1. feladat (16 pont)
Számolja ki a következő egyenlet (komplex) megoldásait!

$$z^4 - (2-3i)z^3 - 6iz^2 = 0$$

Mo. $z^4 - (2-3i)z^3 - 6iz^2 = z^2(z^2 - (2-3i)z - 6i) = 0$ **(4p)** , ha $z = 0$ **(1p)** , vagy
$z = \dfrac{2-3i+\sqrt{(2-3i)^2+24i}}{2} = \dfrac{2-3i+\sqrt{(2+3i)^2}}{2} = \dfrac{2-3i\pm(2+3i)}{2}$, **(8p)**
tehát ha $z = 2$ vagy $z = -3i$. **(3p)**

---

2. feladat (10+10+10=30 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{7^n+5^n}{n^3+2}}, \qquad b_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+4}\right)^{3n^2}, \qquad c_n = \sqrt{n^3-5n-3} - \sqrt{n^3-2n+6}$$

Mo. A rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{7^n+5^n}{n^3+2}} = 7$ **(2p)** , mert

$$7 \overset{\textbf{(1p)}}{\leftarrow} \frac{7}{\sqrt[n]{3}\,(\sqrt[n]{n})^3} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \sqrt[n]{\frac{7^n}{3n^3}} \overset{\textbf{(2p)}}{\le} \sqrt[n]{\frac{7^n+5^n}{n^3+2}} \overset{\textbf{(2p)}}{\le} \sqrt[n]{\frac{2\cdot 7^n}{n^3}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{7\sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^3} \overset{\textbf{(1p)}}{\to} 7$$

$$b_n = \left(\frac{\left(1-\frac{3}{2n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{4}{2n^2}\right)^{n^2}}\right)^3 \to \left(\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{4}{2}}}\right)^3 = e^{-\frac{21}{2}} \ \textbf{(5+4+1p)}$$

$$c_n \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{n^3-5n-3-(n^3-2n+6)}{\sqrt{n^3-5n-3}+\sqrt{n^3-2n+6}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{-3n-9}{\sqrt{n^3-5n-3}+\sqrt{n^3-2n+6}} \overset{\textbf{(3p)}}{=}$$

$$= \frac{n}{n^{3/2}} \cdot \frac{-3-\frac{9}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n^3}}} \overset{\textbf{(2p)}}{\to} 0.$$

---

3. feladat (16 pont)
Adja meg az $a_n = \left(\dfrac{n+(-1)^n}{n+2}\right)^{n+3}$ sorozat torlódásai pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

Mo. Páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3 \to \frac{1}{e}, \qquad \textbf{(6p)}$$

páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+3} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^3 \to \frac{1}{e^3}, \qquad \textbf{(5p)}$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}\right\}$ **(2p)** , $\limsup a_n = \dfrac{1}{e}$ **(1p)** , $\liminf a_n = \dfrac{1}{e^3}$ **(1p)** , és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens **(1p)** .

---

4. feladat (5+11=16 pont)
a) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{5x-2}{2x+7} = -4$!

Mo. *a*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{5x-2}{2x+7} + 4\right| = \frac{|5x-2+8x+28|}{|2x+7|} = 13\frac{|x+2|}{|2x+7|} \qquad \textbf{(3p)}$$

A további becsléshez felhasználjuk, hogy x a -2 közelében van. Ha például $|x+2| < 1$, akkor $-3 < x < -1$, és $1 < 2x+7 < 5$. **(3p)** Tehát

$$13\frac{|x+2|}{|2x+7|} \leq 13|x+2| < \varepsilon, \qquad \textbf{(2p)}$$

ha $|x+2| < \frac{1}{13}\varepsilon$ **(1p)** , így $\delta(\varepsilon) = \min\left(1, \frac{1}{13}\varepsilon\right)$. **(2p)**

---

5. feladat (22 pont)
Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+2)}{x^2-2x-8}, & \text{ha } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{3x^2}{x-5}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x = -2$, $x = 5$ pontban van, valamint az $x = 0$ pontban lehet szakadása, máshol mindenütt folytonos. **(4p)** ($x = 4$ esetén nincs baj, hiszen máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = \lim_{x\to -2\pm} \frac{\sin(x+2)}{(x+2)} \cdot \frac{1}{x-4} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right), \mathbf{(4p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 5\pm} f(x) = \lim_{x\to 5\pm} \frac{3x^2}{x-5} = \pm\infty, \mathbf{(4p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \frac{-\sin 2}{8} \neq 0 = \frac{3\cdot 0^2}{0-5} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x^2}{x-5}, \mathbf{(4p)}$$

így az $x = 0$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)
Legyen

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}.$$

Határoza meg az így definiált rekurzív sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Vizsgálja külön a páros és páratlan indexű részsorozatot!)

Mo.

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}} = +2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{a_n} \qquad \mathbf{(2p)}$$

Az $A = 2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{A}$ egyenlet megoldásai: $A_0 = 0$, $A_\pm = \pm 2^{-\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(3p)** .

Annak észrevétele, hogy a_{2n} monoton csökkenő módon tart A_+-hoz: **(2p)** .

Annak észrevétele, hogy a_{2n+1} monoton növő módon tart A_--hoz: **(2p)** .

Így a torlódási pontok halmaza: $S = \{A_+, A_-\}$ **(1p)** .
