Elektromágneses terek alapjai (VIHVAC03) $\boxed{\text{A}}$ **2023. november 14.**

Nagypéldák. (Az egyes nagypéldákat külön lapokon, *áttekinthetően* dolgozza ki.)

1. példa. Egy igen nagy kiterjedésű, földelt fémsík felett egy $a = 5\,\mathrm{cm}$ sugarú fémgömb helyezkedik el a levegőben. A gömb középpontja a síktól $h = 1\,\mathrm{m}$ távolságban van. A gömb töltése $Q = 3\,\mathrm{nC}$.

a) Határozza meg a gömb és a fémsík közötti kapacitást. *(3 pont)*

A kis sugarú közelítés alkalmazható. A ponttöltések potenciálfüggvényéből a gömb potenciálja:

$\Phi_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2h}\right) = 526\,\mathrm{V}$ (2 p)

(ha $1/a - 1/(2h)$ helyett csak $1/a$-val számol, akkor a $h \gg a$ indoklás esetén 1 pont adható)

$C = \dfrac{Q}{\Phi_1 - 0} = 5{,}70\,\mathrm{pF}$ (1 p)

(A kapacitás közvetlenül, Φ_1 ismerete nélkül is számítható.)

b) Adja meg a felületi töltéssűrűséget a fémsík gömbhöz legközelebbi pontjában. *(2 pont)*

$\sigma = D_n = -2\dfrac{Q}{4\pi h^2} = -477\,\dfrac{\mathrm{pC}}{\mathrm{m}^2}$ (2 p)

c) Tekintsen egy l görbét, amely a gömb felszínén indul és egy olyan pontban végződik, amely a gömb középpontjától és a fémsíktól egyaránt h távolságban van. Számítsa ki $\int\limits_l \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l}$ értékét. *(3 pont)*

Az integrál feszültséget jelent, amely potenciálkülönbségként számítható:

$\Phi_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{\sqrt{5}h}\right) = 14{,}9\,\mathrm{V}$ (2 p)

$U = \Phi_1 - \Phi_2 = 511\,\mathrm{V}$ (Φ_1 az a) pontból) (1 p)

d) Mekkora elektrosztatikus erő hat a gömbre? *(2 pont)*

$F = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2h)^2} = 20{,}23\,\mathrm{nN}$ (2 p)

2. példa. Az ábrán látható rétegezett gömbkondenzátor méretei: $R_1 = 1{,}5\,\mathrm{mm}$, $R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm}$, $R_3 = 5{,}5\,\mathrm{mm}$. A belső és külső szigetelőrétegek dielektromos állandója $\varepsilon_{r1} = 3{,}3$ illetve $\varepsilon_{r2} = 2{,}25$. A kondenzátorra feszültséget kapcsolva, a belső elektróda töltése $Q = 831\,\mathrm{pC}$, míg a külsőé $-Q$.

a) Adja meg a potenciál értékét a középponttól R_1 illetve R_2 távolságban, amennyiben $\phi(R_3) = 0$. *(4 pont)*

A potenciálértékek a határátmeneteken:

$\Phi_1 = \Phi(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_3} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r,$

$\Phi_2 = \Phi(R_2) = \int_{R_2}^{R_3} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r,$

$\Phi_3 = \Phi(R_3) = 0\,\mathrm{V}.$ (2 p)

Az integrálás elvégzése után:

$\Phi_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right)\right] = 1{,}2\,\mathrm{kV},$

$\Phi_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right) = 344{,}95\,\mathrm{V}.$ (2 p)

b) Vázolja fel a potenciál menetét a sugár függvényében az $R_1 < r < R_3$ tartományban. *(2 pont)*

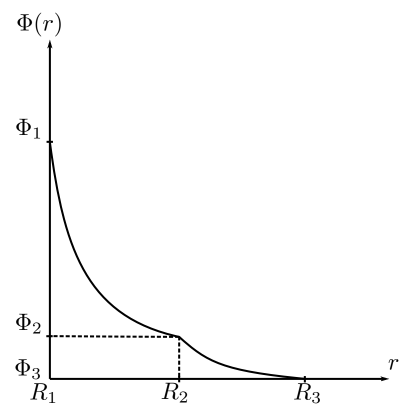
A potenciál helyfüggésének számítása az előző feladat alapján:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \int_r^{R_2} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_3} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r & R_1 < r < R_2, \\ \int_r^{R_3} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r & R_2 < r < R_3. \end{cases}$$

Az integrálás elvégzése után:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right)\right] & R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_3}\right) & R_2 < r < R_3. \end{cases}$$ (1 p)

Kvalitatíve helyes ábra. (1 p)



c) Határozza meg a kondenzátor kapacitását! (*1 pont*)

$C = \dfrac{Q}{\Phi_1} = 0{,}69\,\mathrm{pF}$ (1 p)

d) Hol lép fel a maximális térerősség a szigetelő közegben, és mekkora az értéke? (*3 pont*)

Az R_1 sugarú fegyverzeten fog fellépni a maximális térerősség, melynek értéke: (1 p)
$E_{\max} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{1}{R_1^2} = 1\,\dfrac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}.$ (2 p)

Kispéldák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a *részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon* mellékelje.)
A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. Elektrosztatikus térben, homogén térfogati töltéssűrűséggel ellátott, $\varepsilon = 2{,}25$ permittivitású szigetelő közegben a skalárpotenciál kifejezése V és m egységekben kifejezve $\phi(x) = -6x^2$. Határozza meg a térfogati töltéssűrűséget!

$$\rho = -\varepsilon\Delta\Phi = 239\,\frac{\mathrm{pC}}{\mathrm{m}^3}$$

2. Légtöltésű síkkondenzátor fegyverzeteinek felszíne $0{,}5\,\mathrm{m}^2$. A lemezek között az elektromos térerősség lineárisan nő 5 kV/m-ről 15 kV/m értékre, 2,5 s idő alatt. Mekkora áram folyik eközben a fegyverzetek hozzávezetésein?

$$I = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}A = 17{,}7\,\mathrm{nA}$$

3. Egy villámáram-levezető és egy vezető hurok kölcsönös induktivitása $L_{12} = 25\,\mathrm{nH}$. A villámáram lineáris felfutású, 1 μs alatt 0-ról 10^5 A értékre emelkedik. Mekkora feszültség indukálódik eközben a hurokban?

$$|U_i| = L_{12}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 2{,}5\,\mathrm{kV}$$

4. Két csatolt tekercs öninduktivitása $L_1 = L_2 = 50\,\mathrm{mH}$, kölcsönös induktivitásuk $M = 12\,\mathrm{mH}$. Kezdetben mindkét tekercs árama $I_1 = I_2 = 2\,\mathrm{A}$. Mennyivel nő a tekercsrendszerben tárolt mágneses energia, ha az egyik tekercs áramát 3 A-re növeljük?

$$\Delta W = \Delta\left\{\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2\right\} = 149\,\mathrm{mJ}$$

5. Egy $l = 1\,\mathrm{m}$ hosszú koaxiális kábel ere sugarának és köpenye belső sugarának a különbsége $d = 1\,\mathrm{cm}$. Alkalmazható-e elektrosztatikus modell a hosszegységre eső kapacitás számítására, ha a kábelt 2,4 GHz-en szeretnénk használni? Válaszát indokolja!

Igen, mert $d \ll \lambda$, ahol $\lambda = c/f$