthatói $b_k = b_k(\alpha)$ és

$$\begin{aligned}
b_k(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin x \sin\frac{k\pi x}{\alpha}\, dx \\
&= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\Big(\frac{k\pi}{\alpha} - 1\Big)x - \cos\Big(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\Big)x\, dx \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha} - 1\right)x}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)x}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right]_{x=-\alpha}^{x=\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sin(k\pi - \alpha)}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin(k\pi + \alpha)}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sin k\pi \cos\alpha - \cos k\pi \sin\alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin k\pi \cos\alpha + \cos k\pi \sin\alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{(-1)^k \sin\alpha}{1 - \frac{k\pi}{\alpha}} - \frac{(-1)^k \sin\alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right) \\
&= \frac{(-1)^k \sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{k\pi}{\alpha} + 1 - 1 + \frac{k\pi}{\alpha}}{\left(1 - \frac{k\pi}{\alpha}\right)\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)} \\
&= (-1)^k \sin\alpha \frac{2k\pi}{\alpha^2 - (k\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Tehát az $f$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim 2\pi \sin\alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\alpha^2 - (k\pi)^2} \sin kx.$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\alpha \to \pi$. Ekkor $k = 1$-re a L'Hospital-szabályt alkalmazva kapjuk

$$\lim_{\alpha\to\pi} b_1(\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi} \frac{-2\pi \sin\alpha}{\alpha^2 - \pi^2} = \lim_{\alpha\to\pi} \frac{-2\pi\cos\alpha}{2\alpha} = 1,$$

egyébként pedig

$$\lim_{\alpha\to\pi} b_k(\alpha) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots .$$

Tehát a Fourier-sor együtthatói tartanak a $2\pi$ periodikus $\sin x$ függvény Fourier-sorának együtthatóihoz. □

## 5.3. Valós Fourier-sorok pontonkénti konvergenciája

**5.18. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény *szakaszonként folytonosan differenciálható*, ha bármely korlátos $[a, b]$ intervallumon véges sok szakadási pontja van, bármely $x_0$ szakadási pontjában léteznek az

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x), \qquad f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

egyoldali függvényhatárértékek és az

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0}, \qquad f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0}$$

egyoldali deriváltak, továbbá bármely két szakadási pontja közötti nyílt intervallumon folytonosan differenciálható.

Bizonyítás nélkül tekintsük a következő eredményt, amely a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozik.

**5.19. Tétel.** *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható $2L$ szerint periodikus függvény. Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ pontban az $f$ függvény $S_{\mathbb{R},L}$ rendszerre vonatkozó (5.10) Fourier-sora konvergál az*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

*határértékhez. Speciálisan, ha $f$ folytonos az $x$ pontban, akkor a Fourier-sora $x$-ben konvergál az $f(x)$ függvényértékhez.*

Ha egy $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvény Fourier-sorának pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, akkor először periodikusan kiterjesztjük $f$-et $\mathbb{R}$-re, és a kiterjesztett függvényre alkalmazzuk a tételt. Megjegyezzük, hogy a periodikus kiterjesztés csak akkor lehetséges, ha $f(-\pi) = f(\pi)$. Egyébként vagy az $f(-\pi)$ vagy az $f(\pi)$ függvényértéket használjuk a periodikus kiterjesztéshez, azaz a kiterjeszett függvény egy pontben nem egyezik meg az eredeti függvénnyel. Viszont a két függvény Fourier-együtthatói, és így a Fourier-sora is megegyezik.

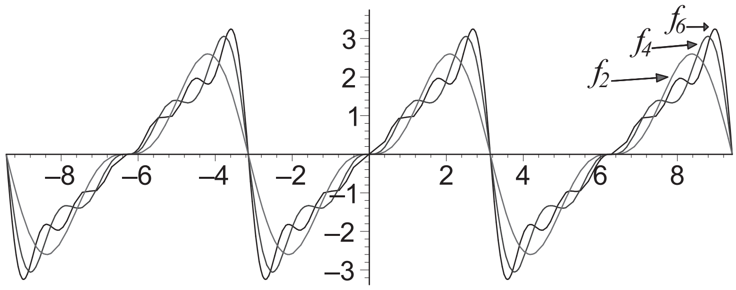
**5.20. Példa.** Tekintsük újra az 5.15. Példában kiszámított Fourier-sort. Az előbbi tételt alkalmazva kapjuk, hogy a Fourier-sor pontonként konvergens, és

$$2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \text{ és } x = \pi. \end{cases}$$

A Fourier-sor $n$-edik részletösszegét jelölje

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots - (-1)^n \frac{\sin nx}{n}\right).$$

A következő ábrán az $f_2, f_4$ és $f_6$ közelítő összegek grafikonja látható. Ebből is érzékelhető a Fourier-sor konvergenciája. □




Az $f_2(x)$, $f_4(x)$ és $f_6(x)$ részletösszegek grafikonja.

