

Elektromágneses terek alapjai (VIHVAC03) B csoport 2017. november 7. Nagypéldák. (Az egyes nagypéldákat külön lapokon, *áttekinthetően* dolgozza ki.)

1. példa. Levegőben áll egy $a = 8$ cm sugarú, $Q_a = 10$ nC töltésű, illetve egy $b = 12$ cm sugarú, $Q_b = -10$ nC töltésű fémgömb. A gömbök középpontja egymástól $h = 110$ cm távolságban van.

a) Az elrendezés mely pontjában a legnagyobb a felületi töltéssűrűség nagysága, és mekkora ez az érték? (3 pont)

Az a sugarú gömb felszínén, a másik gömbhöz legközelebbi pontban, a kis sugarú közelítés alkalmazásával: (1 p)

$$\sigma_{\max} = D_{\max} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{Q_a}{a^2} - \frac{Q_b}{h^2} \right] = 124 \text{ nC/m}^2 \quad (2 \text{ p})$$

b) Határozza meg a gömbök közötti feszültséget. (3 pont)

A szuperpozíció ill. a helyettesítő ponttöltések potenciálformulája alapján: (1 p)

$$U_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[Q_a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{h} \right) + Q_b \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{b} \right) \right] = 1,71 \text{ kV} \quad (2 \text{ p})$$

c) Határozza meg a gömbök közötti kapacitást. (2 pont)

A b) pont eredménye alapján:

$$C_{ab} = \frac{Q_a}{U_{ab}} = 5,85 \text{ pF} \quad (2 \text{ p})$$

d) Mekkora erő hat arra a $Q_0 = 20$ pC nagyságú ponttöltésre, amelyet a gömbök középpontjait összekötő szakasz felezőpontjában helyezünk el? (2 pont)

A térerősség nagysága itt:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_a}{(h/2)^2} - \frac{Q_b}{(h/2)^2} \right] = 594 \text{ V/m}, \quad (1 \text{ p})$$

ezzel az erő: $F = Q_0 E = 11,9 \text{ nN} \quad (1 \text{ p})$

IMSc kérdések:

e) Egy $Q' = 6$ nC ponttöltést az az a sugarú gömb középpontjától $a + d$ távolságban helyezzük el, ahol $d = 0,01a$. Becsülje meg ekkor a ponttöltésre ható erőt. [3 pont]

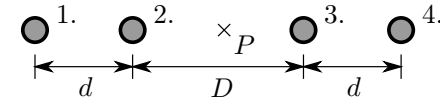
Csak a „tükörtöltés” számít, mert $d \ll a \ll h$, és a Q_a, Q_b és Q' töltések nagyságrendje azonos:: (1 p)

$$F \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'^2}{(2d)^2} = 126 \text{ mN} \quad (2 \text{ p})$$

f) Mekkora munka árán lehet a gömbök közötti feszültséget kétszeresére növelni? (Akkor, ha az e) pont szerinti Q' nincs jelen.) [2 pont]

$$\Delta W = \frac{C_{ab}}{2} [(2U_{ab})^2 - U_{ab}^2] = 25,6 \mu\text{J} \quad (2 \text{ p})$$

2. példa. A papír síkjára merőlegesen futnak az ábrán vázolt párhuzamos, igen hosszú vezetők. A közeg levegő, a vezetők anyaga nem ferromágneses. A távolságok $d = 8$ cm ill. $D = 20$ cm, és minden vezető sugara $a = 4$ mm. Az 1-3. és 2-4. vezetők kettősvezetéseket alkotnak: az 1. vezetőkben I_1 áram folyik befelé (a papír síkja mögé), a 3.-ban ugyanennyi kifelé, a 2. vezetőkben I_2 áram folyik befelé és a 4.-ben ugyanennyi kifelé.



a) Mekkora a mágneses térerősség nagysága a P pontban (amely a vezetők síkjában, a 2. és 3. vezetőkől azonos távolságban van), ha $I_1 = 3$ A és $I_2 = 0$? (2 pont)

A P pontban az egyes vezetők függőleges mágneses térerősség vektorokat keltenek. (1 p)

$$H(P) = \frac{I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{D/2} + \frac{1}{d + D/2} \right) = 7,43 \text{ A/m} \quad (1 \text{ p})$$

b) Határozza meg az I_1 áramú kettősvezeték hosszegységre eső külső öninduktivitását. (4 pont)

Ld. Példatár 4.9 példa. **B** helyfüggvénye: (2 p)

A fluxus kifejezése integrálással: (1 p)

A végeredmény: $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d + D - a}{a} = 1,69 \mu\text{H/m} \quad (1 \text{ p})$

(Használható az $L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d + D}{a} = 1,70 \mu\text{H/m}$ közelítés is.)