A Fourier-sorok egyik legfontosabb alkalmazási területe a parciális differenciálegyenletek elméletében található, ahol bizonyos feladatokat a megoldások Fourier-sorba fejtésével oldunk meg. Az egyik kulcs kérdés a módszer alkalmazásánál, mikor lehet differenciálni a Fourier-sort, ill. a végtelen összeg deriváltját tagonkénti differenciálással kiszámolni. Erre ad választ a következő tétel, amit szintén bizonyítás nélkül közlünk.

**5.21. Tétel.** *Legyen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ folytonos, szakaszonként folytonosan differenciálható, továbbá*

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

*Ekkor az $f$ függvény Fourier-sora abszolút és egyenletesen konvergál a $[-\pi, \pi]$ intervallumon az $f$ függvényhez, azaz*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big),$$

*ahol $a_k, b_k$ az (5.8) és (5.9) képletekkel definiált Fourier-együtthatók. Továbbá, $f'$ Fourier-sorát $f$ Fourier-sorának tagonkénti differenciálásával megkaphatjuk, azaz*

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Big( -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx \Big).$$

*Minden olyan $x$ pontban, ahol $f''(x)$ létezik, az előző reláció egyenlőséggel helyettesíthető.*

Az 5.19. és 5.21. Tételeket nyilvánvaló módon terjeszthetjük ki arra az esetre, amikor az $f$ függvény a $[-L, L]$ szimmetrikus intervallumon definiált.

## 5.4. Tiszta koszinuszos és szinuszos Fourier-sorok

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet Fourier-sorba fejteni egy $[0, L]$ alakú intervallumon definiált függvényt. Egy természetes ötlet erre az, hogy kiterjesztjük a függvényt a $[-L, L]$ intervallumra, és a kiterjesztett függvénynek számítjuk ki a Fourier-sorát. Ekkor az 5.19. Tételben megadott feltételek teljesülése esetében a Fourier-sor konvergál a kiterjeszett függvényhez, ill. $[0, L]$-re leszűkítve a Fourier-sor értelmezési tartományát, az eredeti függvényhez.

Két speciális esetet vizsgálunk: páros ill. páratlan függvényként terjesztjük ki a függvényt.

Tekintsük először a páros kiterjesztés esetét. Legyen $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ adott, és legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-L, 0) \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{f}$ Fourier-sora az 5.14. Állítás szerint tiszta koszinuszos sor, így a Fourier-sorában minden $b_k = 0$. Az $a_k$ Fourier-együtthatókat az

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} \tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx + \int_{0}^{L} \tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx\right)$$

képlettel számíthatjuk ki. Mivel $\tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ két páros függvény szorzata, ezért maga is páros függvény, így a fenti két integrál megegyezik, tehát

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.11}$$

Most tekintsük azt az esetet, hogy páratlan módon terjesztjük ki $f$-et a $[-L, 0]$ intervallumra, azaz legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-L, 0], \\ 0, & x = 0, \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{f}$ páratlan periodikus függvény, ezért a Fourier-sora tiszta szinuszos sor lesz, azaz minden $a_k = 0$. A $b_k$ együtthatókat az előző esethez hasonló levezetéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} \tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx + \int_{0}^{L} \tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx\right) \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Az előző levezetésből rögtön következik az alábbi eredmény. Ha a kiterjeszett függvény páros, akkor annak Fourier-sora tiszta koszinuszos sor lesz,

**5.22. Állítás.** *Az*

$$S_{\cos} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \ldots\}$$

*és az*

$$S_{\sin} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots\}$$

*rendszerek egyaránt teljes ortogonális rendszert alkotnak a* $[0, \pi]$ *intervallumon.*

**5.23. Példa.** Számítsuk ki a $[0, \pi]$ intervallumra megszorított $\sin x$ függvény tiszta koszinuszos sorát, azaz az $S_{\cos}$ függvényrendszerre vonatkozó Fourier-sorát! Az (5.11) képletet és trigonometrikus azonosságokat alkalmazva kapjuk $k \neq 1$-re, hogy

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \cos kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(1+k)x + \sin(1-k)x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+k)x}{1+k} - \frac{\cos(1-k)x}{1-k}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{1+k}-1}{1+k} - \frac{(-1)^{1-k}-1}{1-k}\right) \\ &= \frac{(-1)^k+1}{\pi}\left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k}\right) \\ &= \frac{(-1)^k+1}{\pi} \cdot \frac{2}{1-k^2}. \end{aligned}$$

$k = 1$-re kapjuk

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

Az 5.19. Tétel szerint a Fourier-sor minden pontban konvergál a függvényhez, tehát kapjuk, hogy

$$\sin x = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{2}{1-2^2}\cos 2x + \frac{2}{1-4^2}\cos 4x + \frac{2}{1-6^2}\cos 6x + \cdots\right), \qquad x \in [0, \pi].$$

Megjegyezzük, hogy a $\sin x$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora természetesen önmaga (azaz $b_1 = 1$ és $b_k = 0$ minden $k > 1$-re). □

**5.24. Példa.** Számítsuk ki az $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sorát! Az (5.12) képlet szerint

$$b_k = \frac{2}{5}\int_0^5 \sin\frac{k\pi x}{5}\, dx = \frac{2}{5}\left[-\frac{\cos\frac{k\pi x}{5}}{\frac{k\pi}{5}}\right]_0^5 = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

ezért

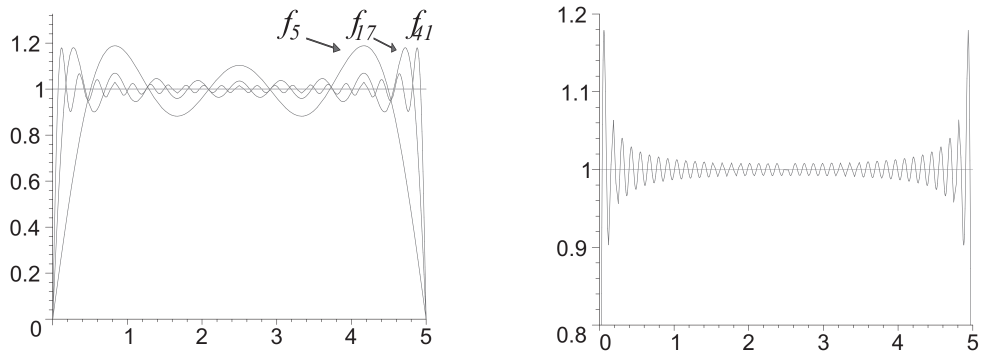
$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{5} + \cdots\right), \qquad x \in (0, 5).$$

$x = 0$ és $x = 5$-re a Fourier-sor összege 0. Ha $x = 5/2$-et helyettesítünk be az előző egyenletbe, akkor kapjuk a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

ú.n., Euler-összefüggést.

Jelölje $f_n$ a Fourier-sor $n$-edik részletösszegét, azaz $f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin\frac{k\pi x}{5}$. A bal oldali ábrán az $f_5(x)$, $f_{17}(x)$ és $f_{41}(x)$ részletösszegek grafikonjai, a jobb oldalin pedig az $f_{81}(x)$ részletösszeg grafikonjának kinagyított része látható.




Az ábra azt igazolja, hogy a részletösszegek $n$ növekedésével egyre jobban közelítik a konstans 1 függvény grafikonját. Viszont ez a határérték nem egyenletes, az intervallum két végpontjához közel a Fourier-sor részletösszegeinek maximuma kb. 1.18 körüli értéket vesz fel. Numerikusan ellenőrizhetjük, hogy ez a maximum $n$ növelésével nem változik, csak azt a részletösszeg függvény egyre közelebb veszi fel az intervallum végpontjához. Hasonló viselkedés figyelhető meg nem folytonos függvények véges Fourier-féle közelítő összegeinél. Ezt a jelenséget *Gibbs-jelenségnek* hívjuk.

Az $f$ függvény tiszta koszinuszos Fourier-sora 1, azaz $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ minden $k = 1, 2, \ldots$-ra. □

## 5.5. Fourier-transzformált és Fourier-integrál

Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, amely nem szükségszerűen periodikus.