c) Határozza meg az I_1 és I_2 áramú kettősvezeték közötti hosszegységre eső kölcsönös induktivitást. (4 pont)

Legyen $I_2 = 0$. Φ'_2 referenciairánya lefelé mutat. Ki kell fejezni Φ'_2 -t I_1 -gyel. (1 p)

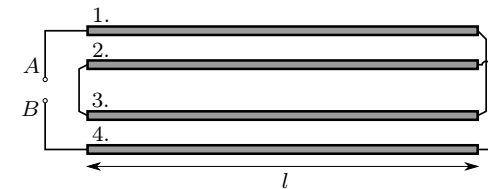
(Megj.: az integrálási határokból nyugodtan elhagyható $\pm a$ a d -t és D -t tartalmazó kifejezésekben, mert $a \ll d, D$.)

$$\Phi'_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\ln \frac{2d + D}{d} + \ln \frac{D}{d} \right) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{D(2d + D)}{d^2} \quad (2 \text{ p})$$

$$L'_{21} = M' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D(2d + D)}{d^2} = 484 \text{ nH/m} \quad (1 \text{ p})$$

IMSc kérdés:

d) Mekkora az AB kapcsok között mérhető induktivitás, ha a fenti vezetők közül egy $l = 12$ m hosszú elrendezést állítunk össze az ábrán vázolt kapcsolással? [3 pont]



$$u_{AB} = u_{13} + u_{24} = l \left(L' \frac{di_1}{dt} + M' \frac{di_1}{dt} + M' \frac{di_1}{dt} + L' \frac{di_1}{dt} \right) \quad (2 \text{ p})$$

$$L_{AB} = 2l(L' + M') = 52,3 \mu\text{H} \quad (1 \text{ p})$$

(Megj.: az indukált feszültség helyett természetesen lehet a fluxusokkal is számolni.)

Kis példák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

1. Egy a sugarú gömbön belül a töltéssűrűség kezdetben konstans ρ_0 értékű. A töltéssűrűség Δt idő alatt egyenletesen a felére csökken. Határozza meg eközben a gömb felszínén a normális irányú térfogati áramsűrűség nagyságát, feltéve hogy ez a felszín minden pontjában azonos.

$$J = \frac{\rho_0 a}{6\Delta t}$$

2. A mágneses indukció a térben homogén eloszlású, időfüggvénye pedig a $[-3, 3]$ s intervallumban $\mathbf{B}(t) = \hat{\mathbf{e}}_x(1,2 + 0,5t)$ T (az idő egysége s). Határozza meg az $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l}$ integrál abszolútértékét a $t = 1$ s pillanatban, ha az L görbe egy az yz síkban fekvő 2 cm sugarú kör.

$$|\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l}| = 628 \mu\text{V}$$

3. Egy 8 cm sugarú gömb alakú földelő elektróda középpontja 60 cm mélyen van a földfelszín alatt. A föld fajlagos vezetőképessége 0,6 S/m. Adja meg az elektróda és a végtelen távoli pont közötti feszültséget, ha az elektródába 6 A egyenáramot vezetünk.

$$U = 10,6 \text{ V}$$

4. Egy pontban az elektromos térerősség $\mathbf{E} = (4\hat{\mathbf{e}}_y + 3\hat{\mathbf{e}}_z)$ V/m, a polarizáció vektora pedig $\mathbf{P} = 6\hat{\mathbf{e}}_z$ pC/m². Adja meg ebben a pontban az elektromos eltolás vektorának nagyságát.

$$|\mathbf{D}| = 48,1 \text{ pC/m}^2$$

5. Egy két elektródából és a földből álló rendszerben a részkapacitások $C_{10} = C_{20} = 90$ pF, $C_{12} = 20$ pF. Az elektródák töltés rendje $Q_1 = 2$ nC és $Q_2 = 4$ nC. Számítsa ki a 2. elektróda potenciálját, ha a föld potenciálja 0.

$$\Phi_2 = 41,0 \text{ V}$$

6. **IMSc** **kis példa** [2 pont]: Egy l hosszúságú, vékony, egyenes rúdon a vonalmenti töltéssűrűség $q(x) = q_0(x/l)^3$, ahol az x koordináta tengely a rúdra illeszkedik és $x = 0$ a rúd közepe. Ha a rudat homogén elektromos mezőbe helyezzük, akkor az arra ható forgatónyomaték megegyezik egy \mathbf{p} momentumú elektrosztatikus dipólusra ható forgatónyomatékkal. Adja meg a \mathbf{p} vektort.

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{q_0 l^2}{80}$$

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés: $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, $E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

- Végtelen egyenes vonaltöltés: $\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$, $E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$

- Végtelen egyenes vonaláram: $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Konstansok: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$