Legyen $L > 0$ állandó, $g_L : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ olyan $2L$ periodikus függvény, amelyre $g_L(x) = f(x)$, $-L < x < L$. Írjuk fel $g_L$ komplex Fourier-sorát. A $g_L$ függvény Fourier-együtthatói

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g_L(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt,$$

és ezért

$$g_L(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g_L(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt\right)e^{in\frac{\pi}{L}x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $g_L(x) = f(x)$ ha $-L < x < L$, így az 5.19. Tétel szerint

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt\right)e^{in\frac{\pi}{L}x}, \qquad x \in (-L, L)\,.$$

Legyen

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Ekkor $\Delta\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$. Ezzel a jelöléssel az előbbi egyenlet az

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\lambda_n t}\,dt\right)e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n, \qquad x \in (-L, L)$$

alakban írható fel. Ez minden $L$-re teljesül, ezért

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\lambda_n t}\,dt\right)e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Definiáljuk az

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \tag{5.14}$$

függvényt, amelyet az $f$ függvény *Fourier-transzformáltjának* vagy *komplex Fourier-integráljának* nevezünk. Ezzel a jelöléssel kapjuk az (5.13) egyenletből, formálisan először a zárójelen belül elvégezve a határátmenetet, hogy

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\lambda_n)e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A jobb oldali összeg egy improprius integrál Riemann-féle közelítő összege, ahol a $\{\lambda_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ osztópontokat használjuk a számegyenes felosztásához, így kapjuk, hogy

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.15}$$

Az (5.14) és (5.15) képletet együtt a *Fourier-féle inverziós formuláknak* nevezzük.

Hangsúlyozni kell, hogy a fenti levezetés csak formális számolás volt. A képletek precízen is levezethetők a következő feltétel mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Azon $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvények lineáris terét, amelyek abszolút értéke az egész számegyenesen végesen Lebesgue-integrálható, azaz amelyekre a fenti egyenlőtlenség teljesül, $L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$-vel jelöljük. Ezzel a jelöléssel a következőképpen foglalhatjuk össze az eredményünket.

**5.25. Tétel.** *Legyen $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ szakaszonkén folytonosan differenciálható függvény. Ekkor érvényes az ún.* Fourier-féle integrálformula*:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda=\frac{f(x-)+f(x+)}{2},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor az $f$ valós függvény, azaz $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ekkor a Fourier-féle integrálformulán a következő átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda\\ &\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt\right)d\lambda\\ &\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt\right)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt\right)d\lambda.\end{aligned}$$

Használva az $u=-\lambda$ ($du=-d\lambda$) helyettesítést az első integrálban, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda\\ &\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iu(x-t)}\,dt\right)du+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt\right)d\lambda\\ &\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(e^{-i\lambda(x-t)}+e^{i\lambda(x-t)}\right)dt\right)d\lambda.\end{aligned}$$

Mivel $e^{-i\lambda(x-t)}+e^{i\lambda(x-t)}=2\cos\lambda(x-t)$, $f$ valós függvény, ezért

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt\right)d\lambda.$$

Ez a valós *Fourier-féle integrálformula.* A jobb oldalon álló integrálban a cos függvényt kifejtve kapjuk a következő állítást.

**5.26. Következmény.** *Legyen $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ szakaszonkén folytonosan differenciálható függvény. Ekkor*

$$\int_{0}^{\infty}\Big(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\Big)d\lambda=\frac{f(x+)+f(x-)}{2},\qquad x\in\mathbb{R},\tag{5.16}$$

*ahol*

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt\qquad\textit{és}\qquad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt.\tag{5.17}$$

Az (5.16) egyenlet bal oldalán álló integrált *valós Fourier-integrálnak* nevezzük.

**5.27. Példa.** Írjuk fel az

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\begin{cases} -3, & x\in[-2,0],\\ 5, & x\in(0,4],\\ 0, & x<-2 \text{ vagy } x>4. \end{cases}$$

függvény Fourier-integrálját!

Az (5.17) képletek szerint

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-2}^{0} -3\cos\lambda t\,dt + \int_0^4 5\cos\lambda t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-3\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right]_{-2}^{0} + \left[5\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right]_0^4\right) \\ &= \frac{-3\sin 2\lambda + 5\sin 4\lambda}{\pi\lambda}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $A(\lambda)$ folytonosan kiterjeszthető $\lambda=0$-ra is, hiszen létezik a

$$\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{-3\sin 2\lambda}{\pi\lambda} + \frac{5\sin 4\lambda}{\pi\lambda}\right) = \frac{-6+20}{\pi} = \frac{14}{\pi}$$

határérték. $B(\lambda)$ hasonlóan számítható:

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-2}^{0} -3\sin\lambda t\,dt + \int_0^4 5\sin\lambda t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[3\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right]_{-2}^{0} + \left[-5\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right]_0^4\right) \\ &= \frac{8-3\cos 2\lambda - 5\cos 4\lambda}{\pi\lambda}. \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy $\lim_{\lambda\to 0} B(\lambda)=0$. Az 5.26. Következmény szerint

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{-3\sin 2\lambda + 5\sin 4\lambda}{\pi\lambda}\cos\lambda x + \frac{8-3\cos 2\lambda - 5\cos 4\lambda}{\pi\lambda}\sin\lambda x\right)d\lambda = \begin{cases} 0, & x<-2,\\ -3/2, & x=-2,\\ -3, & x\in(-2,0),\\ 1, & x=0,\\ 5, & x\in(0,4),\\ 5/2, & x=4,\\ 0, & x>4. \end{cases}$$

□

Az $f$ függvény Fourier-transzformáltjára használjuk az $\mathcal{F}(f)(\lambda)=F(\lambda)$ jelölést is. A következő tételben összefoglaljuk a Fourier-transzformált néhány fontosabb tulajdonságát.

**5.28. Tétel.** *Legyen $f,g\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ és $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Ekkor*

1. $\mathcal{F}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathcal{F}(f)+\beta\mathcal{F}(g)$.
2. *Ha $f$ differenciálható és $f'\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, akkor* $\mathcal{F}(f')(\lambda)=i\lambda\mathcal{F}(f)(\lambda)$.
3. $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$, *ahol*

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

*az $f$ és $g$ konvolúciója.*

## 5.6. Alkalmazások

*Parciális differenciálegyenletek*

A Fourier-sorok egyik legfontosabb alkalmazási területe bizonyos speciális parciális differenciálegyenletek egyik megoldásánál jelentkezik.

Tekintsük az egydimenziós hővezetés egyenletét. Tekintünk egy $L$ hosszú rudat, amelyről feltesszük, hogy vékony, azaz a hőmérsékletét azonosnak tekinthetjük egy hosszára merőleges keresztmetszetén. Jelölje $x$ a rúd egyik végpontjától mért távolságot a rúdon. Ekkor $0 \le x \le L$, és az $x$ pozícióban vett keresztmetszet hőmérsékletét a $t$ időpontban $u(t,x)$ jelöli. Megmutatható, hogy az $u$ kétváltozós függvény az alábbi másodrendű lineáris, ú.n. parabolikus parciális differenciálegyenletet teljesíti:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \qquad t \ge 0, \quad 0 \le x \le L, \tag{5.18}$$

ahol $a > 0$ konstans. Ezt az egyenletet egydimenziós hővezetési egyenletnek hívjuk. Ahhoz, hogy egyértelmű megoldást várhassunk, további feltételeket kell megadnunk. Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor a rúd két végpontján konstans 0 hőmérsékletet tartunk fenn, azaz az alábbi, ú.n. peremfeltételek teljesülnek a megfigyelés során:

$$u(t,0) = 0, \qquad t \ge 0, \tag{5.19}$$

$$u(t,L) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{5.20}$$

Feltesszük továbbá azt is, hogy ismerjük a kezdeti hőmérséklet elosztást:

$$u(0,t) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{5.21}$$

Fourier ötlete az volt, hogy keressünk

$$u(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$$

alakú megoldásait az (5.18) egyenletnek. Ekkor az egyenletbe behelyettesítve kapjuk

$$\varphi'(t)\psi(x) = a\varphi(t)\psi''(x),$$

amiből

$$\frac{\varphi'(t)}{a\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

Ez csak úgy teljesülhet minden $t$ és $x$-re, ha

$$\frac{\varphi'(t)}{a\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \mu,$$

ahol $\mu$ egy konstans. De ekkor két közönséges differenciálegyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a\mu\varphi(t), \qquad t \ge 0, \\ \psi''(x) &= \mu\psi(x), \qquad 0 \le x \le L. \end{aligned}$$

Könnyen végigszámolhatjuk, hogy az első egyenlet általános megoldása

$$\varphi(t) = ce^{a\mu t}, \qquad t \ge 0. \tag{5.22}$$

A második egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$r^2 = \mu.$$

Három esetet különböztetünk meg:

1. $\mu > 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei $r_1 = \sqrt{\mu}$ és $r_2 = -\sqrt{\mu}$, és a lineáris közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ekkor az egyenlet általános megoldása

$$\psi(x) = c_1 e^{\sqrt{\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Az (5.19) és (5.20) peremfeltételekből kapjuk, hogy a $\psi$ függvényre a

$$\psi(0) = 0 = \psi(L) \tag{5.23}$$

feltételek teljesülnek. Ezeket a feltételeket használva a fenti $\psi$ függvényre, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\mu}L} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}L} &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása csak a $c_1 = c_2 = 0$. Mivel mi nem azonosan 0 megoldást keresünk, ebben az esetben ilyen megoldás nem létezik.

2. $\mu = 0$. Ekkor $\psi(x) = c_1 + c_2 x$ alakú. De ekkor az (5.23) feltételeket felhasználva

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2 L &= 0, \end{aligned}$$

amiből szintén csak $c_1 = c_2 = 0$ következik, azaz a $\psi(x) = 0$ függvény.

3. $\mu < 0$. Ekkor $\psi(x) = c_1 \cos\sqrt{-\mu}x + c_2 \sin\sqrt{-\mu}x$ alakú, ahogy azt a közönséges differenciálegyenletek elméletében kapjuk. Most az (5.23) feltételeket felhasználva

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 \cos\sqrt{-\mu}L + c_2 \sin\sqrt{-\mu}L &= 0, \end{aligned}$$

adódik. De ekkor $c_1 = 0$, és ha nem azonosan 0 megoldást keresünk, akkor a második egyenletből $\sin\sqrt{-\mu}L = 0$ kövezkezik, amiből $\sqrt{-\mu}L = k\pi$, azaz

$$\mu = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Ebben az esetben tehát nem azonosan 0 megoldást is kapunk, amelyre tehát az (5.22) képletet felhasználva

$$u(t,x) = ce^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{L}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ilyen alakú függvények véges összege, azaz

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{L}$$

is teljesíti az (5.18) egyenletet és az (5.19)-(5.20) peremfeltételeket is. Ekkor

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{L},$$

azaz akkor teljesül a kezdeti feltétel is, ha

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{L}$$

alakú. Ez alapján természetes ötlet az, hogy ha $f$ olyan tetszőleges folytonos függvény, amelyre $f(0) = 0 = f(L)$ teljesül, akkor vegyük $f$ tiszta szinuszos Fourier-sorát:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L},$$

ahol az 5.19 tétel szerint a Fourier-sor minden $x \in [0, L]$-re konvergál és elő is állítja az $f(x)$ függvényértéket, és az így kapott $b_k$ együtthatókkal definiáljuk az

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{L}$$

végtelen sort. Megmutatható, hogy az $u$ függvény jól definiált, és a végtelen sor differenciálható $t$ és $x$ szerint is, és a deriválás művelete és a végtelen szumma felcserélhető. Ekkor könnyen megmutatható, hogy $u$ is teljesíti az (5.18) egyenletet, és a perem- illetve a kezdeti feltételeket is.

*Mintavételi tétel*

Tegyük fel, hogy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény Fourier-transzformáltja a $[-L, L]$ intervallumon kívül azonosan nulla, azaz

$$F(\lambda) = 0, \qquad |\lambda| > L. \tag{5.24}$$

**5.29. Tétel (Mintavételi tétel).** *Tegyük fel, hogy $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, amelyre (5.24) teljesül. Ekkor $f$-et meghatározzák a*

$$0, \pm\frac{\pi}{L}, \pm\frac{2\pi}{L}, \dots$$

*pontokban felvett értékei:*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}, \qquad x \neq \frac{n\pi}{L},\ (n \in \mathbb{Z}).$$

**Bizonyítás:** A Fourier-féle inverziós formulát és az (5.24) feltételt alkalmazva

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.25}$$

Az $F(\lambda)$ függvény a $(-L, L)$ intervallumon felírható Fourier-sora összegeként:

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi\lambda}{L}}, \qquad \lambda \in (-L, L),$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} F(\lambda) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}}\, d\lambda.$$

Az (5.25) összefüggést alkalmazva kapjuk, hogy

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right).$$

Ezt visszahelyettesítve $F$ Fourier-sorába kapjuk

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right) e^{i\frac{n\pi\lambda}{L}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}}. \end{aligned}$$

Ezért az (5.25) formula szerint $x \neq \frac{n\pi}{L}$-re

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}} e^{i\lambda x}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \int_{-L}^{L} e^{i\lambda\left(-\frac{n\pi}{L}+x\right)}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{e^{i(Lx-n\pi)} - e^{-i(Lx-n\pi)}}{i(xL-n\pi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lx-n\pi)}{xL-n\pi}. \end{aligned}$$

$\square$